離散最適化基礎論 (2026 年後学期)

エクスパンダ

第 3 回
グラフの等周定数とエクスパンダ

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 10 月 20 日

最終更新：2026 年 10 月 21 日　08:11

スケジュール (前半)

1. グラフ理論速習 (10/6)
2. グラフのスペクトル (10/13)
3. **グラフの等周定数とエクスパンダ** (10/20)
 * 休み (海外出張) (10/27)
 * 休み (祝日) (11/3)
4. グラフの等周定数と直径 (11/10)
5. グラフの等周定数とランダムウォーク (11/17)
6. Cheeger の不等式 (11/24)

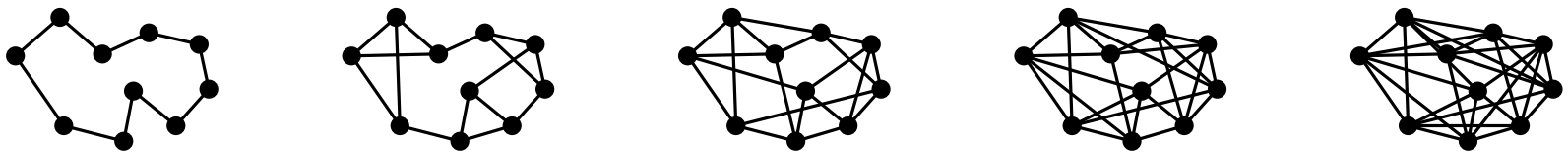
スケジュール (後半)

∗	休み (秋ターム試験)	(12/1)
7.	Alon-Boppana の定理：第 1 の証明	(12/8)
8.	Alon-Boppana の定理：第 2 の証明	(12/15)
9.	ジグザグ積：定義	(12/22)
∗	休み (冬季休業)	(12/29)
10.	ジグザグ積：証明	(1/5)
11.	エクスパンダの構成	(1/12)
12.	リフト：定義	(1/19)
13.	リフト：性質の紹介	(1/26)
∗	休み (修論発表会)	(2/2)
∗	期末試験	(2/9 仮)

(復習) エクスパンダ：直感

辺の数

小さい　　大きい



引っ張ったとき

伸ばしやすい ???　　伸ばしにくい ???

疑問

次を満たすグラフは存在するか？

- 辺の数が 小さい
- 引っ張ったときに 伸ばしにくい

(復習) エクスパンダ：非形式

定義 (きわめて非形式)：エクスパンダ

エクスパンダ (expander) とは次を満たすグラフ

- 辺の数が小さい
- 引っ張ったときに伸ばしにくい

この半年で行うこと

- エクスパンダの正確な定義を与える
- エクスパンダの性質を調査する
- エクスパンダの存在を探る

今日の目標

今日の目標

エクスパンダの定義を与える

流れ

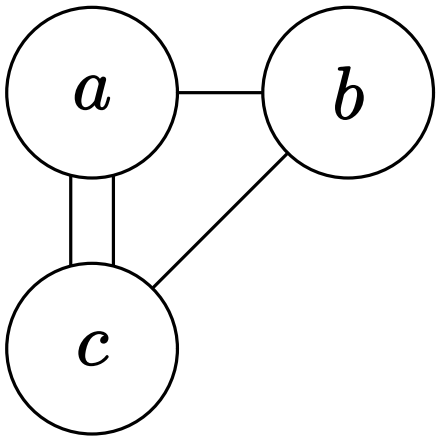
1. 「伸ばしにくさ」を表す量である **等周定数** を定義する
2. 等周定数と第 2 最大固有値の関係を調査する
   - 等周定数が大きい $\Leftrightarrow$ 第 2 最大固有値が小さい
3. 第 2 最大固有値を使って，エクスパンダを定義する

(復習) グラフのスペクトル

無向グラフ $G = (V, E)$

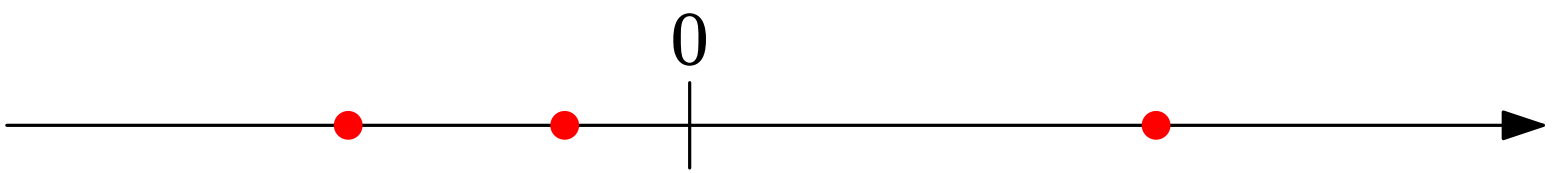
定義：グラフのスペクトル (spectrum，複数形 spectra)

G の **スペクトル** とは，
G の隣接行列 A_G の固有値全体 (多重集合) のこと



$$A_G = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 2 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

G のスペクトル $= \{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, -2\}$

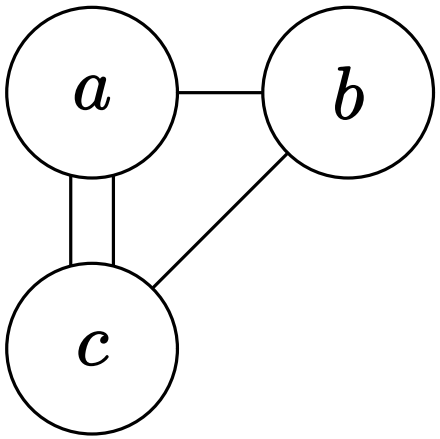


(復習) グラフのスペクトル

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：グラフのスペクトル (spectrum，複数形 spectra)

G の **スペクトル** とは，
G の隣接行列 A_G の固有値全体 (多重集合) のこと



$$A_G = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 2 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$G \text{ のスペクトル} = \{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, -2\}$$

性質：G が d-正則 $\Rightarrow$ A_G の最大固有値 $= d$

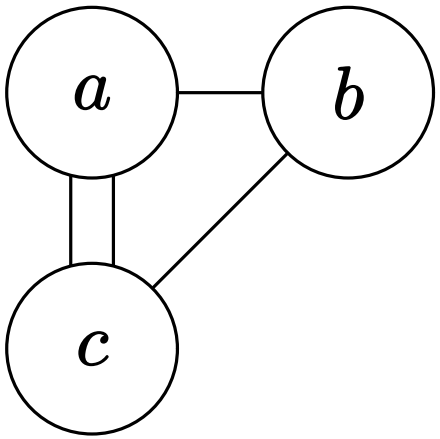
記法：$\lambda_2(G) = A_G$ の第 2 最大固有値

(復習) グラフのスペクトル

無向グラフ $G = (V, E)$

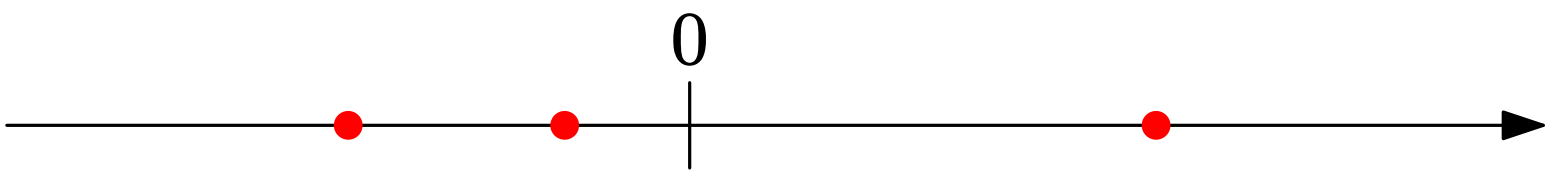
定義：グラフのスペクトル (spectrum，複数形 spectra)

G の **スペクトル** とは，
G の隣接行列 A_G の固有値全体 (多重集合) のこと



$$A_G = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 2 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

G のスペクトル $= \{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, -2\}$



本日の内容

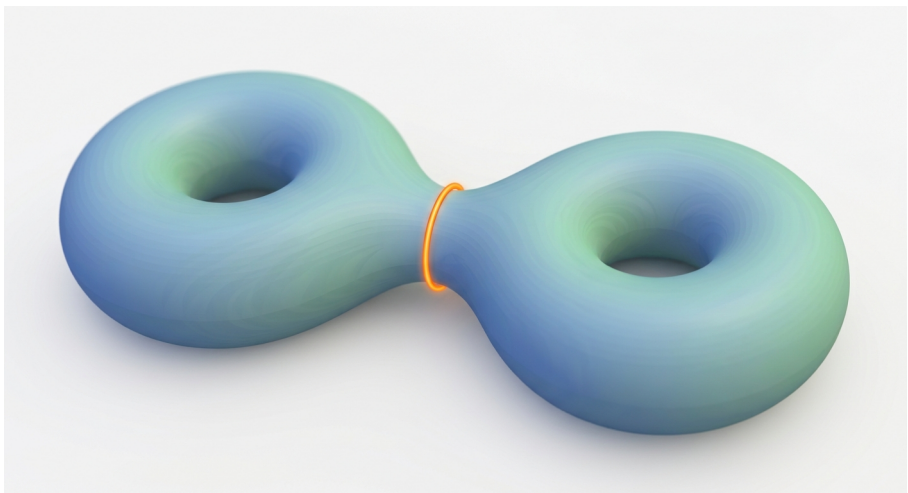
1. **グラフの等周定数**
2. 等周定数と固有値
3. Cheeger の不等式：証明
4. エクスパンダの定義

等周定数

等周定数 (isoperimetric constant)

もともと リーマン幾何学 (微分幾何学) における概念

＝「かたち」における「ボトルネック」の弱さを与える量





(Hou, Zhao, Shan '21)

応用：コンピュータ・グラフィックス (画像分割)

機械学習 (分類)

辺境界

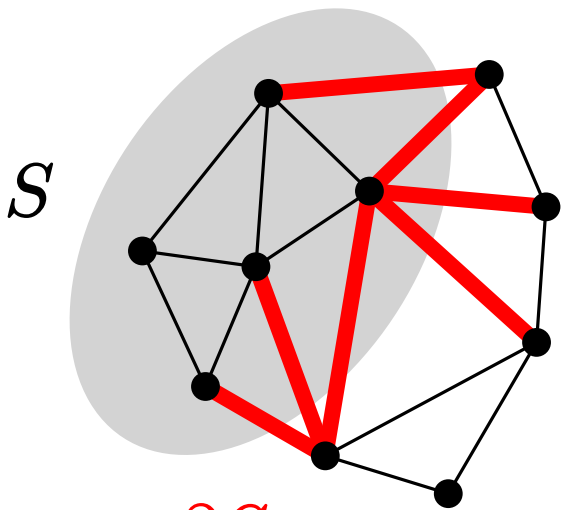
グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $S \subseteq V$，$S \neq \emptyset, V$

定義：辺境界 (edge boundary)

S の **辺境界** とは，S と $V - S$ を結ぶ辺の (多重) 集合

- **記法**：$\partial S = \{\{u, v\} \in E \mid u \in S, v \in V - S\}$

注：$\partial S = \partial(V - S)$



$|\partial S| = 7$

直感：$|\partial S| \approx S$ と $V - S$ の間の太さ

$|\partial S|$ は ∂S の要素数 (サイズ)

グラフの等周定数

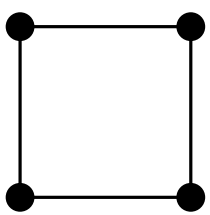
グラフ $G = (V, E)$

定義：等周定数 (isoperimetric constant) **重要**

G の **等周定数** とは，次で定められる量 $h(G)$

$$h(G) = \min\left\{ \frac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V - S|\}} \,\middle|\, S \subseteq V, S \neq \emptyset, S \neq V \right\}$$

Cheeger 定数 (Cheeger constant)，辺伸張 (edge expansion)，
辺拡大 (edge expansion) とも呼ばれる

G 

$h(G) = ???$

グラフの等周定数

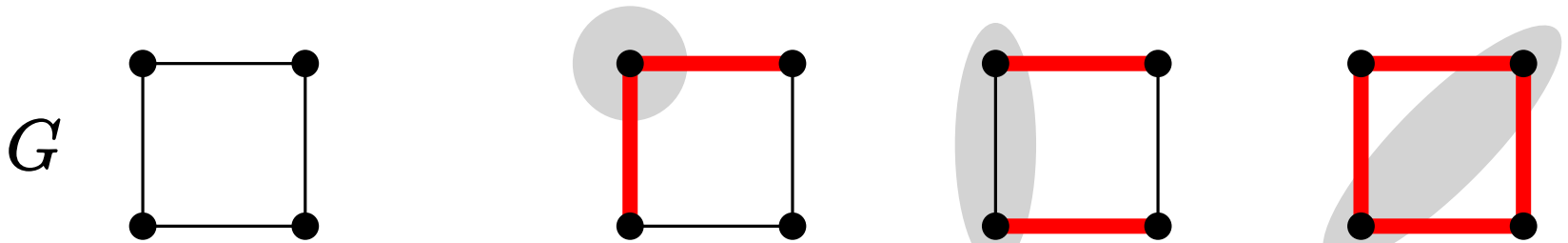
グラフ $G = (V, E)$

定義：等周定数 (isoperimetric constant) **重要**

G の **等周定数** とは，次で定められる量 $h(G)$

$$h(G) = \min\left\{ \frac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V - S|\}} \,\middle|\, S \subseteq V, S \neq \emptyset, S \neq V \right\}$$

Cheeger 定数 (Cheeger constant)，辺伸張 (edge expansion)，
辺拡大 (edge expansion) とも呼ばれる



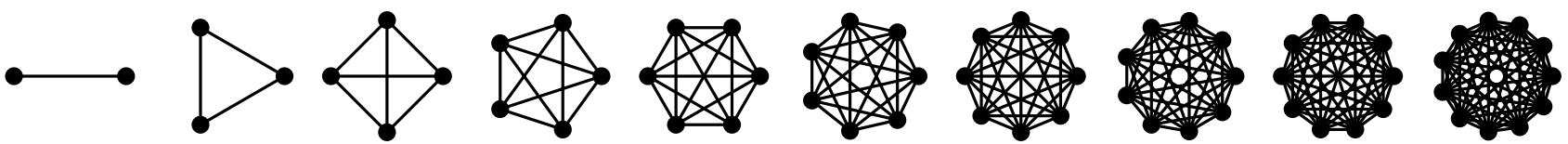
完全グラフの等周定数

等周定数に慣れるため，例を観察する

性質：完全グラフの等周定数

$n \geq 2$ のとき，完全グラフ K_n に対して，次が成り立つ

$$h(K_n) = \lceil n/2 \rceil$$



n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$h(K_n)$	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

定義：等周定数 (isoperimetric constant)　**重要**

G の **等周定数** とは，次で定められる量 $h(G)$

$$h(G) = \min\left\{ \frac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V-S|\}} \,\middle|\, S \subseteq V, S \neq \emptyset, S \neq V \right\}$$

完全グラフの等周定数

等周定数に慣れるため，例を観察する

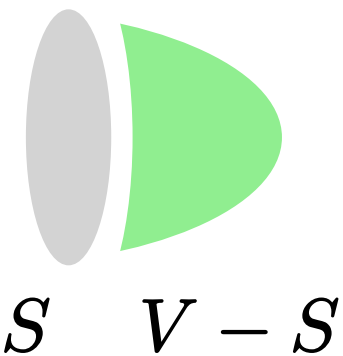
性質：完全グラフの等周定数

$n \geq 2$ のとき，完全グラフ K_n に対して，次が成り立つ

$$h(K_n) = \lceil n/2 \rceil$$

証明：$S \subseteq V$ に対して，$s = |S|$ と書くと，

- $|\partial S| = s(n-s)$
- $\therefore \dfrac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V-S|\}} = \dfrac{s(n-s)}{\min\{s, n-s\}}$
- $1 \leq s \leq \lfloor n/2 \rfloor$ の範囲で，この最小値は $\lceil n/2 \rceil$



□

定義：等周定数 (isoperimetric constant) 重要

G の **等周定数** とは，次で定められる量 $h(G)$

$$h(G) = \min\left\{ \frac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V-S|\}} \,\middle|\, S \subseteq V, S \neq \emptyset, S \neq V \right\}$$

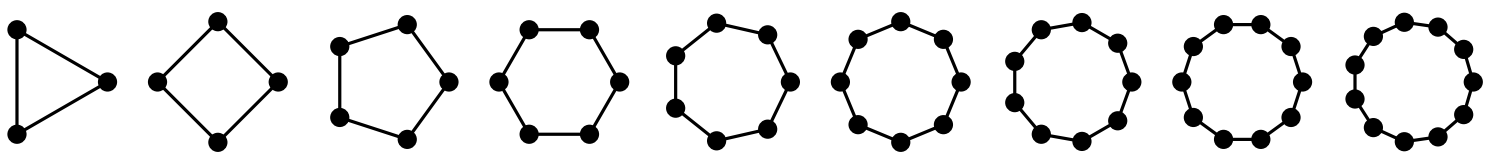
閉路の等周定数

等周定数に慣れるため，例を観察する

性質：閉路の等周定数

$n \geq 3$ のとき，閉路 C_n に対して，次が成り立つ

$$h(C_n) = 2/\lfloor n/2 \rfloor$$



n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$h(C_n)$	2	1	1	2/3	2/3	1/2	1/2	2/5	2/5

定義：等周定数 (isoperimetric constant)　重要

G の **等周定数** とは，次で定められる量 $h(G)$

$$h(G) = \min\left\{ \frac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V-S|\}} \,\middle|\, S \subseteq V, S \neq \emptyset, S \neq V \right\}$$

偶閉路の等周定数：証明 (1)

n が偶数の場合のみ証明する (奇数の場合も同様)

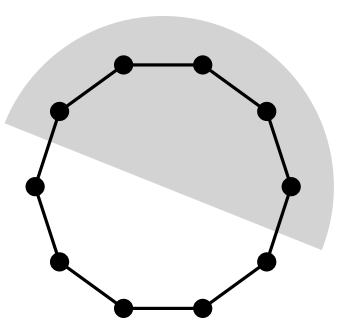
性質：偶閉路の等周定数

$n \geq 4$ が偶数のとき，閉路 C_n に対して，次が成り立つ

$$h(C_n) = 4/n$$

$h(C_n) \leq 4/n$ の証明：閉路の頂点集合を $\{1, 2, \ldots, n\}$ とする

- $S = \{1, 2, \ldots, n/2\}$ とする
- このとき，$|S| = n/2, |V - S| = n/2, |\partial S| = 2$
- $\therefore h(C_n) \leq \dfrac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V - S|\}} = \dfrac{2}{n/2} = \dfrac{4}{n}$



定義：等周定数 (isoperimetric constant) **重要**

G の **等周定数** とは，次で定められる量 $h(G)$

$$h(G) = \min\left\{ \frac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V - S|\}} \,\middle|\, S \subseteq V, S \neq \emptyset, S \neq V \right\}$$

偶閉路の等周定数：証明 (2)

n が偶数の場合のみ証明する (奇数の場合も同様)

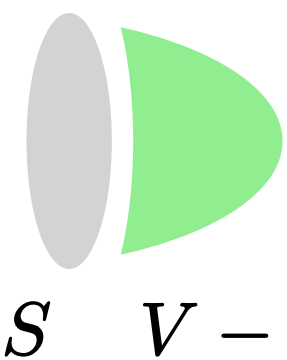
性質：偶閉路の等周定数

$n \geq 4$ が偶数のとき，閉路 C_n に対して，次が成り立つ

$$h(C_n) = 4/n$$

$h(C_n) \geq 4/n$ の証明：任意の $S \subseteq V$ を考える (ただし，$S \neq \emptyset$, $S \neq V$)

- 閉路は連結 2-正則なので，$|\partial S| \geq 2$ (本当？)
- $\therefore \dfrac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V-S|\}} \geq \dfrac{2}{n/2} = \dfrac{4}{n}$ □

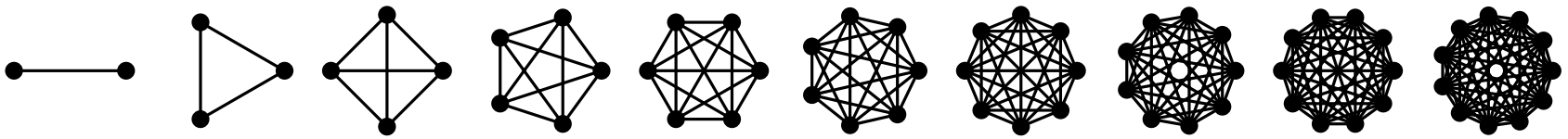


定義：等周定数 (isoperimetric constant) 重要

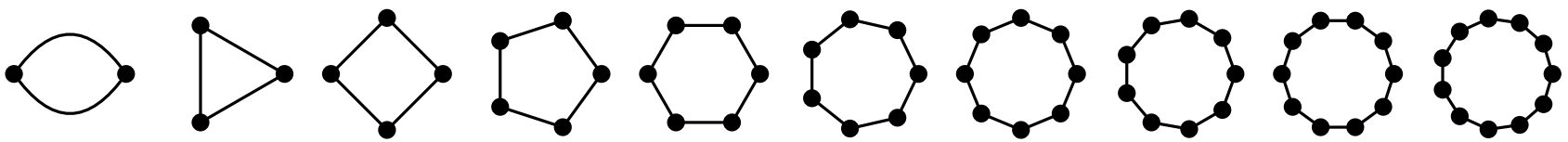
G の **等周定数** とは，次で定められる量 $h(G)$

$$h(G) = \min\left\{ \frac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V-S|\}} \,\middle|\, S \subseteq V, S \neq \emptyset, S \neq V \right\}$$

完全グラフと閉路の等周定数：比較

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
										
$h(K_n)$	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

n とともに増加 (非減少)

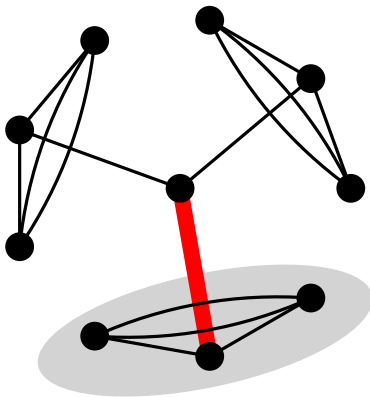
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
										
$h(C_n)$	2	2	1	1	2/3	2/3	1/2	1/2	2/5	2/5

n とともに減少 (非増加)

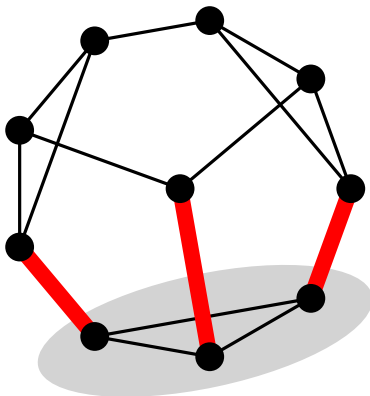
等周定数の気持ち

等周定数が大きい ≈ グラフを引き伸ばしにくい

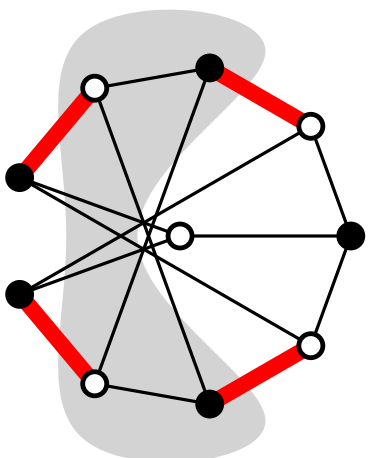
等周定数の例：3-正則グラフ



等周定数 $= 1/3$

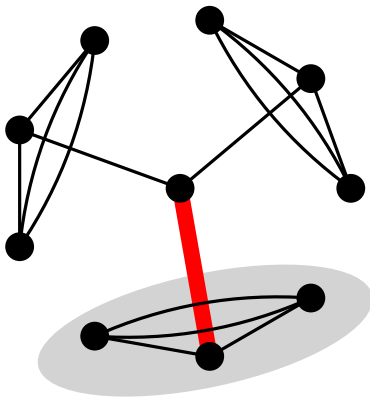


等周定数 $= 1$

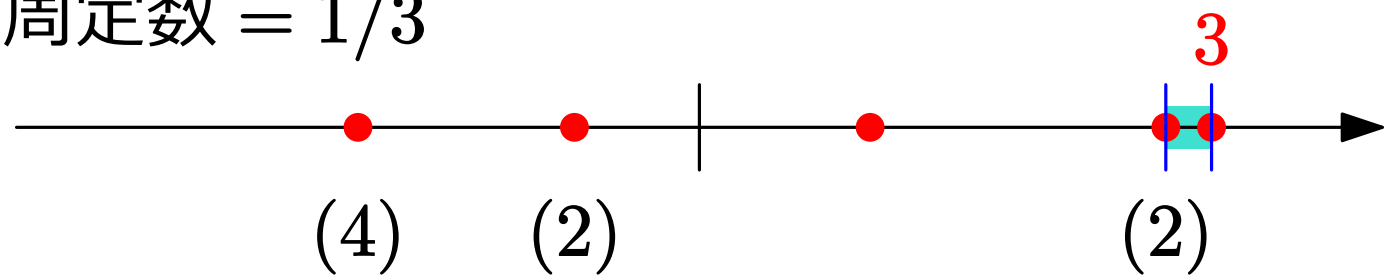


等周定数 $= 1$

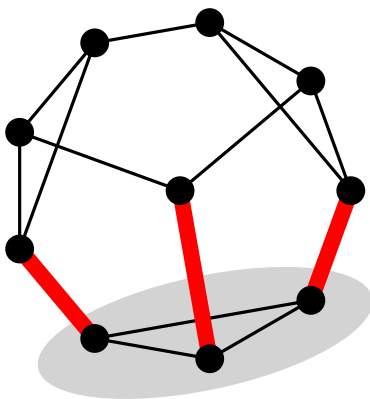
等周定数の例：3-正則グラフ



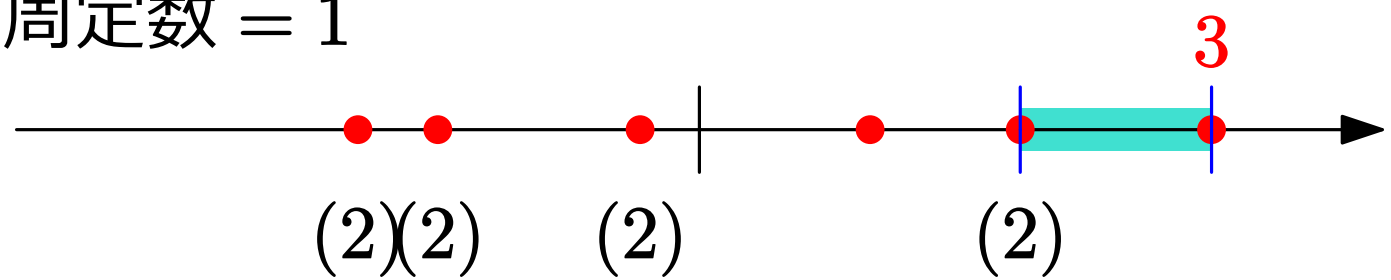
等周定数 $= 1/3$



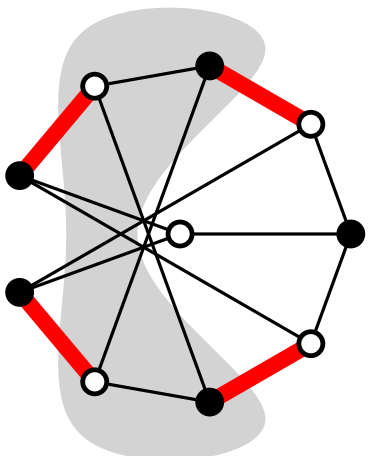
$\{3., 2.73205081, 2.73205081, 1., -0.73205081, -0.73205081, -2., -2., -2., -2.\}$



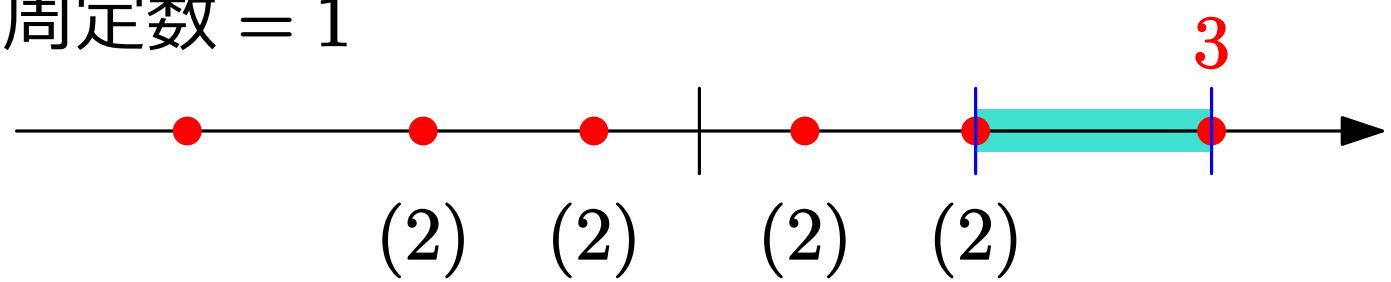
等周定数 $= 1$



$\{3., 1.87038524, 1.87038524, 1., -0.34729636, -0.34729636, -1.53208889, -1.53208889, -2., -2.\}$



等周定数 $= 1$



$\{3., 1.61803399, 1.61803399, 0.61803399, 0.61803399, -0.61803399, -0.61803399, -1.61803399, -1.61803399, -3.\}$

本日の内容

1. グラフの等周定数
2. **等周定数と固有値**
3. Cheeger の不等式：証明
4. エクスパンダの定義

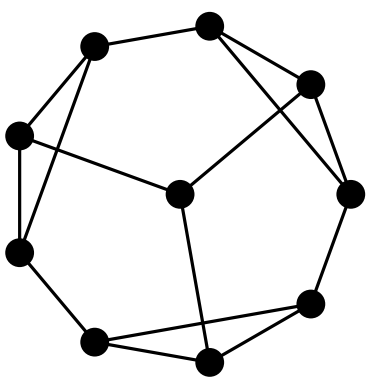
スペクトル・ギャップ

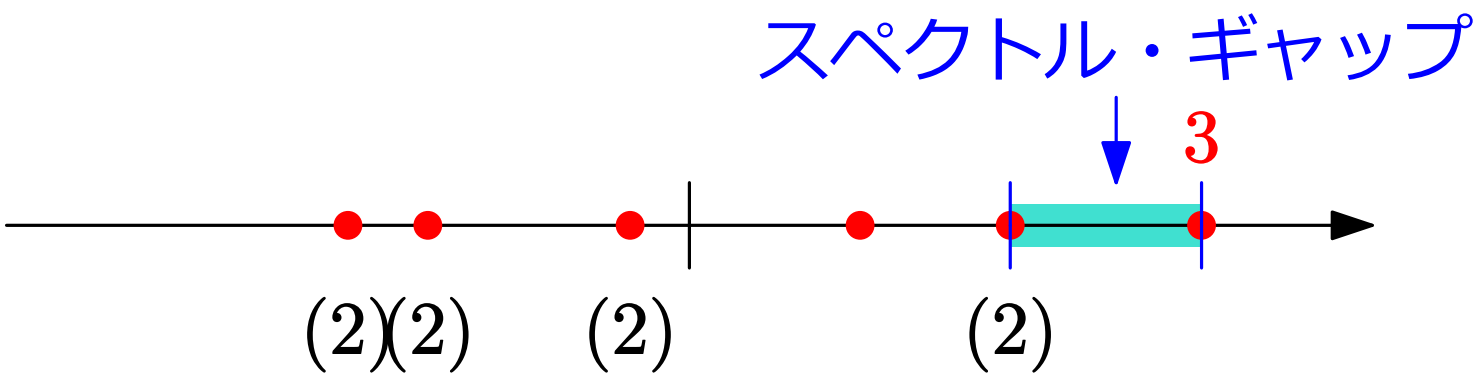
グラフ $G = (V, E)$

定義：スペクトル・ギャップ (spectral gap)

G のスペクトルを $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ とする
(ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$)

このとき，$\lambda_1 - \lambda_2$ を G の **スペクトル・ギャップ** と呼ぶ





$\{3., 1.87038524, 1.87038524, 1., -0.34729636, -0.34729636, -1.53208889, -1.53208889, -2., -2.\}$

注：G が d-正則であるとき，$\lambda_1 = d$ なので，

スペクトル・ギャップは $d - \lambda_2$

Cheeger の不等式

d-正則グラフ $G = (V, E)$

性質：Cheeger の不等式 (Cheeger's inequality)

$$\frac{d - \lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2(G))}$$

(Dodziuk '84; Alon, Milman '85; Alon '86)

意味：等周定数が大きい ⇔ スペクトル・ギャップが大きい

Cheeger の不等式

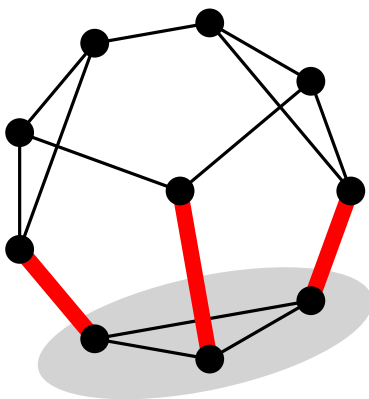
d-正則グラフ $G = (V, E)$

性質：Cheeger の不等式 (Cheeger's inequality)

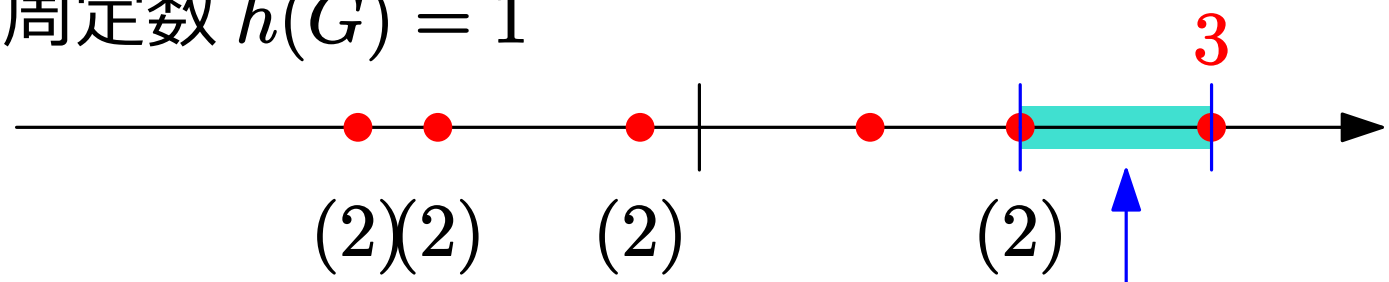
$$\frac{d - \lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2(G))}$$

(Dodziuk '84; Alon, Milman '85; Alon '86)

意味：等周定数が大きい ⇔ スペクトル・ギャップが大きい



等周定数 $h(G) = 1$



$\{3., 1.87038524, 1.87038524, 1., -0.34729636, -0.34729636, -1.53208889, -1.53208889, -2., -2.\}$

スペクトル・ギャップ $= 1.1296$

$$\frac{d - \lambda_2(G)}{2} = 0.5648, \sqrt{2d(d - \lambda_2(G))} = 1.8409$$

Cheeger の不等式：完全グラフ

d-正則グラフ $G = (V, E)$

性質：Cheeger の不等式 (Cheeger's inequality)

$$\frac{d - \lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2(G))}$$

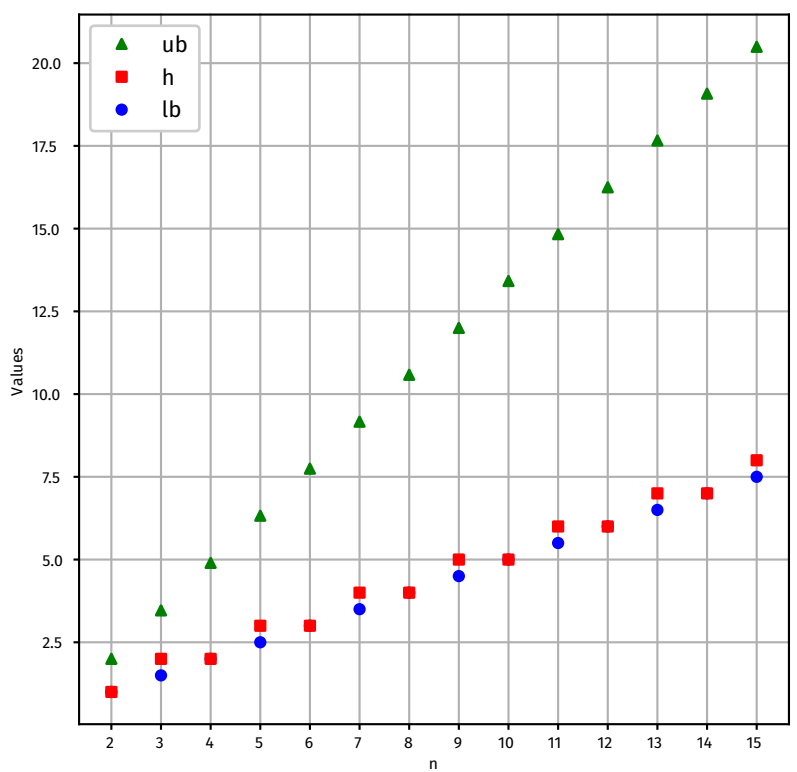
(Dodziuk '84; Alon, Milman '85; Alon '86)

G が完全グラフ K_n のとき $(n \geq 2)$

- $h(G) = \lceil n/2 \rceil$
- $d - \lambda_2(G) = (n-1) - (-1) = n$

したがって,

- $\frac{d - \lambda_2(G)}{2} = \frac{n}{2}$
- $\sqrt{2d(d - \lambda_2(G))} = \sqrt{2(n-1)n}$



Cheeger の不等式：閉路

d-正則グラフ $G = (V, E)$

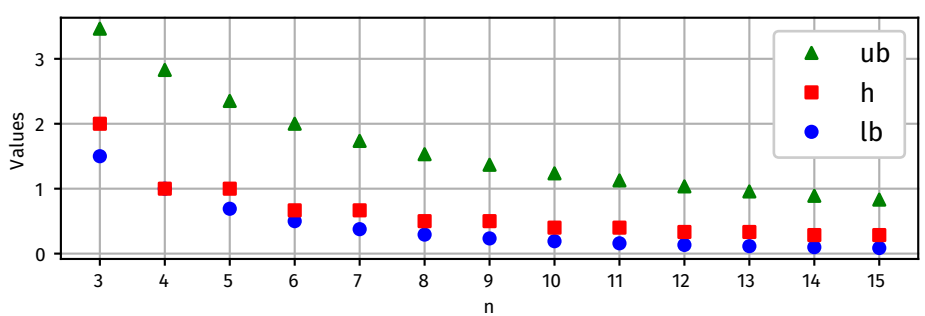
性質：Cheeger の不等式 (Cheeger's inequality)

$$\frac{d - \lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2(G))}$$

(Dodziuk '84; Alon, Milman '85; Alon '86)

G が閉路 C_n のとき $(n \geq 3)$

- $h(G) = 2/\lfloor n/2 \rfloor$
- $d - \lambda_2(G) = 2 - 2\cos(2\pi/n)$



したがって，

- $\dfrac{d - \lambda_2(G)}{2} = 1 - \cos(2\pi/n)$
- $\sqrt{2d(d - \lambda_2(G))} = 2\sqrt{2(1 - \cos(2\pi/n))}$

Cheeger の不等式：証明に向けて

d-正則グラフ $G = (V, E)$

性質：Cheeger の不等式 (Cheeger's inequality)

$$\frac{d - \lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2(G))}$$

(Dodziuk '84; Alon, Milman '85; Alon '86)

- $\frac{d - \lambda_2(G)}{2} \leq h(G)$ の証明
  - いまから行う
- $h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2(G))}$ の証明
  - 第 6 回授業で行う (予定)

本日の内容

1. グラフの等周定数
2. 等周定数と固有値
3. **Cheeger の不等式：証明**
4. エクスパンダの定義

Cheeger の不等式 (下界)：証明の方針

目標：次の不等式の証明

$$\frac{d - \lambda_2(G)}{2} \leq h(G)$$

証明の方針：

- $\lambda_2(G)$ に対する固有ベクトルと
  頂点集合 V の分割 $\{S, V - S\}$ を関連付ける
- そのために，Courant-Fischer の定理を用いる

Rayleigh 商

$n \times n$ 実対称行列 A，n 次元実ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$

定義：Rayleigh 商 (Rayleigh quotient)

Rayleigh 商 とは次の量　　(Rayleigh：レイリー)

$$\frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}}$$

例：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ のとき, } \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}} = \frac{6}{3} = 2$$

Rayleigh 商

$n \times n$ 実対称行列 A，n 次元実ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$

定義：Rayleigh 商 (Rayleigh quotient)

Rayleigh 商 とは次の量　　(Rayleigh：レイリー)

$$\frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}}$$

例：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ のとき, } \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}} = \frac{6}{3} = 2$$

注：$\mathbf{x}$ が固有値 λ に対する A の実固有ベクトル

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} (\lambda \mathbf{x})}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}} = \frac{\lambda (\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x})}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}} = \lambda$$

Rayleigh 商の性質：スカラー倍で不変

$n \times n$ 実対称行列 A，n 次元実ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$

定義：Rayleigh 商はスカラー倍で不変

任意の実数 $\alpha \neq 0$ に対して，次が成立

$$\frac{(\alpha\mathbf{x})^{\mathrm{T}} A(\alpha\mathbf{x})}{(\alpha\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\alpha\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$$

証明：

$$\frac{(\alpha\mathbf{x})^{\mathrm{T}} A(\alpha\mathbf{x})}{(\alpha\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\alpha\mathbf{x})} = \frac{\alpha^2 \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}}{\alpha^2 \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$$

□

Courant-Fischer の定理 (最大固有値)

$n \times n$ 実対称行列 A

性質：最大固有値に対する Courant-Fischer の定理

A の最大固有値を λ_1 とすると,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \max\left\{ \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}} \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \right\} \\ &= \max\left\{ \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1 \right\}\end{aligned}$$

意味：最大固有値 = Rayleigh 商の最大値

注：λ_1 に対する A の実単位固有ベクトルを $\mathbf{x}_1$ とすると

$$\lambda_1 = \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}_1$$

C.-F. の定理 (最大固有値)：証明 (1)

証明 (最大固有値 $\leq$ 右辺)：

- λ_1 に対する実単位固有ベクトル $\mathbf{x}_1$ に対して
  $$\max\{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\} \geq \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}_1 = \lambda_1$$

C.-F. の定理 (最大固有値)：証明 (1)

証明 (最大固有値 $\leq$ 右辺)：

- λ_1 に対する実単位固有ベクトル $\mathbf{x}_1$ に対して
  $$\max\{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\} \geq \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}_1 = \lambda_1$$

証明 (最大固有値 $\geq$ 右辺)：

- A の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ として，
  λ_i の実単位固有ベクトル $\mathbf{x}_i$ を $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ が
  $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となるようにとる (前回参照)
- 長さ 1 の任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を
  基底 $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ を使って，次のように一意に書く
  $$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i \quad \text{(ただし，} c_i \in \mathbb{R}\text{)}$$

C.-F. の定理 (最大固有値)：証明 (2)

証明 (最大固有値 $\geq$ 右辺) 続：

- このとき，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} &= \left(\sum_i c_i \mathbf{x}_i \right)^{\mathrm{T}} A \left(\sum_j c_j \mathbf{x}_j \right) \\
&= \sum_i \sum_j c_i c_j \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}_j \\
&= \sum_i \sum_j c_i c_j \lambda_j \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_j \\
&= \sum_i c_i^2 \lambda_i \\
&\leq \lambda_1 \sum_i c_i^2 \\
&= \lambda_1
\end{aligned}
$$

□

C.-F. の定理 (最大固有値)：証明 (2)

証明 (最大固有値 $\geq$ 右辺) 続：

- このとき，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} &= \left(\sum_i c_i \mathbf{x}_i \right)^{\mathrm{T}} A \left(\sum_j c_j \mathbf{x}_j \right) \\
&= \sum_i \sum_j c_i c_j \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}_j \qquad \curvearrowleft\ A\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j \\
&= \sum_i \sum_j c_i c_j \lambda_j \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_j \qquad \curvearrowleft\ \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \\
&= \sum_i c_i^2 \lambda_i \qquad \curvearrowleft\ \lambda_1 \text{ は最大固有値} \\
&\leq \lambda_1 \sum_i c_i^2 \qquad \curvearrowleft\ \|\mathbf{x}\|^2 = 1 \\
&= \lambda_1
\end{aligned}
$$

□

Courant-Fischer の定理 (第 2 最大固有値)

$n \times n$ 実対称行列 A

性質：第 2 最大固有値に対する Courant-Fischer の定理

A の最大固有値，第 2 最大固有値を λ_1, λ_2 とし，
λ_1 に対する A の単位実固有ベクトルを $\mathbf{x}_1$ とすると

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \max\left\{ \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}} \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}, \mathbf{x} \perp \mathbf{x}_1 \right\} \\ &= \max\left\{ \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1, \mathbf{x} \perp \mathbf{x}_1 \right\}\end{aligned}$$

意味：第 2 最大固有値 $= \mathbf{x}_1$ と直交する Rayleigh 商の最大値

証明：λ_1 の場合と同様 (考えてみよ)

証明の方針 (再掲)

目標：次の不等式の証明

$$\frac{d - \lambda_2(G)}{2} \leq h(G)$$

証明の方針：

- λ_2 に対する固有ベクトルと
  頂点集合 V の分割 $\{S, V - S\}$ を関連付ける
- そのために，Courant-Fischer の定理を用いる

定義：等周定数 (isoperimetric constant) **重要**

G の **等周定数** とは，次で定められる量 $h(G)$

$$h(G) = \min\left\{ \frac{|\partial S|}{\min\{|S|, |V - S|\}} \,\middle|\, S \subseteq V, S \neq \emptyset, S \neq V \right\}$$

性質：第 2 最大固有値に対する Courant-Fischer の定理

A の最大固有値，第 2 最大固有値を λ_1, λ_2 とし，
λ_1 に対する A の単位実固有ベクトルを $\mathbf{x}_1$ とすると

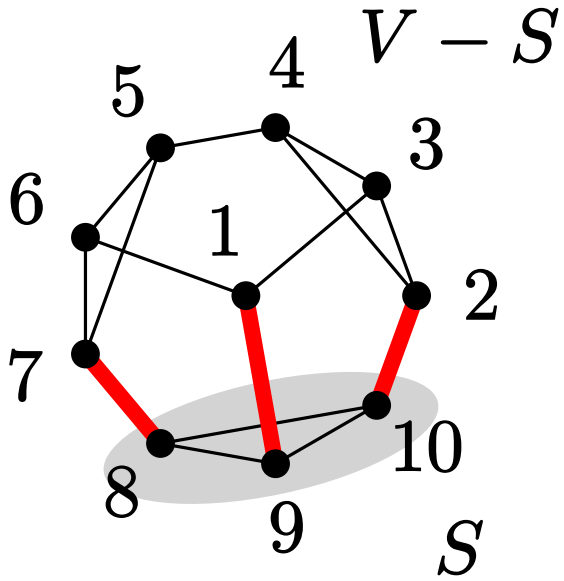
$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \max\left\{ \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}} \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}, \mathbf{x} \perp \mathbf{x}_1 \right\} \\ &= \max\left\{ \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1, \mathbf{x} \perp \mathbf{x}_1 \right\}\end{aligned}$$

Cheegerの不等式(下界):証明(1)

証明:

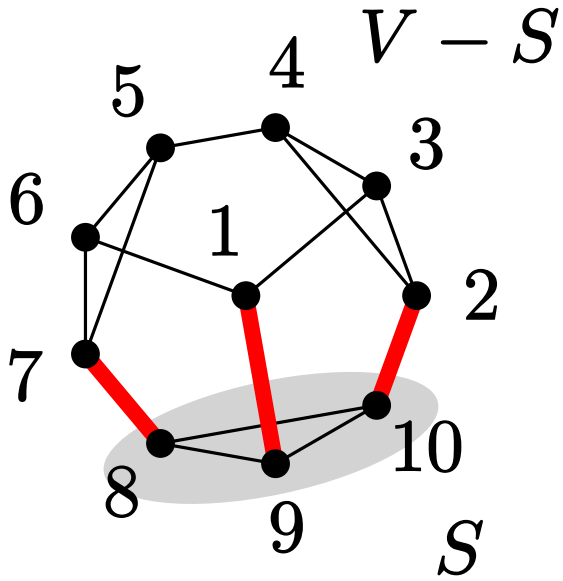
- $h(G) = \dfrac{|\partial S|}{|S|}$ を満たす $S \subseteq V$ を考える
- ベクトル $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^V$ を次で定義する

$$z_v = \begin{cases} |V - S| & (v \in S) \\ -|S| & (v \in V - S) \end{cases}$$



$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Cheeger の不等式 (下界) : 証明 (1)



証明：

- $h(G)=\dfrac{|\partial S|}{|S|}$ を満たす $S\subseteq V$ を考える
- ベクトル $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^V$ を次で定義する

$$z_v=\begin{cases}|V-S| & (v\in S)\\ -|S| & (v\in V-S)\end{cases}$$

- このとき，$\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}=|V-S||S|-|S||V-S|=0$
- $\therefore \mathbf{z}\perp\mathbf{1}$
- Courant-Fischer の定理より

$$\lambda_2(G)=\max\left\{\frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A_G\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}\,\middle|\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^V-\{\mathbf{0}\},\mathbf{x}\perp\mathbf{1}\right\}$$

$$\geq\frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}}A_G\mathbf{z}}{\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}$$

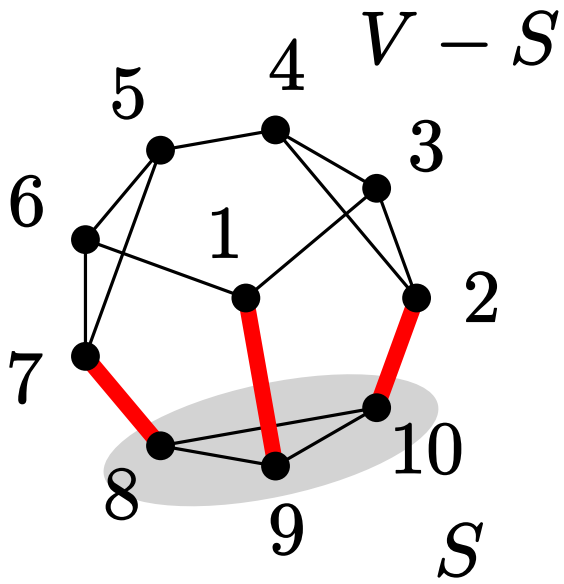
$$\mathbf{z}=\begin{bmatrix}-3\\-3\\-3\\-3\\-3\\-3\\-3\\7\\7\\7\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{matrix}$$

Cheeger の不等式 (下界) : 証明 (2)

証明 (続) :

- Courant-Fischer の定理より

$$\lambda_2(G) \geq \frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} A_G \mathbf{z}}{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}}$$



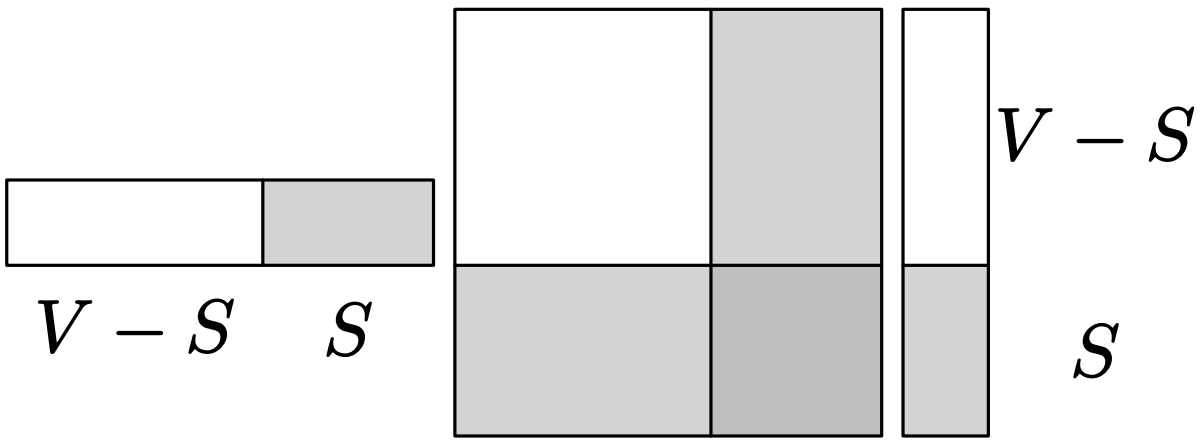
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

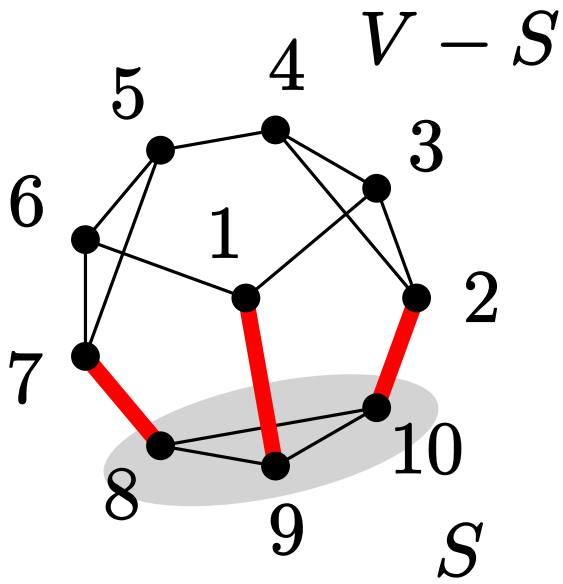
Cheegerの不等式 (下界) : 証明 (2)

証明 (続) :

- Courant-Fischer の定理より

$$\lambda_2(G) \geq \frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} A_G \mathbf{z}}{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}}$$





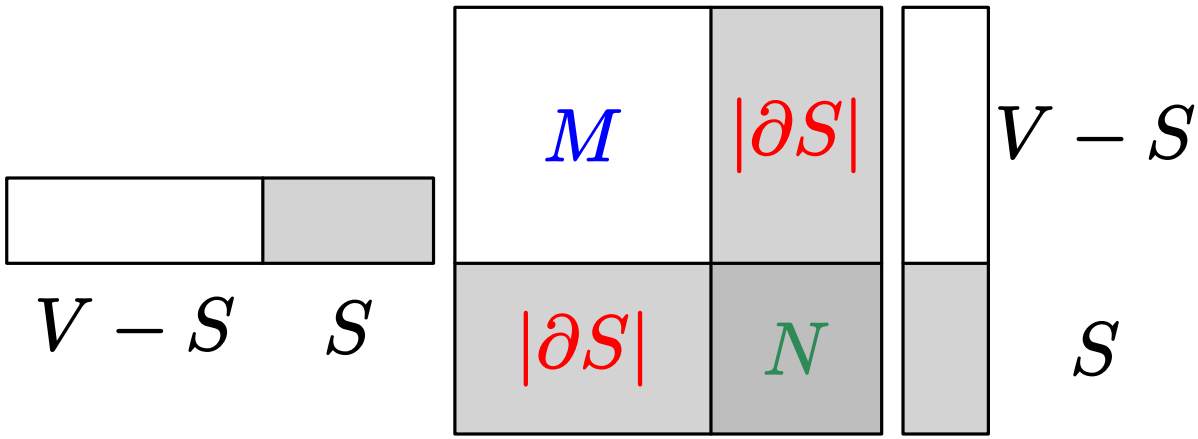
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 2 \\ -3 & 3 \\ -3 & 4 \\ -3 & 5 \\ -3 & 6 \\ -3 & 7 \\ 7 & 8 \\ 7 & 9 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Cheegerの不等式 (下界) : 証明 (2)

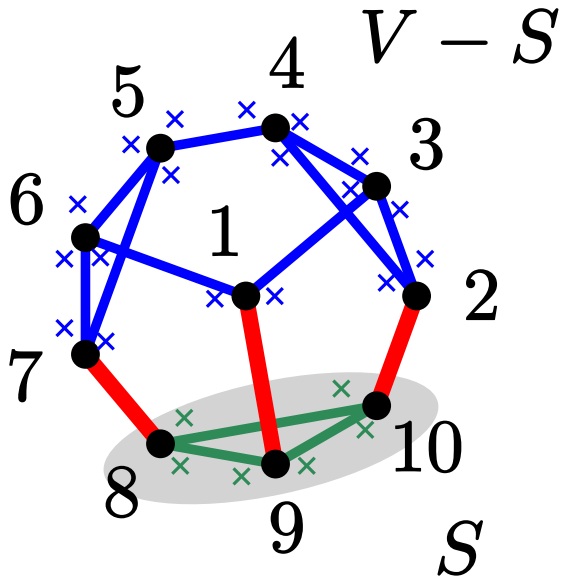
証明 (続) :

- Courant-Fischer の定理より

$$\lambda_2(G) \geq \frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} A_G \mathbf{z}}{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}}$$



$$= M|S|^2 - 2|\partial S||S||V-S| + N|V-S|^2$$
$$= (d|V-S| - |\partial S|)|S|^2$$
$$\quad - 2|\partial S||S||V-S| + (d|S| - |\partial S|)|V-S|^2$$



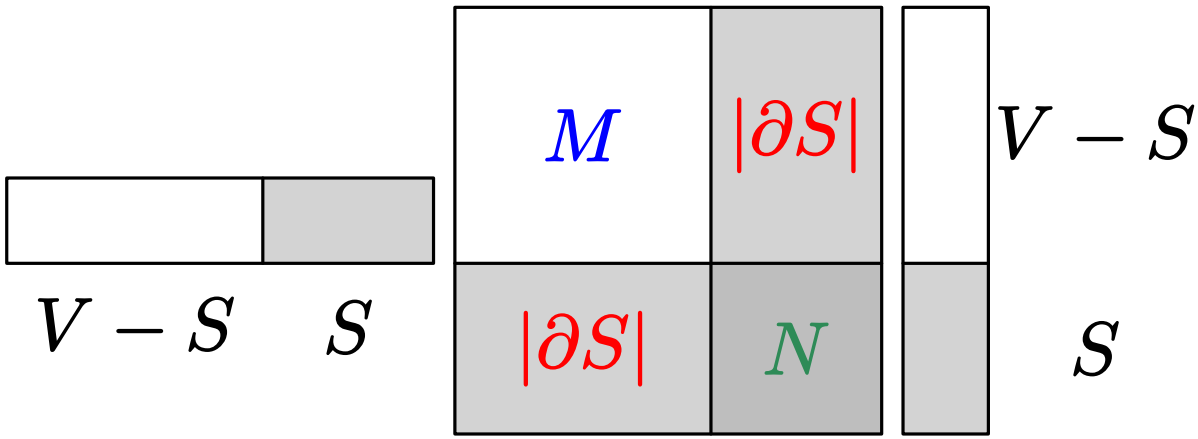
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 2 \\ -3 & 3 \\ -3 & 4 \\ -3 & 5 \\ -3 & 6 \\ -3 & 7 \\ 7 & 8 \\ 7 & 9 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Cheegerの不等式 (下界) : 証明 (2)

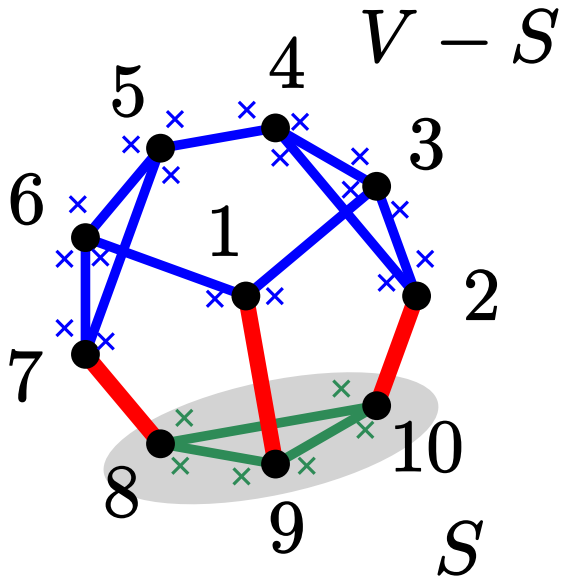
証明 (続) :

- Courant-Fischer の定理より

$$\lambda_2(G) \geq \frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} A_G \mathbf{z}}{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}}$$



$$= M|S|^2 - 2|\partial S||S||V-S| + N|V-S|^2$$
$$= (d|V-S| - |\partial S|)|S|^2$$
$$\quad - 2|\partial S||S||V-S| + (d|S| - |\partial S|)|V-S|^2$$
$$= d|V||S||V-S| - |V|^2|\partial S|$$



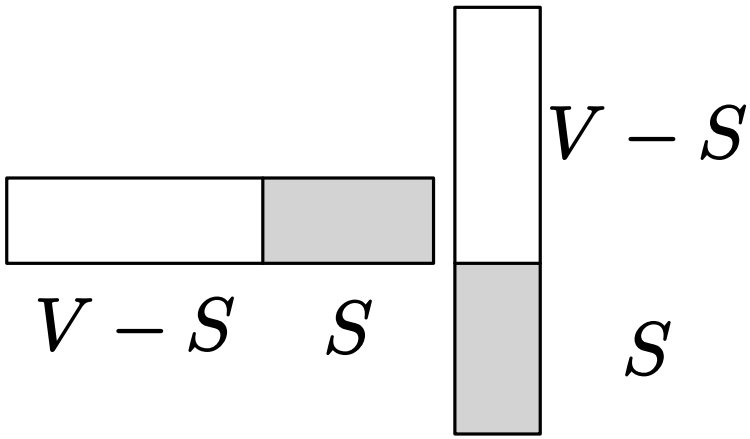
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 2 \\ -3 & 3 \\ -3 & 4 \\ -3 & 5 \\ -3 & 6 \\ -3 & 7 \\ 7 & 8 \\ 7 & 9 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Cheegerの不等式 (下界) : 証明 (2)

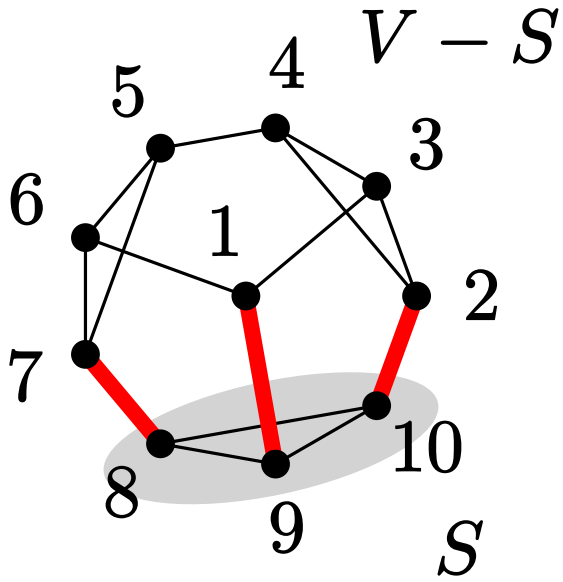
証明 (続) :

- Courant-Fischer の定理より

$$\lambda_2(G) \geq \frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} A_G \mathbf{z}}{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}}$$



$$= |S|^2|V-S| + |V-S|^2|S| = |V||S||V-S|$$



$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Cheeger の不等式 (下界) : 証明 (2)

証明 (続) :

- Courant-Fischer の定理より

$$\lambda_2(G) \geq \frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} A_G \mathbf{z}}{\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \mathbf{z}}$$

$$= \frac{d|V||S||V-S| - |V|^2|\partial S|}{|V||S||V-S|}$$

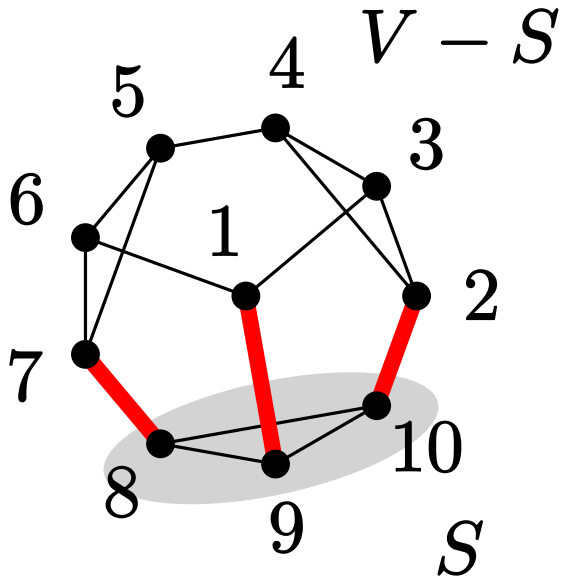
$$= d - \frac{|V||\partial S|}{|S||V-S|}$$

$$\geq d - \frac{2|\partial S|}{|S|}$$

$$= d - 2h(G)$$

$|V| \leq 2|V-S|$ (なぜ？)

- $\therefore \dfrac{d-\lambda_2(G)}{2} \leq h(G)$ □



$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Cheeger の不等式：再掲

d-正則グラフ $G = (V, E)$

性質：Cheeger の不等式 (Cheeger's inequality)

$$\frac{d - \lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2(G))}$$

(Dodziuk '84; Alon, Milman '85; Alon '86)

意味：等周定数が大きい ⇔ スペクトル・ギャップが大きい

本日の内容

1. グラフの等周定数
2. 等周定数と固有値
3. Cheeger の不等式：証明
4. **エクスパンダの定義**

(再掲) エクスパンダ：非形式

定義 (きわめて非形式)：エクスパンダ

エクスパンダ (expander) とは次を満たすグラフ

- 辺の数が小さい
- 引っ張ったときに伸ばしにくい

エクスパンダ

非負整数 n, d, 実数 λ

定義：エクスパンダ (expander) **重要**

グラフ $G = (V, E)$ が (n, d, λ)-**エクスパンダ** であるとは, 次を満たすこと

- $|V| = n$
- G は d-正則
- $\lambda_2(G) \leq \lambda$

気分：うれしいエクスパンダは, 頂点数 n を固定したとき

- d が小さい ($\because G$ の辺数 $= dn/2$)
- $d - \lambda$ が大きい ($\because$ Cheeger の不等式)
  (λ が小さい)

性質：Cheeger の不等式 (Cheeger's inequality)

$$\frac{d - \lambda_2(G)}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2(G))}$$

エクスパンダ族

非負整数 d

定義：エクスパンダ族 (family of expanders)

グラフの無限列 $G_1, G_2, \ldots$ が **d-正則エクスパンダ族** であるとは，ある実数 $\lambda < d$ が存在して，
すべての $i = 1, 2, \ldots$ で次が成立すること

- G_i の頂点数 $<$ G_{i+1} の頂点数
- G_i は d-正則
- $\lambda_2(G_i) \leq \lambda$

注：λ は i に依存しない

エクスパンダ族：非例

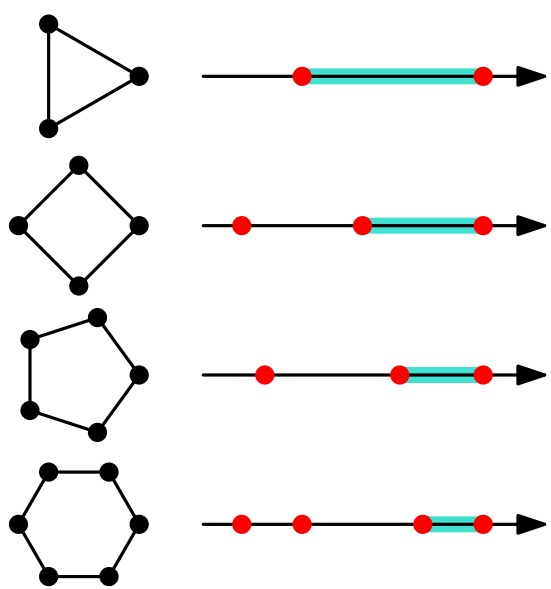
定義：エクスパンダ族 (family of expanders)

グラフの無限列 $G_1, G_2, \ldots$ が **d-正則エクスパンダ族** であるとは，ある実数 $\lambda < d$ が存在して，
すべての $i = 1, 2, \ldots$ で次が成立すること

- G_i の頂点数 $<$ G_{i+1} の頂点数
- G_i は d-正則
- $\lambda_2(G_i) \leq \lambda$

非例：閉路の列 $C_3, C_4, C_5, \ldots$

- C_n の頂点数は n で，2-正則
- $\lambda_2(C_n) = 2\cos(4\pi/n)$
  $\to 2 \quad (n \to \infty)$



帰結：2-正則エクスパンダ族は存在しない

エクスパンダ族：疑問

疑問 1

任意の定数 $d \geq 3$ に対して，
d-正則エクスパンダ族は存在するか？

疑問 2

d-正則エクスパンダ族が存在するとき，
λ はどれだけ小さくできるか？

エクスパンダ族：疑問

疑問 1

任意の定数 $d \geq 3$ に対して，
d-正則エクスパンダ族は存在するか？

ネタばれ：存在する (構成できる)

疑問 2

d-正則エクスパンダ族が存在するとき，
λ はどれだけ小さくできるか？

ネタばれ：限界がある (Alon-Boppana の定理)

クイズ

Q 授業内で発表します

1.

2.

3.

4.