離散最適化基礎論 (2026 年後学期)

エクスパンダ

第 2 回

グラフのスペクトル

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 10 月 13 日

最終更新：2026 年 10 月 12 日　14:37

スケジュール (前半)

1. グラフ理論速習 (10/6)
2. **グラフのスペクトル** (10/13)
3. グラフの等周定数とエクスパンダ (10/20)
 * 休み (海外出張) (10/27)
 * 休み (祝日) (11/3)
4. グラフの等周定数と直径 (11/10)
5. グラフの等周定数とランダムウォーク (11/17)
6. Cheeger の不等式 (11/24)

スケジュール (後半)

∗	休み (秋ターム試験)	(12/1)
7.	Alon-Boppana の定理：第 1 の証明	(12/8)
8.	Alon-Boppana の定理：第 2 の証明	(12/15)
9.	ジグザグ積：定義	(12/22)
∗	休み (冬季休業)	(12/29)
10.	ジグザグ積：証明	(1/5)
11.	エクスパンダの構成	(1/12)
12.	リフト：定義	(1/19)
13.	リフト：性質の紹介	(1/26)
∗	休み (修論発表会)	(2/2)
∗	期末試験	(2/9 仮)

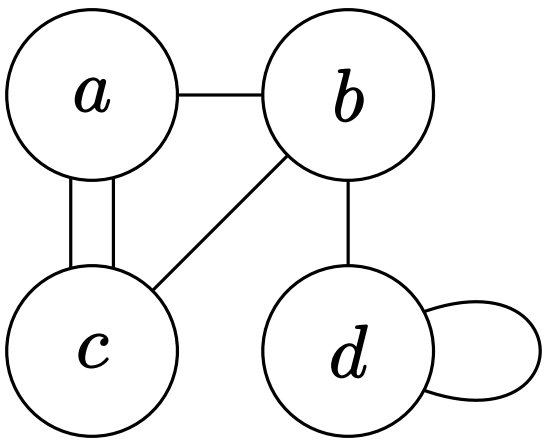
正則グラフ

グラフ $G = (V, E)$，非負整数 $d \geq 0$

定義：正則グラフ (regular graph) **重要**

G が **d-正則** であるとは，
G のすべての頂点の次数が d であること

3-正則グラフの例



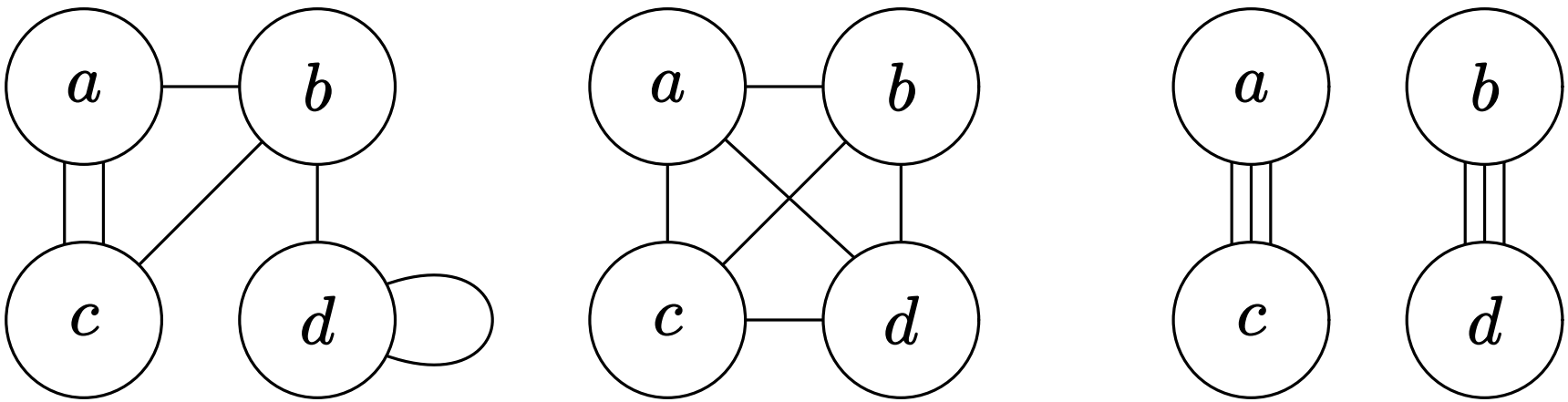
正則グラフ

グラフ $G = (V, E)$，非負整数 $d \geq 0$

定義：正則グラフ (regular graph) **重要**

G が **d-正則** であるとは，
G のすべての頂点の次数が d であること

3-正則グラフの例



グラフの隣接行列

グラフ $G = (V, E)$

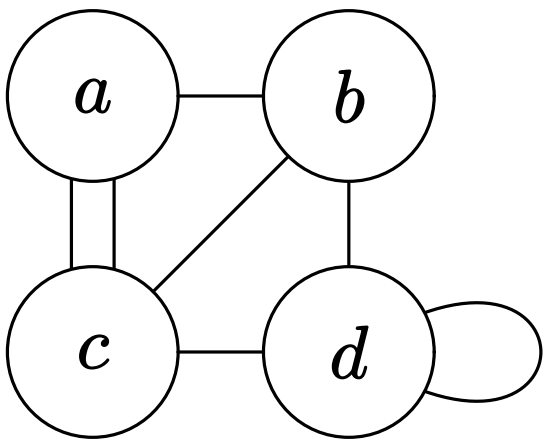
定義：隣接行列 (adjacency matrix) **重要**

G の **隣接行列** とは，次で定められる $V \times V$ 行列 A

$u, v \in V$ に対して，

$$a_{u,v} = \begin{cases} \text{辺 } \{u, v\} \text{ の総数 (重複度)} & (u \neq v), \\ 2 \cdot \text{辺 } \{u, u\} \text{ の総数 (重複度)} & (u = v) \end{cases}$$

- 記法：A_G，$A(G)$



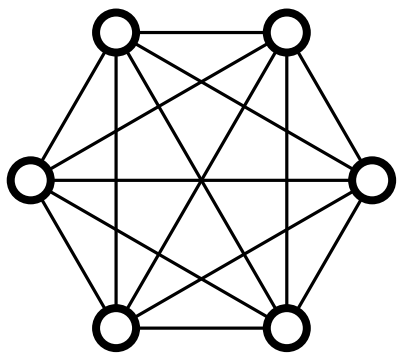
$$A_G = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 2 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

完全グラフの隣接行列

性質：完全グラフの隣接行列

$G = (V, E)$ が完全グラフ $K_n \Rightarrow u, v \in V$ に対して，

$$(A_G)_{u,v} = \begin{cases} 1 & (u \neq v), \\ 0 & (u = v) \end{cases}$$



K_6

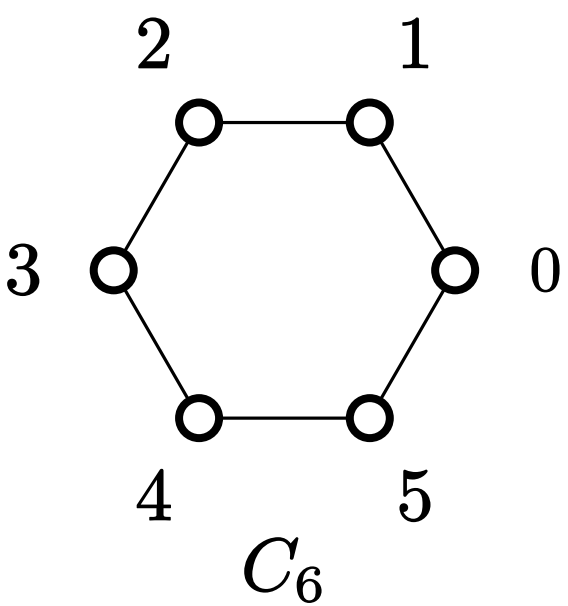
$$A_{K_6} = \begin{array}{|cccccc|} \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

閉路の隣接行列

性質：閉路の隣接行列

$G = (\{0, 1, \ldots, n-1\}, E)$ が閉路 C_n，$n \geq 3 \Rightarrow$
任意の $i, j \in V$ に対して

$$(A_G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \pm 1 \bmod n), \\ 0 & (i \neq j \pm 1 \bmod n) \end{cases}$$



C_6

$$A_{C_6} =$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	1
5	1	0	0	0	1	0

隣接行列は対称行列

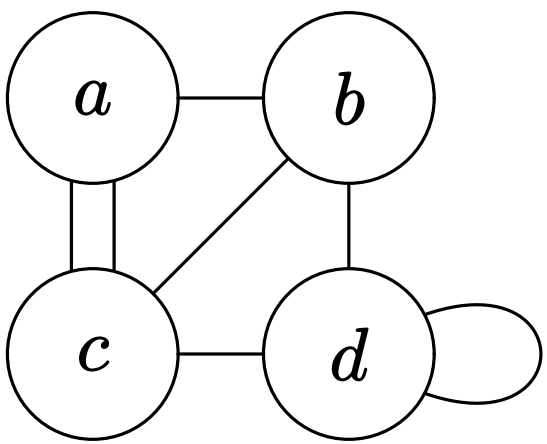
グラフ $G = (V, E)$

性質：隣接行列の対称性

G の隣接行列 A_G は対称行列である

- すなわち，$A_G = A_G^{\mathrm{T}}$

A_G の転置行列



$$A_G = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 2 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

本日の内容

1. **行列の固有値と固有ベクトル (復習)**
2. グラフのスペクトル：定義
3. グラフのスペクトル：性質

復習：行列の固有値と固有ベクトル

$n \times n$ 実行列 A

定義：固有値 (eigenvalue) と固有ベクトル (eigenvector)

スカラー λ が A の **固有値** であるとは,
次を満たす n 次元ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在すること

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

このような $\mathbf{x}$ を λ に対する A の **固有ベクトル** と呼ぶ

例：$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値は 3 と -1

復習：行列の固有値と固有ベクトル

$n \times n$ 実行列 A

定義：固有値 (eigenvalue) と固有ベクトル (eigenvector)

スカラー λ が A の **固有値** であるとは,
次を満たす n 次元ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在すること

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

このような $\mathbf{x}$ を λ に対する A の **固有ベクトル** と呼ぶ

例：$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値は 3 と -1

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ とすると, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

復習：行列の固有値と固有ベクトル

$n \times n$ 実行列 A

定義：固有値 (eigenvalue) と固有ベクトル (eigenvector)

スカラー λ が A の **固有値** であるとは,
次を満たす n 次元ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在すること

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

このような $\mathbf{x}$ を λ に対する A の **固有ベクトル** と呼ぶ

例：$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値は 3 と -1

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とすると, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

復習：固有値，固有ベクトルの性質

$n \times n$ 実行列 A

性質

1. A の固有値の総数は (重複を含めて) n 個
2. A の固有値は複素数　　(実数ではない場合がある)

λ が A の固有値
$\Leftrightarrow \exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\colon\ A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
$\Leftrightarrow \exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\colon\ (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$
$\Leftrightarrow A - \lambda I_n$ の逆行列が非存在
$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

A の特性多項式 (characteristic polynomial)

復習：固有値，固有ベクトルの性質

$n \times n$ 実行列 A

性質

1. A の固有値の総数は (重複を含めて) n 個
2. A の固有値は複素数　　(実数ではない場合がある)

λ が A の固有値 $\Leftrightarrow \exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\colon\ A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

$\Leftrightarrow \exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\colon\ (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow A - \lambda I_n$ の逆行列が非存在

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

A の特性多項式 (characteristic polynomial)

λ に関する n 次多項式

(その根は複素数で，重複を含めて n 個ある)

復習：固有値，固有ベクトルの性質

$n \times n$ 実行列 A

性質

1. A の固有値の総数は (重複を含めて) n 個
2. A の固有値は複素数　　(実数ではない場合がある)

固有値が実数ではない例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき，特性多項式 $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$

$\therefore A$ の固有値は i と $-\mathrm{i}$　　□

実対称行列の固有値

$n \times n$ 実行列 A

性質：実対称行列の固有値は実数 **重要**

A が実対称行列 $\Rightarrow$ A の固有値はどれも実数

証明：複素数 λ を A の固有値とする

- $\mathbf{x}$ を λ に対する A の固有ベクトルとする ($\because A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$)
- 実数 a, b，実ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を用いて，
  $\lambda = a + b\mathrm{i}$，$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}\mathrm{i}$ と書く
- このとき，
  $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}\mathrm{i}) = (a + b\mathrm{i})(\mathbf{u} + \mathbf{v}\mathrm{i}) = (a\mathbf{u} - b\mathbf{v}) + (a\mathbf{v} + b\mathbf{u})\mathrm{i}$
- 実部と虚部を比較すると，次が得られる
  - 実部：$A\mathbf{u} = a\mathbf{u} - b\mathbf{v}$
  - 虚部：$A\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{u}$

実対称行列の固有値 (続)

証明 (続) : $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} A\mathbf{v}$ を考える

- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} A\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(a\mathbf{v} + b\mathbf{u}) = a\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} + b\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$
- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} A\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$
  $= (a\mathbf{u} - b\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = a\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} - b\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$
- $\therefore 0 = b(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} + \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v})$

$\neq 0$ (なぜ？)

実対称行列の固有値 (続)

証明 (続) : $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} A\mathbf{v}$ を考える

- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} A\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(a\mathbf{v} + b\mathbf{u}) = a\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} + b\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$
- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} A\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$
  $= (a\mathbf{u} - b\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = a\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} - b\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$
- $\therefore 0 = b(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} + \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v})$
  $\neq 0$ (なぜ？)
- $\therefore b = 0$
- $\therefore \lambda = a \in \mathbb{R}$ □

実対称行列の固有ベクトル

$n \times n$ 実対称行列 A

性質：実対称行列の固有ベクトル **重要**

λ が A の固有値 $\Rightarrow$
λ に対する A の実固有ベクトルが存在

証明：$\mathbf{x}$ を λ に対する A の固有ベクトルとする

- 実ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を用いて，$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}\mathrm{i}$ と書く
- このとき，$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}\mathrm{i}) = \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}\mathrm{i})$
- 実部と虚部に分けると，λ が実数なので
  - 実部：$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$
  - 虚部：$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$
- $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ のとき，$\mathbf{u}$ が A の実固有ベクトル，
  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ のとき，$\mathbf{v}$ が A の実固有ベクトル $\square$

実対称行列の固有ベクトルの直交性

$n \times n$ 実対称行列 A

性質：実対称行列の固有ベクトルの直交性

λ, μ が A の固有値，$\lambda \neq \mu$
$\mathbf{x}$ が λ に対する A の実固有ベクトル $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交
$\mathbf{y}$ が μ に対する A の実固有ベクトル

証明：$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = 0$ を証明すればよい

- $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mu\mathbf{y}) = \mu\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$
- $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = (\lambda\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$

実対称行列の固有ベクトルの直交性

$n \times n$ 実対称行列 A

性質：実対称行列の固有ベクトルの直交性

λ, μ が A の固有値，$\lambda \neq \mu$
$\mathbf{x}$ が λ に対する A の実固有ベクトル $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交
$\mathbf{y}$ が μ に対する A の実固有ベクトル

証明：$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = 0$ を証明すればよい

- $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mu\mathbf{y}) = \mu\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$
- $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = (\lambda\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$
- $\therefore \mu\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$
- $\lambda \neq \mu$ より，$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = 0$ □

実対称行列から正規直交基底を

$n \times n$ 実対称行列 A

性質：実対称行列の固有ベクトルから正規直交基底

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が A の固有値 $\Rightarrow$
各 λ_i の実固有ベクトル $\mathbf{x}_i$ で，
$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となるものが存在

証明：

- 固有値がすべて異なる場合は，前のページの性質から OK
- そうでない場合は，ややこしい (ここでは省略) □

実対称行列から正規直交基底を：例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ のとき

- 固有値の計算

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

$\therefore A$ の固有値は $2, -1, -1$

実対称行列から正規直交基底を：例 (続 1)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき

- 固有値 2 に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}$ の計算

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $x_1 = x_2 = x_3$
- $\therefore$ 単位固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を選べる

実対称行列から正規直交基底を：例 (続 2)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき

- 固有値 -1 に対応する固有ベクトル $\mathbf{y}$ の計算

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $y_1 + y_2 + y_3 = 0$
- $\therefore$ 直交する単位固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

  を選べる

実対称行列から正規直交基底を：例 (続 3)

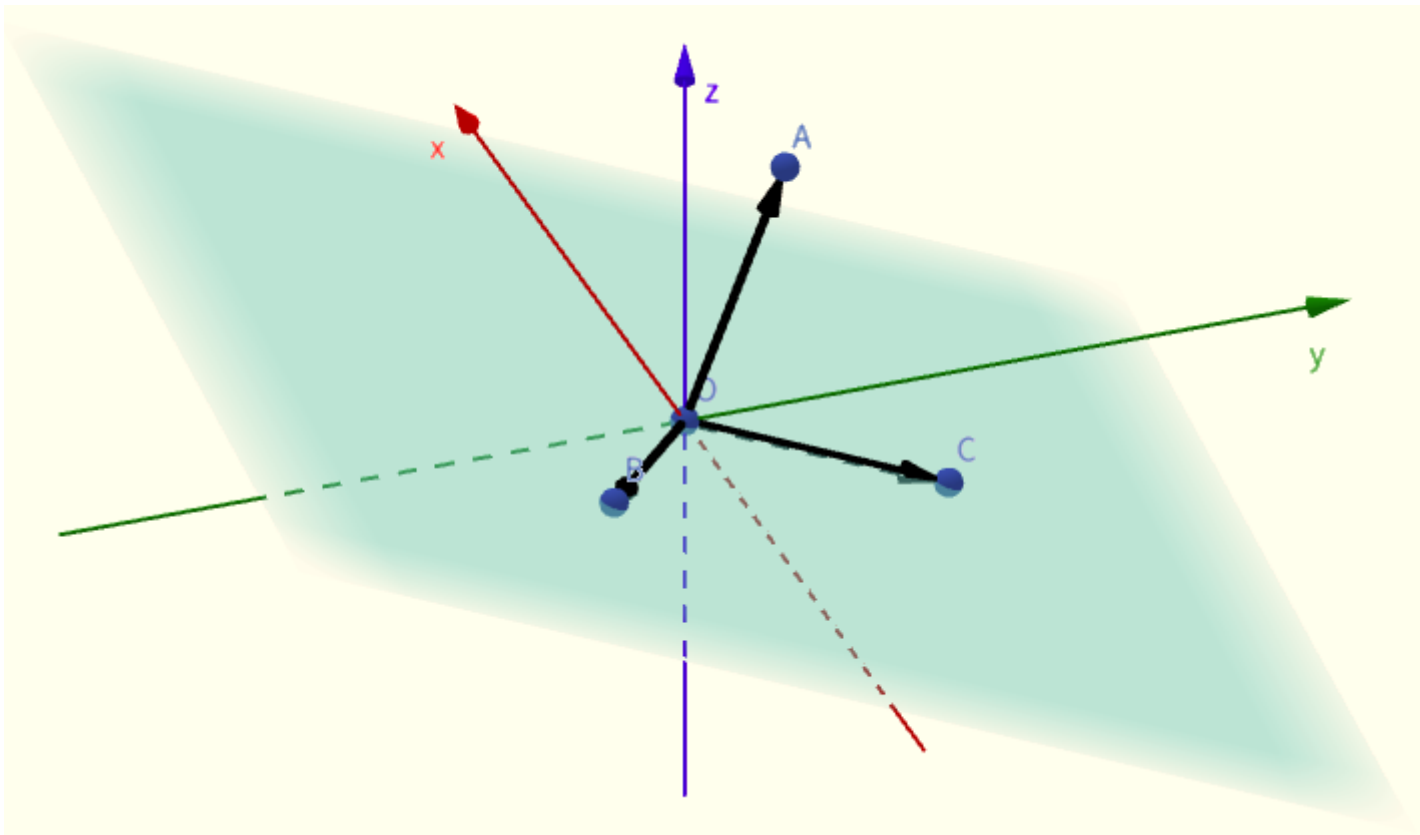
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ のとき

- 選ばれた単位固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



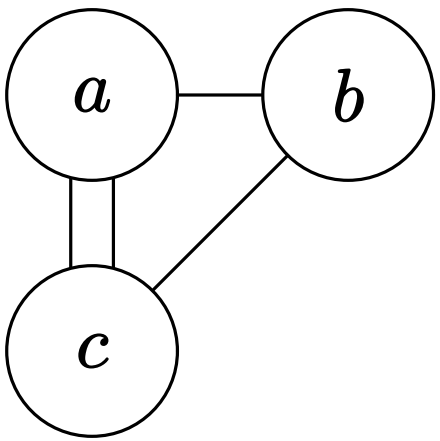
本日の内容

1. 行列の固有値と固有ベクトル (復習)
2. **グラフのスペクトル：定義**
3. グラフのスペクトル：性質

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：グラフのスペクトル (spectrum，複数形 spectra)

G の **スペクトル** とは，
G の隣接行列 A_G の固有値全体 (多重集合) のこと



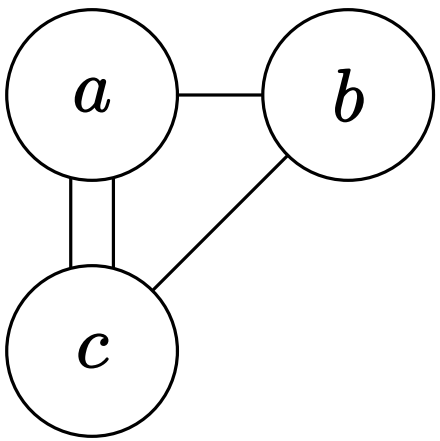
$$A_G = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 2 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

G のスペクトル $= \{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, -2\}$

無向グラフ $G = (V, E)$

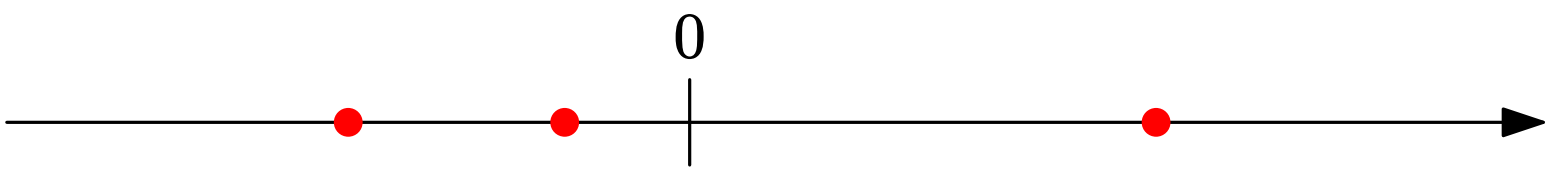
定義：グラフのスペクトル (spectrum，複数形 spectra)

G の **スペクトル** とは，
G の隣接行列 A_G の固有値全体 (多重集合) のこと



$$A_G = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 2 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

G のスペクトル $= \{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, -2\}$



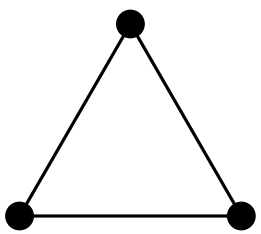
完全グラフのスペクトル

頂点数 n の完全グラフ K_n，整数 $n \geq 1$

性質：完全グラフのスペクトル

K_n のスペクトルは次で定められる

$$\{n-1, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{\text{重複度} n-1}\}$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$= -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

$$\therefore K_3 \text{ のスペクトル} = \{2, -1, -1\}$$

巡回行列

完全グラフのスペクトルを導くために，巡回行列を用いる

定義：巡回行列 (circulant matrix)

$n \times n$ 実行列 C が **巡回行列** であるとは
実数 $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ を使って次のように書けること

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

例：$n = 3,\ c_0 = 1,\ c_1 = 4,\ c_2 = 2$ のとき

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

巡回行列の固有値

補題：巡回行列の固有値

C が前のページのように定められる巡回行列 $\Rightarrow$

$$C \text{ の固有値全体} = \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} c_j \xi^{kj} \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$$

ただし，$\xi = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$ (1 の原始 n 乗根の１つ)

例：$n = 3$，$c_0 = 1$，$c_1 = 4$，$c_2 = 2$ のとき

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

C の固有値は

- $1 \cdot \exp(2\pi \mathrm{i}/3)^{0 \cdot 0} + 4 \cdot \exp(2\pi \mathrm{i}/3)^{0 \cdot 1} + 2 \cdot \exp(2\pi \mathrm{i}/3)^{0 \cdot 2}$
- $1 \cdot \exp(2\pi \mathrm{i}/3)^{1 \cdot 0} + 4 \cdot \exp(2\pi \mathrm{i}/3)^{1 \cdot 1} + 2 \cdot \exp(2\pi \mathrm{i}/3)^{1 \cdot 2}$
- $1 \cdot \exp(2\pi \mathrm{i}/3)^{2 \cdot 0} + 4 \cdot \exp(2\pi \mathrm{i}/3)^{2 \cdot 1} + 2 \cdot \exp(2\pi \mathrm{i}/3)^{2 \cdot 2}$

巡回行列の固有値：証明 (1)

証明：次のベクトル $\mathbf{x}$ を考える

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^k \\ \xi^{2k} \\ \vdots \\ \xi^{(n-1)k} \end{bmatrix}$$

このとき，次が成り立つ

$$C\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^k \\ \vdots \\ \xi^{(n-1)k} \end{bmatrix} = \cdots$$

巡回行列の固有値：証明 (2)

証明 (続)：$\xi^n = 1$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
C\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi^k \\ \vdots \\ \xi^{(n-1)k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_0 + c_1\xi^k + \cdots + c_{n-1}\xi^{(n-1)k} \\ c_{n-1} + c_0\xi^k + \cdots + c_{n-2}\xi^{(n-1)k} \\ \vdots \\ c_1 + c_2\xi^k + \cdots + c_0\xi^{(n-1)k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (c_0 + c_1\xi^k + \cdots + c_{n-1}\xi^{(n-1)k}) \cdot 1 \\ (c_0 + c_1\xi^k + \cdots + c_{n-1}\xi^{(n-1)k}) \cdot \xi^k \\ \vdots \\ (c_0 + c_1\xi^k + \cdots + c_{n-1}\xi^{(n-1)k}) \cdot \xi^{(n-1)k} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$



完全グラフのスペクトル：証明

性質：完全グラフのスペクトル

K_n のスペクトルは次で定められる

$$\{n-1, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{\text{重複度} n-1}\}$$

証明：$n \geq 2$ のとき，A_{K_n} は $c_0 = 0, c_i = 1\ (i \neq 0)$ の巡回行列

- 補題より，A_{K_n} の固有値は次で定まる

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j \xi^{kj} = \sum_{j=0}^{n-1} \xi^{kj} - 1$$

$$= \begin{cases} n-1 & (k = 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (k \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$A_{K_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

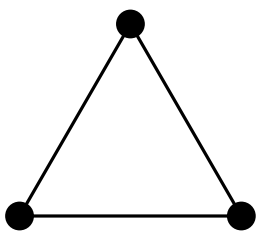
閉路のスペクトル

頂点数 n の閉路 C_n，整数 $n \geq 3$

性質：閉路のスペクトル

C_n のスペクトルは次で定められる

$$\left\{ 2\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \middle| k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$$



$$C_3 \text{ のスペクトル} = \left\{ 2\cos 0, 2\cos\frac{2\pi}{3}, 2\cos\frac{4\pi}{3} \right\}$$

$$= \{2, -1, -1\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

閉路のスペクトル：証明

証明：A_{C_n} は $c_1 = c_{n-1} = 1, c_i = 0\ (i \neq 1, n-1)$ の巡回行列

- 補題より，A_{C_n} の固有値は

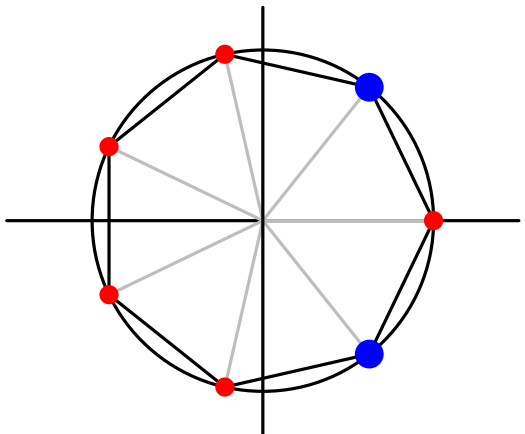
$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j \xi^{kj} = \xi^k + \xi^{(n-1)k}$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{n}\right) + \left(\cos\frac{2\pi(n-1)k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi(n-1)k}{n}\right)$$

$$= 2\cos\frac{2\pi k}{n}$$

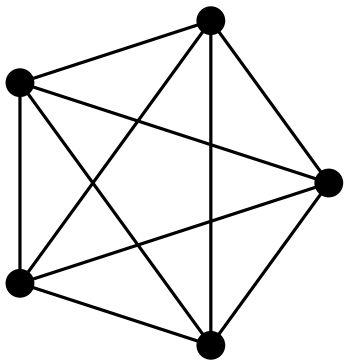
□

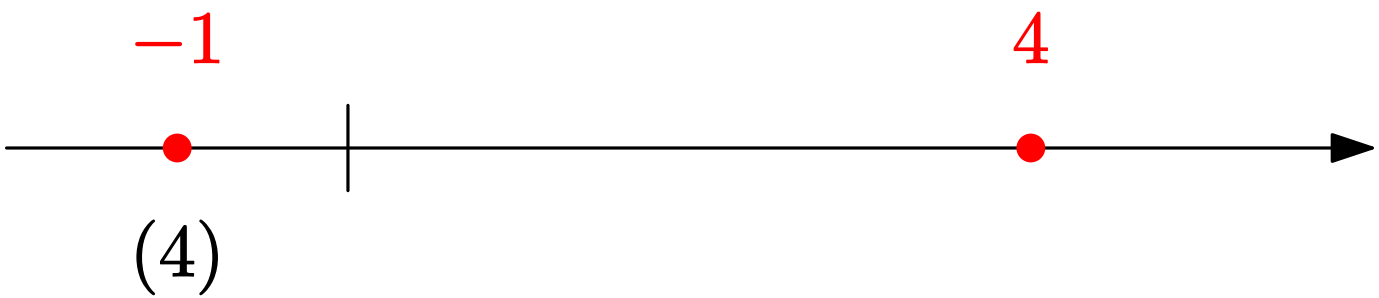
$$A_{C_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



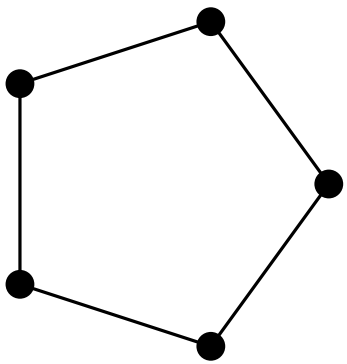
完全グラフと閉路のスペクトル：例

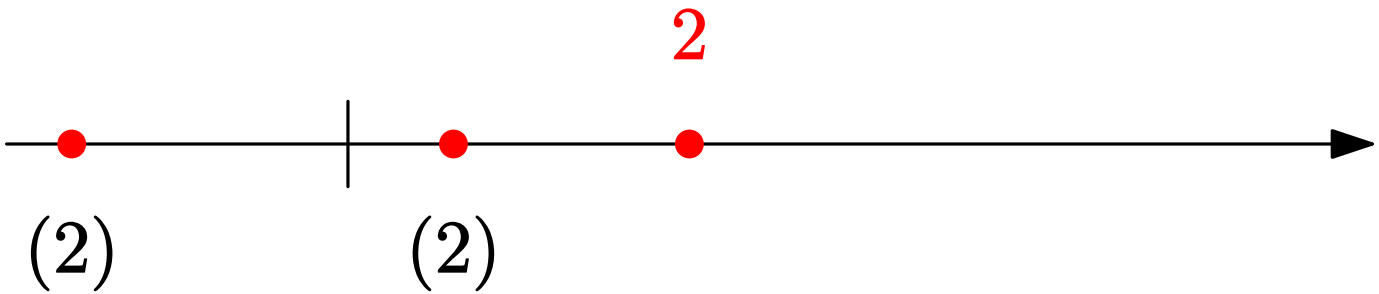
K_n のスペクトル $= \{n-1, -1, -1, \ldots, -1\}$





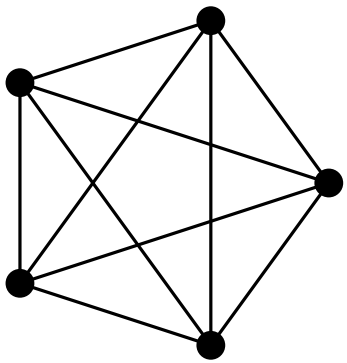
C_n のスペクトル $= \left\{ 2\cos\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right) \,\middle|\, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$

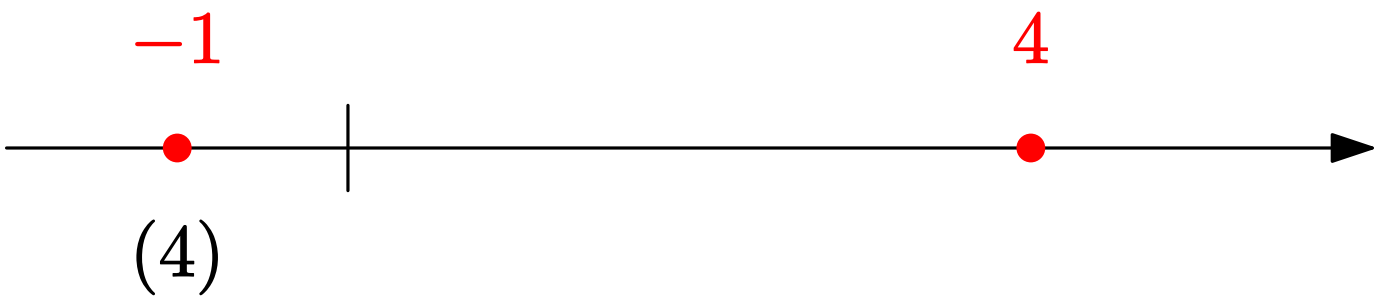




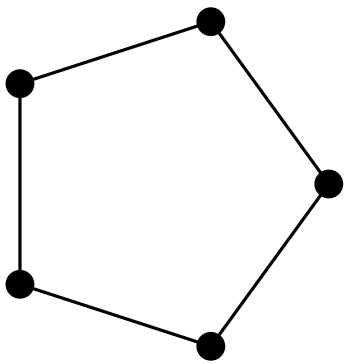
完全グラフと閉路のスペクトル：例

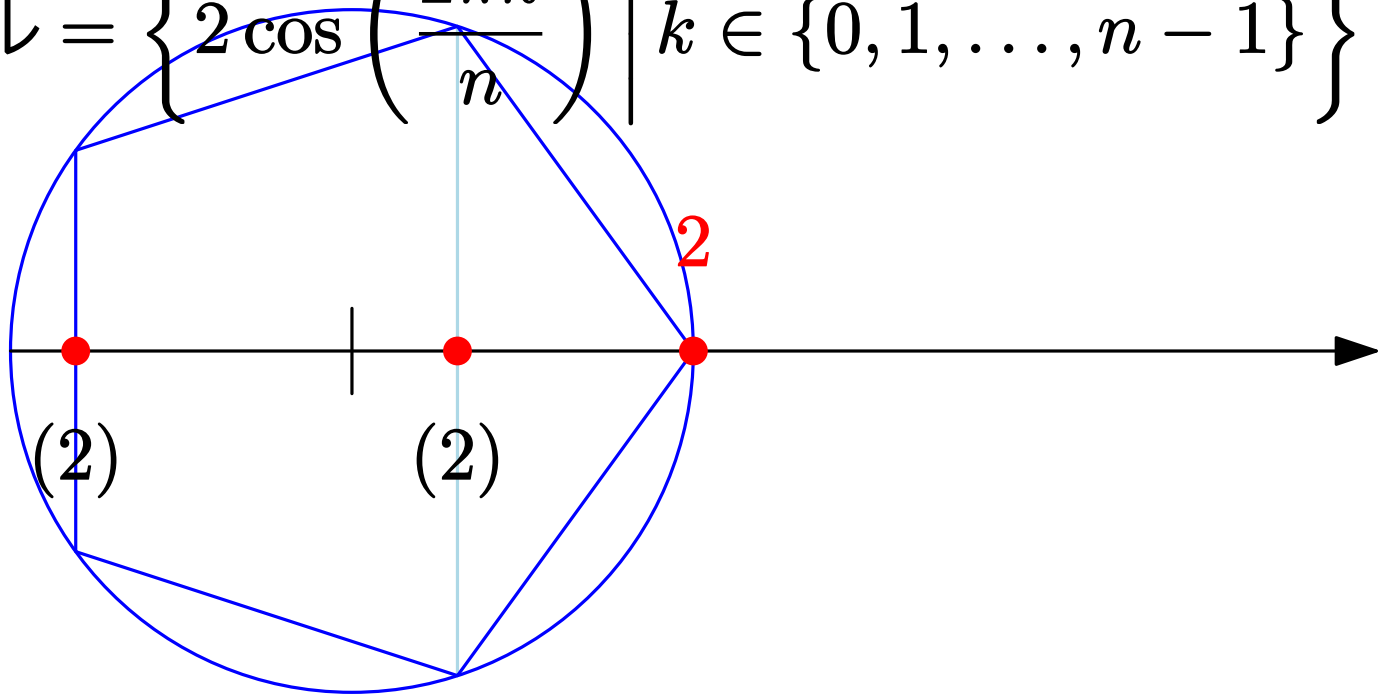
K_n のスペクトル $= \{n-1, -1, -1, \ldots, -1\}$





C_n のスペクトル $= \left\{ 2\cos\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right) \,\middle|\, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$





本日の内容

1. 行列の固有値と固有ベクトル (復習)
2. グラフのスペクトル：定義
3. **グラフのスペクトル：性質**

隣接行列の固有値は実数

性質：隣接行列の固有値は実数

任意のグラフ G に対して，隣接行列 A_G の固有値は実数

証明：隣接行列の定義より，隣接行列は実対称行列

- 実対称行列の固有値は実数なので，
  隣接行列の固有値は実数 □

正則グラフの固有値

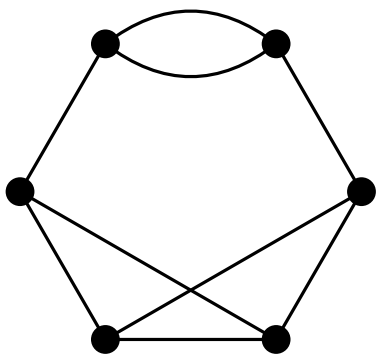
無向グラフ $G = (V, E)$，整数 $d \geq 0$

性質：正則グラフの固有値

G が d-正則グラフ $\Rightarrow$ d は A_G の固有値

証明：A_G において，各行の成分和 $= d$

- $\therefore A_G\mathbf{1} = d\mathbf{1}$
- $\therefore d$ は A_G の固有値で，$\mathbf{1}$ は d に対する固有ベクトル　□



$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

正則グラフの固有値

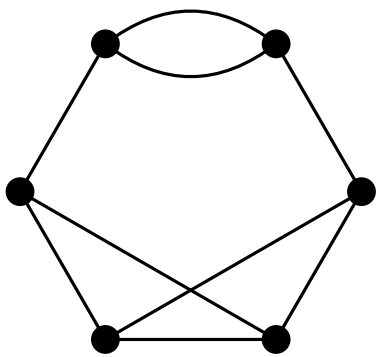
無向グラフ $G = (V, E)$，整数 $d \geq 0$

性質：正則グラフの固有値

G が d-正則グラフ $\Rightarrow$ d は A_G の固有値

証明：A_G において，各行の成分和 $= d$

- $\therefore A_G\mathbf{1} = d\mathbf{1}$
- $\therefore d$ は A_G の固有値で，$\mathbf{1}$ は d に対する固有ベクトル　□



$$A_G\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

正則グラフの固有値の範囲

無向グラフ $G = (V, E)$，整数 $d \geq 0$

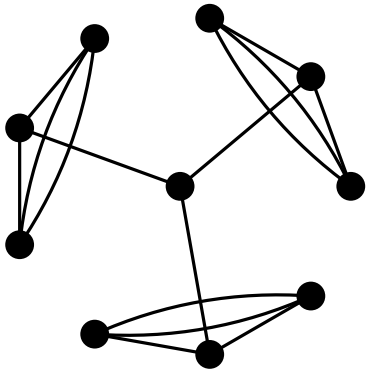
性質：正則グラフの固有値の範囲

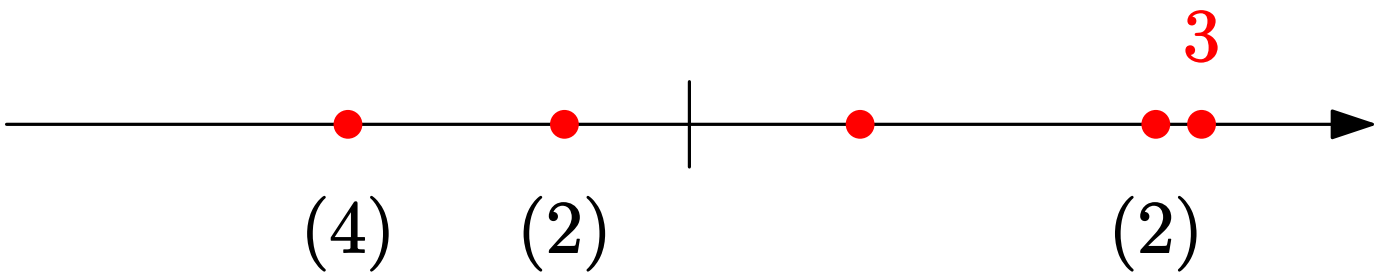
G が d-正則グラフ，λ が A_G の固有値 $\Rightarrow |\lambda| \leq d$

証明：$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^V$ を λ に対する A_G の実固有ベクトルとする

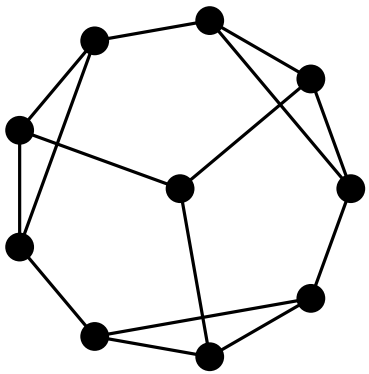
- $v = \underset{u \in V}{\operatorname{argmax}} |x_u|$ とする (注：$|x_v| > 0$)
- $$|\lambda||x_v| = |(A_G\mathbf{x})_v| = \left|\sum_{u \in V} (A_G)_{v,u} x_u\right| \leq \sum_{u \in V} |(A_G)_{v,u}||x_u|$$
$$\leq |x_v| \sum_{u \in V} |(A_G)_{v,u}| = d|x_v|$$
- $\therefore |\lambda| \leq d$ □

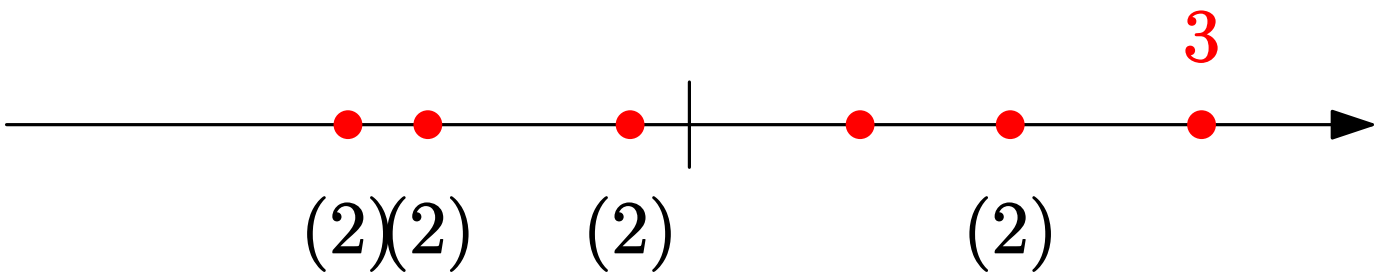
正則グラフの固有値の範囲：例



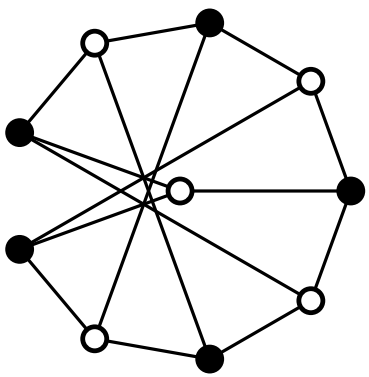


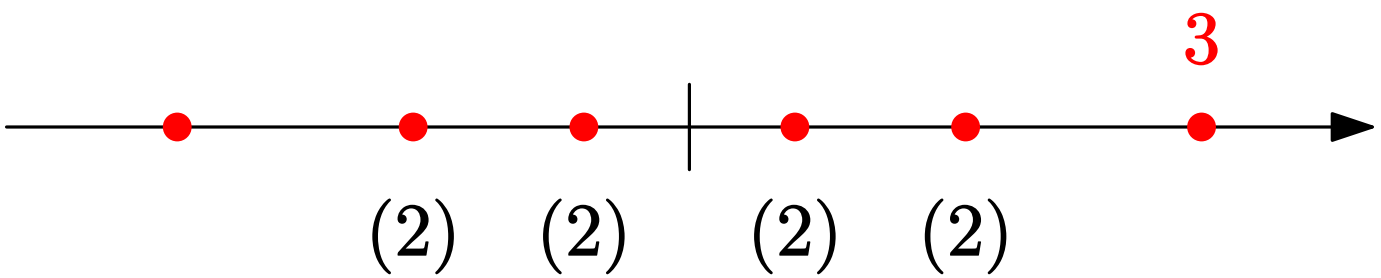
$\{3., 2.73205081, 2.73205081, 1., -0.73205081, -0.73205081, -2., -2., -2., -2.\}$





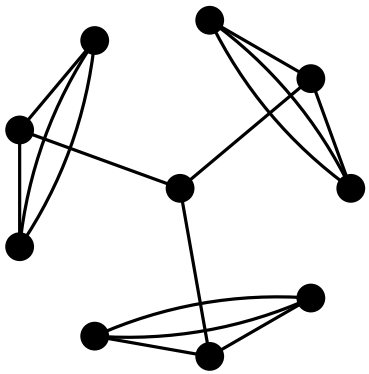
$\{3., 1.87038524, 1.87038524, 1., -0.34729636, -0.34729636, -1.53208889, -1.53208889, -2., -2.\}$

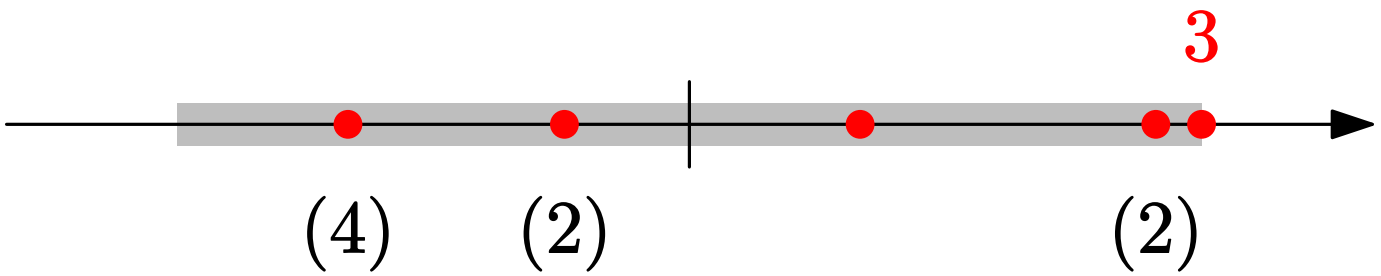




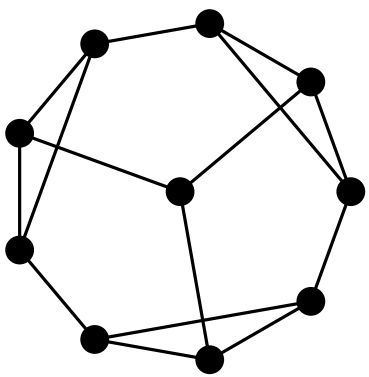
$\{3., 1.61803399, 1.61803399, 0.61803399, 0.61803399, -0.61803399, -0.61803399, -1.61803399, -1.61803399, -3.\}$

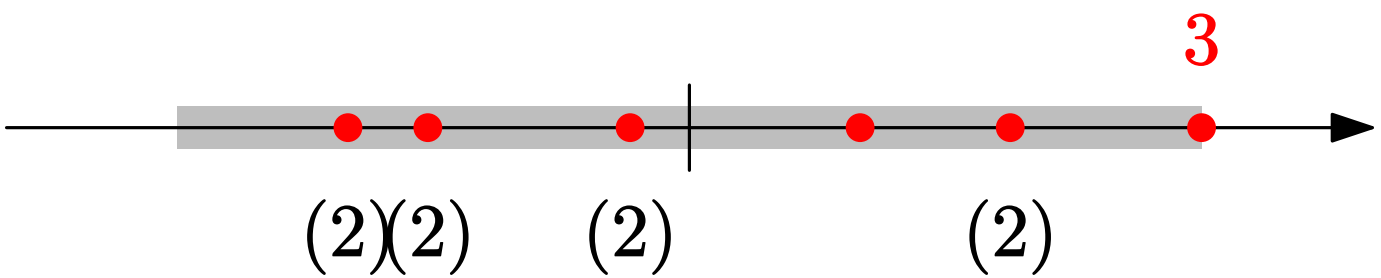
正則グラフの固有値の範囲：例



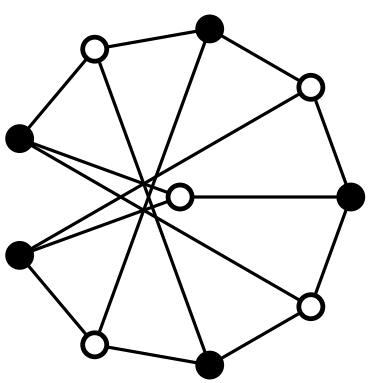


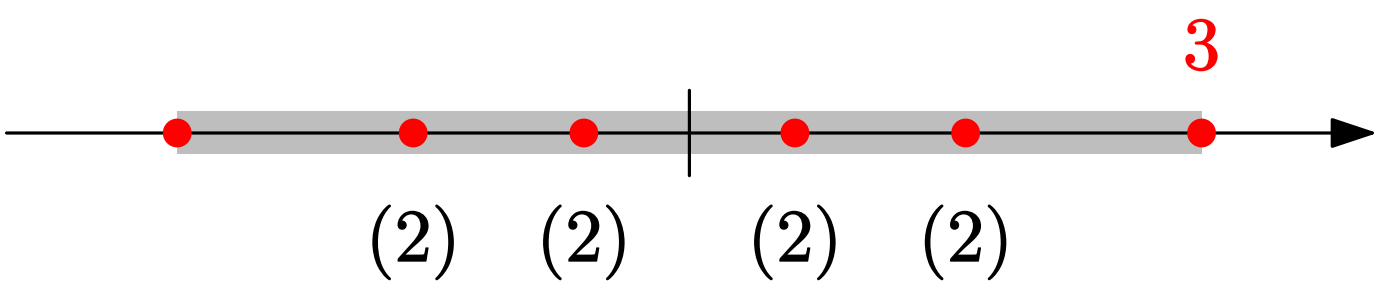
$\{3., 2.73205081, 2.73205081, 1., -0.73205081, -0.73205081, -2., -2., -2., -2.\}$





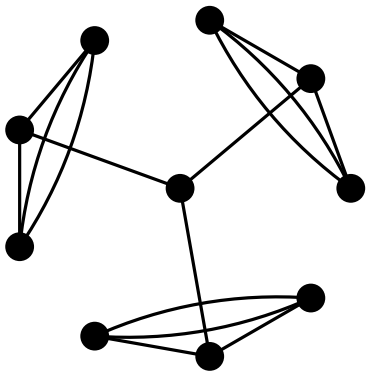
$\{3., 1.87038524, 1.87038524, 1., -0.34729636, -0.34729636, -1.53208889, -1.53208889, -2., -2.\}$

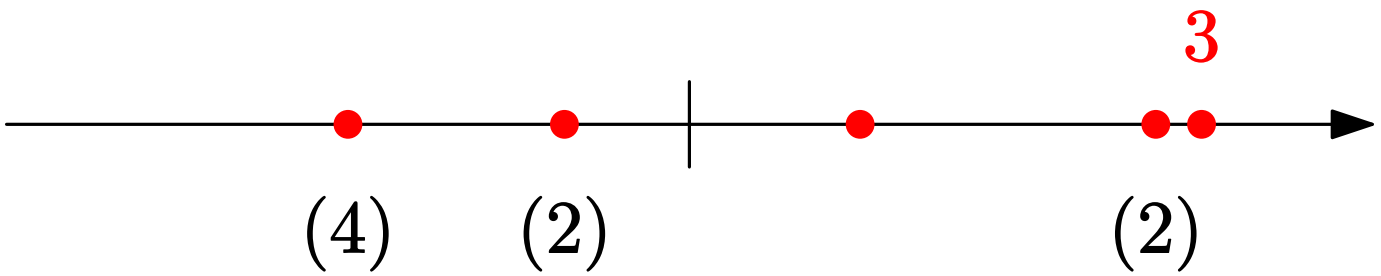




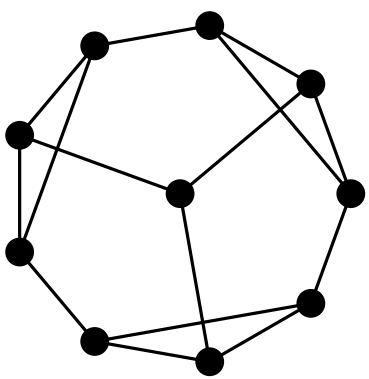
$\{3., 1.61803399, 1.61803399, 0.61803399, 0.61803399, -0.61803399, -0.61803399, -1.61803399, -1.61803399, -3.\}$

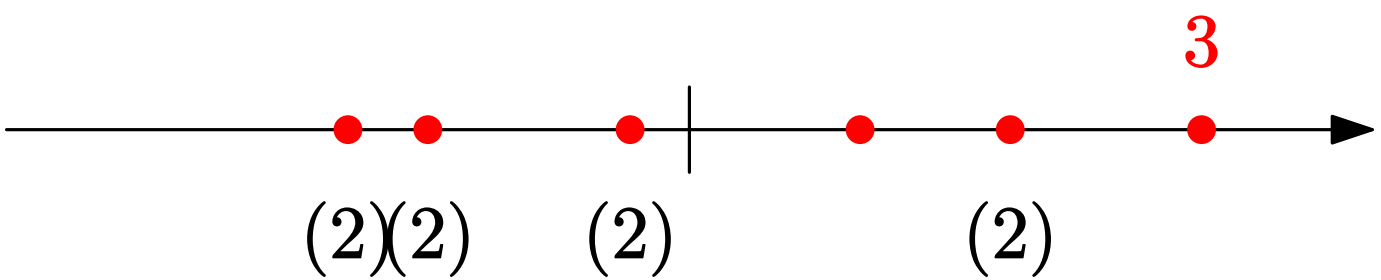
正則グラフの固有値の範囲：例



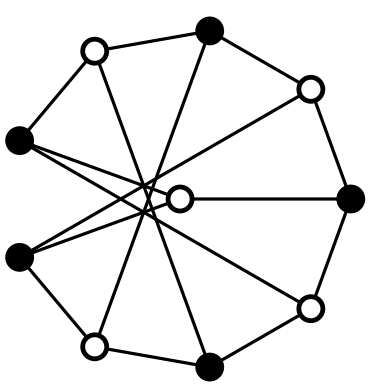


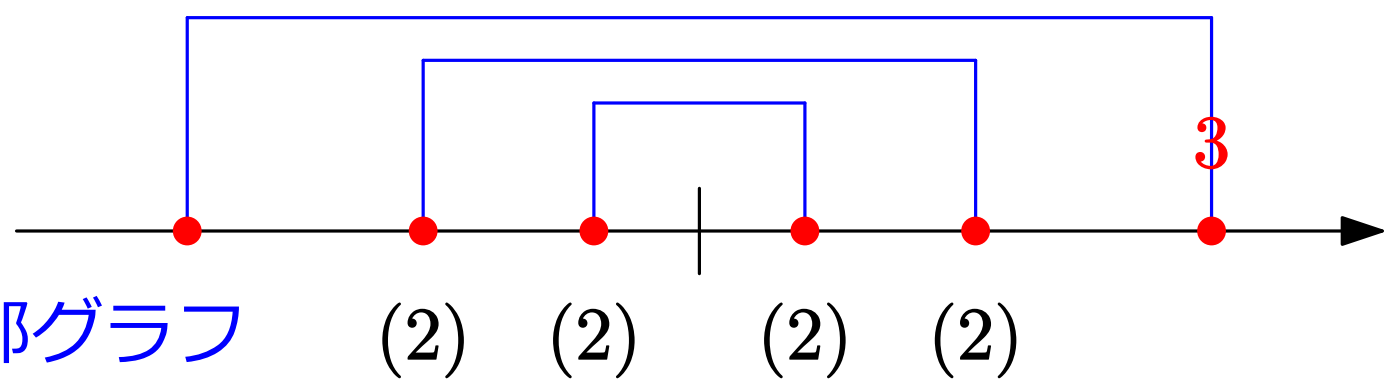
$\{3., 2.73205081, 2.73205081, 1., -0.73205081, -0.73205081, -2., -2., -2., -2.\}$





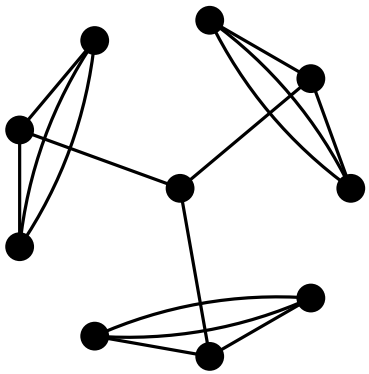
$\{3., 1.87038524, 1.87038524, 1., -0.34729636, -0.34729636, -1.53208889, -1.53208889, -2., -2.\}$

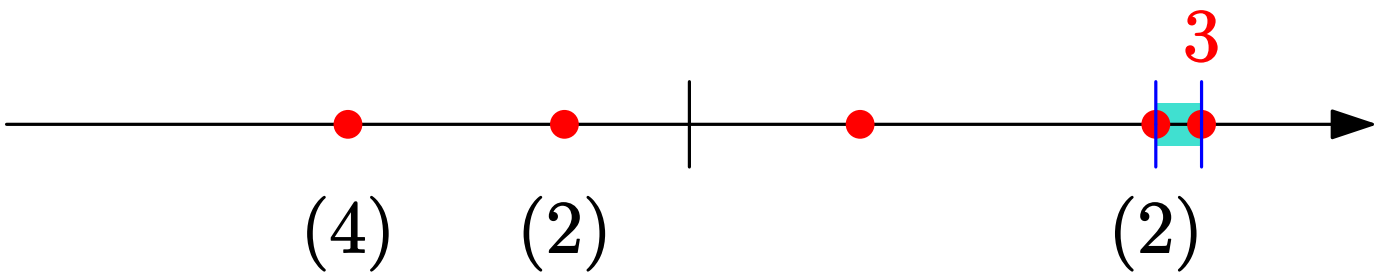




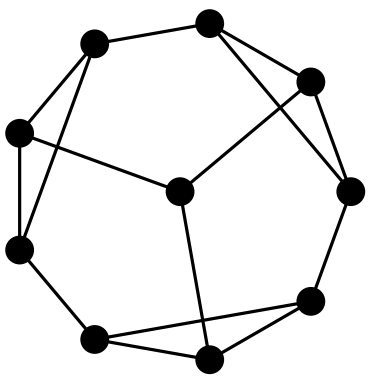
$\{3., 1.61803399, 1.61803399, 0.61803399, 0.61803399, -0.61803399, -0.61803399, -1.61803399, -1.61803399, -3.\}$

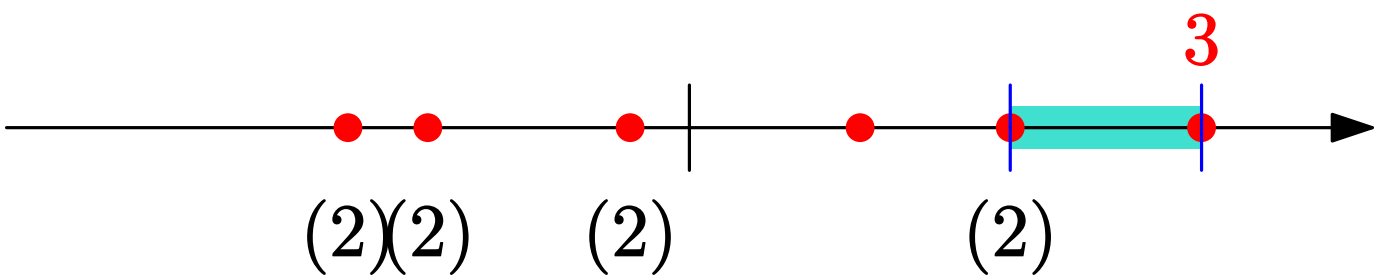
正則グラフの固有値の範囲：例



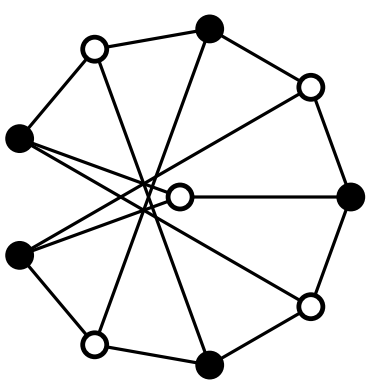


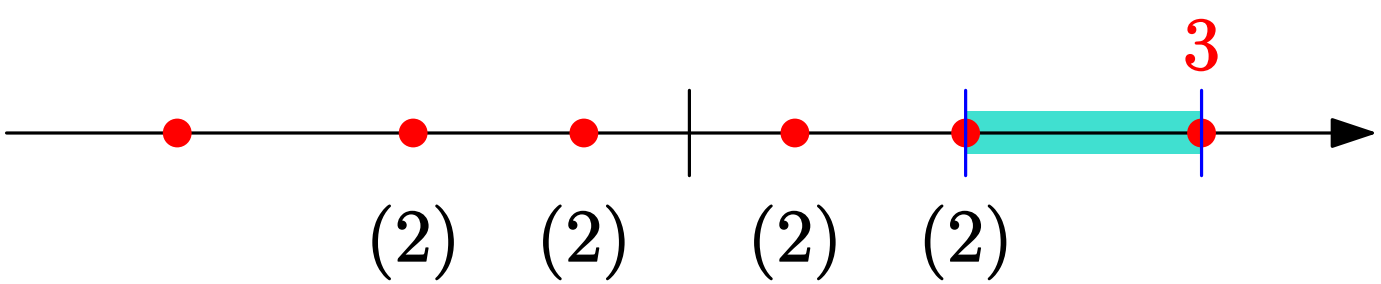
$\{3., 2.73205081, 2.73205081, 1., -0.73205081, -0.73205081, -2., -2., -2., -2.\}$





$\{3., 1.87038524, 1.87038524, 1., -0.34729636, -0.34729636, -1.53208889, -1.53208889, -2., -2.\}$





$\{3., 1.61803399, 1.61803399, 0.61803399, 0.61803399, -0.61803399, -0.61803399, -1.61803399, -1.61803399, -3.\}$

二部グラフ

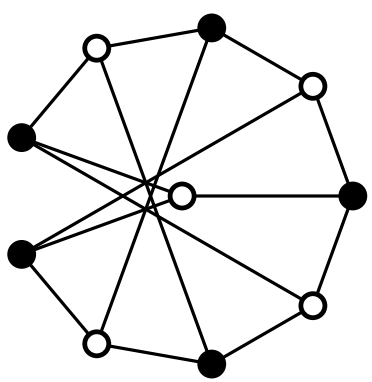
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：二部グラフ (bipartite graph)

G が **二部グラフ** であるとは，
V の二分割 $\{V_1, V_2\}$ が存在し，
任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，次が成り立つこと

$$\{u, v\} \cap V_1 \neq \emptyset \text{ かつ } \{u, v\} \cap V_2 \neq \emptyset$$

V_1, V_2 を G の **部集合** (partite set) と呼ぶことがある



$\{V_1, V_2\}$ が V の二分割 $\Leftrightarrow$

- $V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $V_1 \cup V_2 = V$

二部グラフ

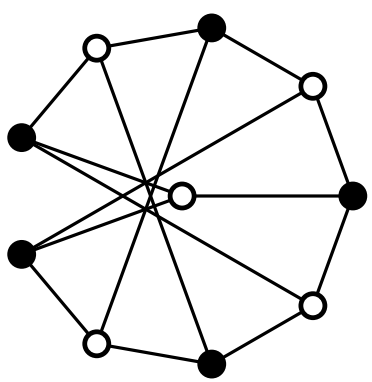
無向グラフ $G = (V, E)$

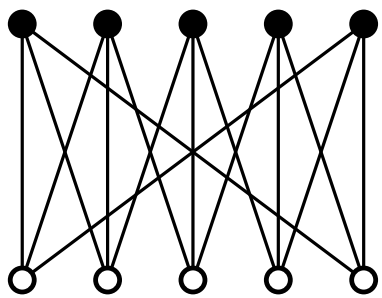
定義：二部グラフ (bipartite graph)

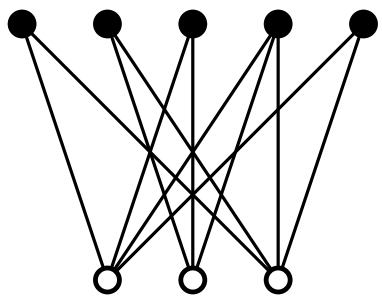
G が **二部グラフ** であるとは，
V の二分割 $\{V_1, V_2\}$ が存在し，
任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，次が成り立つこと

$$\{u, v\} \cap V_1 \neq \emptyset \text{ かつ } \{u, v\} \cap V_2 \neq \emptyset$$

V_1, V_2 を G の **部集合** (partite set) と呼ぶことがある





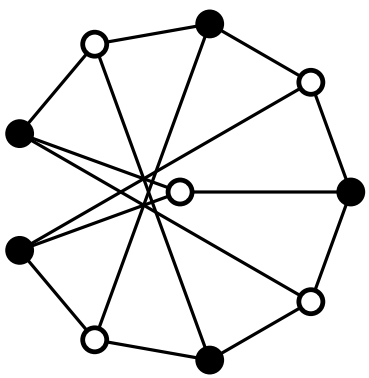


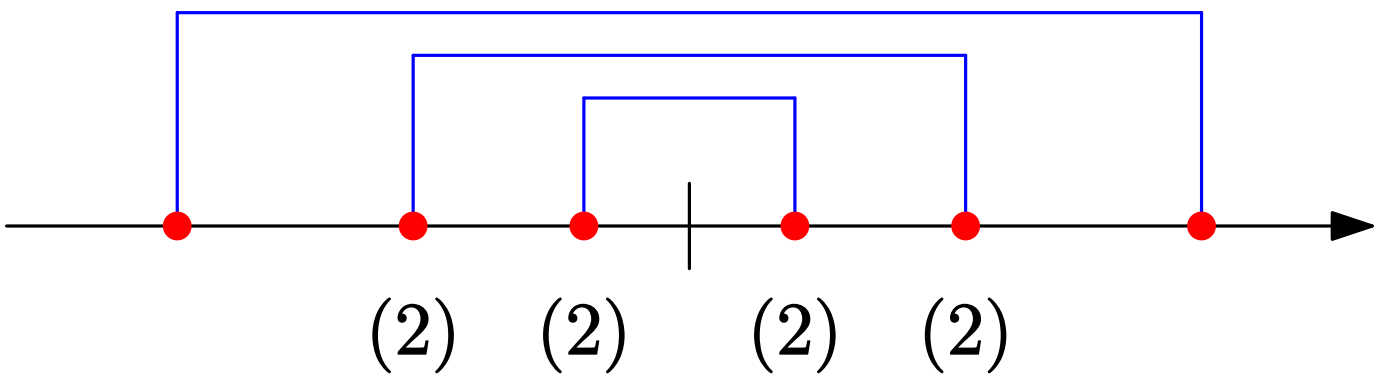
二部グラフの固有値

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：二部グラフの固有値

G が二部グラフ
λ が A_G の固有値 $\Rightarrow$ $-\lambda$ は A_G の固有値





二部グラフの固有値

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：二部グラフの固有値

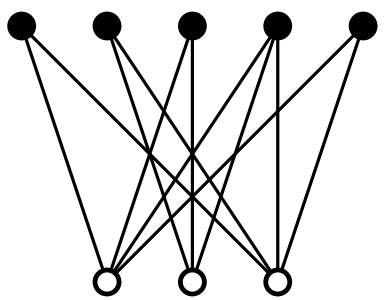
G が二部グラフ
λ が A_G の固有値 $\Rightarrow$ $-\lambda$ は A_G の固有値

証明：V_1, V_2 を G の部集合とする

- ある実行列 B を使って，A_G は次のように書ける

$$A_G = \begin{array}{c|c|c} & V_1 & V_2 \\ \hline V_1 & O & B \\ \hline V_2 & B^{\mathrm{T}} & O \end{array}$$

例：



$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1 \\ \hline 1&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0 \end{array}\right)$$

二部グラフの固有値

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：二部グラフの固有値

G が二部グラフ
λ が A_G の固有値 $\Rightarrow$ $-\lambda$ は A_G の固有値

証明：V_1, V_2 を G の部集合とする

- ある実行列 B を使って，A_G は次のように書ける

$$A_G = \begin{array}{c|c|c} & V_1 & V_2 \\ \hline V_1 & O & B \\ \hline V_2 & B^{\mathrm{T}} & O \end{array} \qquad \mathbf{x} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline V_1 & \mathbf{x}_1 \\ \hline V_2 & \mathbf{x}_2 \end{array}$$

- λ に対する A_G の固有ベクトル $\mathbf{x}$ を上のように書く
- このとき，$A_G\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

二部グラフの固有値 (続)

- このとき,

$$\lambda \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{x}_1 \\ \hline \mathbf{x}_2 \\ \hline \end{array} = \lambda \mathbf{x} = A_G \mathbf{x} = \begin{array}{|c|c|}\hline O & B \\ \hline B^{\mathrm{T}} & O \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{x}_1 \\ \hline \mathbf{x}_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline B\mathbf{x}_2 \\ \hline B^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 \\ \hline \end{array}$$

- したがって,

$$-\lambda \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{x}_1 \\ \hline -\mathbf{x}_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline -B\mathbf{x}_2 \\ \hline B^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline O & B \\ \hline B^{\mathrm{T}} & O \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{x}_1 \\ \hline -\mathbf{x}_2 \\ \hline \end{array} = A_G \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{x}_1 \\ \hline -\mathbf{x}_2 \\ \hline \end{array}$$

- つまり，$-\lambda$ も A_G の固有値 □

今回のまとめ

1. **行列の固有値と固有ベクトル**
   - 実対称行列の固有値は実数
   - 実対称行列の固有ベクトルは実ベクトルとしてとれる
   - 実対称行列の実固有ベクトルで正規直交基底が作れる
2. **グラフのスペクトル：定義**
   - グラフのスペクトル $\equiv$ 隣接行列の固有値全体
   - 完全グラフのスペクトル $= \{n-1, -1, -1, \ldots, -1\}$
   - 閉路のスペクトル $= \{2\cos\frac{2\pi k}{n} \mid k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$
   - 証明で使った性質：巡回行列の固有値
3. **グラフのスペクトル：性質**
   - d は d 正則グラフの隣接行列の固有値
   - d 正則グラフの隣接行列の固有値 $\in [-d, d]$
   - 二部グラフの固有値は原点周りで対称

次回の予告

次回の予告

エクスパンダ を定義する

- そのために，**等周定数** を定義する

クイズ

Q 授業内で発表します

1.

2.

3.

4.