離散最適化基礎論 (2026 年後学期)

エクスパンダ

第１回

グラフ理論速習

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 10 月 6 日

最終更新：2026 年 10 月 4 日　10:32

講義の概要

概要

離散最適化 における１つのトピックを集中的に学ぶ

離散最適化 = Discrete Optimization

今年度のトピック

エクスパンダ

エクスパンダ = Expander

(エキスパンダ，エクスパンダー，エキスパンダーとも書く)

講義の目標

次の 2 つができるようになること

目標 1

エクスパンダ に関わる **用語・概念** を
正しく使う ことができるようになる

目標 2

組合せ，線形代数，最適化，確率 の観点を相互に往来し，
分野の間の垣根がないことを今後の研究や日常生活で
意識できるようになる

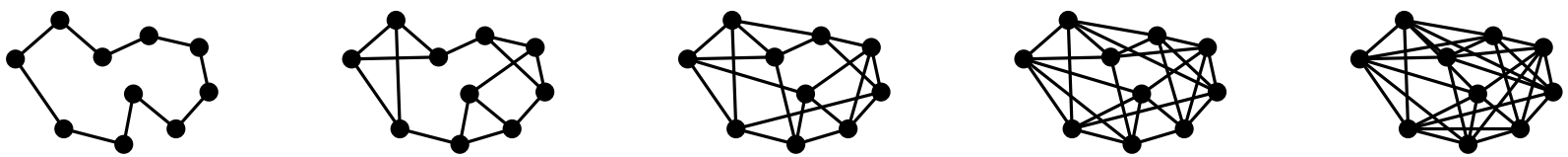
エクスパンダ って何？ (1)



エクスパンダ って何？ (2)

辺の数

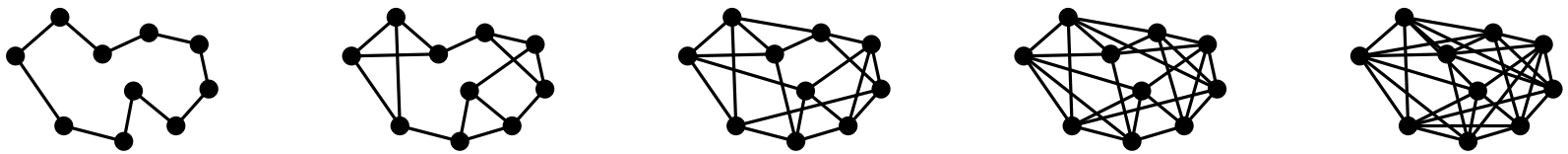
小さい　　大きい



エクスパンダ って何？ (2)

辺の数

小さい　　大きい



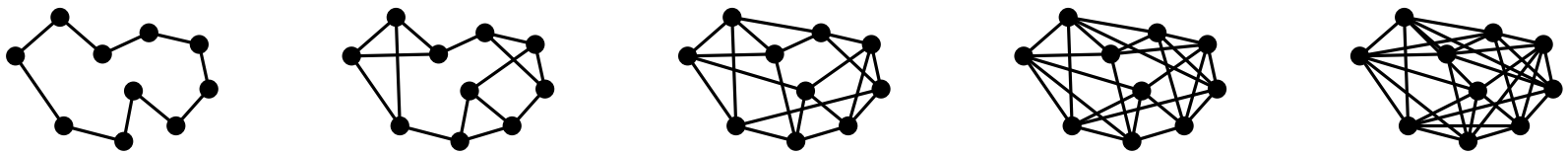
引っ張ったとき

伸ばしやすい　　伸ばしにくい

エクスパンダ って何？ (2)

辺の数

小さい　　大きい



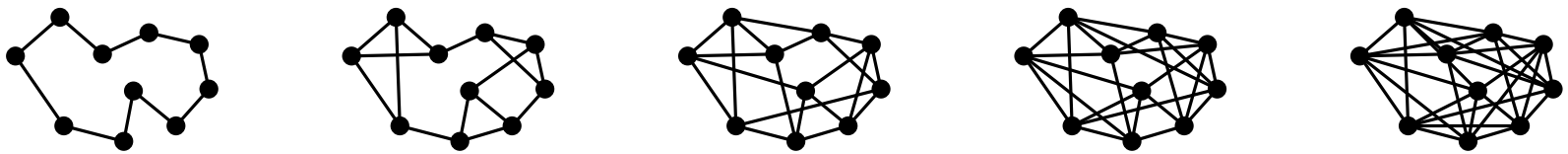
引っ張ったとき

伸ばしやすい ???　　伸ばしにくい ???

エクスパンダ って何？ (2)

辺の数

小さい　　大きい



引っ張ったとき

伸ばしやすい ???　　伸ばしにくい ???

疑問

次を満たすグラフは存在するか？

- 辺の数が 小さい
- 引っ張ったときに 伸ばしにくい

エクスパンダ って何？ (3)

定義 (きわめて非形式)：エクスパンダ

エクスパンダ (expander) とは次を満たすグラフ

- 辺の数が小さい
- 引っ張ったときに伸ばしにくい

エクスパンダ って何？ (3)

定義 (きわめて非形式)：エクスパンダ

エクスパンダ (expander) とは次を満たすグラフ

- 辺の数が小さい
- 引っ張ったときに伸ばしにくい

この半年で行うこと

- エクスパンダの正確な定義を与える
- エクスパンダの性質を調査する
- エクスパンダの存在を探る

エクスパンダ研究の 10 大マイルストーン

1. エクスパンダの定義，確率的構成 — Pinsker ’73
2. エクスパンダの明示的構成 — Margulis ’73
3. Cheeger の不等式 — Dodziuk ’84; Alon, Milman ’85; Alon ’86
4. Alon-Boppana の不等式 — Alon ’86
5. Ramanujan グラフ — Lubotzky, Phillips, Sarnak ’88; Margulis ’88
6. ジグザグ積による明示的・組合せ的構成 — Reingold, Vahdan Wigderson ’02
7. 無損失エクスパンダの明示的構成 — Capalbo, Reingold, Vadhan, Wigderson ’02
8. 高次元 Ramanujan エクスパンダ — Lubotzky, Samuels, Vishne ’05
9. ほとんどすべての正則グラフはほぼ Ramanujan — Friedman ’08
10. すべての次数に対する二部 Ramanujan グラフ — Marcus, Spielman, Srivastava ’15

エクスパンダ応用の 10 大マイルストーン

1. スーパーコンセントレータ — Valiant ’76
2. ソーティング・ネットワーク — Ajtai, Komlós, Szemerédi ’83
3. 距離空間の埋め込み — Bourgain ’85
4. 脱乱択化 — Ajtai, Komlós, Szemerédi ’87; Gillman ’88
5. エクスパンダ符号 — Sipser, Spielman ’96
6. PCP 定理の組合せ的証明 — Dinur ’07
7. USTCON $\in$ L — Reingold ’08
8. 対称優対角線形方程式の高速解法 — Spielman, Teng ’04
9. 量子 LDPC 符号 — Panteleev, Kalachev ’21
10. 最大流問題の高速解法 — Chen, Kyng, Liu, Peng, Probst Gutenberg, Sachdeva ’22

スケジュール (前半)

1. グラフ理論速習 (10/6)
2. グラフのスペクトル (10/13)
3. グラフの等周定数とエクスパンダ (10/20)

＊ 休み (海外出張) (10/27)

＊ 休み (祝日) (11/3)

4. グラフの等周定数と直径 (11/10)
5. グラフの等周定数とランダムウォーク (11/17)
6. Cheeger の不等式 (11/24)

スケジュール (後半)

∗	休み (秋ターム試験)	(12/1)
7.	Alon-Boppana の定理：第 1 の証明	(12/8)
8.	Alon-Boppana の定理：第 2 の証明	(12/15)
9.	ジグザグ積：定義	(12/22)
∗	休み (冬季休業)	(12/29)
10.	ジグザグ積：証明	(1/5)
11.	エクスパンダの構成	(1/12)
12.	リフト：定義	(1/19)
13.	リフト：性質の紹介	(1/26)
∗	休み (修論発表会)	(2/2)
∗	期末試験	(2/9 仮)

授業の進め方：基本情報

教員

岡本吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4-206
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp

講義 Web ページ

https://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2026/expander/
- 講義スライド
- コメント回答
- その他

Google Classroom

内部シラバスのコードを見て，各自が登録

授業の進め方：各回の進行 (予定)

10:40	授業開始
11:20 頃	休憩 (3 分程度)
	授業再開
	授業終了
12:10	クイズ・コメント投稿
13:00	クイズ・コメント受付終了

授業の進め方：各回の進行 (予定)

10:40　授業開始

11:20 頃　休憩 (3 分程度)

授業再開

授業終了

12:10　クイズ・コメント投稿

13:00　クイズ・コメント受付終了

Google Classroom のフォームから投稿

- 質問・疑問
- 誤植の指摘
- 感想
- 要望
- 文句
- 雑談
- など何でも

授業の進め方：評価

評価方法

毎回のクイズ (計 13 回)
- 1 回 1 点満点

期末試験 (計 1 回)
- 1 回 100 点満点

$\rightsquigarrow$ 素点合計の上限 $= 1 \times 13 + 100 \times 1 = 113$

成績

成績 $= \min\{$素点合計$, 100\}$

授業の考え方：数学と証明

注意点 1

この授業では，数学を使い，数学的な証明もする

理由

- 授業の内容の正しさが **検証** できるべき
- 証明という **技法** を身につけるべき

$\rightsquigarrow$ この授業では **批判的思考**，**論理的思考** の体得 も目指す

授業の考え方：プログラミング

注意点 2

この授業では，プログラミングを行わない

理由

- 教員がまじめにプログラミングをしたことがない
  (∵ 教員が授業で扱えない)
- 受講生自身が自主的にプログラミングをすればよい

⇝ 授業の内容から **自由に はみ出ていく** ことを推奨する

前提知識

次の内容は既知とする

- **基礎的な離散数学**
  - 特に，集合・写像の記法 と 数学的帰納法
- **基礎的な線形代数**
  - 特に，基底，固有値，固有ベクトル
- **基礎的な確率論**
  - 特に，離散確率

身についていない場合は，自習をするように

グラフ や **最適化** に関する前提知識は仮定しない

参考書

主に，次の文献を参考にして進める (入手の必要はない)

- M. Krebs, A. Shaheen, Expander Families and Cayley Graphs: A Beginner's Guide. Oxford University Press, 2011.
- F.R.K. Chung, Spectral Graph Theory, AMS, 1997.
- C. Godsil, G. Royle, Algebraic Graph Theory, Springer, 2001.
- B. Nica, A Brief Introduction to Spectral Graph Theory, 2018.
- T. Checherini-Silberstein, F. Scarabotti, F. Tolli, Discerete Harmonic Analysis, Cambridge University Press, 2018.
- G. Davidoff, P. Sarnak, A. Valette, Elementary Number Theory, Group Theory, and Ramanujan Graphs. Cambridge University Press, 2003.

本日の内容

グラフ理論速習

1. **グラフの定義**
2. よく登場するグラフの用語
3. グラフの隣接行列

多重集合

この授業では，集合の記法を使って，多重集合を扱う

定義 (非形式)：多重集合 (multiset)

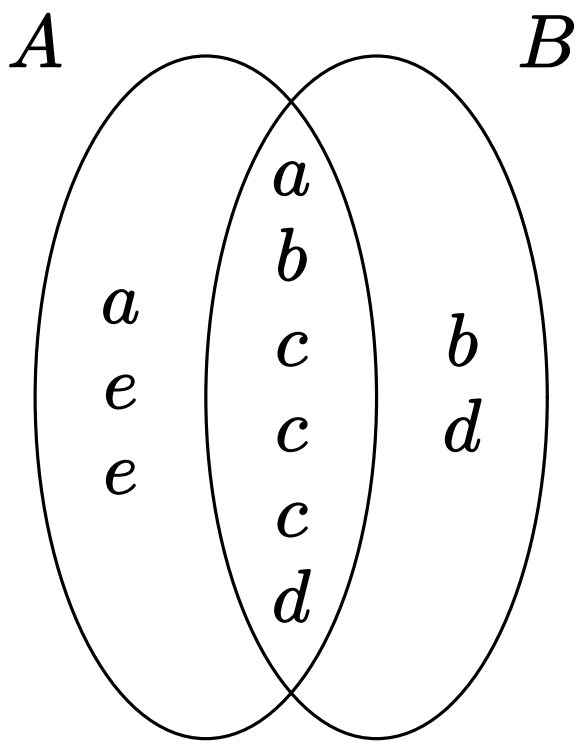
多重集合 とは，元の重複を許した集合 (のようなもの)

例

- $A = \{a, a, b, c, c, c, d, e, e\}$
- $B = \{a, b, b, c, c, c, d, d\}$

このとき

- $A \cap B = \{a, b, c, c, c, d\}$
- $A \cup B = \{a, a, b, b, c, c, c, d, d, e, e\}$



多重集合

この授業では，集合の記法を使って，多重集合を扱う

定義 (非形式)：多重集合 (multiset)

多重集合 とは，元の重複を許した集合 (のようなもの)

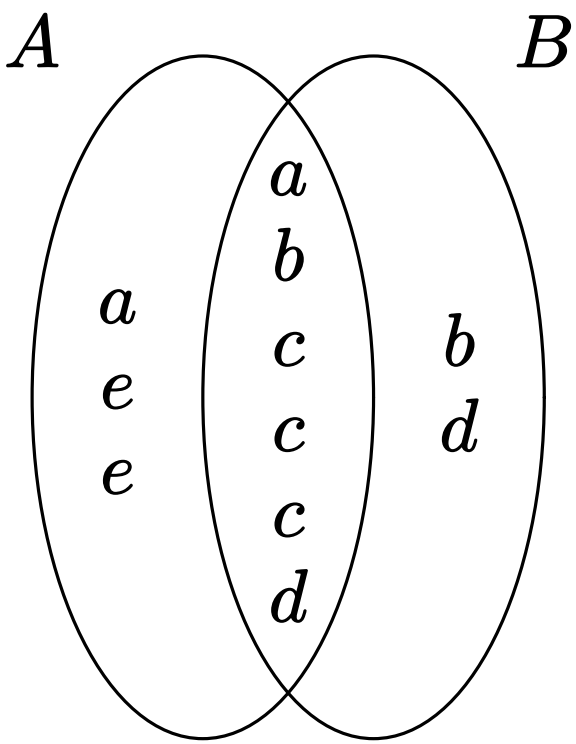
A における e の多重度 (multiplicity) $= 2$

例

- $A = \{a, a, b, c, c, c, d, e, e\}$
- $B = \{a, b, b, c, c, c, d, d\}$

このとき

- $A \cap B = \{a, b, c, c, c, d\}$
- $A \cup B = \{a, a, b, b, c, c, c, d, d, e, e\}$



この授業におけるグラフは，「多重無向グラフ」を指す

定義：グラフ

グラフ とは，次のような 2 つ組 $G = (V, E)$

- V は 集合 (多重集合ではない)
- E は V の 2 元多重部分集合の多重集合

例：次の V, E に対して，$G = (V, E)$ はグラフである

- $V = \{a, b, c, d\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, d\}\}$

グラフの頂点，辺

定義：頂点，辺

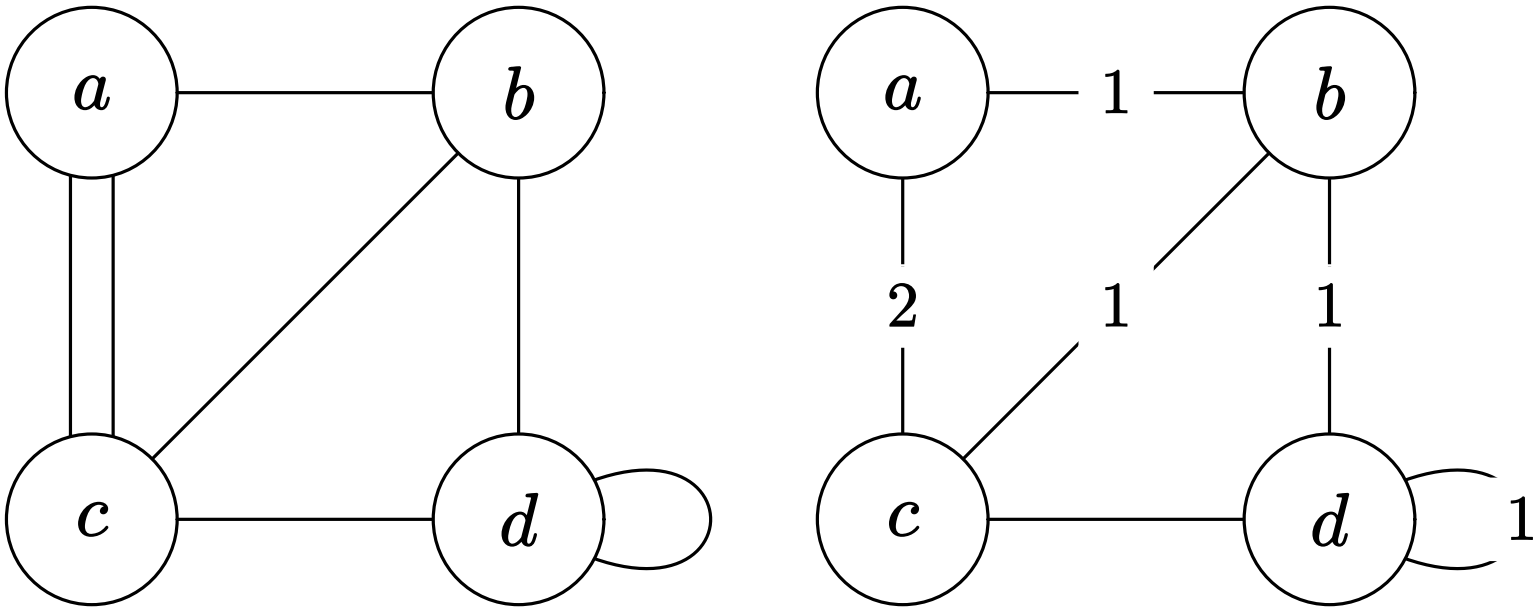
グラフ $G = (V, E)$ に対して，

- G の **頂点** (vertex) とは，V の元のこと
  - V は G の **頂点集合** (vertex set) という
- G の **辺** (edge) とは，E の元のこと
  - E は G の **辺 (多重) 集合** (edge (multi)set) という

例：次の V, E に対して，$G = (V, E)$ はグラフである

- $V = \{a, b, c, d\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, d\}\}$
- このとき，a は G の頂点，$\{a, c\}$ は G の辺

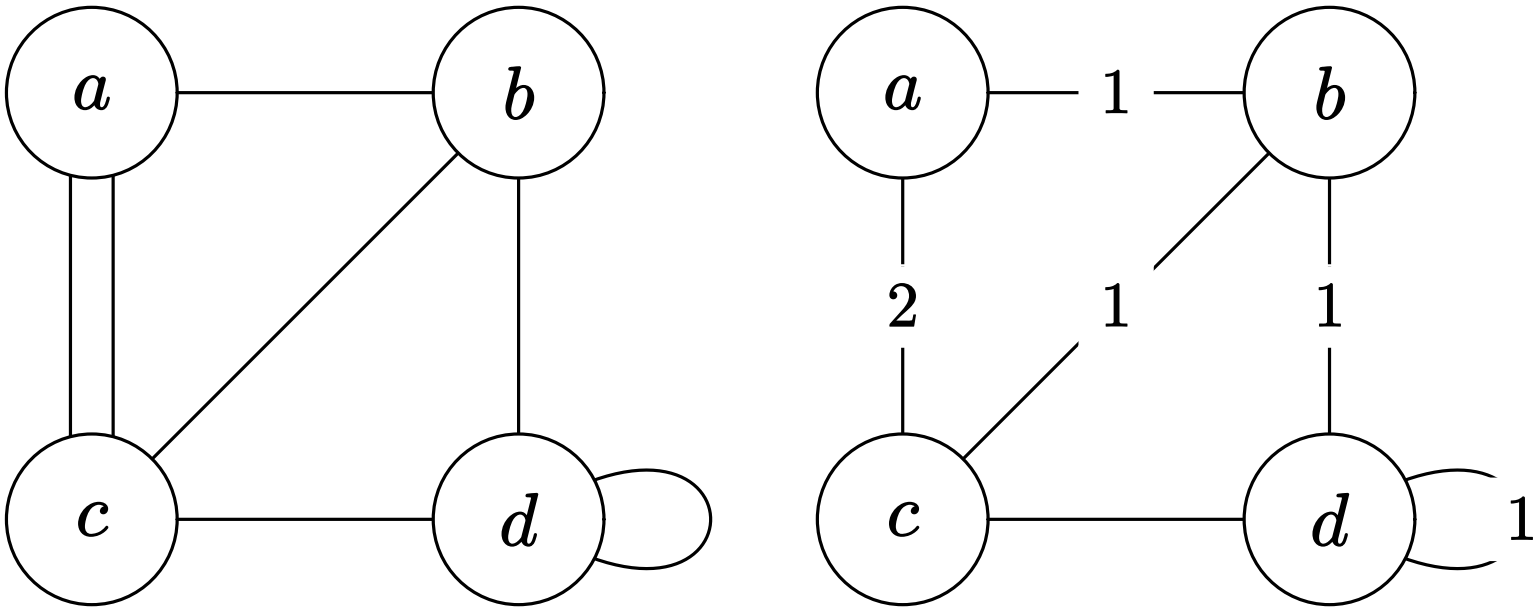
グラフの図示



例：次の V, E に対して，$G = (V, E)$ はグラフである

- $V = \{a, b, c, d\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, d\}\}$

グラフの図示



例：次の V, E に対して，$G = (V, E)$ はグラフである

- $V = \{a, b, c, d\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, d\}\}$

自己閉路

隣接関係，接続関係

グラフ $G = (V, E)$

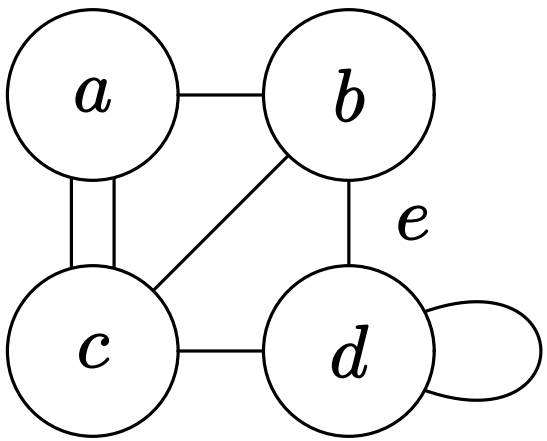
定義：隣接関係，接続関係

G の異なる 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，

- u と v が **隣接している** とは，$\{u, v\} \in E$ であること (adjacent)

G の頂点 $v \in V$ と辺 $e \in E$ に対して

- v が e に **接続している** とは，$v \in e$ であること (incident)



- 頂点 b と c は隣接している
- 頂点 a と d は隣接していない
- 頂点 b は辺 e に接続している

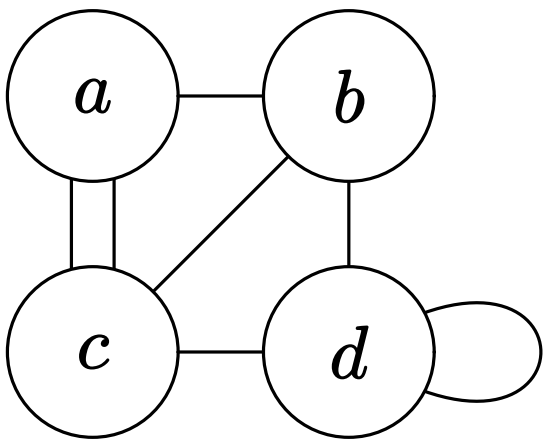
次数

グラフ $G = (V, E)$

定義：次数 (degree)

G の頂点 v の **次数** とは，v に接続する辺の総数
(ただし, 自己閉路は 2 回数える)

- 記法：$\deg_G(v) = G$ における v の次数



- $\deg_G(a) = 3$
- $\deg_G(b) = 3$
- $\deg_G(c) = 4$
- $\deg_G(d) = 4$

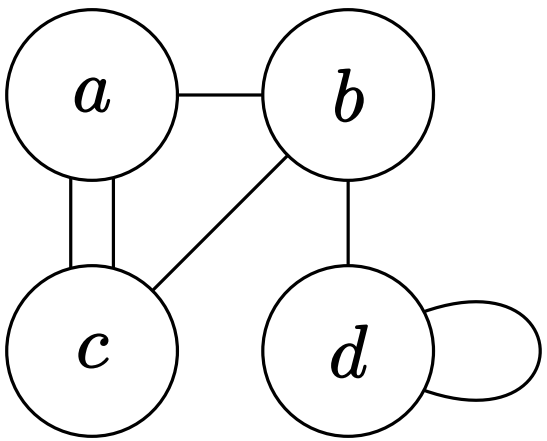
正則グラフ

グラフ $G = (V, E)$，非負整数 $d \geq 0$

定義：正則グラフ (regular graph) **重要**

G が **d-正則** であるとは，
G のすべての頂点の次数が d であること

3-正則グラフの例



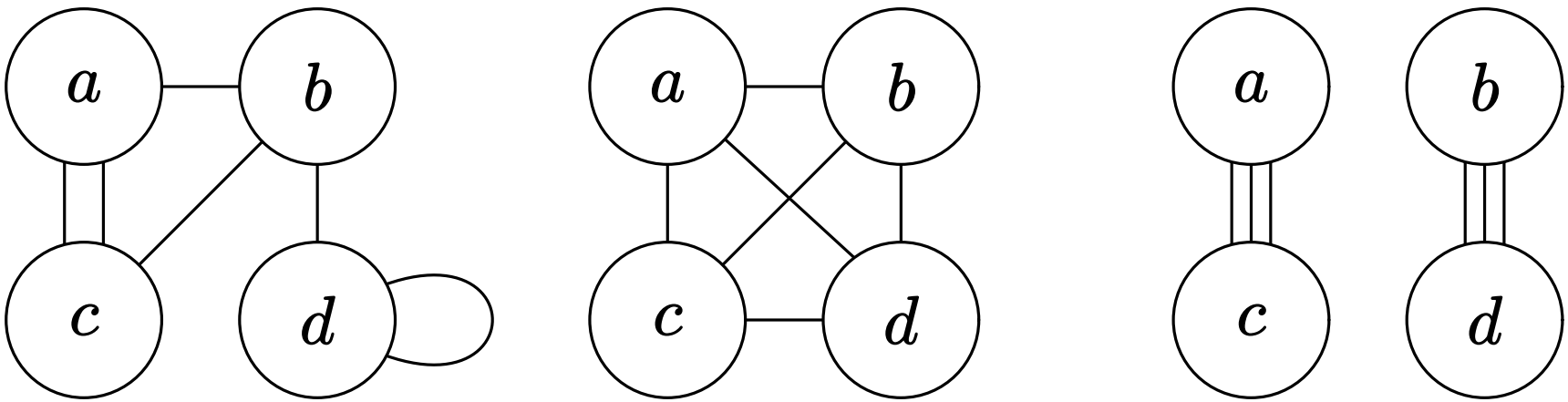
正則グラフ

グラフ $G = (V, E)$，非負整数 $d \geq 0$

定義：正則グラフ (regular graph) **重要**

G が **d-正則** であるとは，
G のすべての頂点の次数が d であること

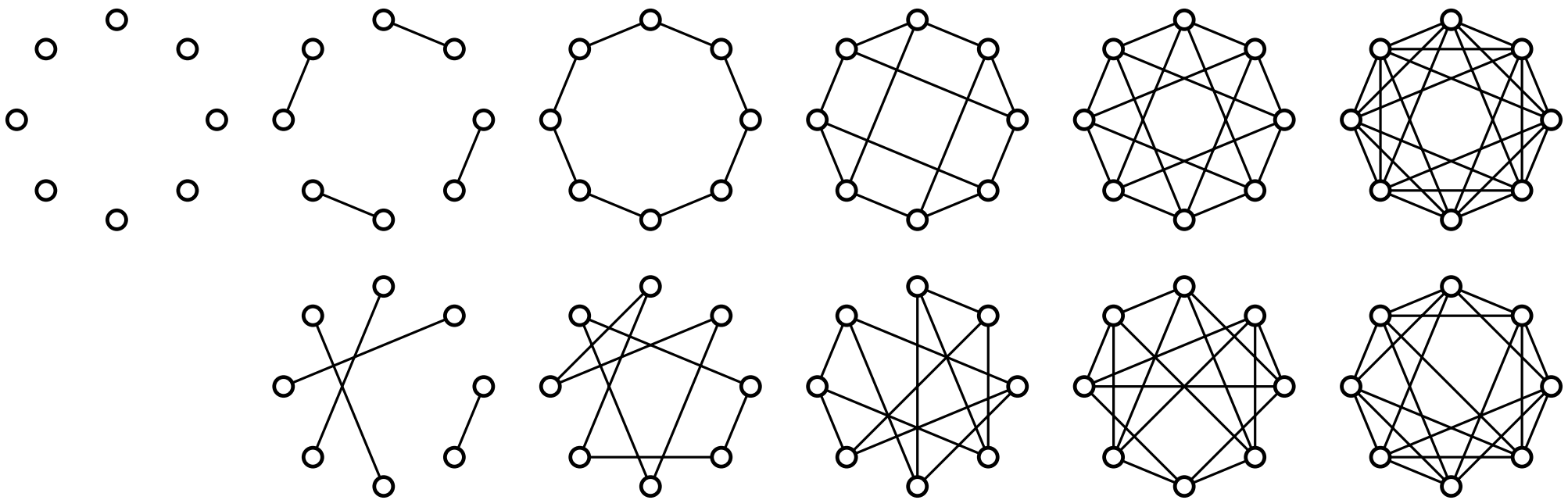
3-正則グラフの例



正則グラフ (続)

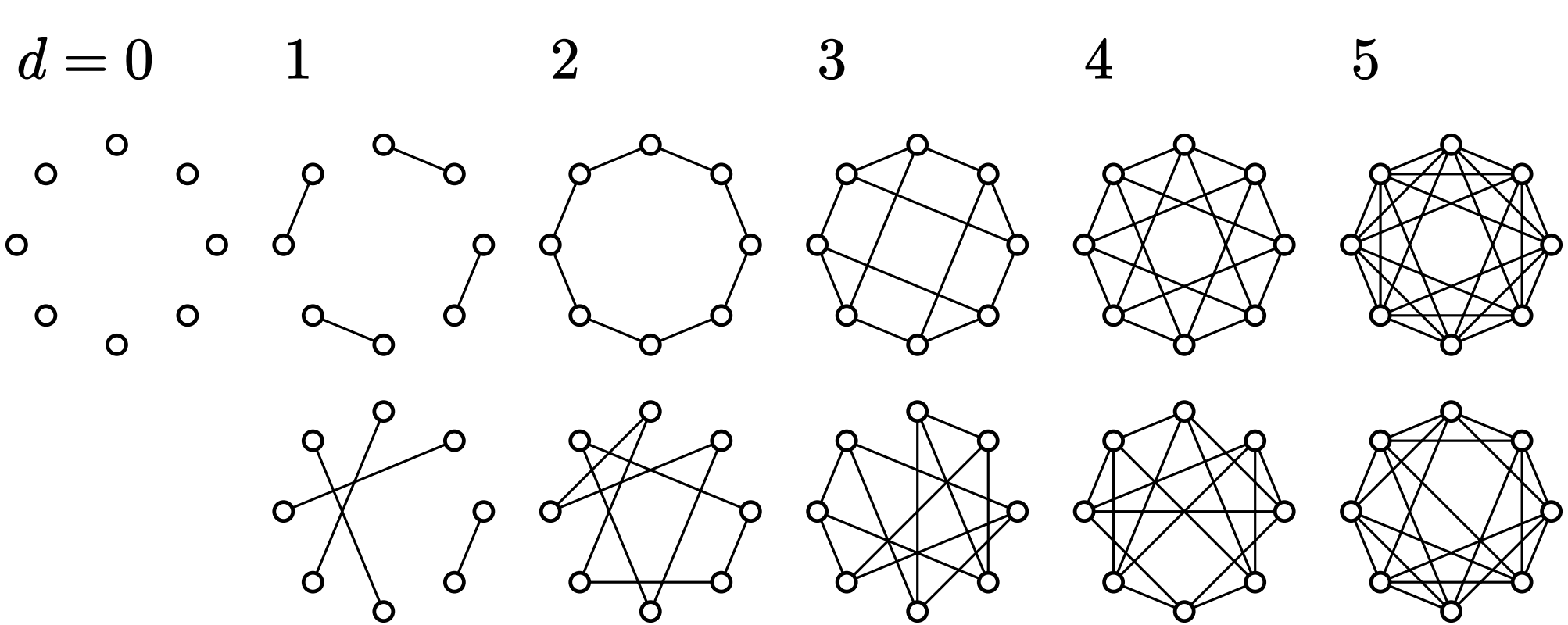
d-正則

$d = 0$ 1 2 3 4 5



正則グラフ (続)

d-正則



辺の数

本日の内容

グラフ理論速習

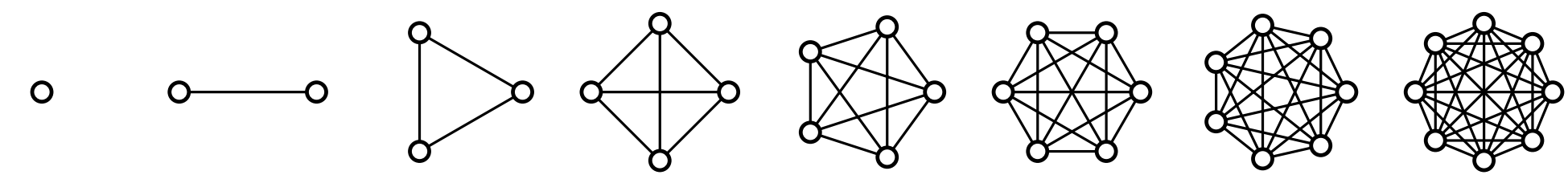
1. グラフの定義
2. **よく登場するグラフの用語**
3. グラフの隣接行列

完全グラフ

定義：完全グラフ (complete graph)

頂点数 n の **完全グラフ** とは,
異なる任意の 2 頂点間に辺がちょうど 1 つあり
他には辺がないグラフ

- 記法：K_n



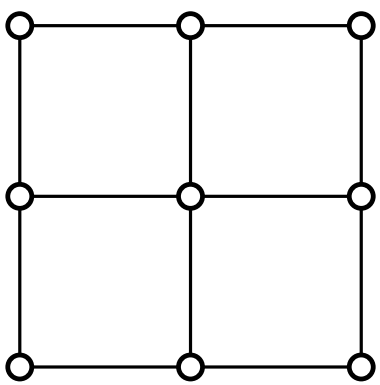
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7 K_8

連結性

グラフ $G = (V, E)$

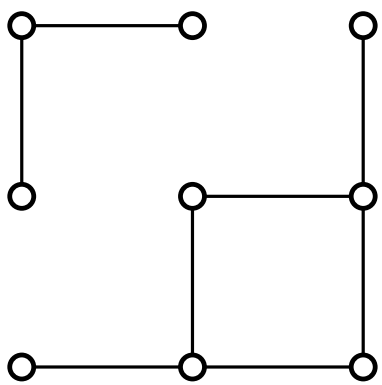
定義：連結性 (connectedness)

G が **連結である** (connected) とは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，それらを結ぶ経路があること



連結グラフ

(connected graph)



非連結グラフ

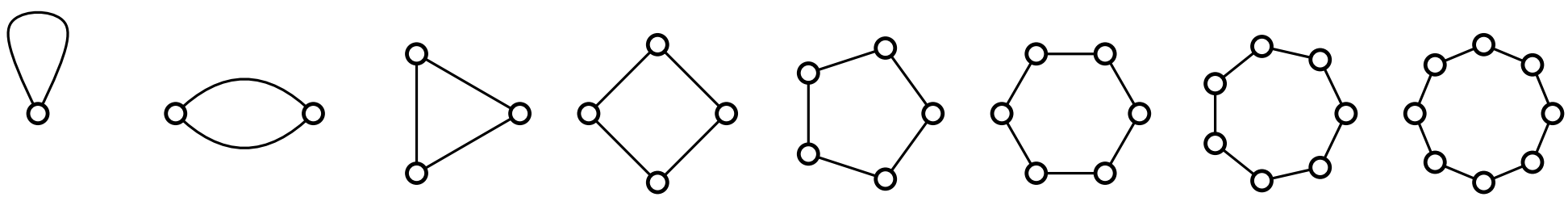
(disconnected graph)

閉路

定義：閉路 (cycle)

頂点数 n の **閉路** とは，2-正則連結グラフのこと

- 記法：C_n



C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8

歩道，小道，道

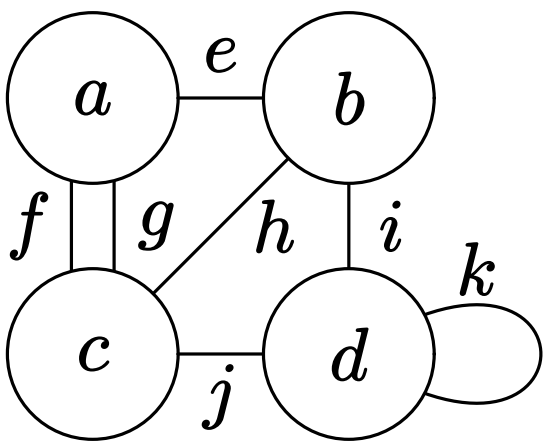
グラフにおける「経路」をちゃんと定義する

定義：歩道（ほどう, walk), 小道（こみち, trail), 道（みち, path)

グラフ $G = (V, E)$ における頂点と辺の交互列が

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$$

- **歩道** であるとは，
  各 $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$v_{i-1}, v_i \in e_i$ を満たすこと
- **小道** であるとは，歩道であり，辺が互いに異なること
- **道** であるとは，小道であり，頂点が互いに異なること



- (a, e, b, e, a, g, c) は
  歩道であるが，小道ではない
- (a, g, c, f, a, e, b) は
  小道であるが，道ではない
- (a, g, c, h, b, i, d) は道である

歩道，小道，道

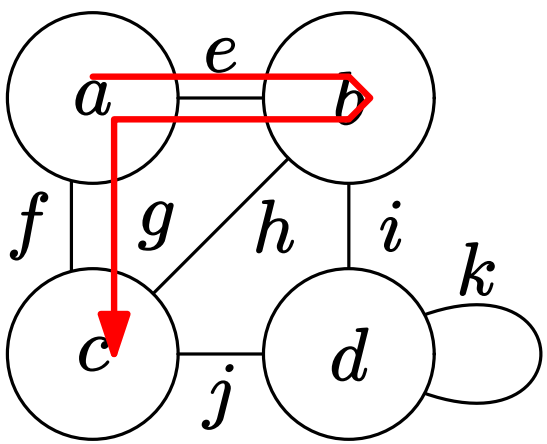
グラフにおける「経路」をちゃんと定義する

定義：歩道（ほどう, walk), 小道（こみち, trail), 道（みち, path)

グラフ $G = (V, E)$ における頂点と辺の交互列が

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$$

- **歩道** であるとは，
  各 $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$v_{i-1}, v_i \in e_i$ を満たすこと
- **小道** であるとは，歩道であり，辺が互いに異なること
- **道** であるとは，小道であり，頂点が互いに異なること



- (a, e, b, e, a, g, c) は
  歩道であるが，小道ではない
- (a, g, c, f, a, e, b) は
  小道であるが，道ではない
- (a, g, c, h, b, i, d) は道である

歩道，小道，道

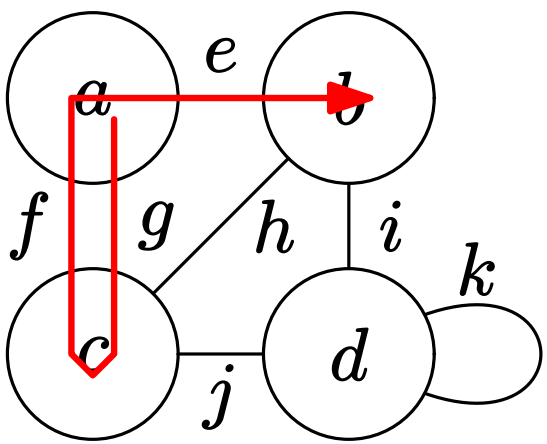
グラフにおける「経路」をちゃんと定義する

定義：歩道（ほどう, walk), 小道（こみち, trail), 道（みち, path)

グラフ $G = (V, E)$ における頂点と辺の交互列が

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$$

- **歩道** であるとは，
  各 $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$v_{i-1}, v_i \in e_i$ を満たすこと
- **小道** であるとは，歩道であり，辺が互いに異なること
- **道** であるとは，小道であり，頂点が互いに異なること



- (a, e, b, e, a, g, c) は
  歩道であるが，小道ではない
- (a, g, c, f, a, e, b) は
  小道であるが，道ではない
- (a, g, c, h, b, i, d) は道である

歩道，小道，道

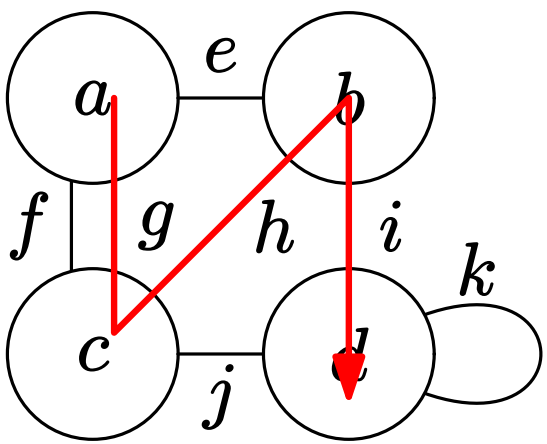
グラフにおける「経路」をちゃんと定義する

定義：歩道（ほどう, walk), 小道（こみち, trail), 道（みち, path)

グラフ $G = (V, E)$ における頂点と辺の交互列が

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$$

- **歩道** であるとは，
  各 $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$v_{i-1}, v_i \in e_i$ を満たすこと
- **小道** であるとは，歩道であり，辺が互いに異なること
- **道** であるとは，小道であり，頂点が互いに異なること



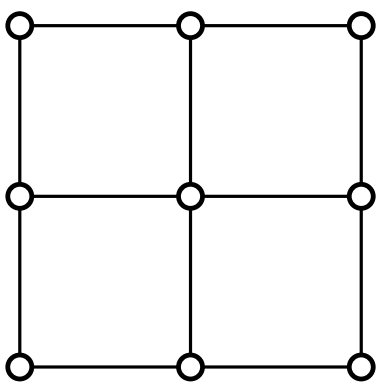
- (a, e, b, e, a, g, c) は
  歩道であるが，小道ではない
- (a, g, c, f, a, e, b) は
  小道であるが，道ではない
- (a, g, c, h, b, i, d) は道である

連結性：再掲

グラフ $G = (V, E)$　歩道，小道，道のどれだと考えてもよい

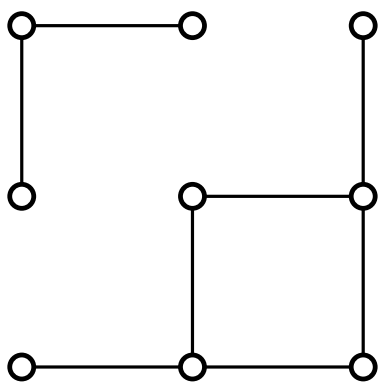
定義：連結性 (connectedness)　(再掲)

G が **連結である** (connected) とは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，それらを結ぶ経路があること



連結グラフ

(connected graph)



非連結グラフ

(disconnected graph)

連結性：再掲

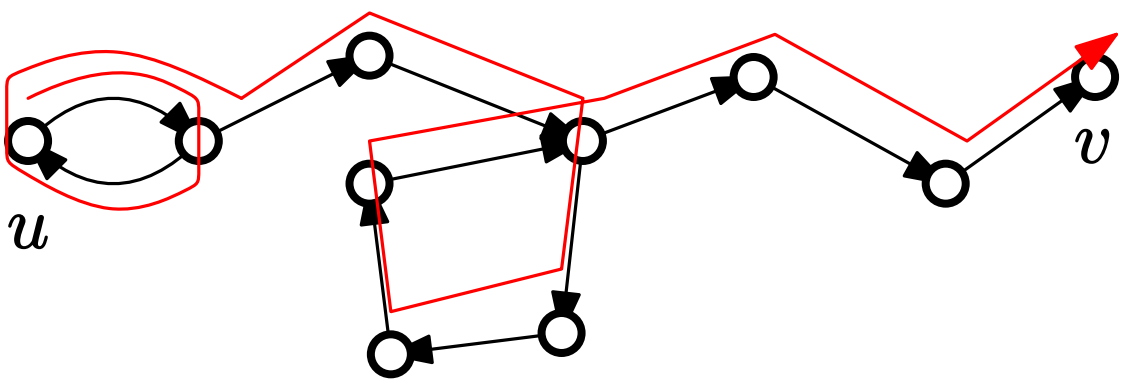
グラフ $G = (V, E)$　歩道，小道，道のどれだと考えてもよい

定義：連結性 (connectedness)　(再掲)

G が **連結である** (connected) とは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，それらを結ぶ 経路 があること

なぜ そう考えてもよいのか？

観察：　u と v を結ぶ歩道が存在
$\Leftrightarrow$ u と v を結ぶ小道が存在
$\Leftrightarrow$ u と v を結ぶ道が存在



連結性：再掲

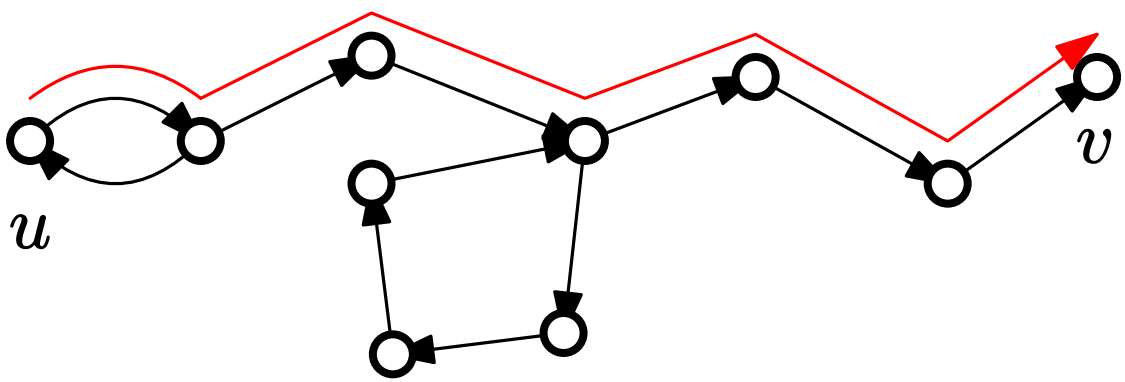
グラフ $G = (V, E)$　歩道，小道，道のどれだと考えてもよい

定義：連結性 (connectedness)　(再掲)

G が **連結である** (connected) とは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，それらを結ぶ 経路 があること

なぜ そう考えてもよいのか？

観察：　u と v を結ぶ歩道が存在
$\Leftrightarrow$ u と v を結ぶ小道が存在
$\Leftrightarrow$ u と v を結ぶ道が存在



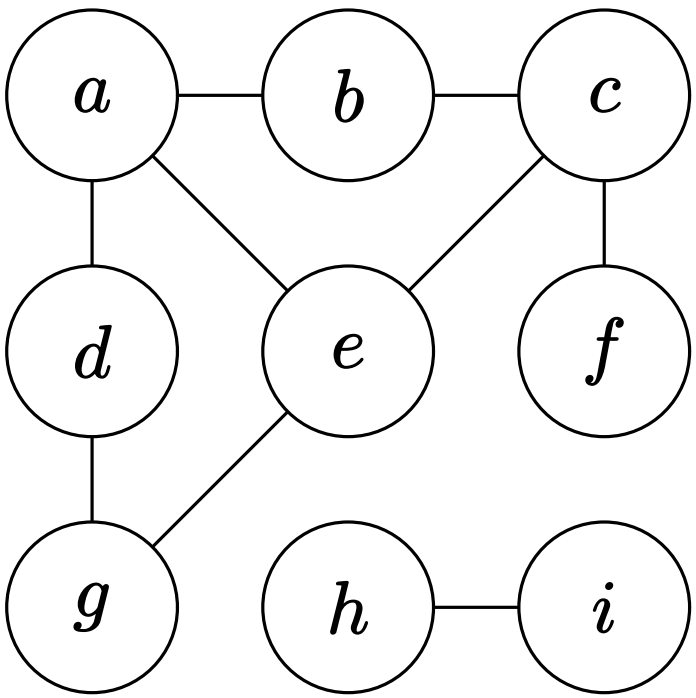
頂点間の距離

グラフ $G = (V, E)$，頂点 $u, v \in V$

定義：距離 (distance)

G における u, v 間の **距離** とは，
u と v を結ぶ道の辺数の最小値　(道がない $\Rightarrow \infty$)

- 記法：$\mathrm{dist}_G(u, v)$



- $\mathrm{dist}_G(a, c) = 2$
- $\mathrm{dist}_G(a, d) = 1$
- $\mathrm{dist}_G(f, g) = 3$
- $\mathrm{dist}_G(e, h) = \infty$
- $\mathrm{dist}_G(c, c) = 0$

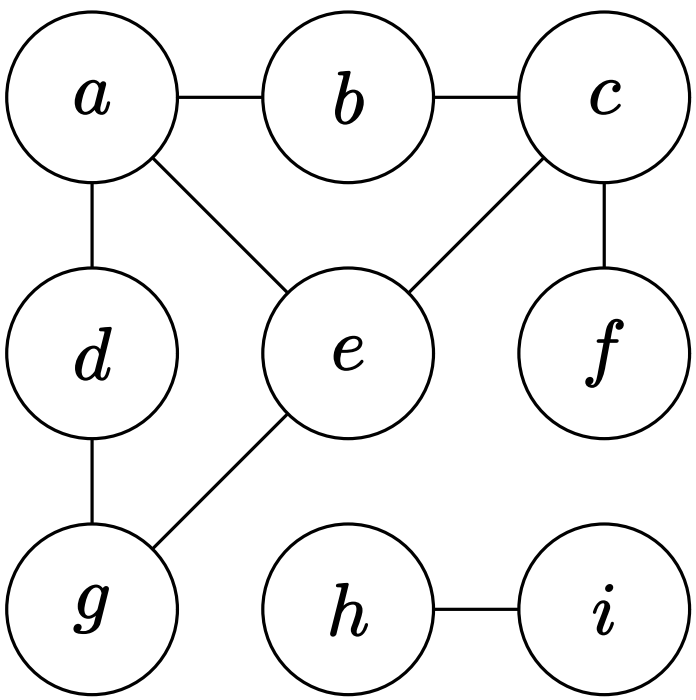
頂点間の距離

グラフ $G = (V, E)$，頂点 $u, v \in V$

定義：距離 (distance)

G における u, v 間の **距離** とは，
u と v を結ぶ道の辺数の最小値　(道がない $\Rightarrow \infty$)

- 記法：$\mathrm{dist}_G(u, v)$



- $\mathrm{dist}_G(a, c) = 2$
- $\mathrm{dist}_G(a, d) = 1$
- $\mathrm{dist}_G(f, g) = 3$
- $\mathrm{dist}_G(e, h) = \infty$
- $\mathrm{dist}_G(c, c) = 0$

性質：$\mathrm{dist}_G(u, v) = \mathrm{dist}_G(v, u)$

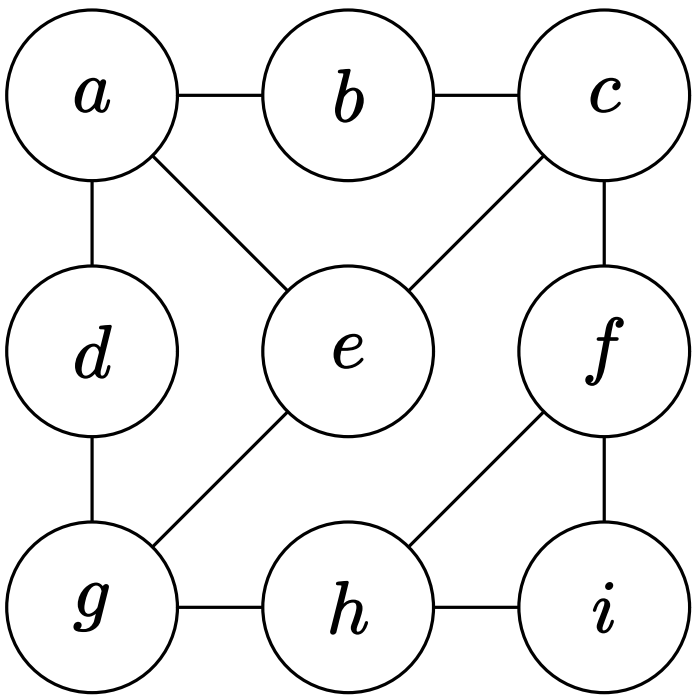
グラフの直径

グラフ $G = (V, E)$

定義：直径 (diameter)

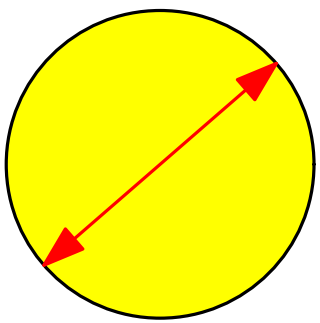
G の **直径** とは，G の 2 頂点間の距離の最大値

- 記法：$\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v \in V} \mathrm{dist}_G(u, v)$



$\mathrm{diam}(G) = 4$

類推：



部分グラフ

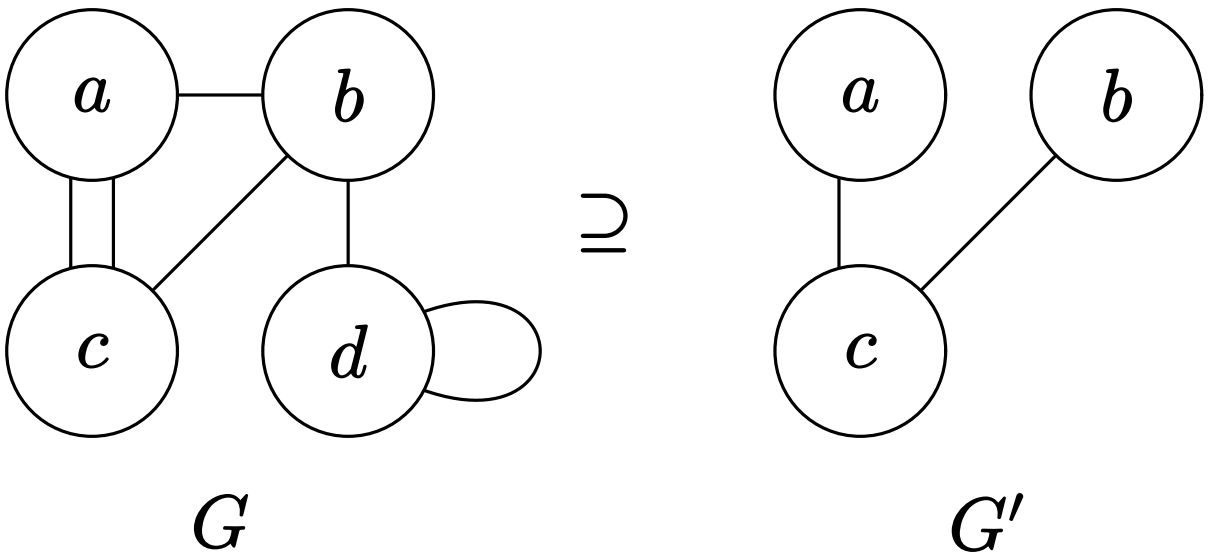
グラフ $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$

定義：部分グラフ (subgraph)

G' が G の **部分グラフ** であるとは，次を満たすこと

$$V' \subseteq V, \quad E' \subseteq E$$

- 記法：$G' \subseteq G$



誘導部分グラフ

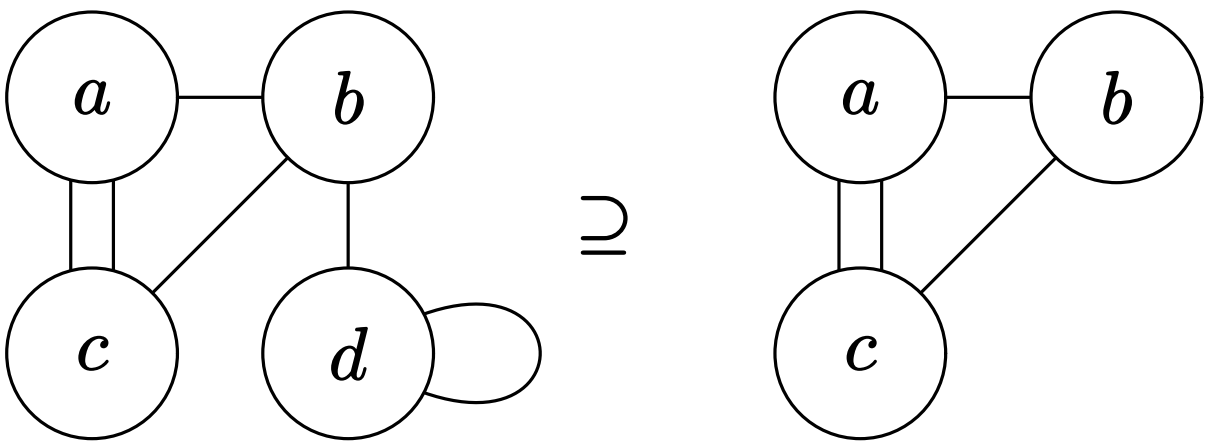
グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $X \subseteq V$

定義：誘導部分グラフ (induced subgraph)

X が **誘導する** G の部分グラフとは，
次で定められる G の部分グラフ $G' = (V', E')$

$$V' = X, \quad E' = \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in X\}$$

- 記法：$G[X]$



G $\qquad$ $G[X]$

本日の内容

グラフ理論速習

1. グラフの定義
2. よく登場するグラフの用語
3. **グラフの隣接行列**

グラフの隣接行列

グラフ $G = (V, E)$

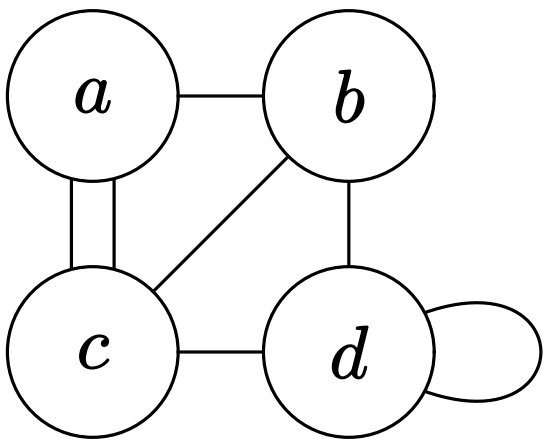
定義：隣接行列 (adjacency matrix) **(重要)**

G の **隣接行列** とは，次で定められる $V \times V$ 行列 A

$u, v \in V$ に対して，

$$a_{u,v} = \begin{cases} \text{辺 } \{u, v\} \text{ の総数 (重複度)} & (u \neq v), \\ 2 \cdot \text{辺 } \{u, u\} \text{ の総数 (重複度)} & (u = v) \end{cases}$$

- 記法：A_G，$A(G)$



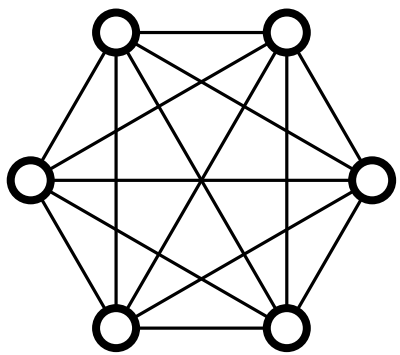
$$A_G = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 2 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

完全グラフの隣接行列

性質：完全グラフの隣接行列

$G = (V, E)$ が完全グラフ $K_n \Rightarrow u, v \in V$ に対して，

$$(A_G)_{u,v} = \begin{cases} 1 & (u \neq v), \\ 0 & (u = v) \end{cases}$$



K_6

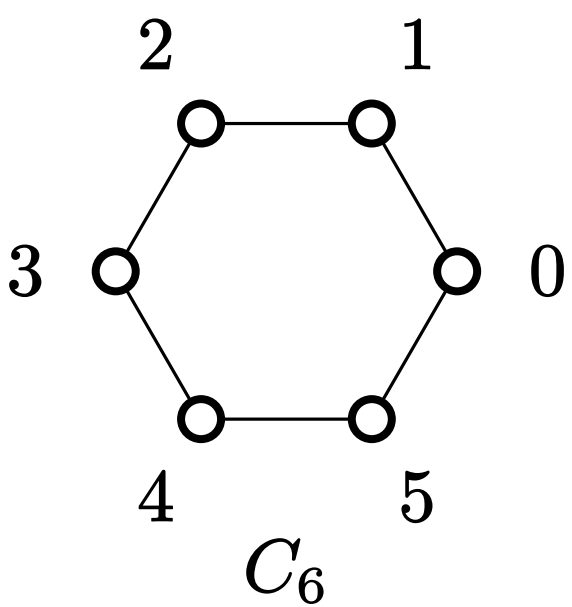
$$A_{K_6} = \begin{array}{|cccccc|} \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

閉路の隣接行列

性質：閉路の隣接行列

$G = (\{0, 1, \ldots, n-1\}, E)$ が閉路 C_n, $n \geq 3 \Rightarrow$
任意の $i, j \in V$ に対して

$$(A_G)_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \pm 1 \bmod n), \\ 0 & (i \neq j \pm 1 \bmod n) \end{cases}$$



C_6

$$A_{C_6} = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

隣接行列は対称行列

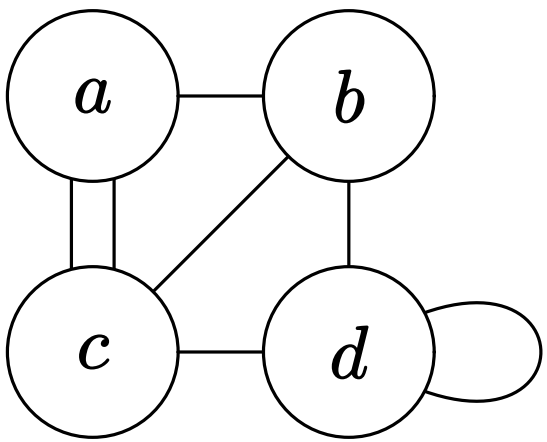
グラフ $G = (V, E)$

性質：隣接行列の対称性

G の隣接行列 A_G は対称行列である

- すなわち，$A_G = A_G^{\mathrm{T}}$

A_G の転置行列



$$A_G = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 2 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

隣接行列は対称行列

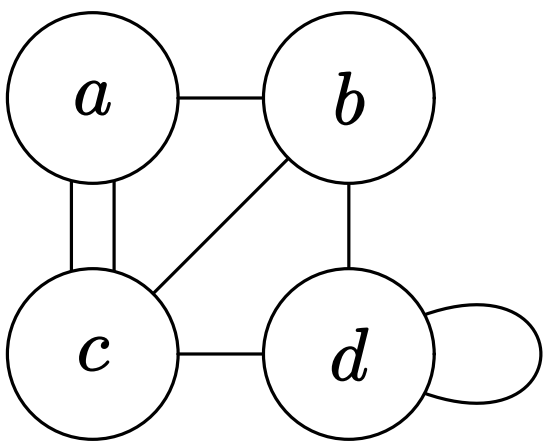
グラフ $G = (V, E)$

性質：隣接行列の対称性

G の隣接行列 A_G は対称行列である
- すなわち，$A_G = A_G^{\mathrm{T}}$

証明：$u, v \in V$ が異なるとする
- $(A_G)_{u,v} = \{u, v\}$ の重複度 $= (A_G)_{v,u}$

□



$$A_G = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 2 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

前半の予告

第２回：グラフのスペクトル
- グラフの隣接行列の固有値・固有ベクトルを調べる

第３回：グラフの等周定数とエクスパンダ
- グラフの等周定数を使って，エクスパンダを定義する
- エクスパンダと固有値の関係を調べる

第４回：グラフの等周定数と直径
- 「エクスパンダの直径は小さい」ことを見る

第５回：グラフの等周定数とランダムウォーク
- 「エクスパンダ上のランダムウォークはよく混ざる」ことを見る

第６回：Cheeger の不等式
- 「エクスパンダと固有値の関係」(第３回) を証明する

クイズ

Q 授業内で発表します

1.

2.

3.

4.