離散数理工学 (2026 年度後学期)

第 3 回

低次元 (3)：近接グラフと交差グラフ

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 10 月 27 日

最終更新：2026 年 10 月 18 日　11:36

今回の目標

今日の目標

点集合から得られるグラフを使って問題解決ができる

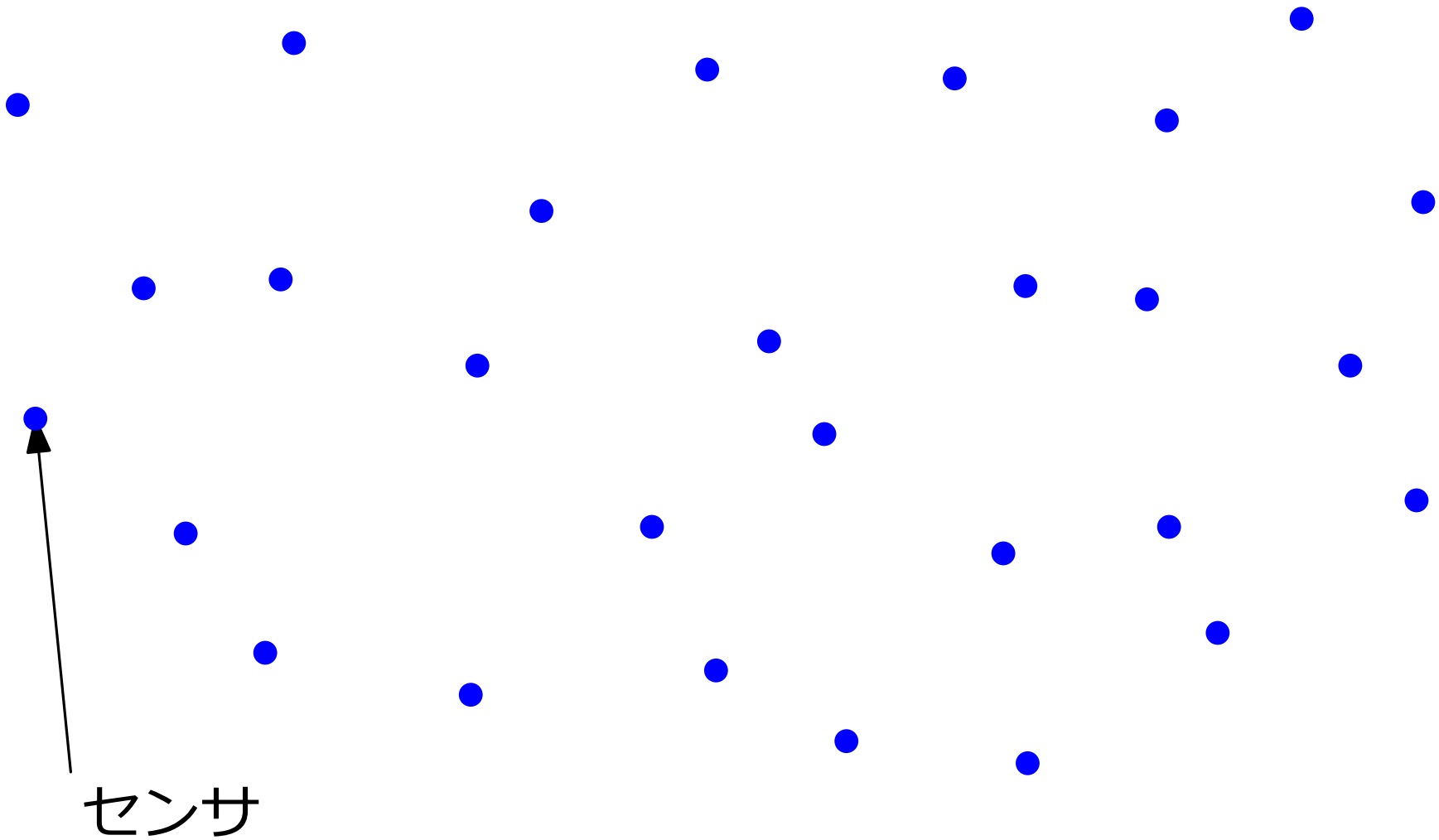
- デローネ三角形分割
- 単位円の交差グラフ

近接グラフ同士の関係を証明できる

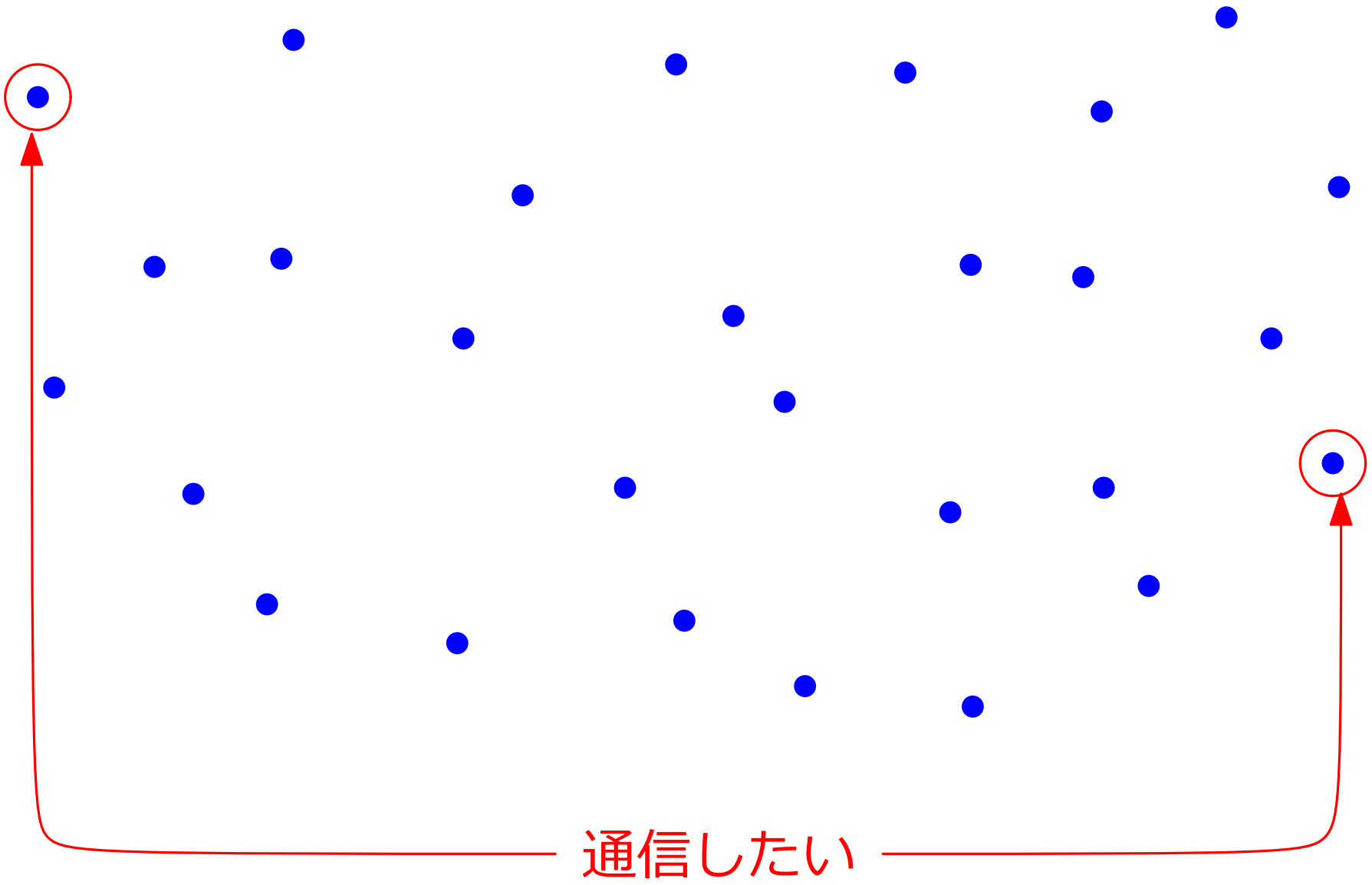
教訓

計算幾何においても，グラフは重要な役割を果たす

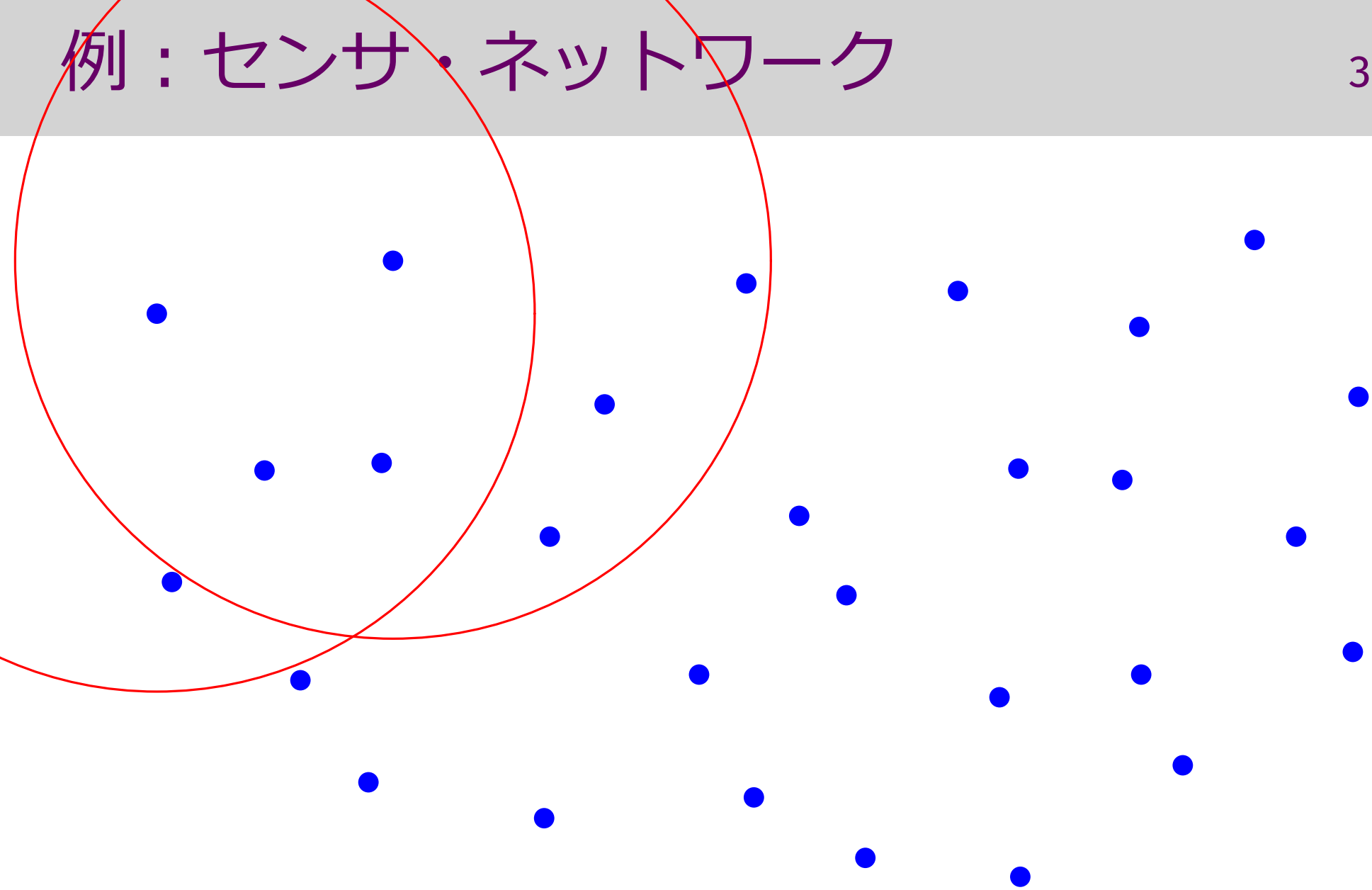
例：センサ・ネットワーク



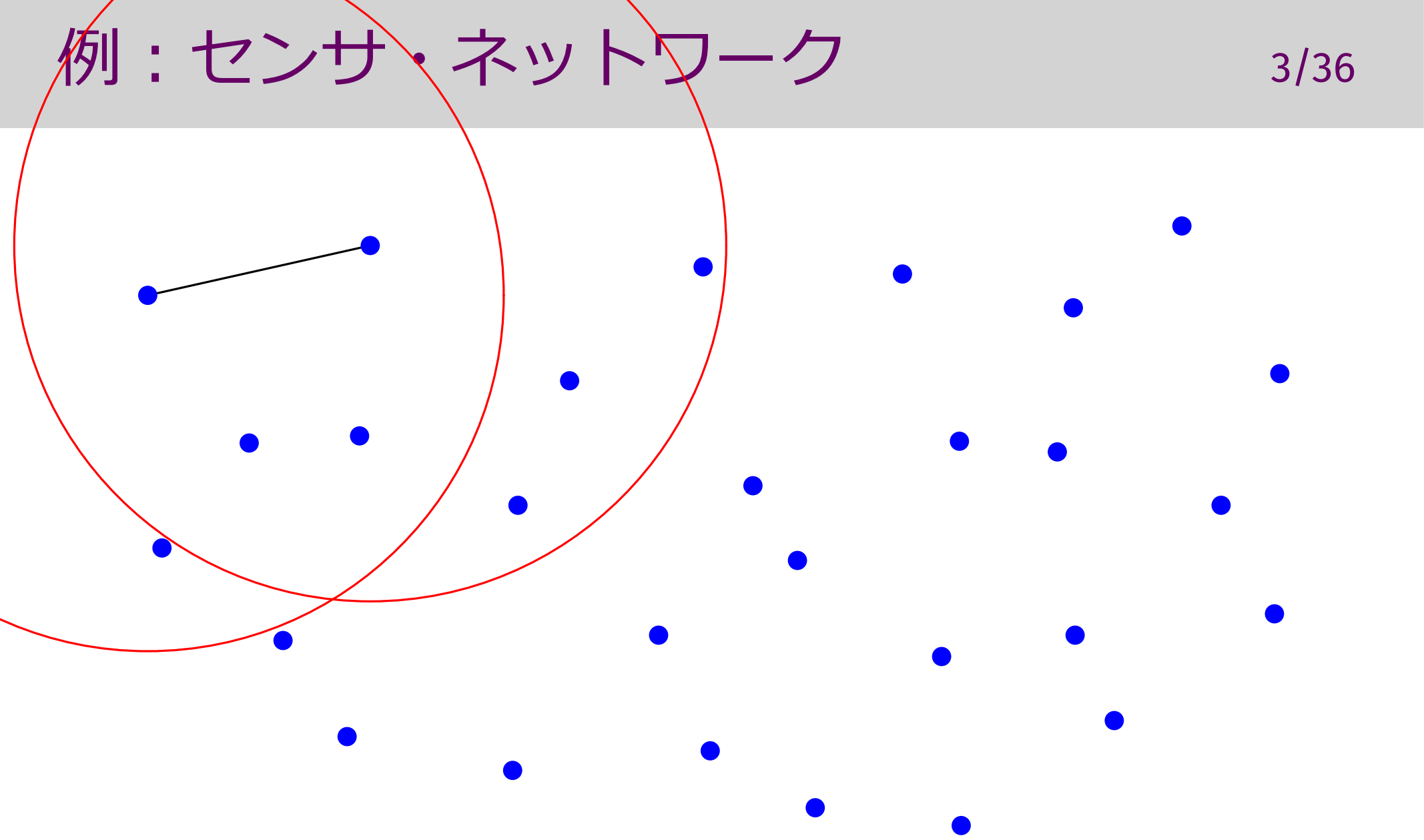
例：センサ・ネットワーク



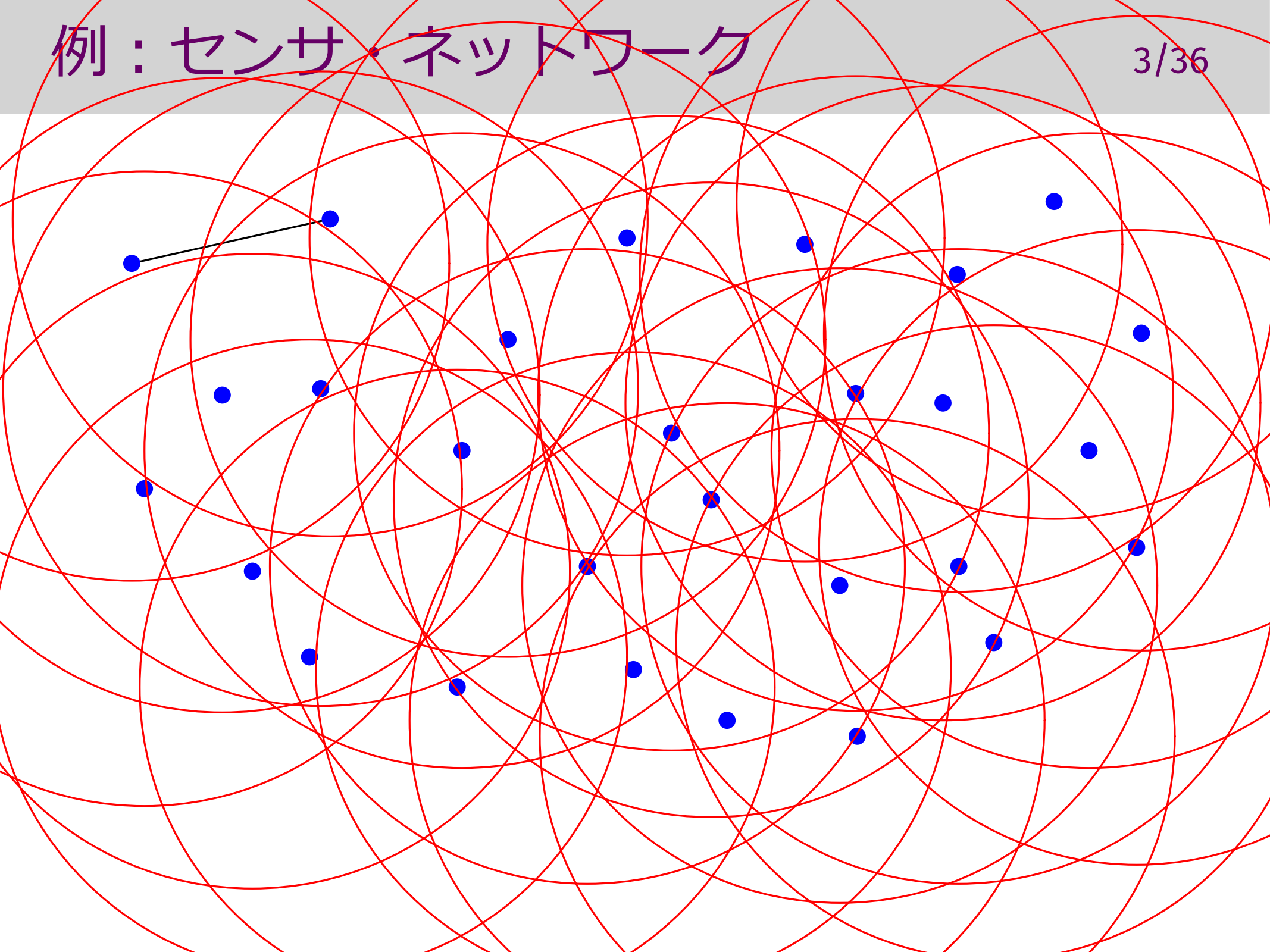
例：センサ・ネットワーク



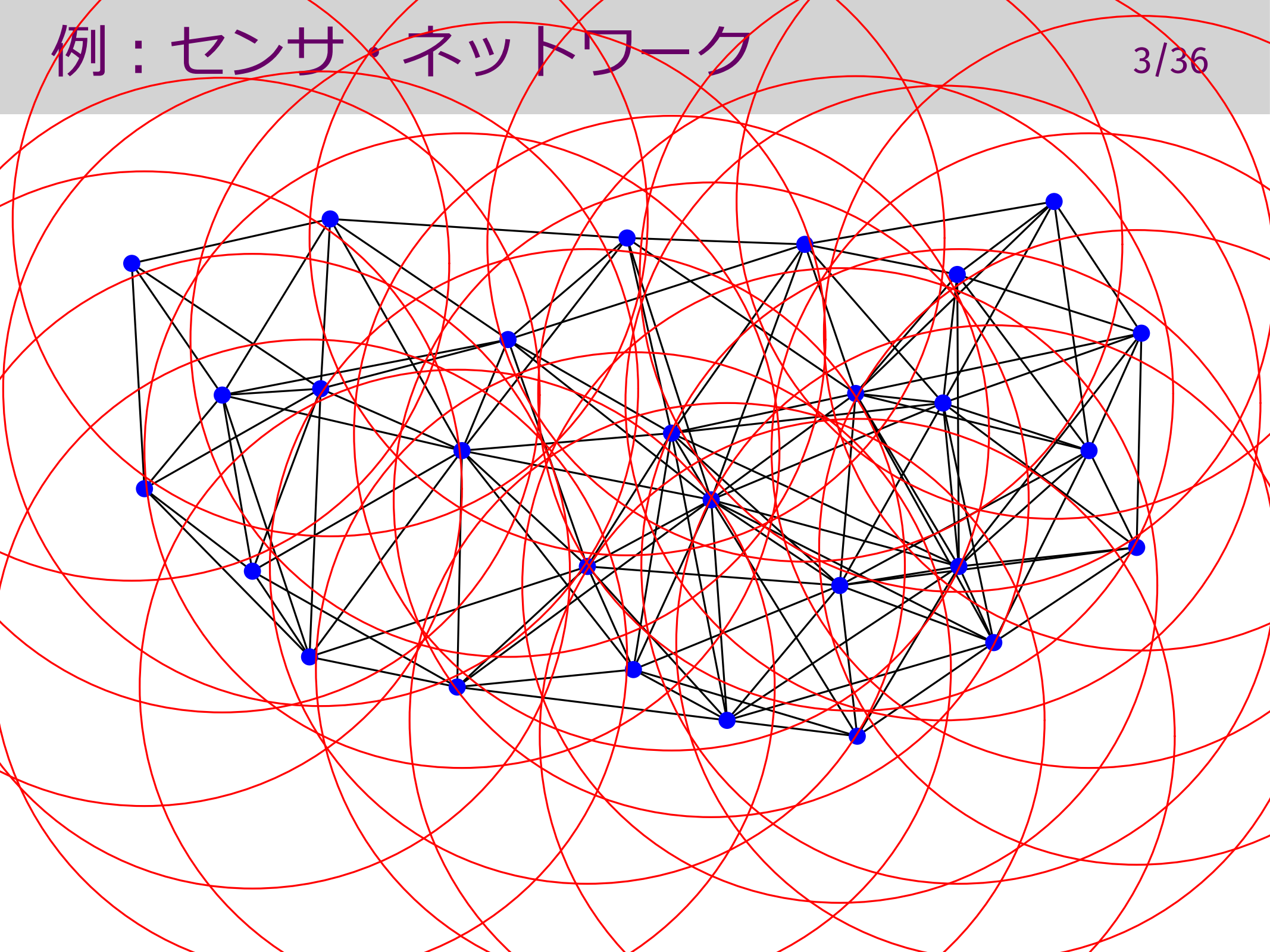
例：センサ・ネットワーク



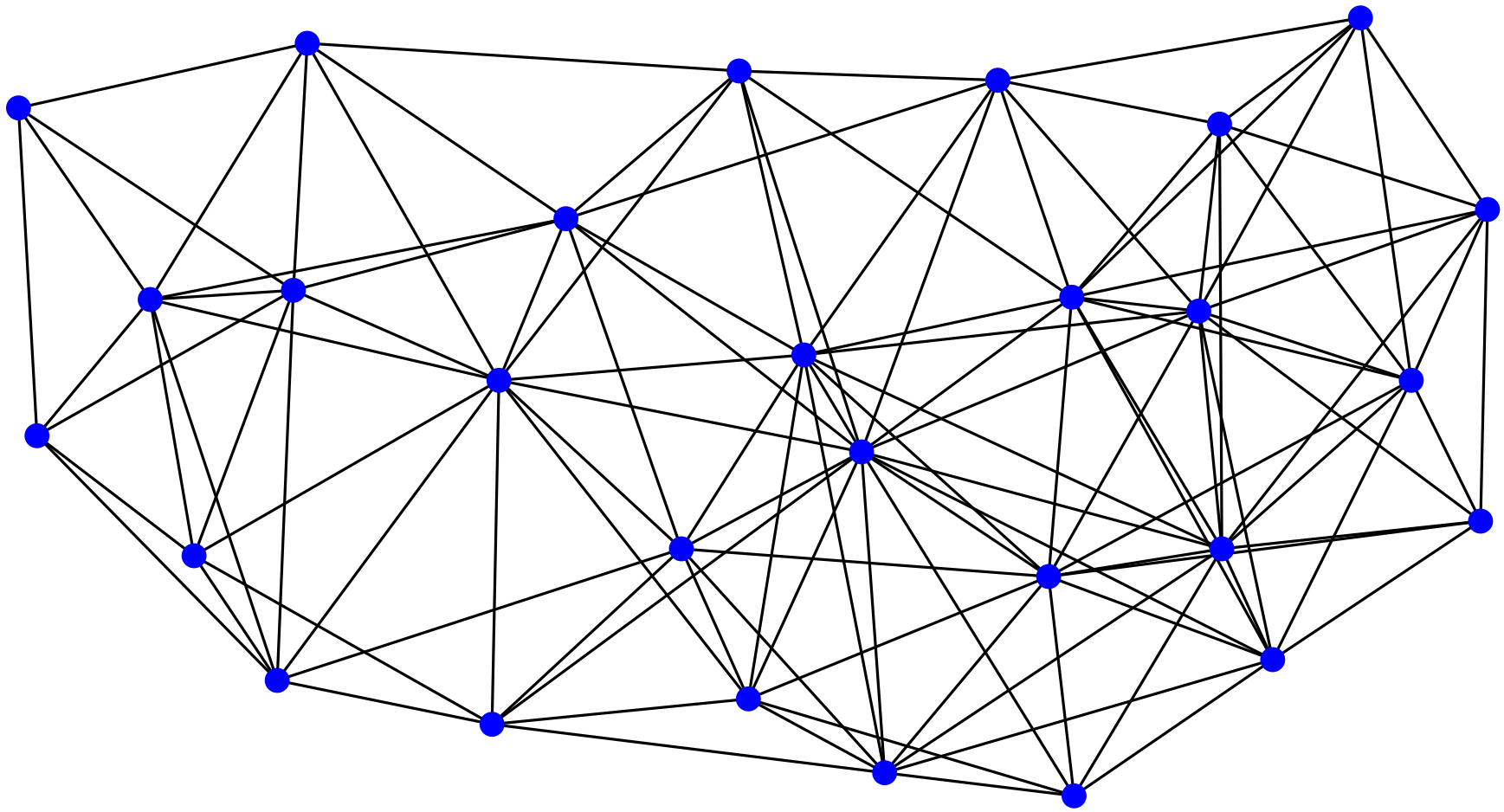
例：センサ・ネットワーク



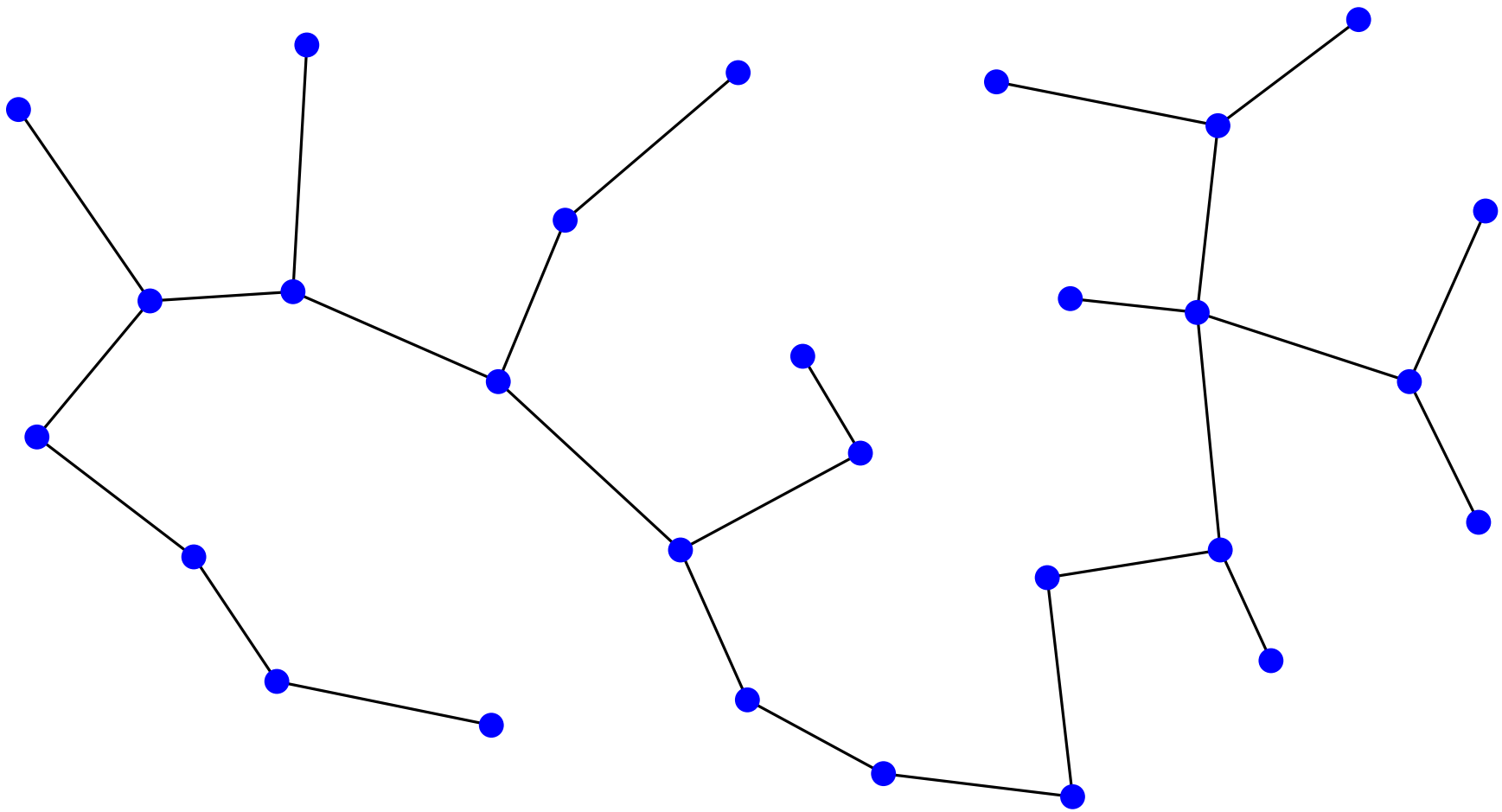
例：センサ・ネットワーク



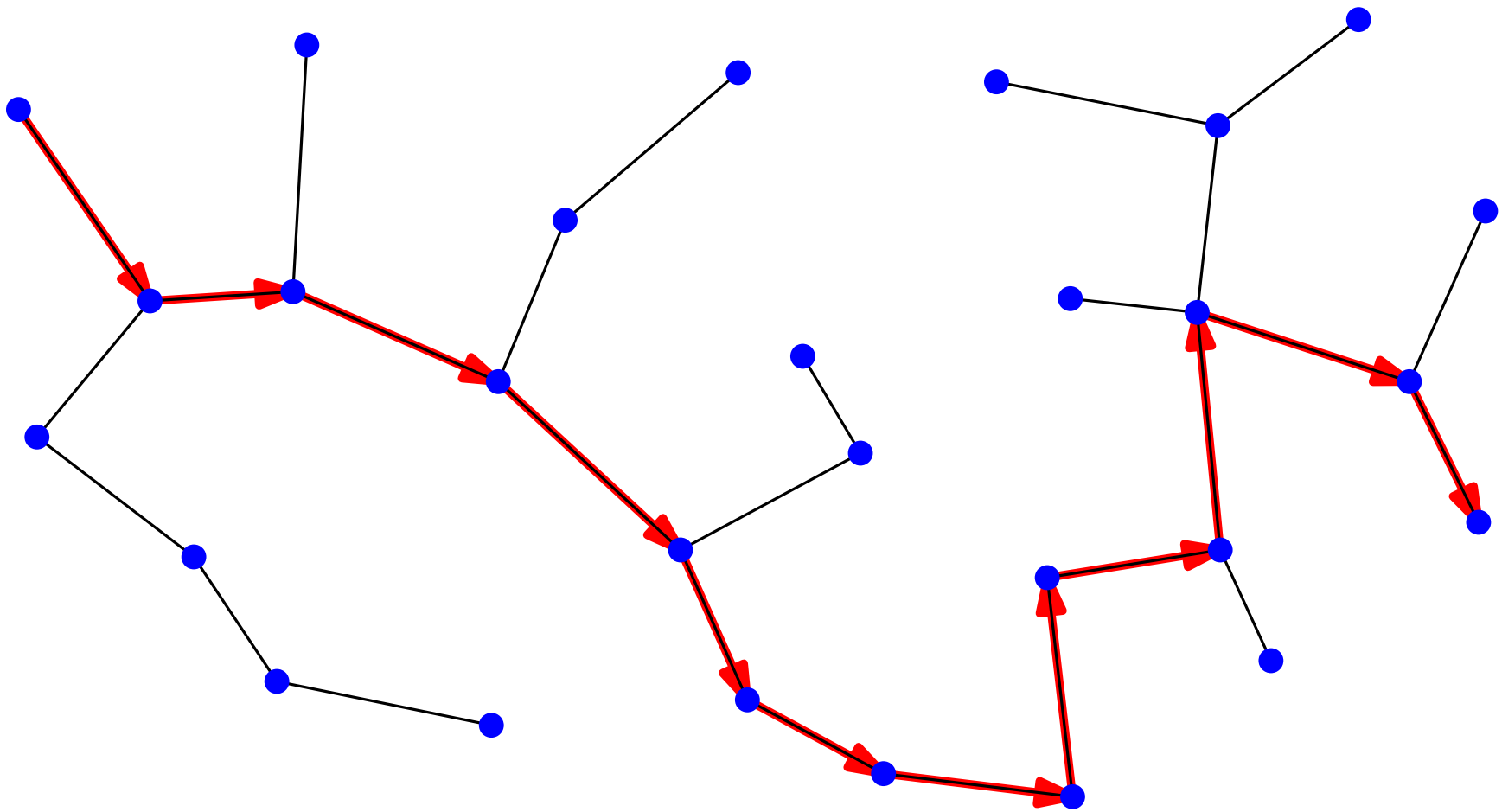
例：センサ・ネットワーク



例：センサ・ネットワーク



例：センサ・ネットワーク



目次

1. **グラフと幾何グラフの用語**
2. 単位円グラフとデローネ三角形分割
3. デローネ三角形分割と最小全域木
4. 他の近接グラフ

グラフ (無向グラフ)

定義：無向グラフ

無向グラフ とは，次のような対 $G = (V, E)$ のこと

- V は集合
- E は V の要素数 2 の部分集合の集合

例

- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$

グラフ (無向グラフ)

定義：無向グラフ

無向グラフ とは，次のような対 $G = (V, E)$ のこと

- V は集合
- E は V の要素数 2 の部分集合の集合

例

- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$

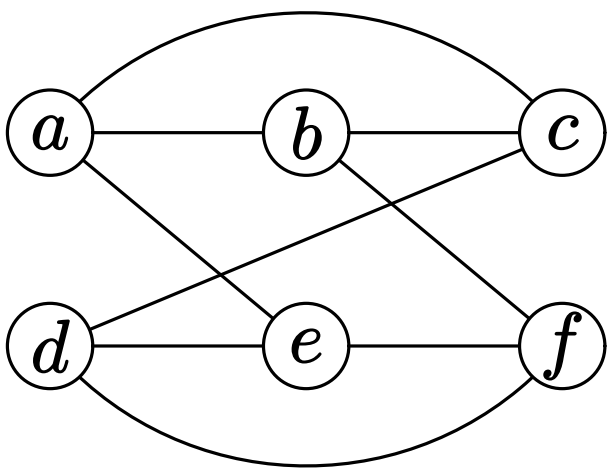
用語：無向グラフ $G = (V, E)$ において

- V は G の **頂点集合**
- E は G の **辺集合**
- V の要素は G の **頂点**
- E の要素は G の **辺**

グラフの図示

例

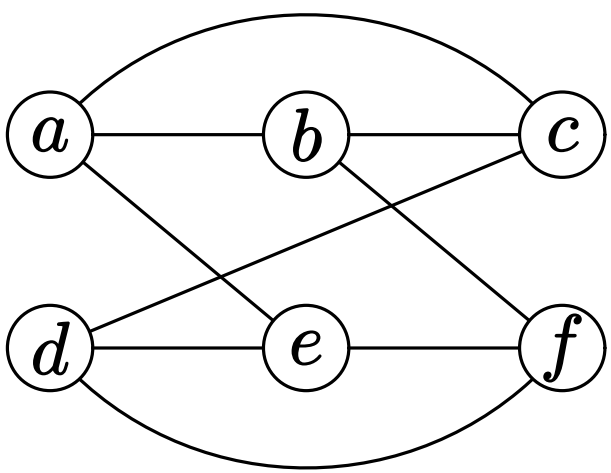
- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$

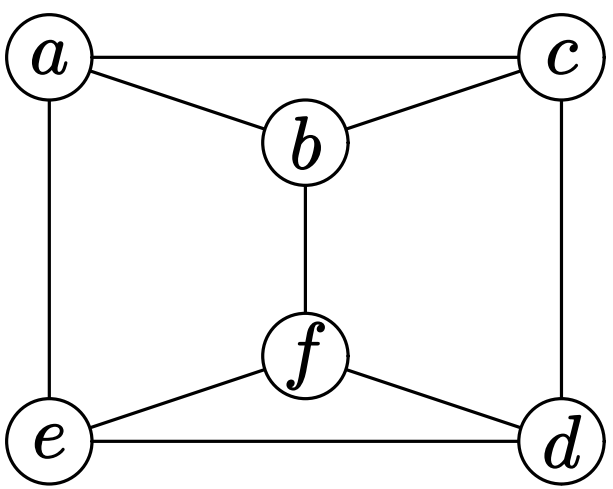


グラフの図示

例

- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$

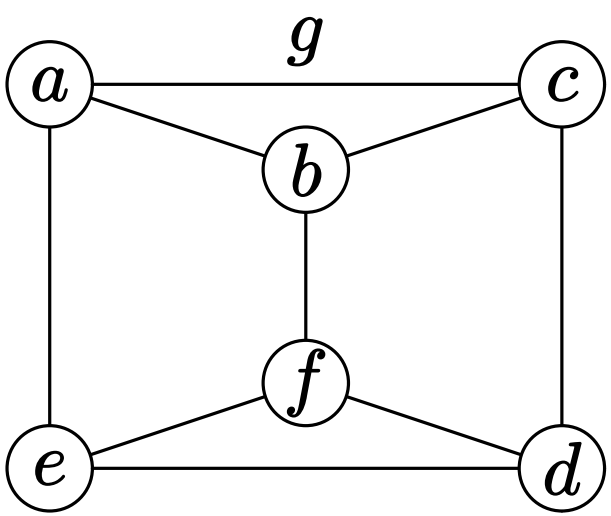




グラフにおける隣接関係と接続関係

用語：無向グラフ $G = (V, E)$ において

- 頂点 u, v が **隣接** しているとは，$\{u, v\} \in E$ であること
- 頂点 v が辺 e に **接続** しているとは，$v \in e$ であること



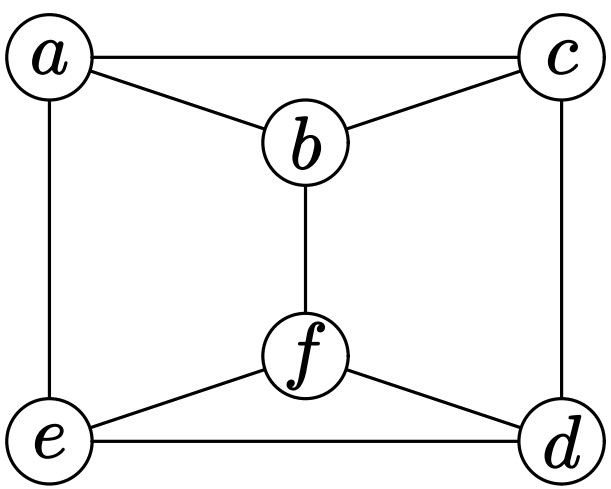
- 頂点 a と頂点 b は隣接している
- 頂点 a と頂点 d は隣接していない
- 頂点 a は辺 g に接続している
- 頂点 e は辺 g に接続していない

グラフの全域木

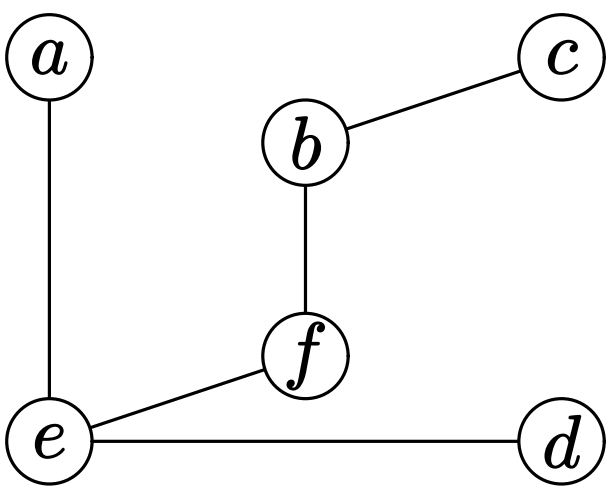
定義：全域木

無向グラフ $G = (V, E)$ の **全域木** とは，
無向グラフ $T = (V, E_T)$ で次を満たすもの

- $E_T \subseteq E$
- T は連結で閉路を含まない



G



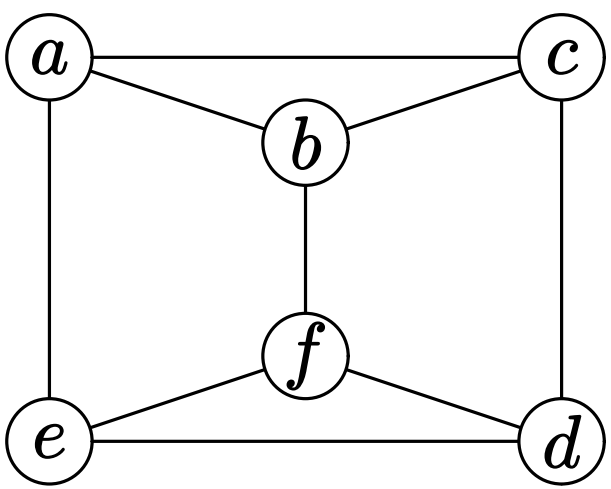
G の全域木

グラフの全域木

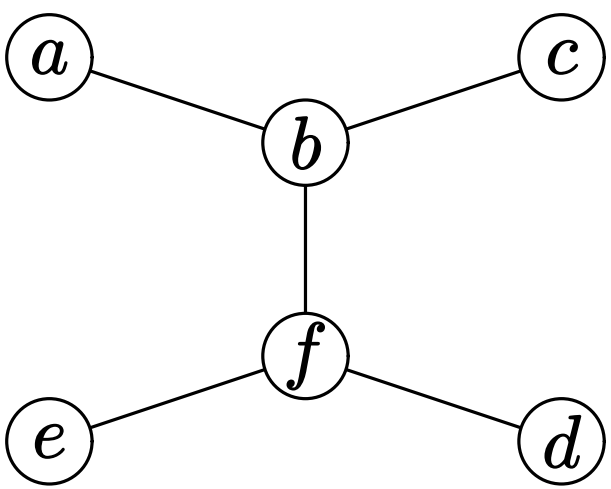
定義：全域木

無向グラフ $G = (V, E)$ の **全域木** とは，
無向グラフ $T = (V, E_T)$ で次を満たすもの

- $E_T \subseteq E$
- T は連結で閉路を含まない



G



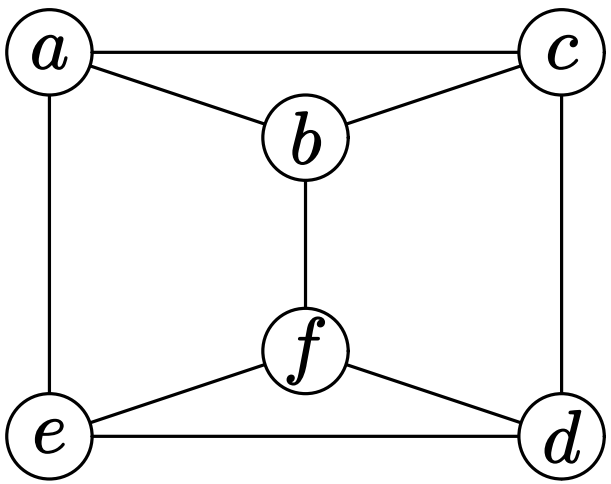
G の全域木

グラフの全域木

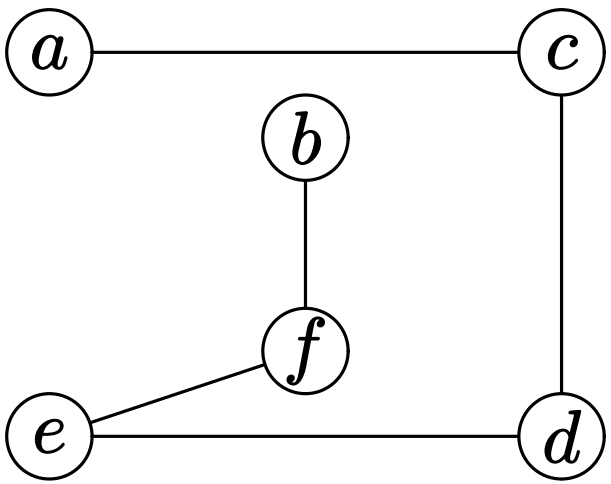
定義：全域木

無向グラフ $G = (V, E)$ の **全域木** とは，
無向グラフ $T = (V, E_T)$ で次を満たすもの

- $E_T \subseteq E$
- T は連結で閉路を含まない



G



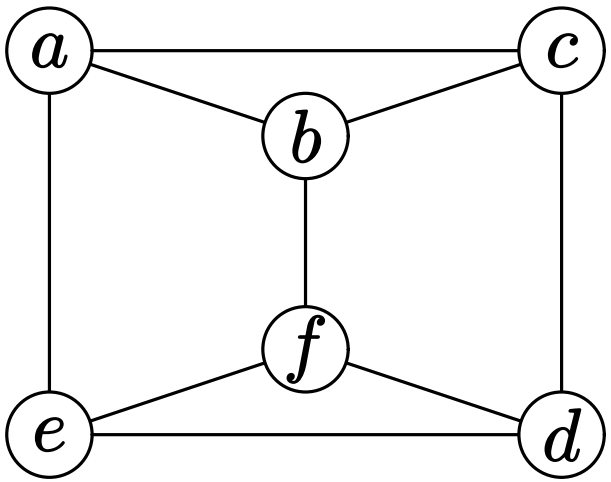
G の全域木

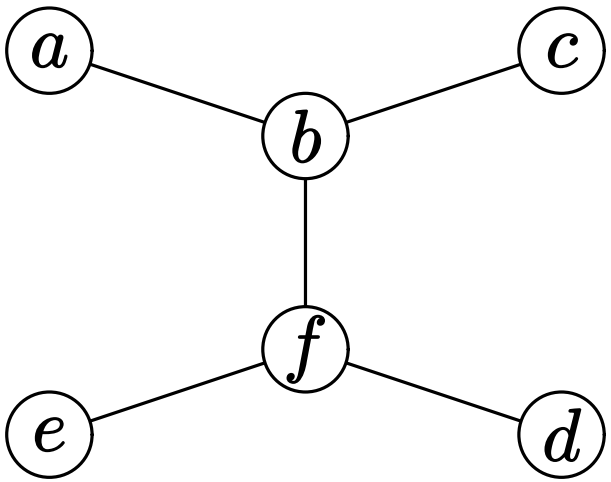
全域木の性質

無向グラフ $G = (V, E)$，G の全域木 $T = (V, E_T)$

性質 (証明は省略)

1. T には，任意の 2 頂点間を結ぶ道 (パス) が一意に存在する
2. 任意の辺 $e \in E_T$ を T から取り除くと，$T - e$ は 2 つの連結成分に分かれる
3. 任意の辺 $e \in E - E_T$ を T に付け加えると，$T + e$ には閉路がちょうど 1 つできる



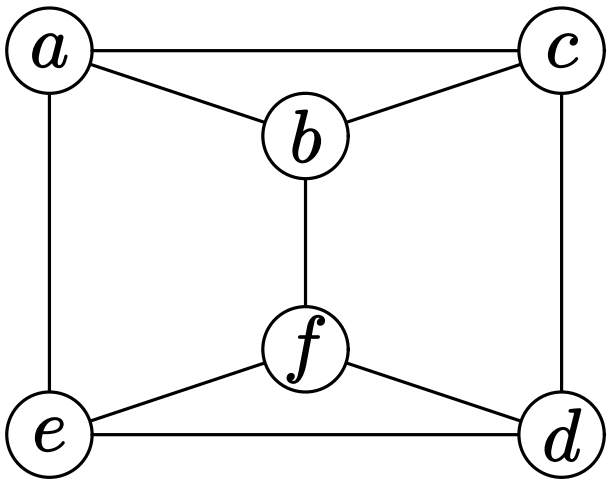


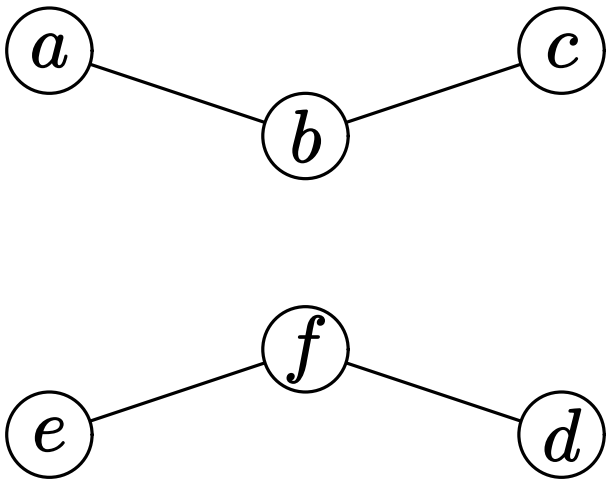
全域木の性質

無向グラフ $G = (V, E)$，G の全域木 $T = (V, E_T)$

性質 (証明は省略)

1. T には，任意の 2 頂点間を結ぶ道 (パス) が一意に存在する
2. 任意の辺 $e \in E_T$ を T から取り除くと，$T - e$ は 2 つの連結成分に分かれる
3. 任意の辺 $e \in E - E_T$ を T に付け加えると，$T + e$ には閉路がちょうど 1 つできる



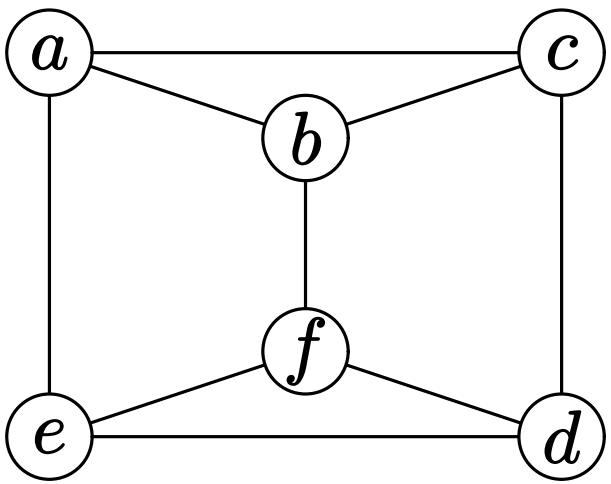


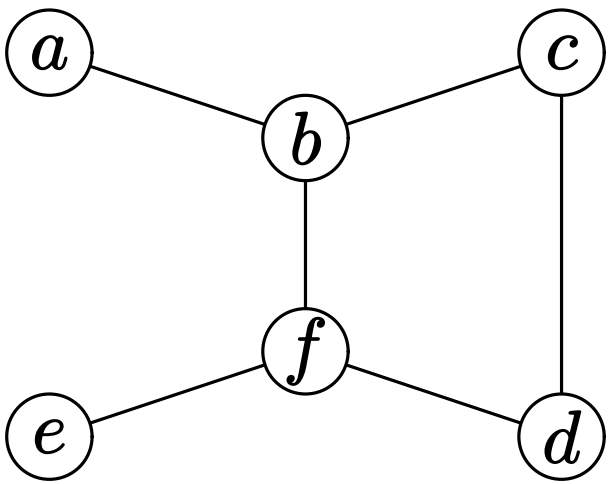
全域木の性質

無向グラフ $G = (V, E)$，G の全域木 $T = (V, E_T)$

性質 (証明は省略)

1. T には，任意の 2 頂点間を結ぶ道 (パス) が一意に存在する
2. 任意の辺 $e \in E_T$ を T から取り除くと，$T - e$ は 2 つの連結成分に分かれる
3. 任意の辺 $e \in E - E_T$ を T に付け加えると，$T + e$ には閉路がちょうど 1 つできる





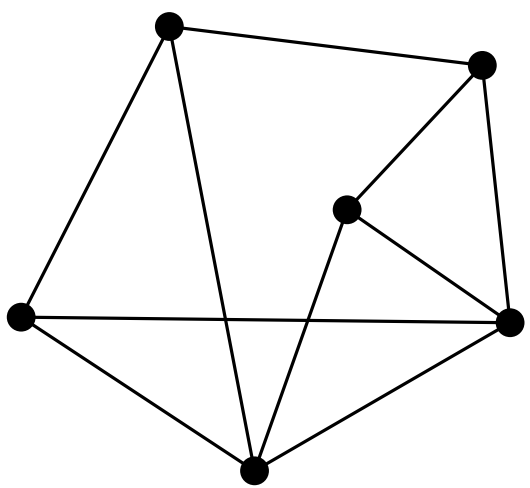
幾何グラフ

注：幾何グラフは ここまでの定義に基づくグラフ ではない

定義：幾何グラフ

幾何グラフ とは次のような対 $G = (V, E)$

- V は平面上の点の集合
- E は V の 2 点を結ぶ線分の集合

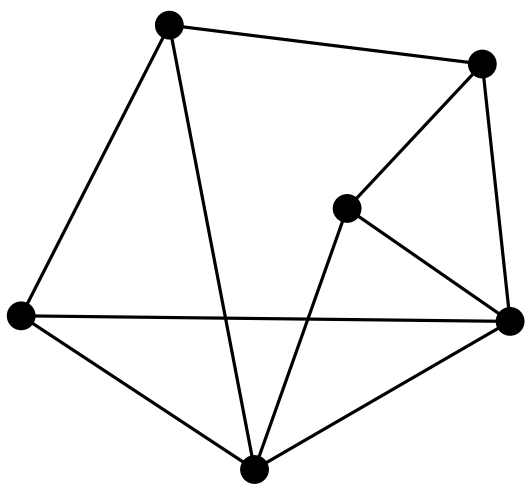


幾何グラフでも,頂点,辺という用語を使う

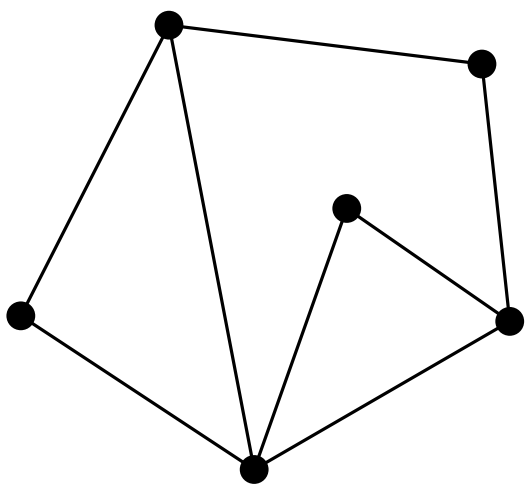
非交差幾何グラフ

定義：非交差幾何グラフ

幾何グラフ G が **非交差** であるとは
その異なる 2 辺が端点以外に共有点を持たないこと



非交差幾何グラフ
ではない

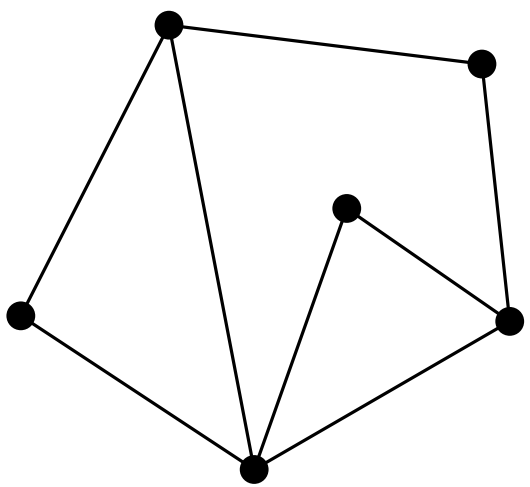


非交差幾何グラフ
である

非交差幾何グラフの面

定義：非交差幾何グラフの面

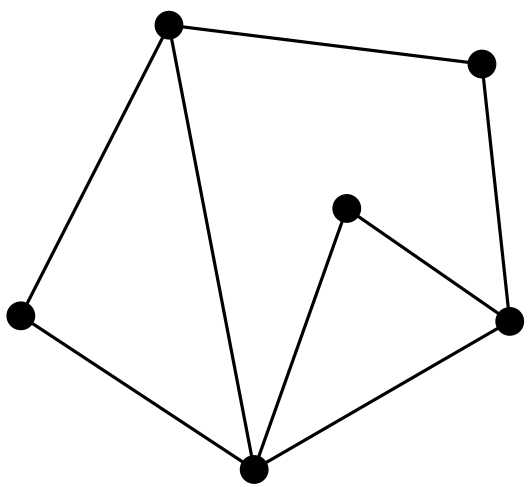
非交差幾何グラフ $G = (V, E)$ の **面** とは，
$\mathbb{R}^2 - \bigcup E$ の連結成分のこと

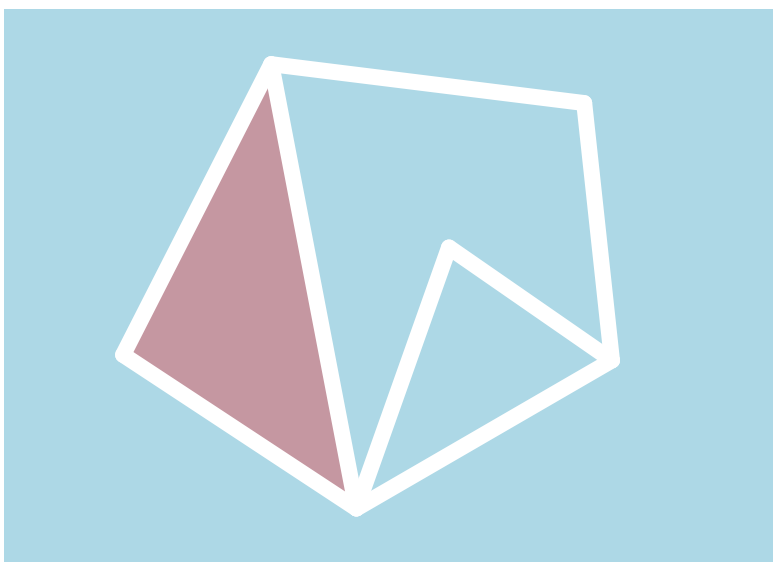


非交差幾何グラフの面

定義：非交差幾何グラフの面

非交差幾何グラフ $G = (V, E)$ の **面** とは，
$\mathbb{R}^2 - \bigcup E$ の連結成分のこと

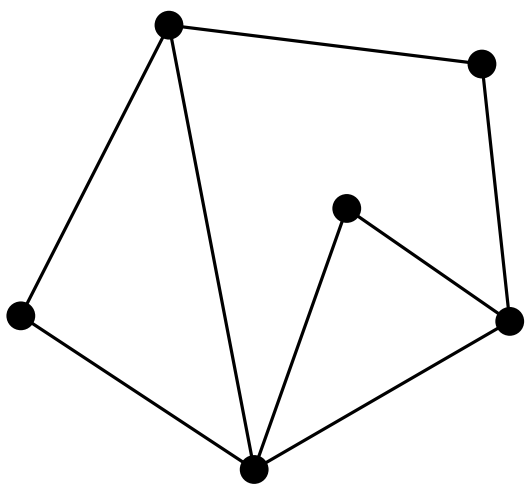


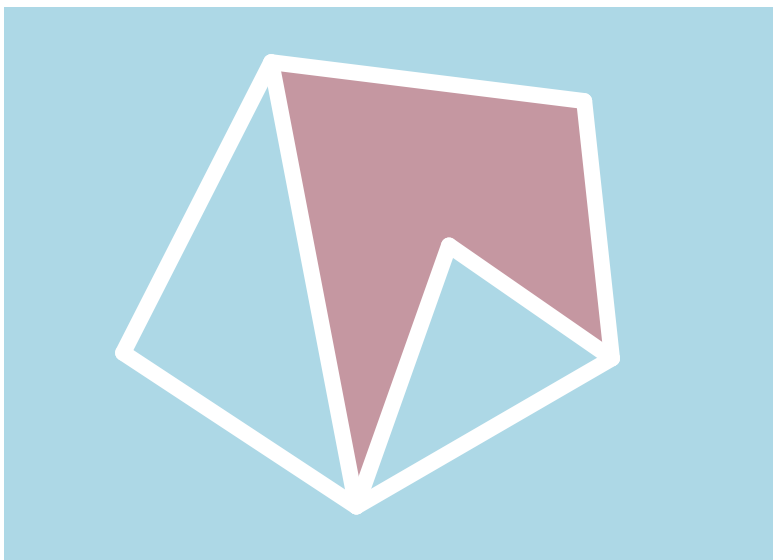


非交差幾何グラフの面

定義：非交差幾何グラフの面

非交差幾何グラフ $G = (V, E)$ の **面** とは，
$\mathbb{R}^2 - \bigcup E$ の連結成分のこと

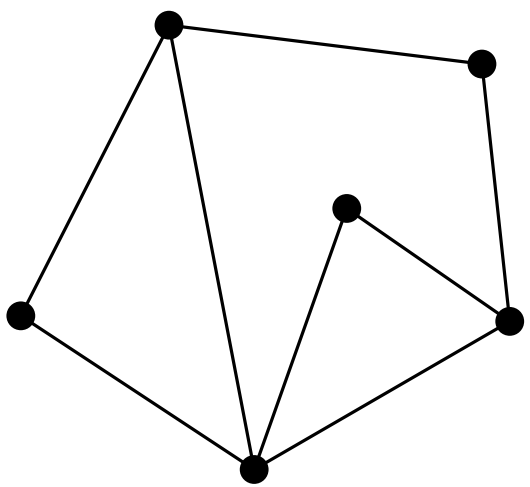


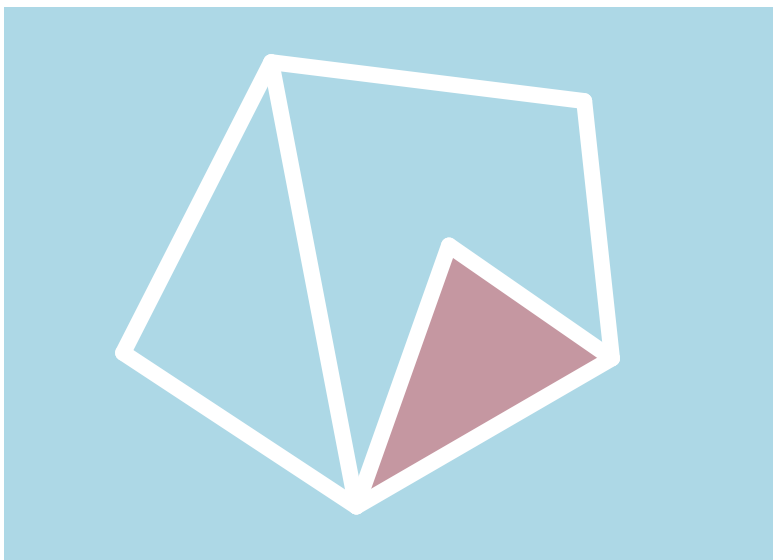


非交差幾何グラフの面

定義：非交差幾何グラフの面

非交差幾何グラフ $G = (V, E)$ の **面** とは，
$\mathbb{R}^2 - \bigcup E$ の連結成分のこと

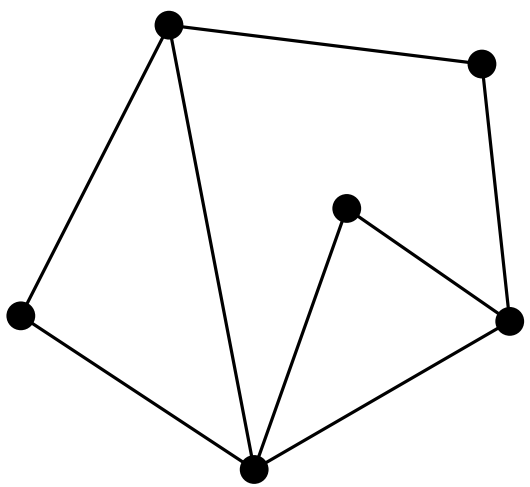


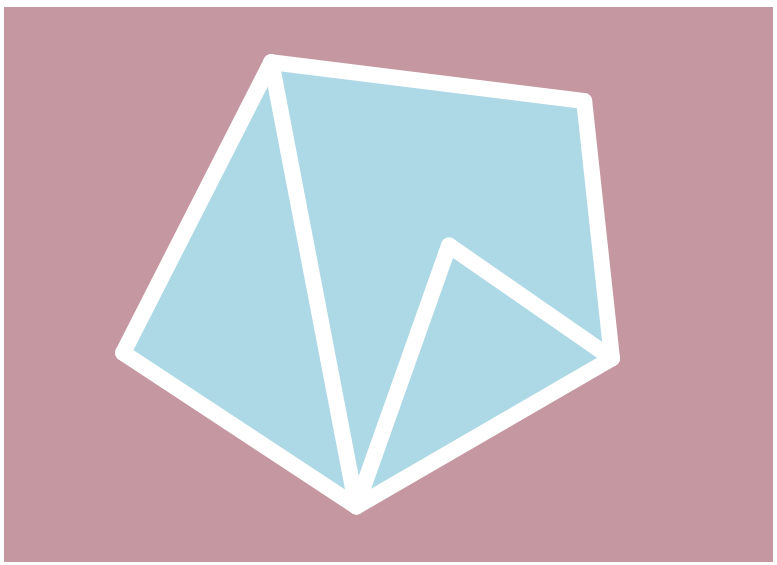


非交差幾何グラフの面

定義：非交差幾何グラフの面

非交差幾何グラフ $G = (V, E)$ の **面** とは，
$\mathbb{R}^2 - \bigcup E$ の連結成分のこと





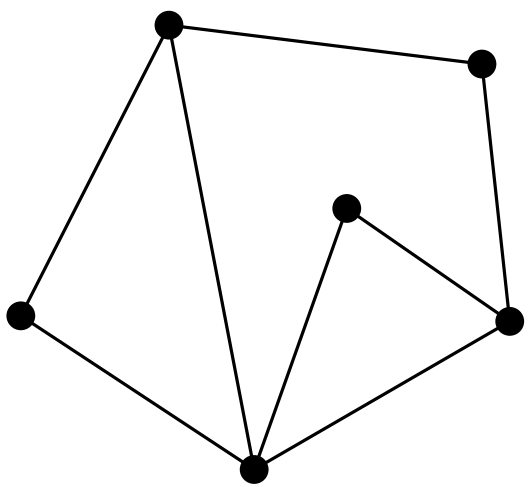
必ず，1 つの面は非有界

オイラーの公式

性質：オイラーの公式 (証明は省略)

任意の連結な非交差幾何グラフ G において，次が成立

$$\text{頂点数} - \text{辺数} + \text{面数} = 2$$



例

- 頂点数 $= 6$
- 辺数 $= 8$
- 面数 $= 4$

$\therefore$ 頂点数 $-$ 辺数 $+$ 面数 $= 2$

オイラーの公式の帰結：辺数と面数

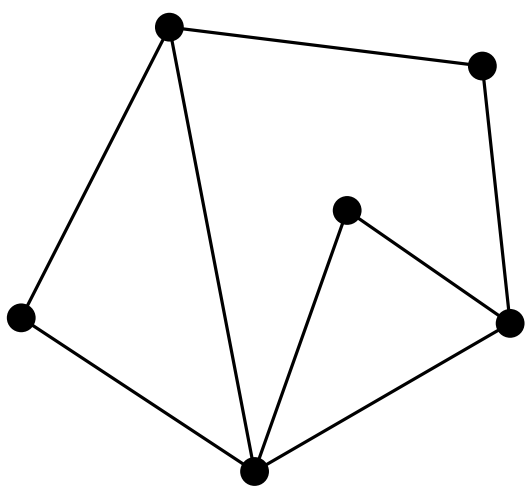
性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の連結な非交差幾何グラフにおいて，

- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

略証：各辺の両側に石を置いて，石の総数を数える

- 辺に着目すると，石の総数 $= 2 \cdot$ 辺数
- 面に着目すると，石の総数 $\geq 3 \cdot$ 面数
- $\therefore 2 \cdot$ 辺数 $\geq 3 \cdot$ 面数



オイラーの公式の帰結：辺数と面数

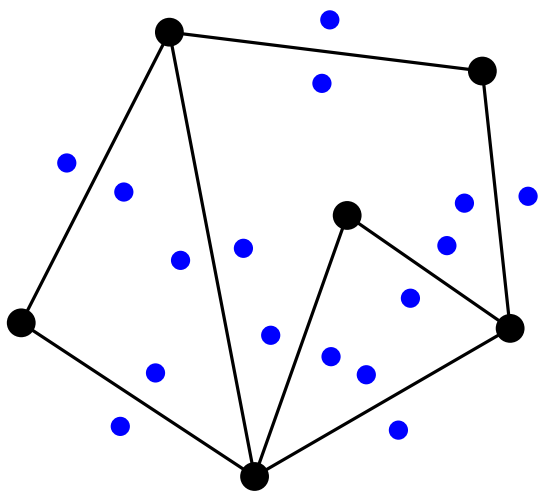
性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の連結な非交差幾何グラフにおいて，

- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

略証：各辺の両側に石を置いて，石の総数を数える

- 辺に着目すると，石の総数 $= 2 \cdot$ 辺数
- 面に着目すると，石の総数 $\geq 3 \cdot$ 面数
- $\therefore 2 \cdot$ 辺数 $\geq 3 \cdot$ 面数



オイラーの公式の帰結：辺数と面数

性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の連結な非交差幾何グラフにおいて，

- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

性質：オイラーの公式 (証明は省略)

任意の連結な非交差幾何グラフ G において，次が成立

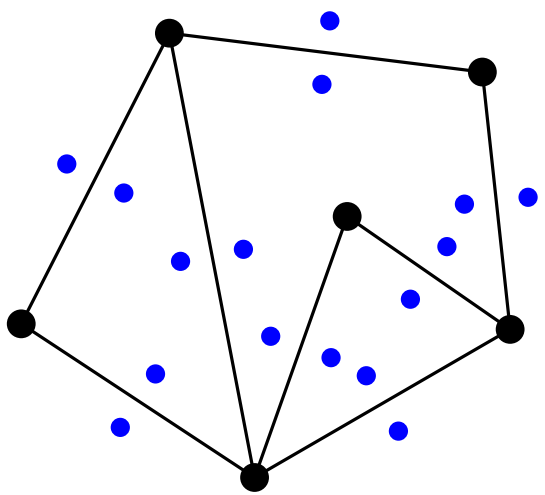
$$\text{頂点数} - \text{辺数} + \text{面数} = 2$$

略証：各辺の両側に石を置いて，石の総数を数える

- 辺に着目すると，石の総数 $= 2 \cdot$ 辺数
- 面に着目すると，石の総数 $\geq 3 \cdot$ 面数
- $\therefore 2 \cdot$ 辺数 $\geq 3 \cdot$ 面数
- オイラーの公式より

  $3 \cdot$ 面数 $= -3n + 3 \cdot$ 辺数 $+ 6$,

  $2 \cdot$ 辺数 $= 2n + 2 \cdot$ 面数 $- 4$



オイラーの公式の帰結：辺数と面数

性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の連結な非交差幾何グラフにおいて，

- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

性質：オイラーの公式 (証明は省略)

任意の連結な非交差幾何グラフ G において，次が成立

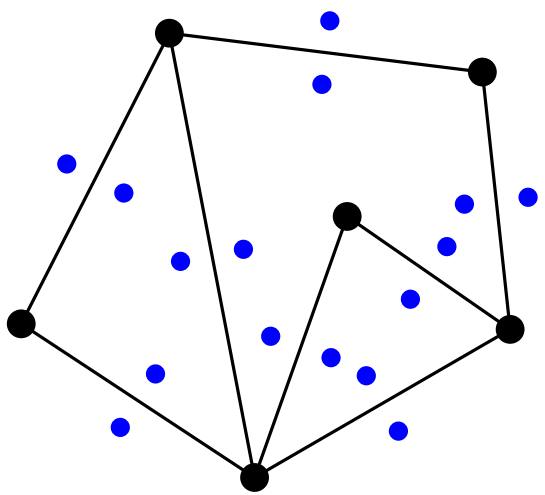
$$\text{頂点数} - \text{辺数} + \text{面数} = 2$$

略証：各辺の両側に石を置いて，石の総数を数える

- 辺に着目すると，石の総数 $= 2 \cdot$ 辺数
- 面に着目すると，石の総数 $\geq 3 \cdot$ 面数
- $\therefore 2 \cdot$ 辺数 $\geq 3 \cdot$ 面数
- オイラーの公式より

  $3 \cdot$ 面数 $= -3n + 3 \cdot$ 辺数 $+ 6$,

  $2 \cdot$ 辺数 $= 2n + 2 \cdot$ 面数 $- 4$
- $\therefore$ 辺数 $\leq 3n - 6$，面数 $\leq 2n - 4$



□

オイラーの公式の帰結：辺数と面数

性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の連結な非交差幾何グラフにおいて，

- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

性質：オイラーの公式 (証明は省略)

任意の連結な非交差幾何グラフ G において，次が成立

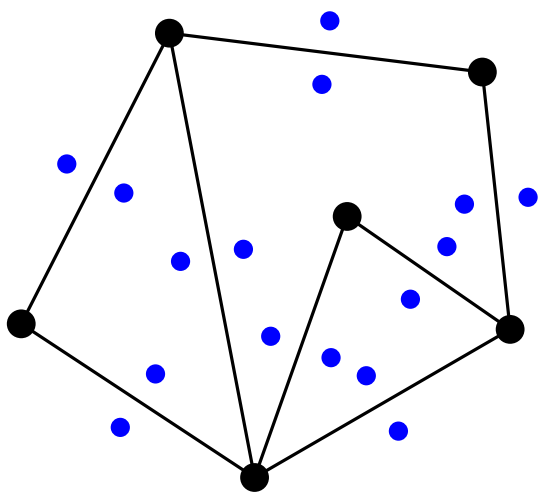
$$\text{頂点数} - \text{辺数} + \text{面数} = 2$$

略証：各辺の両側に石を置いて，石の総数を数える

- 辺に着目すると，石の総数 $= 2 \cdot$ 辺数
- 面に着目すると，石の総数 $\geq 3 \cdot$ 面数 ?
- $\therefore 2 \cdot$ 辺数 $\geq 3 \cdot$ 面数
- オイラーの公式より

  $3 \cdot$ 面数 $= -3n + 3 \cdot$ 辺数 $+ 6$,

  $2 \cdot$ 辺数 $= 2n + 2 \cdot$ 面数 $- 4$
- $\therefore$ 辺数 $\leq 3n - 6$, 面数 $\leq 2n - 4$



□

目次

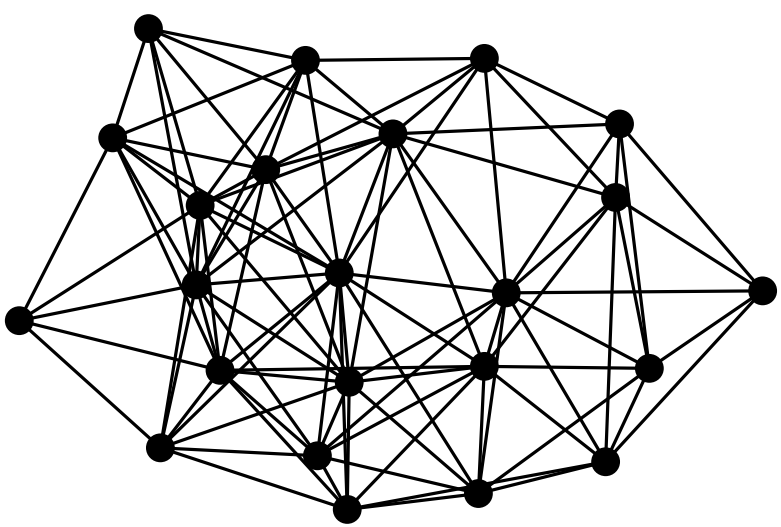
1. グラフと幾何グラフの用語
2. **単位円グラフとデローネ三角形分割**
3. デローネ三角形分割と最小全域木
4. 他の近接グラフ

単位円グラフ

定義：単位円グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **単位円グラフ** とは，
次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \{$線分 $\overline{pq} \mid p, q \in P, \overline{pq}$ の長さ $\leq 2\}$

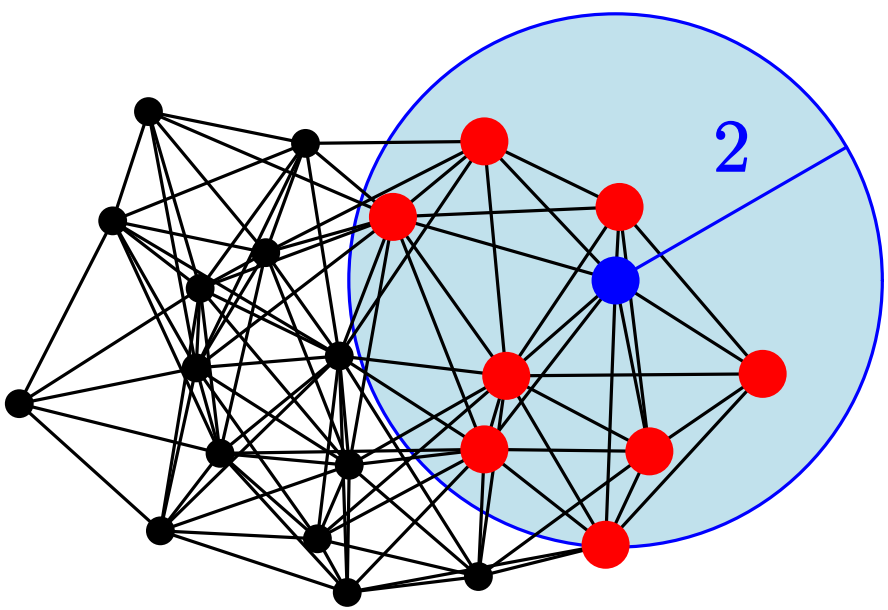


単位円グラフ

定義：単位円グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **単位円グラフ** とは，
次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \{$線分 $\overline{pq} \mid p, q \in P, \overline{pq}$ の長さ $\leq 2\}$

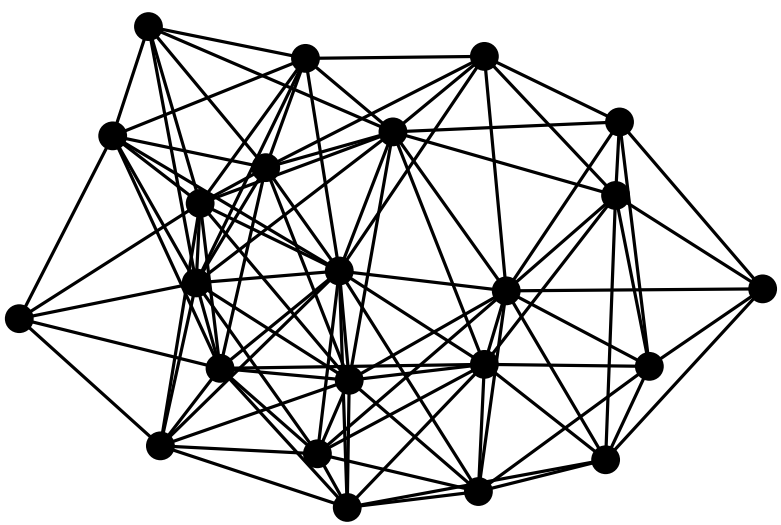


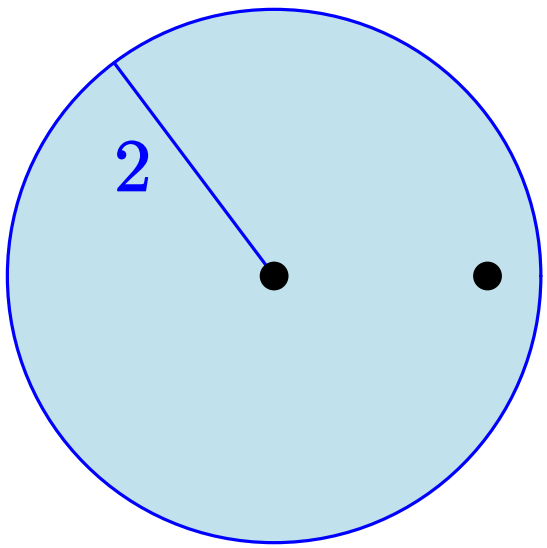
単位円グラフ

定義：単位円グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **単位円グラフ** とは，
次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \{$線分 $\overline{pq} \mid p, q \in P, \overline{pq}$ の長さ $\leq 2\}$



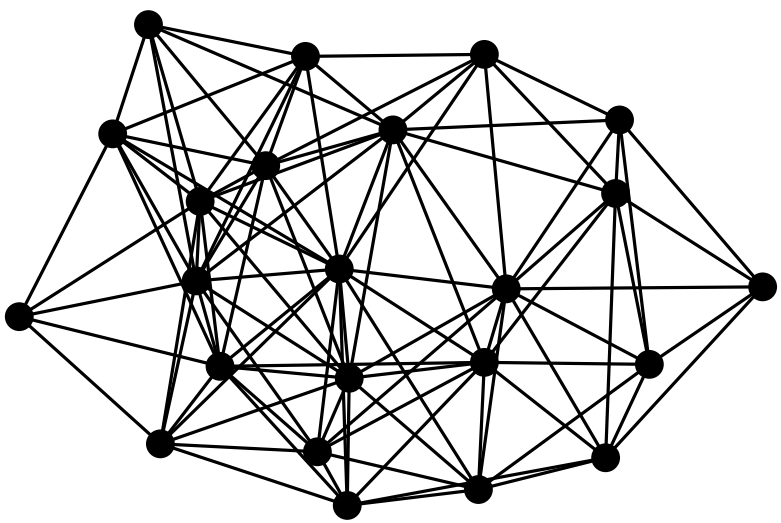


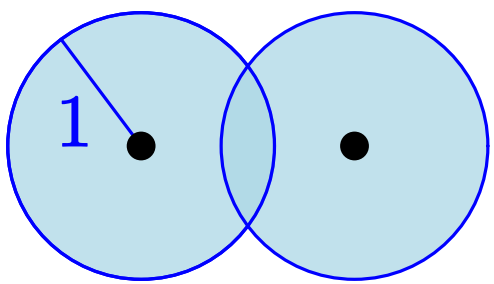
単位円グラフ

定義：単位円グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **単位円グラフ** とは，
次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \{$線分 $\overline{pq} \mid p, q \in P, \overline{pq}$ の長さ $\leq 2\}$





単位円の交差グラフ とも呼ぶ

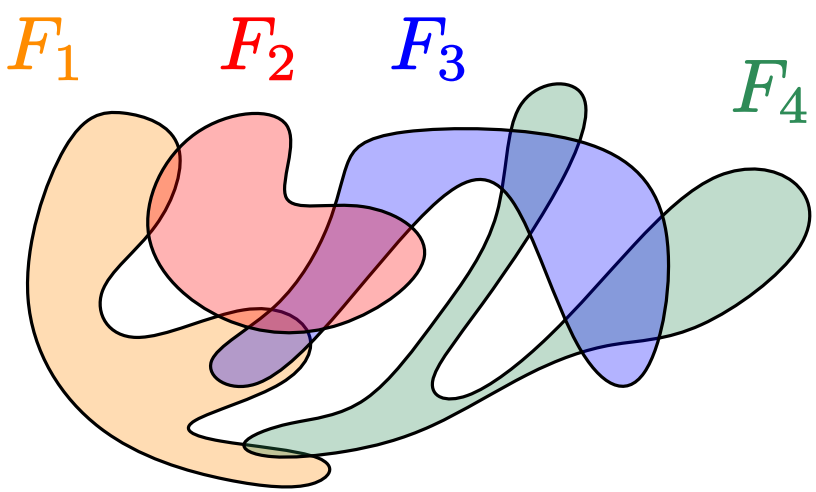
補足：交差グラフ

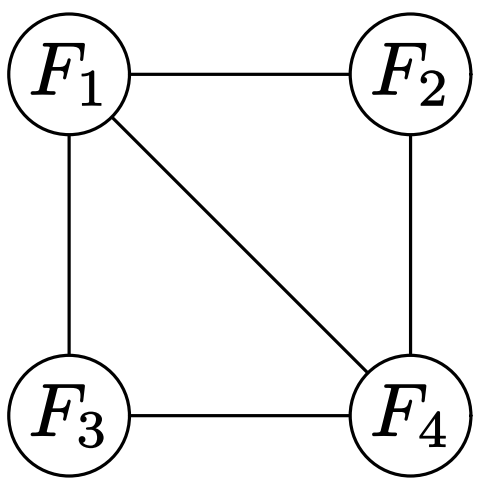
平面図形の集合 $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$

定義：交差グラフ

$\mathcal{F}$ の **交差グラフ** とは次で定義されるグラフ $G = (V, E)$

- $V = \mathcal{F}$
- $E = \{\{F_i, F_j\} \mid i \neq j, F_i \cap F_j \neq \emptyset\}$





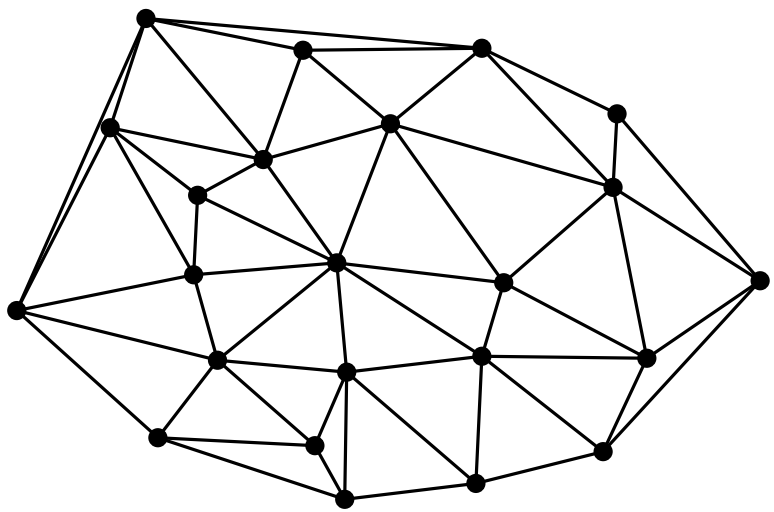
前ページの単位円グラフは,
本ページの単位円の交差グラフを幾何グラフとして表したもの

デローネ・グラフ

定義：デローネ・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **デローネ・グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \exists \text{ 円板 } D\text{: } \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$



「近い」ような 2 つの点は辺で結ばれる

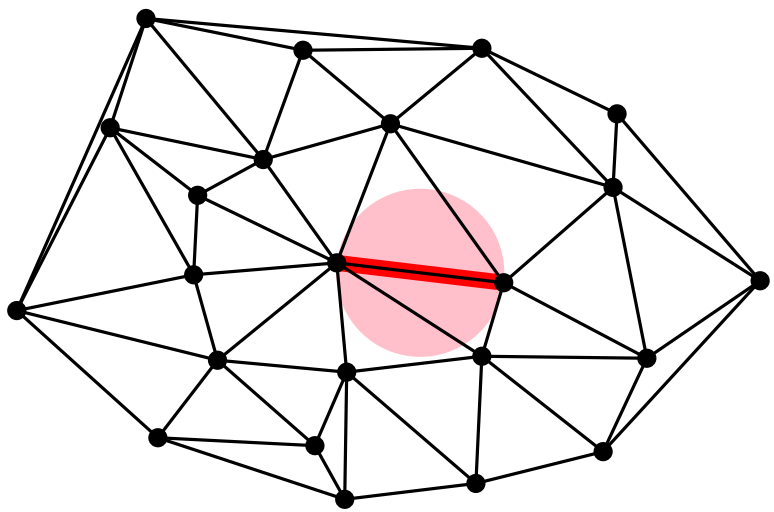
P のデローネ・グラフ とも呼ぶ

デローネ・グラフ

定義：デローネ・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **デローネ・グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \exists \text{ 円板 } D\text{: } \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$



「近い」ような 2 つの点は辺で結ばれる

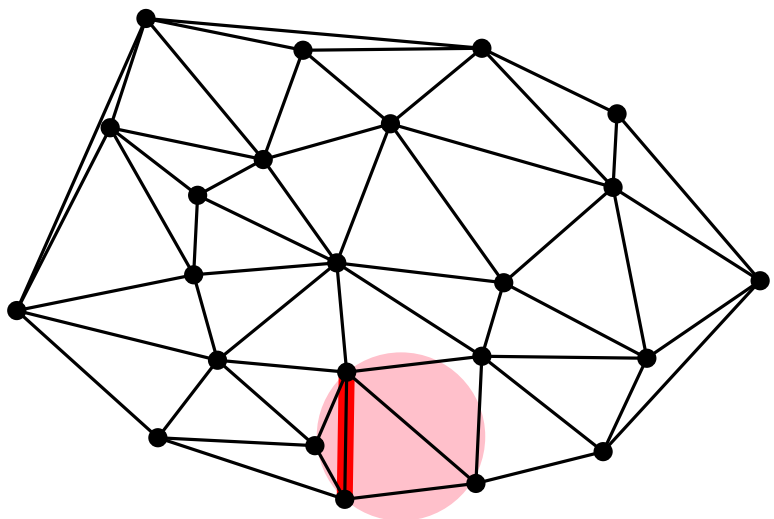
P のデローネ・グラフ とも呼ぶ

デローネ・グラフ

定義：デローネ・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **デローネ・グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \exists \text{ 円板 } D\text{: } \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$



「近い」ような 2 つの点は辺で結ばれる

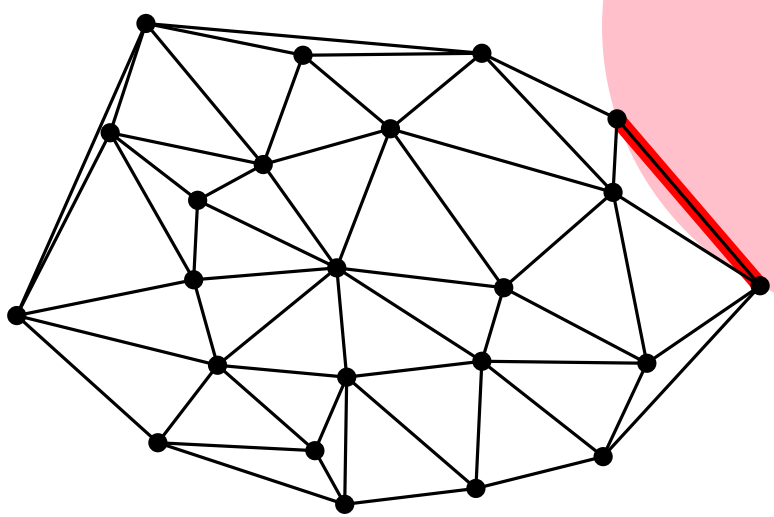
P のデローネ・グラフ とも呼ぶ

デローネ・グラフ

定義：デローネ・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **デローネ・グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \exists \text{ 円板 } D\text{: } \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$



「近い」ような 2 つの点は
辺で結ばれる

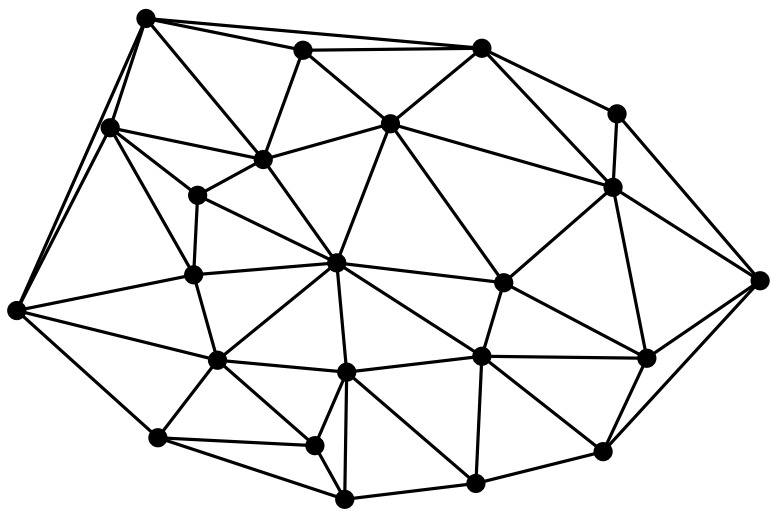
P のデローネ・グラフ とも呼ぶ

デローネ・グラフ

定義：デローネ・グラフ

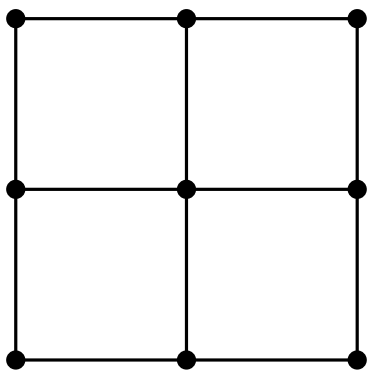
平面上の点集合 P を頂点集合とする **デローネ・グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \exists \text{ 円板 } D\text{: } \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$



P のデローネ・グラフ とも呼ぶ

「近い」ような 2 つの点は
辺で結ばれる



ボリス・デローネ



ボリス・デローネ (ドロネー)

Boris Delone (Delaunay)

(1890–1980)

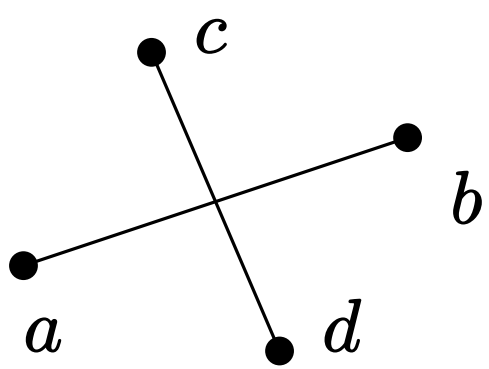
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Delone_cropped_1924.jpg

デローネ・グラフは非交差

性質：デローネ・グラフは非交差

デローネ・グラフは非交差幾何グラフである

証明：2 辺 $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ が交差すると仮定する



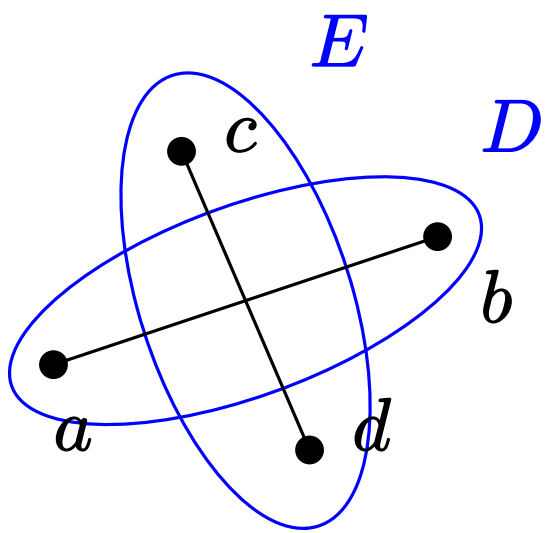
デローネ・グラフは非交差

性質：デローネ・グラフは非交差

デローネ・グラフは非交差幾何グラフである

証明：2 辺 $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ が交差すると仮定する

- a, b のみを含む円板 D と
  c, d のみを含む円板 E が存在



デローネ・グラフは非交差

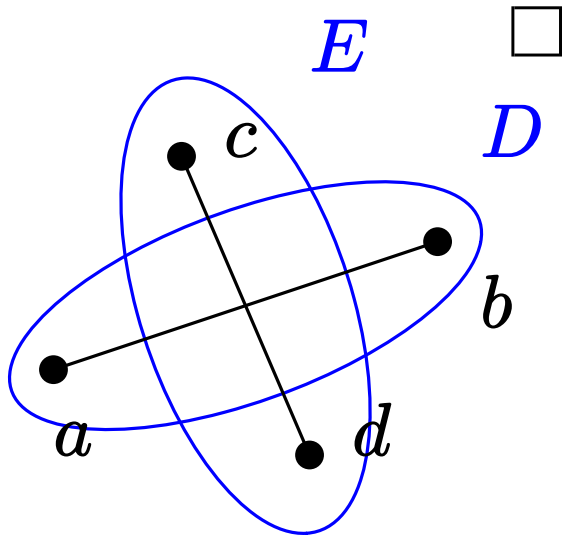
性質：デローネ・グラフは非交差

デローネ・グラフは非交差幾何グラフである

証明：2 辺 $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ が交差すると仮定する

- a, b のみを含む円板 D と
  c, d のみを含む円板 E が存在
- D の境界と E の境界は 4 点で交わる
- これは 2 つの円周が高々 2 点でしか交わらないことに
  矛盾

□



デローネ・グラフは非交差

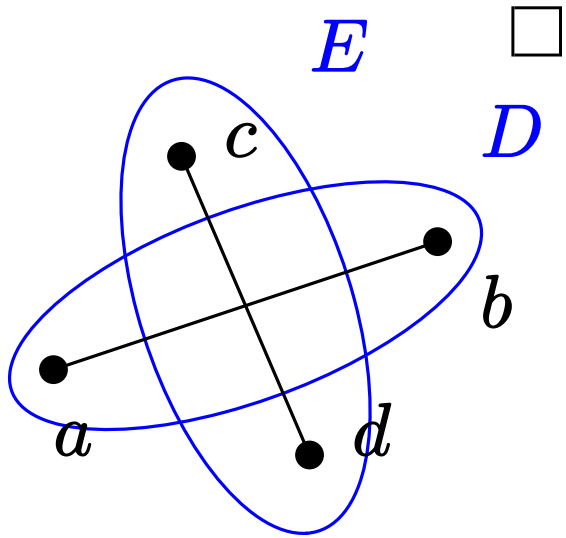
性質：デローネ・グラフは非交差

デローネ・グラフは非交差幾何グラフである

証明：2 辺 $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ が交差すると仮定する

- a, b のみを含む円板 D と
  c, d のみを含む円板 E が存在
- D の境界と E の境界は 4 点で交わる
- これは 2 つの円周が高々 2 点でしか交わらないことに
  矛盾

□



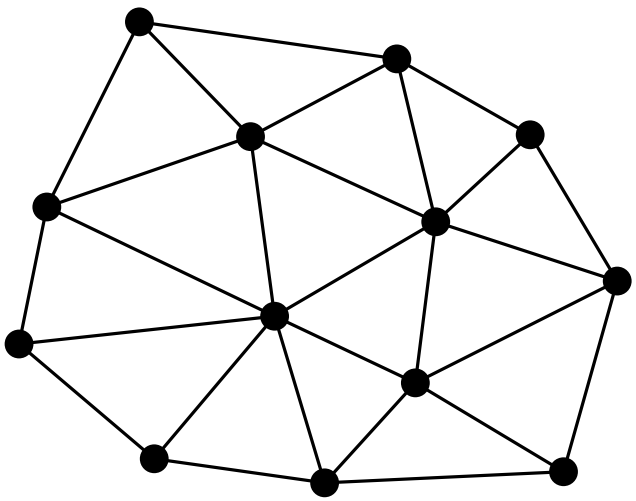
帰結：頂点数 ≥ 3 のとき，

辺数 $\leq 3 \cdot$ 頂点数 $- 6$

デローネ・グラフの面

性質：デローネ・グラフの有界面

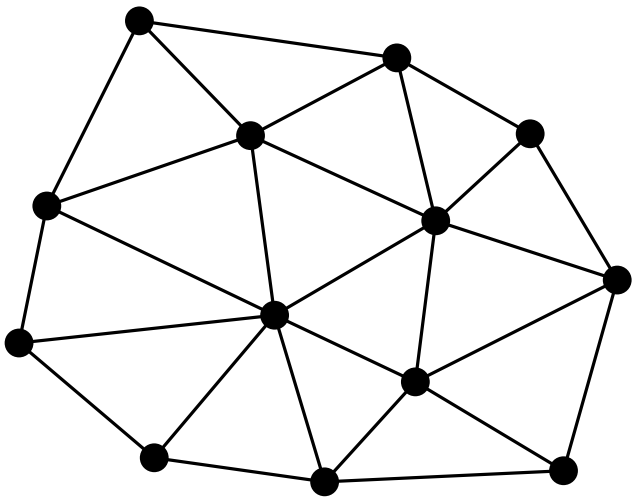
平面上の点集合 P において，すべてが 1 直線上になく，
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である

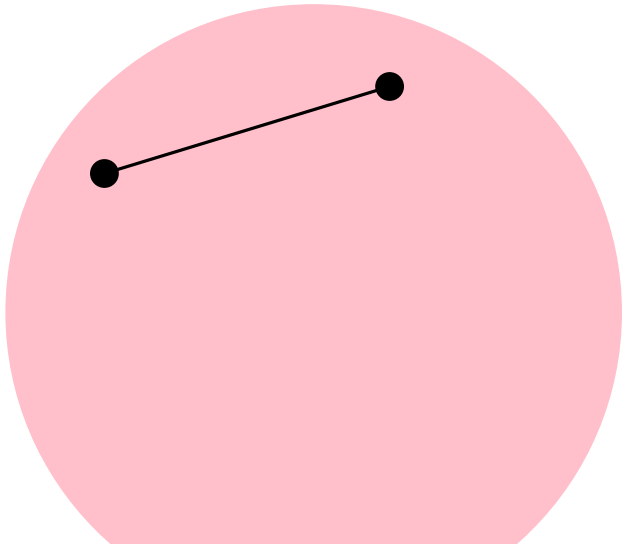


デローネ・グラフの面

性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において，すべてが 1 直線上になく，
どの 4 点も 1 円周上にない ⇒
P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である

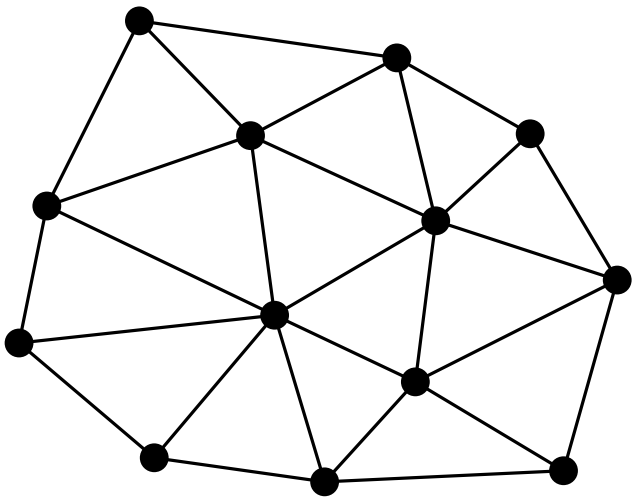


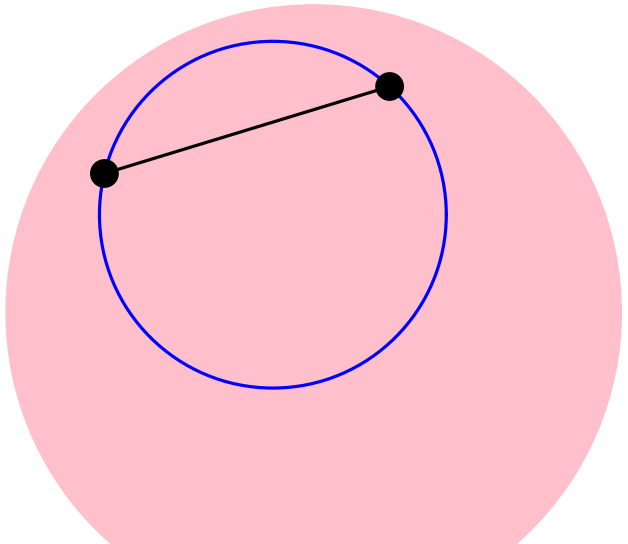


デローネ・グラフの面

性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において，すべてが 1 直線上になく，
どの 4 点も 1 円周上にない ⇒
P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である

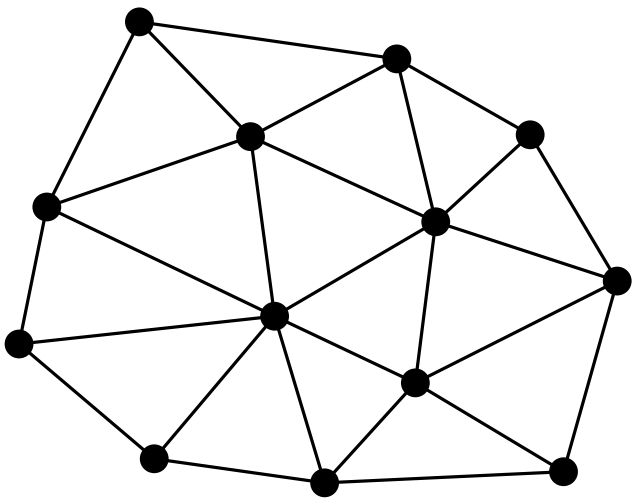


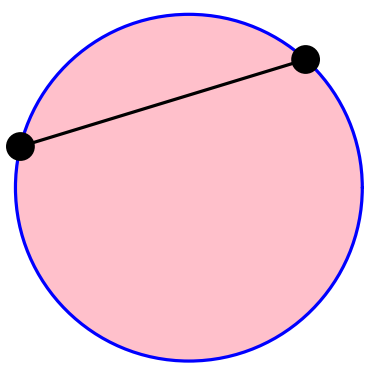


デローネ・グラフの面

性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において，すべてが 1 直線上になく，
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である

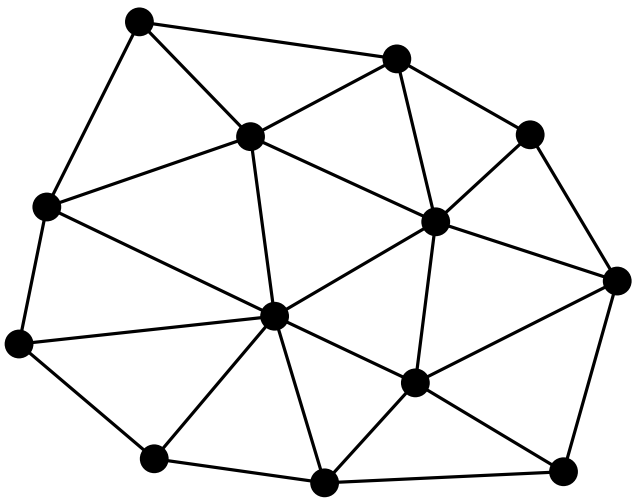


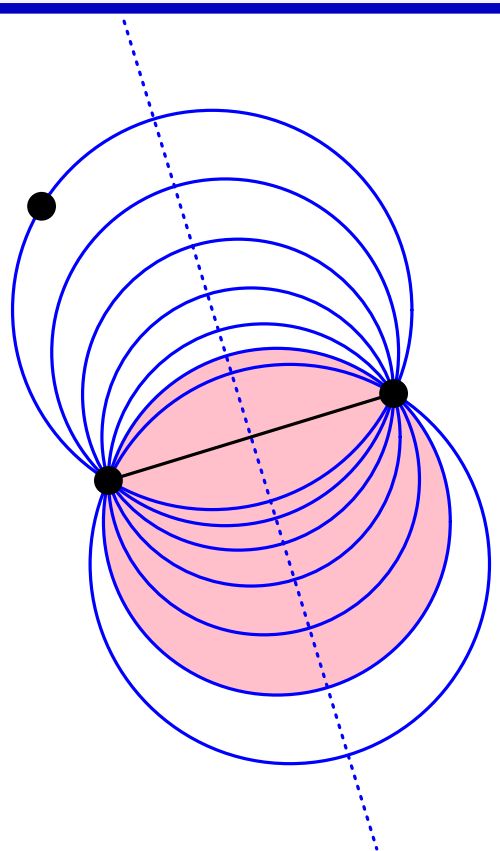


デローネ・グラフの面

性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において，すべてが 1 直線上になく，
どの 4 点も 1 円周上にない ⇒
P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である

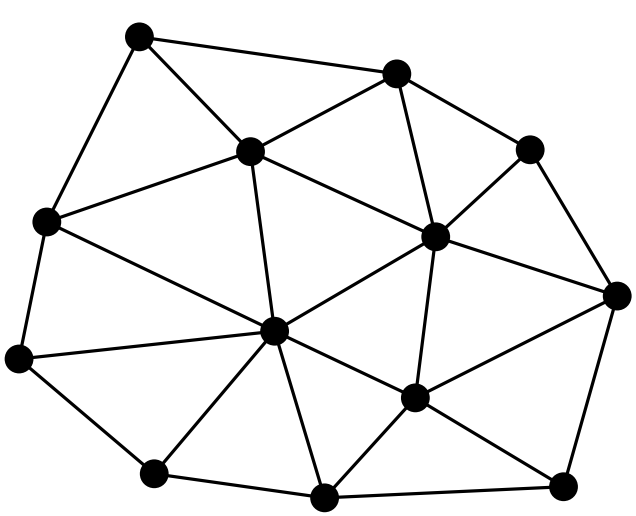


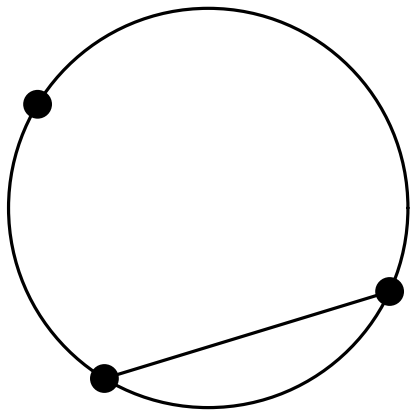


デローネ・グラフの面

性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において，すべてが 1 直線上になく，
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である

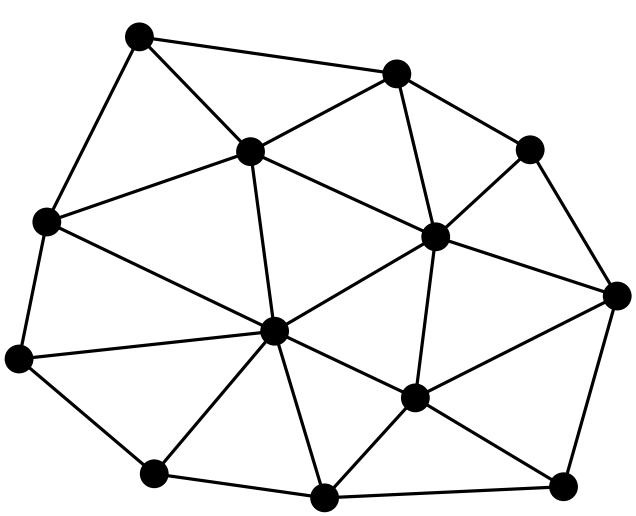


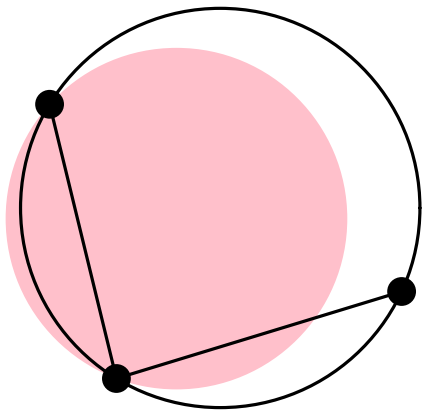


デローネ・グラフの面

性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において，すべてが 1 直線上になく，
どの 4 点も 1 円周上にない ⇒
P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である

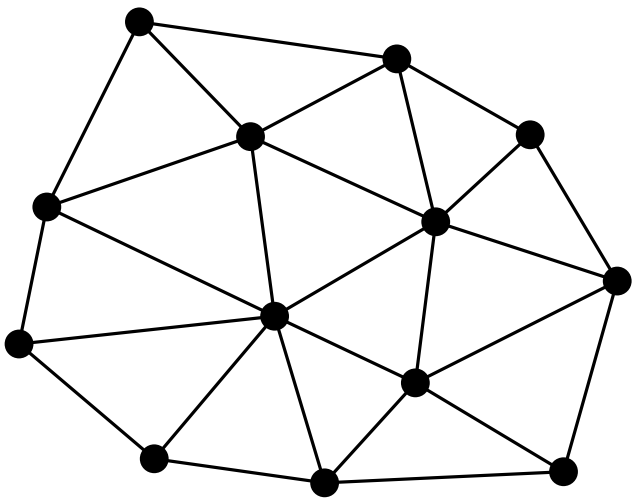


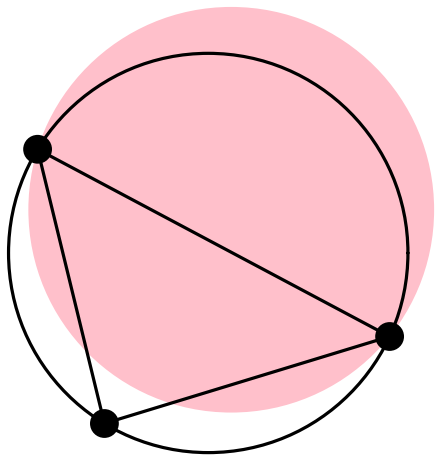


デローネ・グラフの面

性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において，すべてが 1 直線上になく，
どの 4 点も 1 円周上にない ⇒
P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である

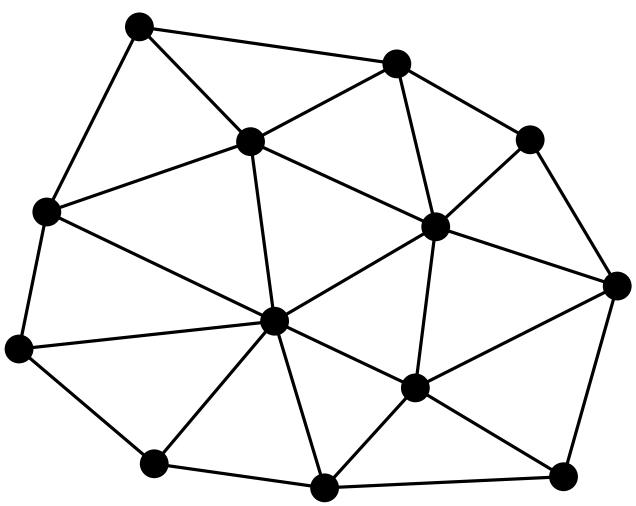


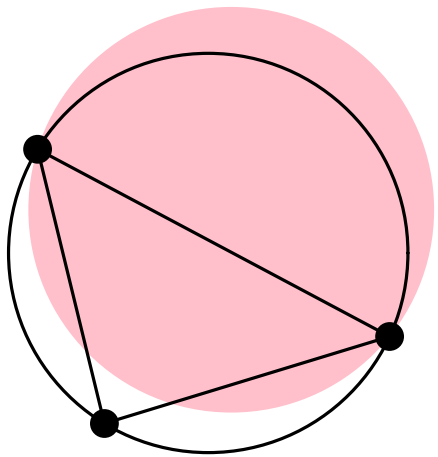


デローネ・グラフの面

性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において，すべてが 1 直線上になく，
どの 4 点も 1 円周上にない ⇒
P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である





証明：演習問題 (文章として書き起こしてみよ)

デローネ三角形分割

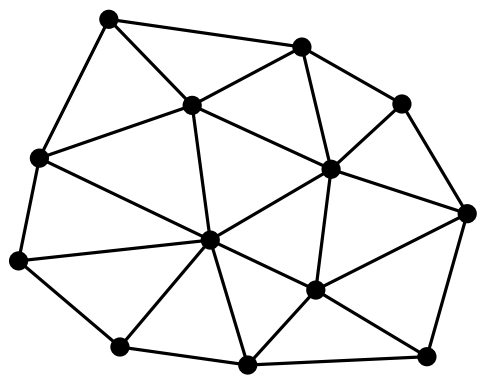
定義：デローネ三角形分割

平面上の点集合 P の **デローネ三角形分割** とは,
P のデローネ・グラフの有界面の集合で,
それらがすべて三角形であるようなもののこと

先ほどの性質の帰結：

P のすべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$

P のデローネ三角形分割は存在する

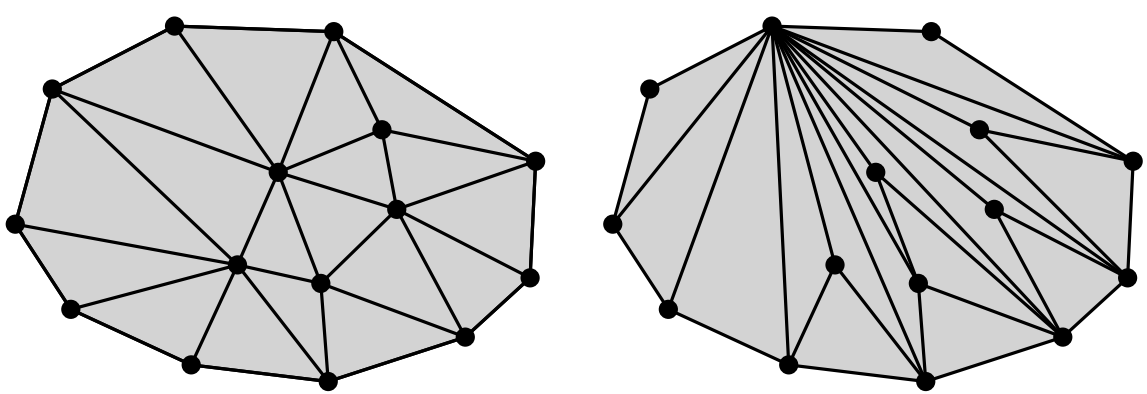


点集合の三角形分割

定義：点集合の三角形分割

平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の **三角形分割** とは
三角形の集まり $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ で次を満たすもの

1. t_i の頂点は P の点
2. P の点はある t_i の頂点
3. $\mathrm{CH}(P) = t_1 \cup t_2 \cup \cdots \cup t_m$
4. $t_i \cap t_j$ は空集合か共通の頂点か共通の辺 $(i \neq j)$



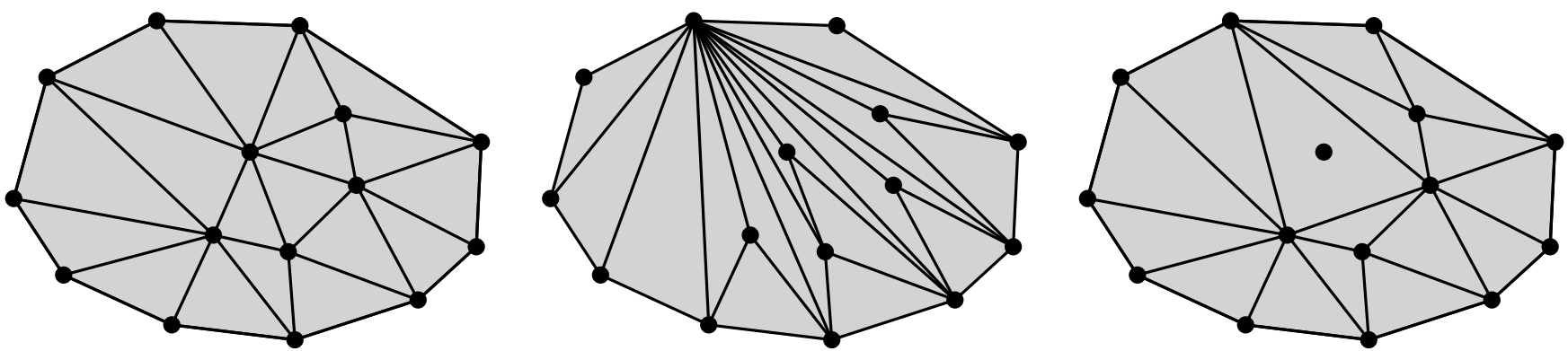
条件 2 を課さないものを P の三角形分割と呼ぶこともある

点集合の三角形分割

定義：点集合の三角形分割

平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の **三角形分割** とは
三角形の集まり $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ で次を満たすもの

1. t_i の頂点は P の点
2. P の点はある t_i の頂点
3. $\mathrm{CH}(P) = t_1 \cup t_2 \cup \cdots \cup t_m$
4. $t_i \cap t_j$ は空集合か共通の頂点か共通の辺 $(i \neq j)$



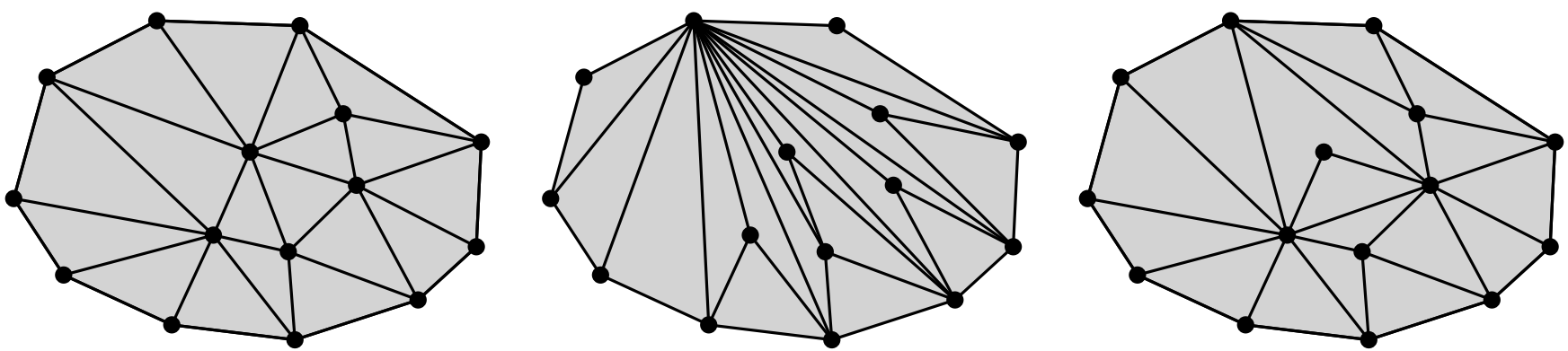
条件 2 を課さないものを P の三角形分割と呼ぶこともある

点集合の三角形分割

定義：点集合の三角形分割

平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の **三角形分割** とは
三角形の集まり $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ で次を満たすもの

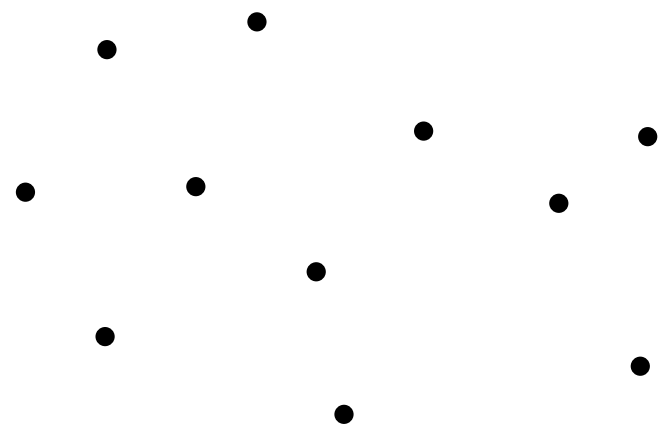
1. t_i の頂点は P の点
2. P の点はある t_i の頂点
3. $\mathrm{CH}(P) = t_1 \cup t_2 \cup \cdots \cup t_m$
4. $t_i \cap t_j$ は空集合か共通の頂点か共通の辺 $(i \neq j)$



条件 2 を課さないものを P の三角形分割と呼ぶこともある

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

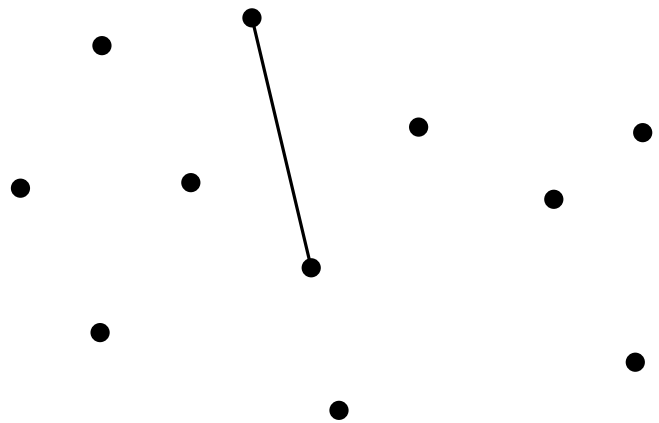
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

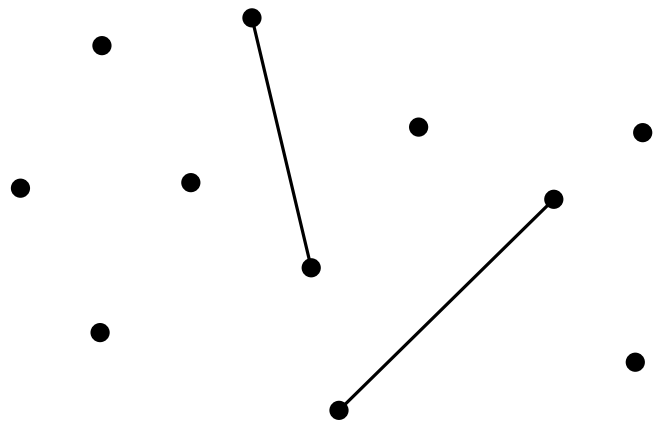
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

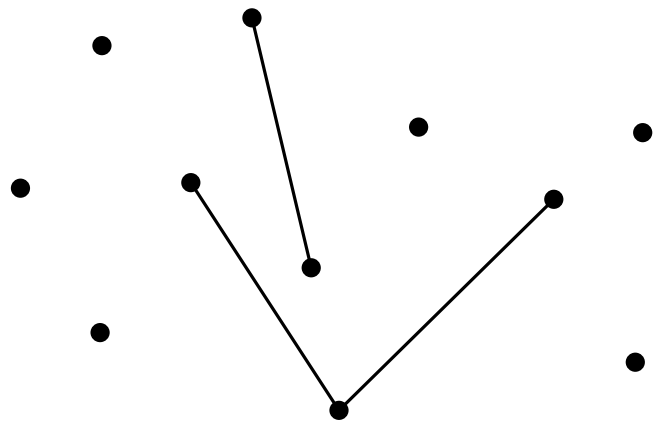
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

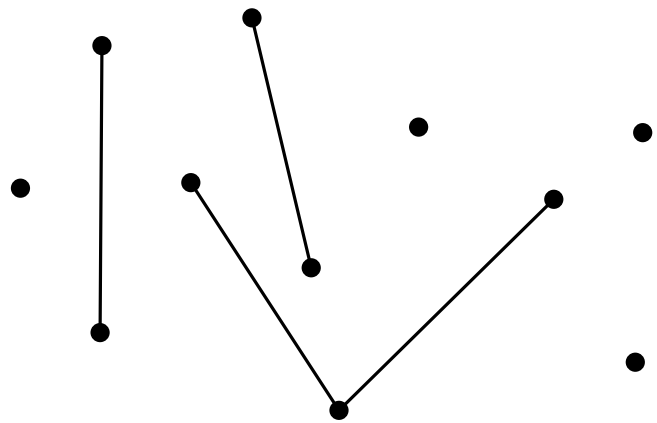
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

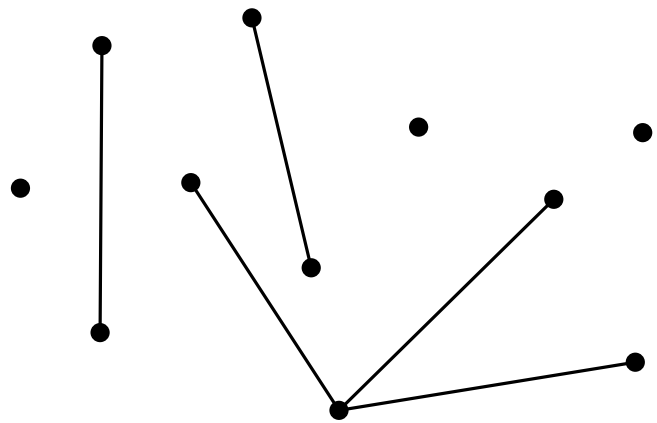
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

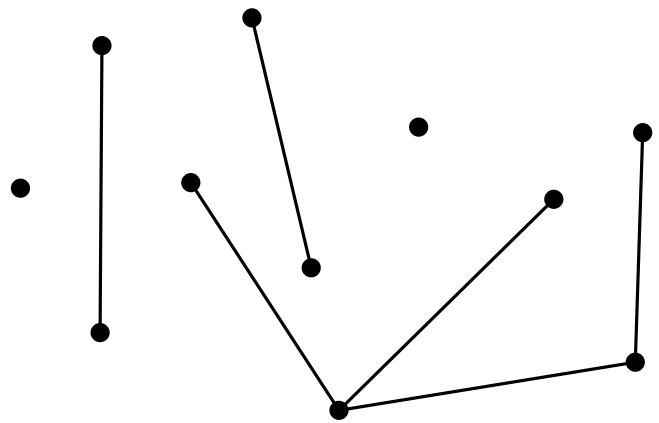
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

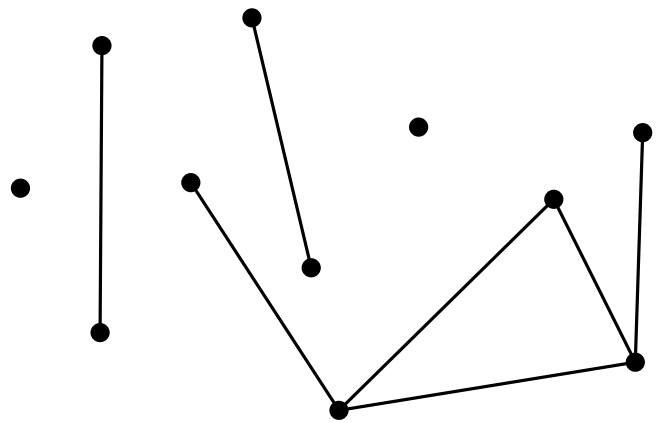
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

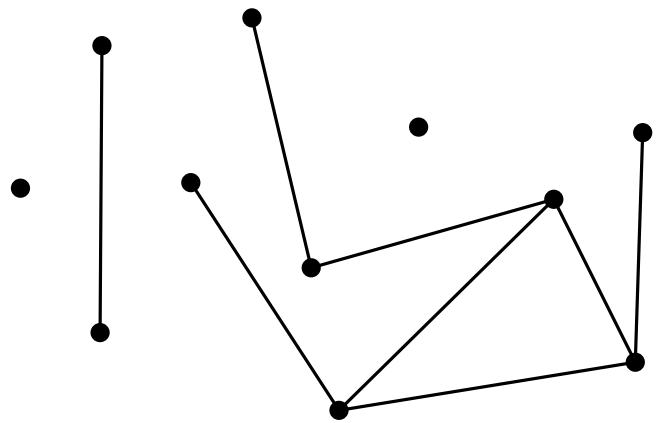
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

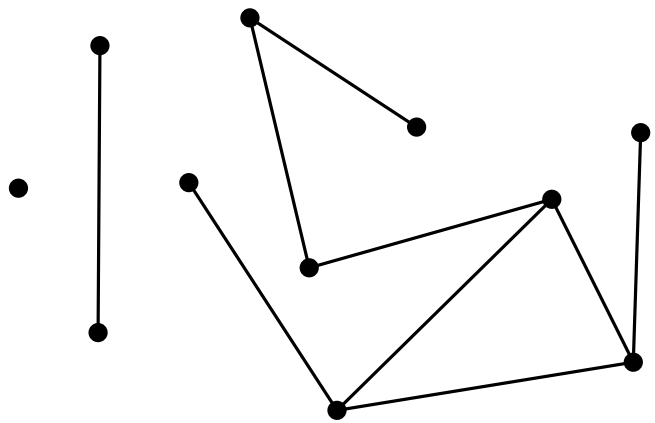
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

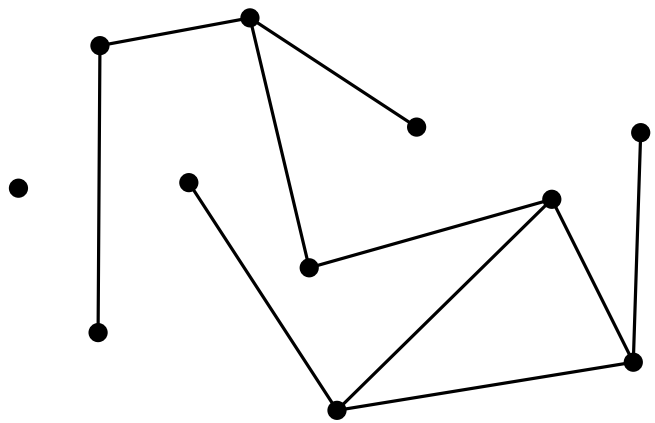
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

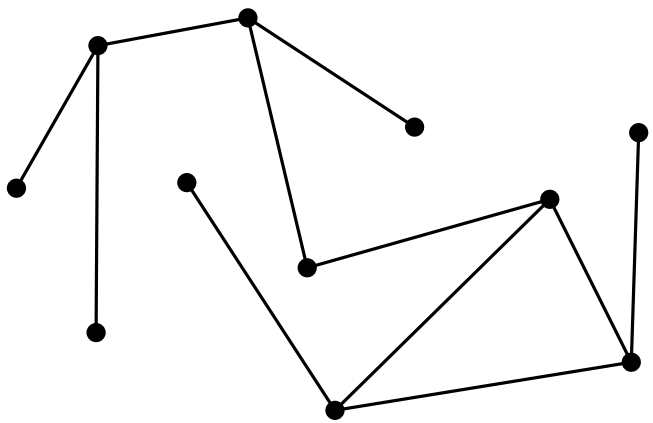
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

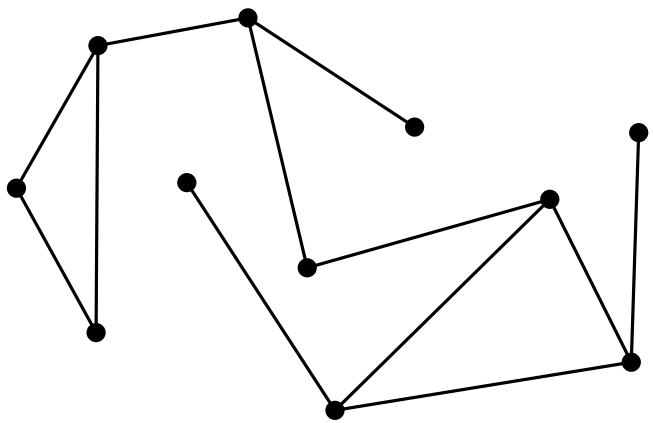
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

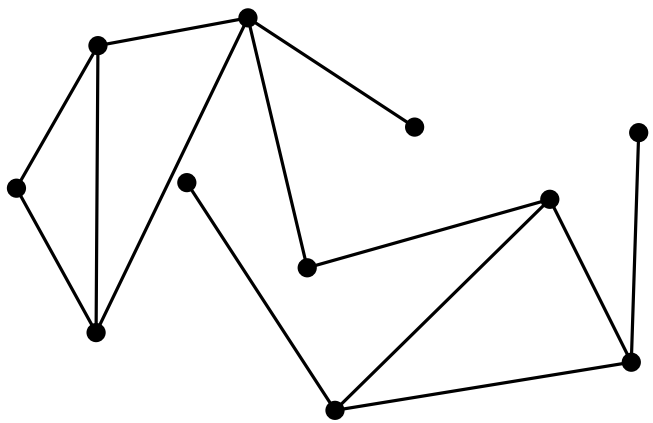
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

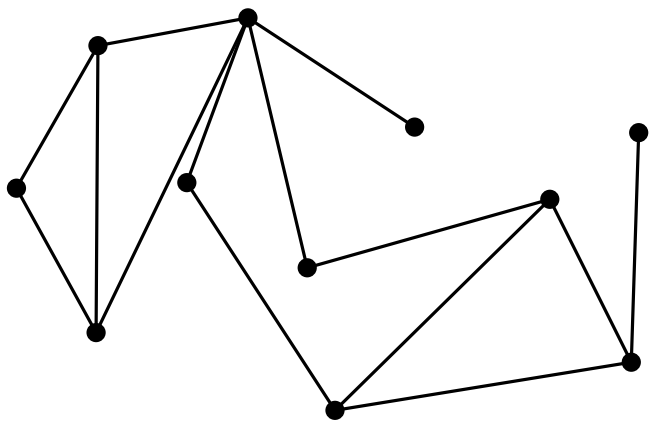
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

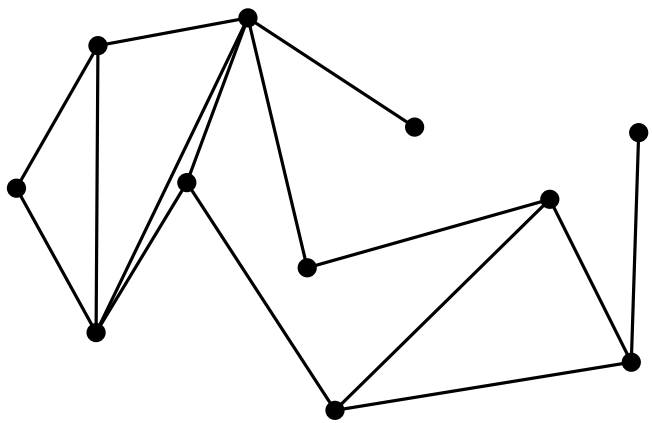
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

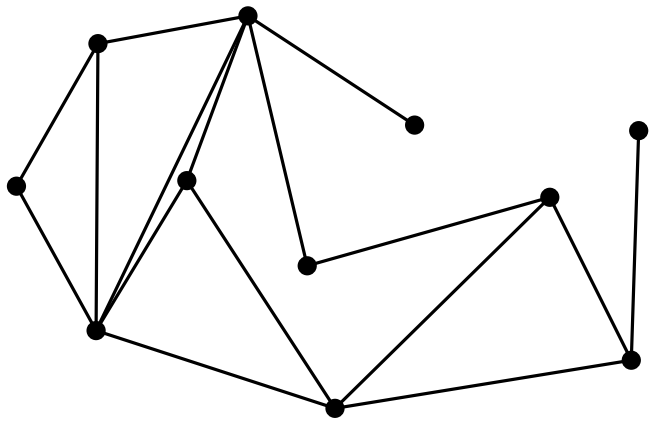
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

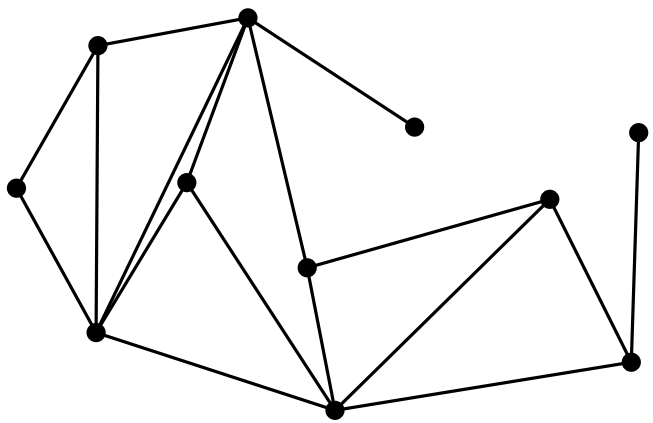
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

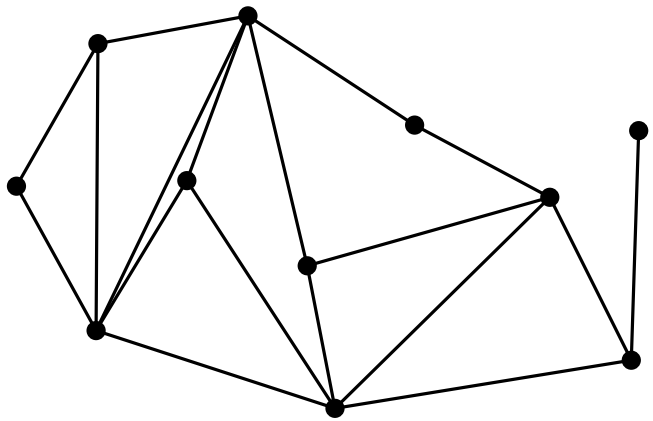
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

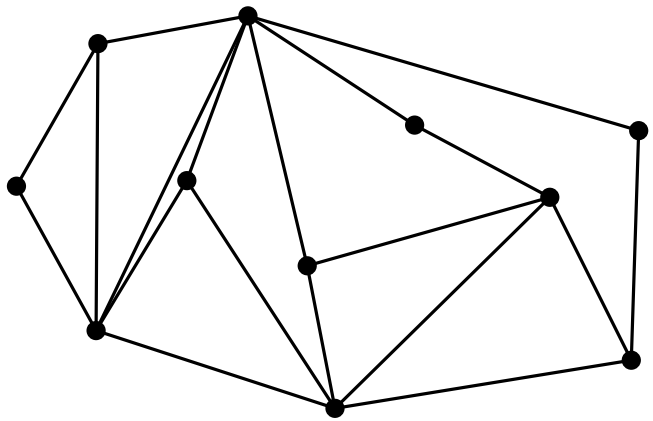
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

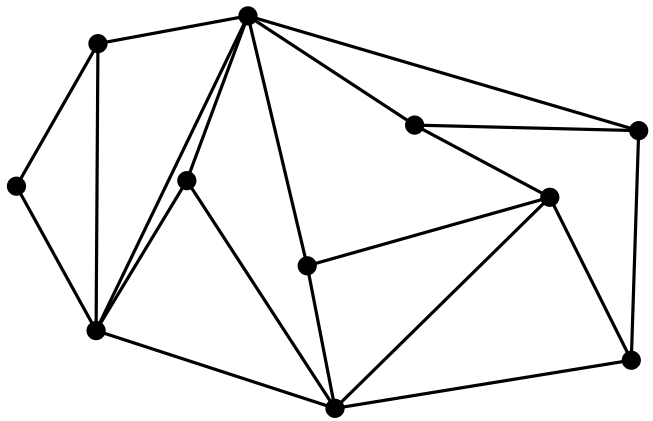
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

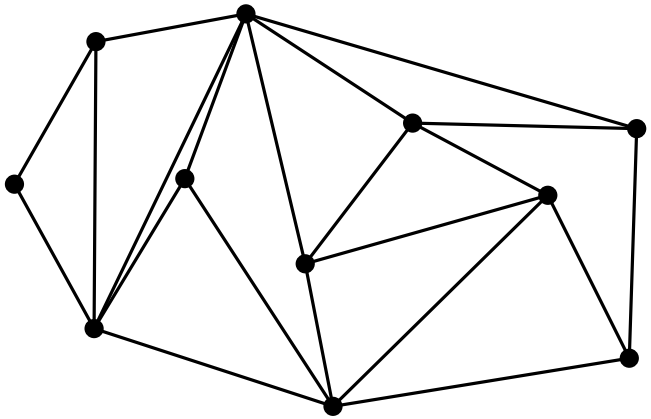
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

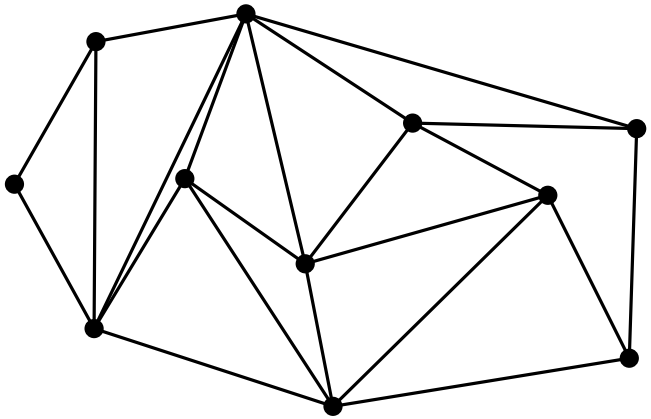
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

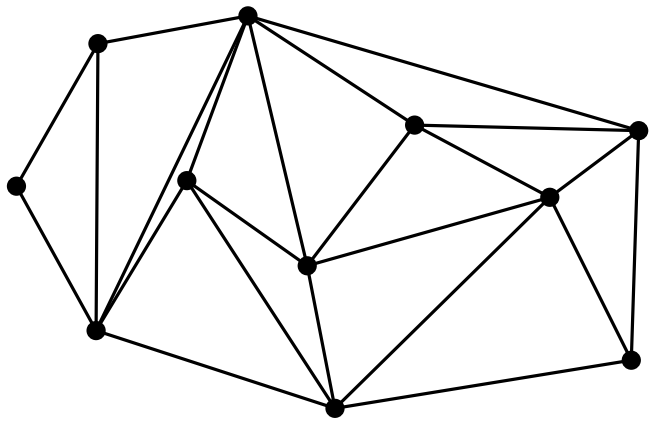
仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

仮定：P のすべてが 1 直線上にない

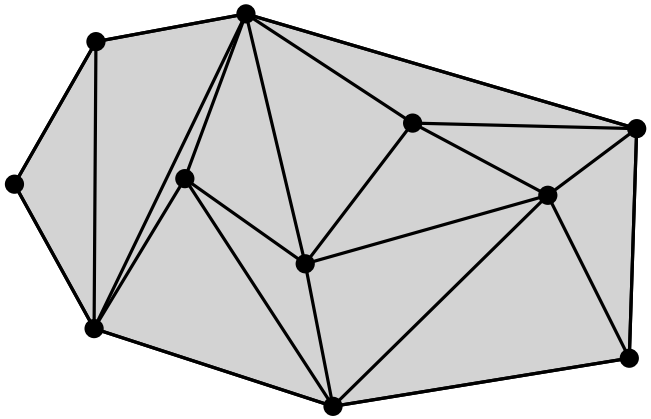


P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

$\rightsquigarrow$ 可能なかぎり続けると，P の三角形分割が得られる

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

仮定：P のすべてが 1 直線上にない

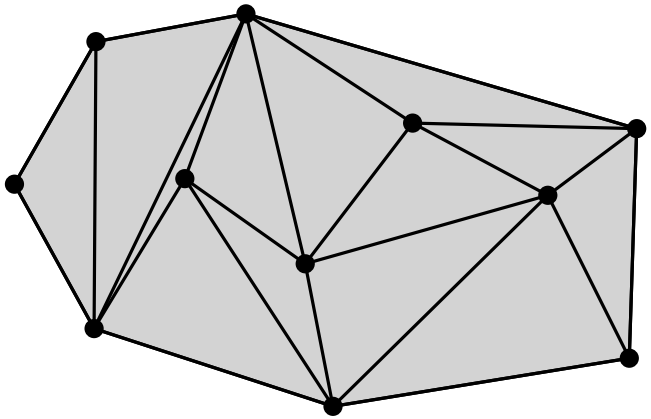


P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

$\rightsquigarrow$ 可能なかぎり続けると，P の三角形分割が得られる

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割

仮定：P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び，それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

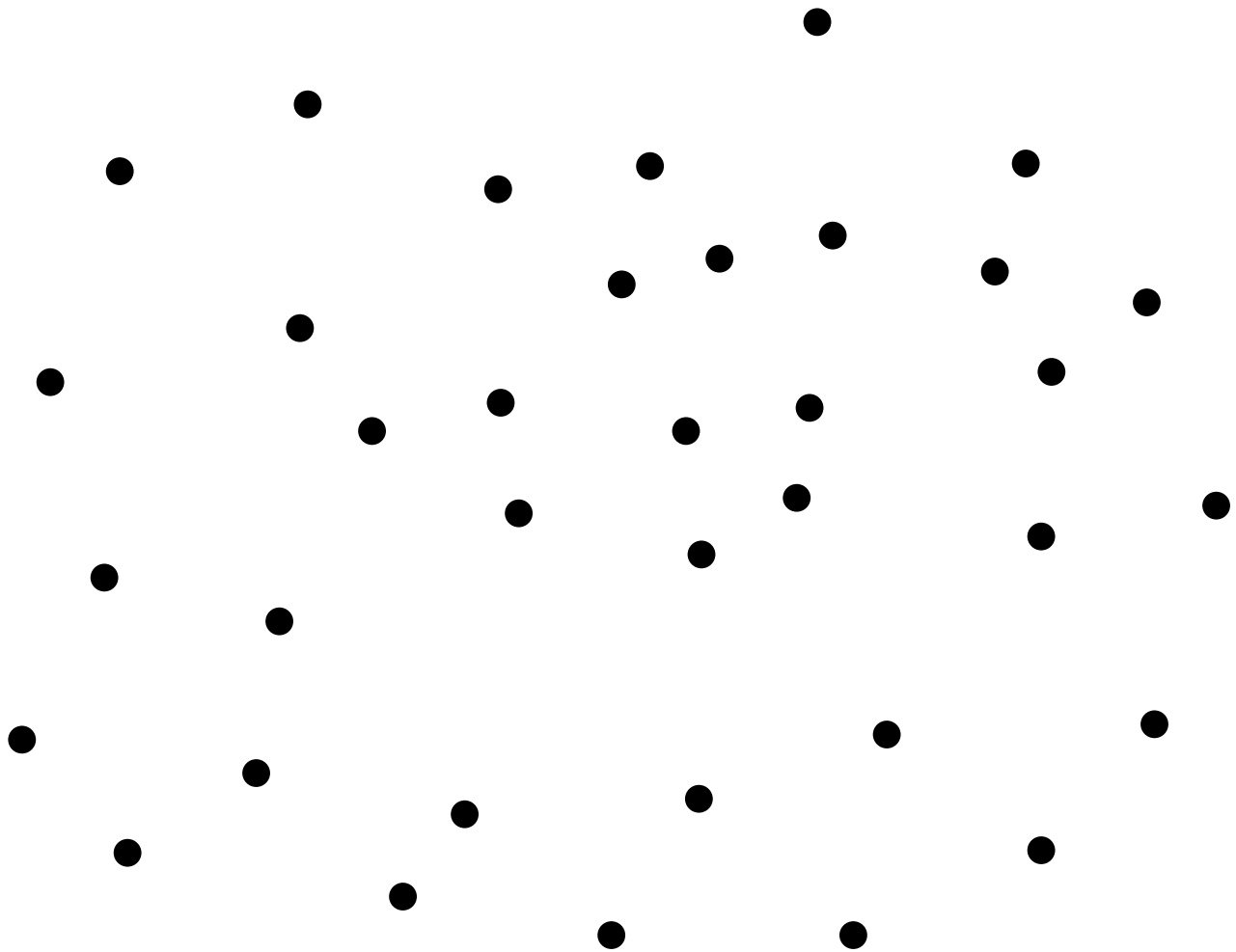
$\rightsquigarrow$ 可能なかぎり続けると，P の三角形分割が得られる

以後，P の三角形分割と
三角形分割の辺からできる幾何グラフを
区別しないこともある

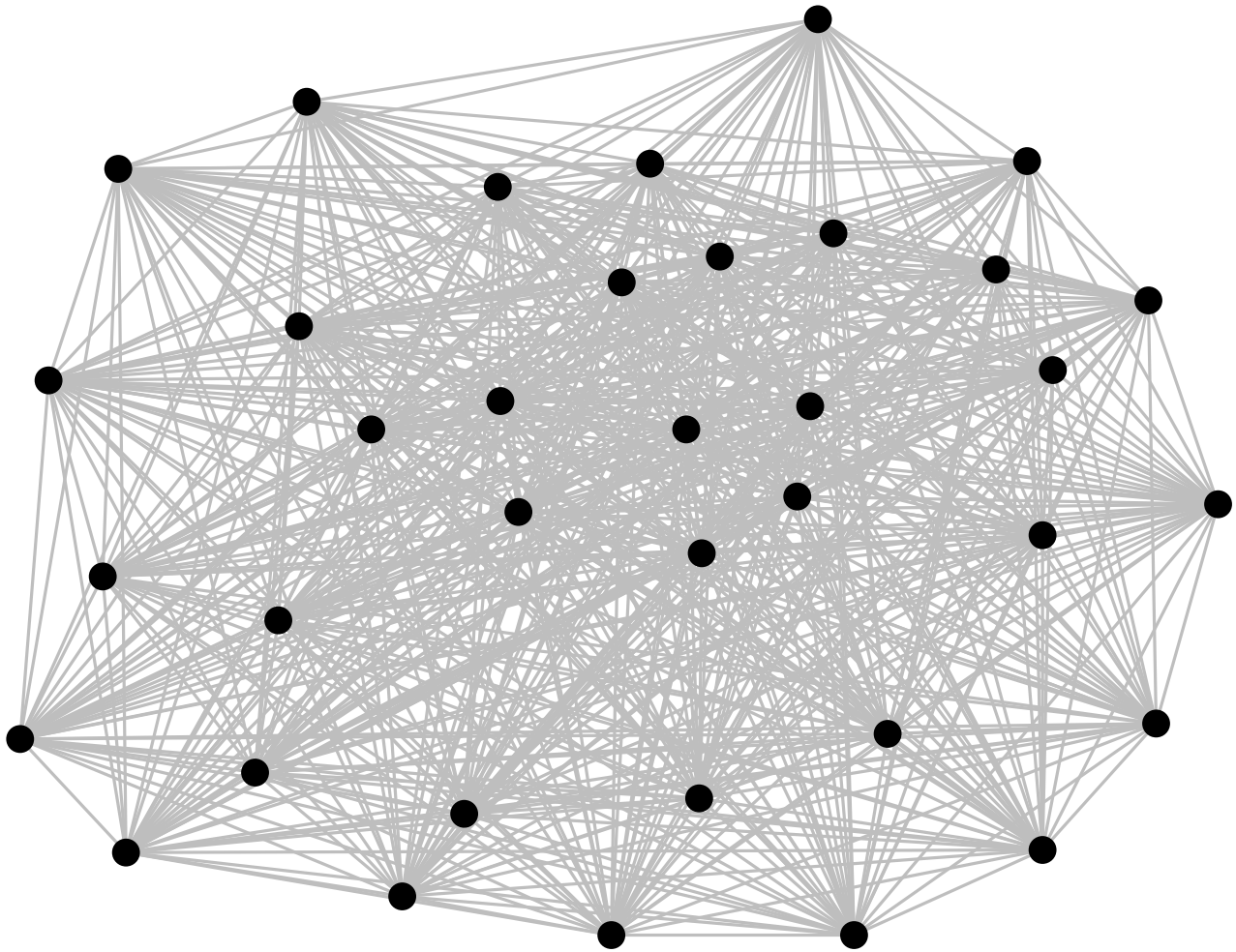
目次

1. グラフと幾何グラフの用語
2. 単位円グラフとデローネ三角形分割
3. **デローネ三角形分割と最小全域木**
4. 他の近接グラフ

完全幾何グラフの最小全域木：例



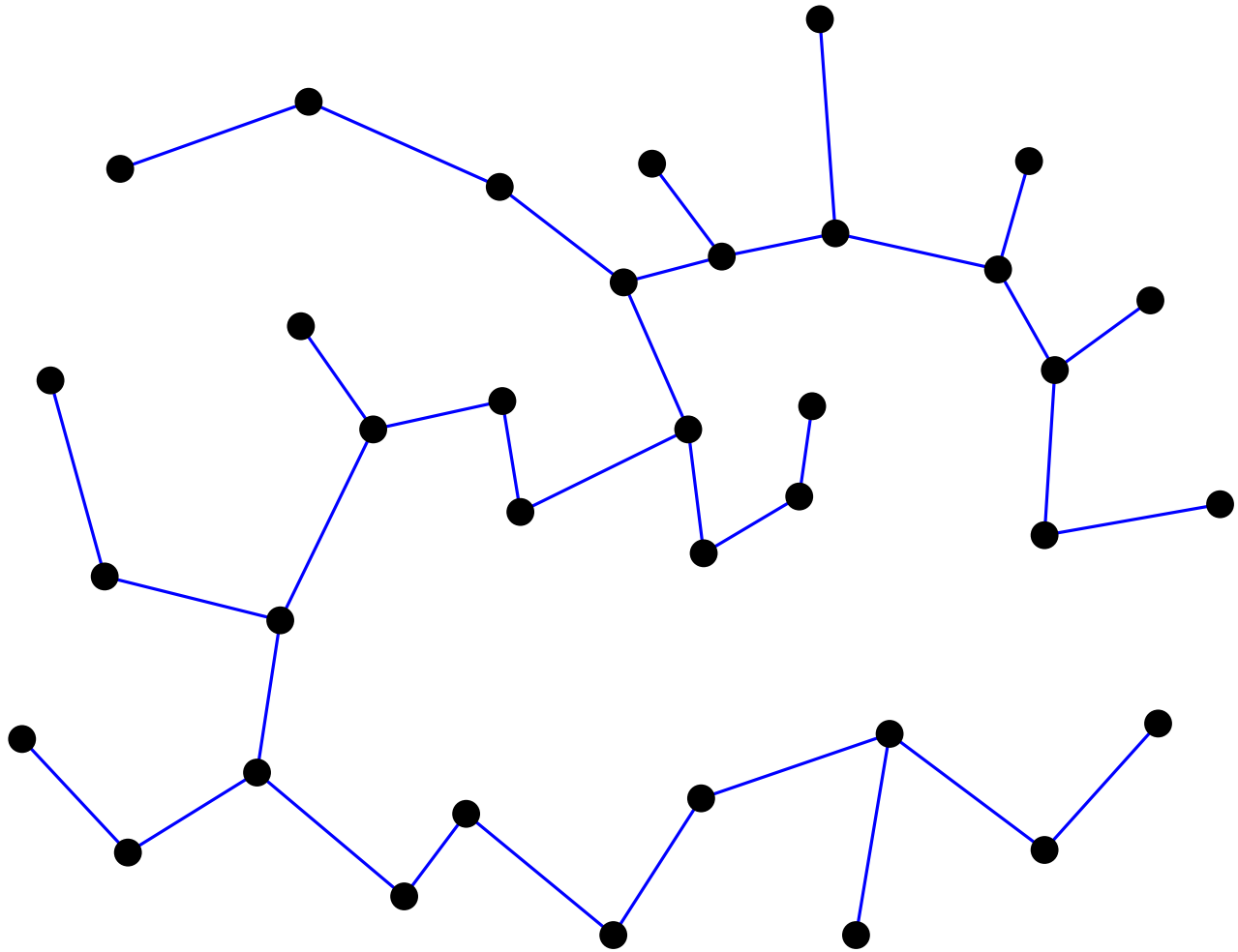
完全幾何グラフの最小全域木：例



完全幾何グラフ = すべての 2 点間を線分で結ぶ

辺の重み = 線分の長さ

完全幾何グラフの最小全域木：例



完全幾何グラフ = すべての 2 点間を線分で結ぶ

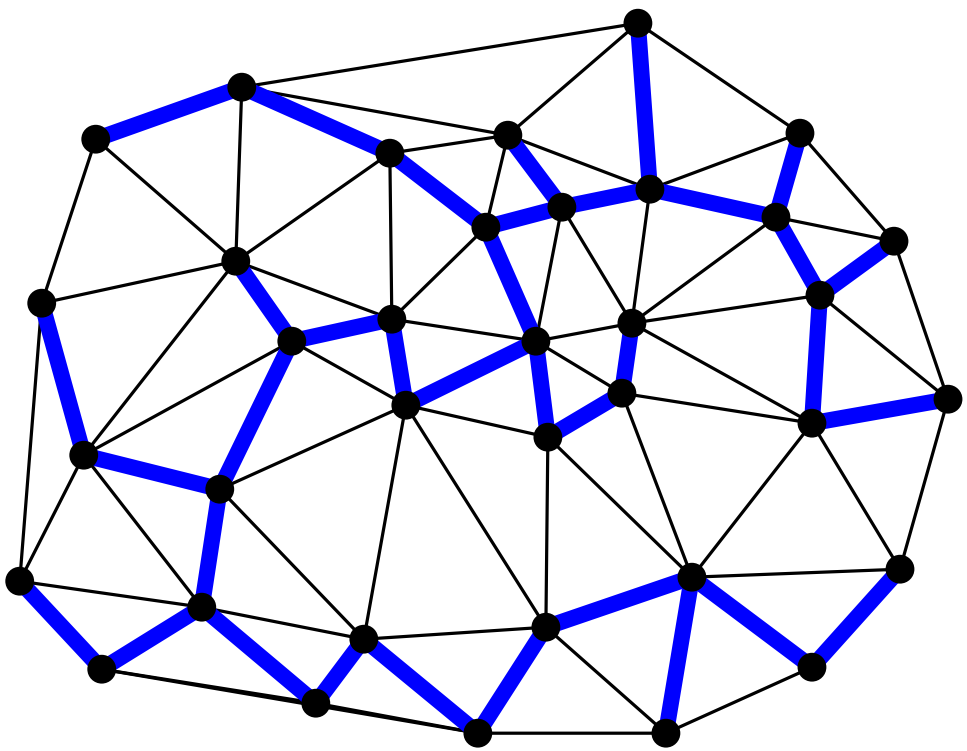
辺の重み = 線分の長さ

最小全域木とデローネ・グラフ

有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，P を頂点集合とする完全幾何グラフ G

性質：最小全域木とデローネ・グラフ

e が G の最小全域木の辺
$\Rightarrow e$ は P のデローネ・グラフの辺



最小全域木とデローネ・グラフ：証明

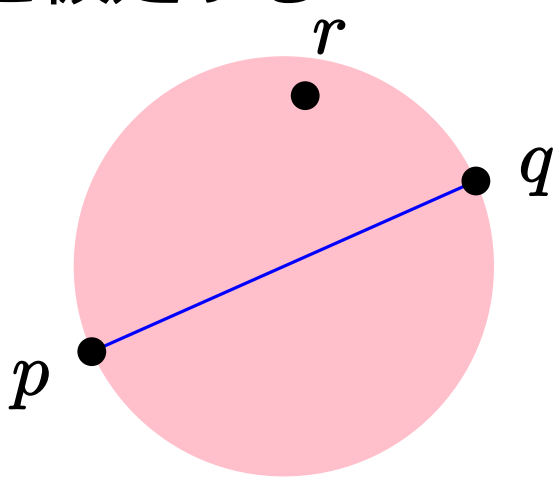
証明：最小全域木 T の辺 $\overline{pq}$ がデローネ・グラフの辺ではない
と仮定する



- $\overline{pq}$ を直径とする円板は P の他の点を含む
(∵ デローネ・グラフの定義)
- そのような点を 1 つ取り，r とする

最小全域木とデローネ・グラフ：証明

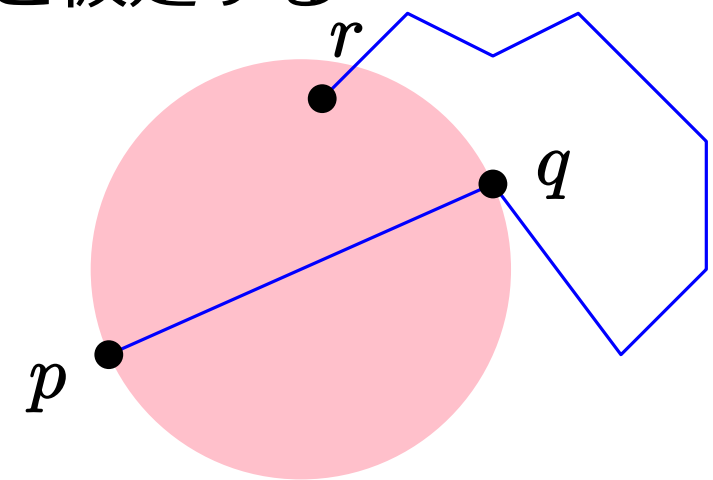
証明：最小全域木 T の辺 $\overline{pq}$ がデローネ・グラフの辺ではない
と仮定する



- $\overline{pq}$ を直径とする円板は P の他の点を含む
(∵ デローネ・グラフの定義)
- そのような点を 1 つ取り，r とする

最小全域木とデローネ・グラフ：証明

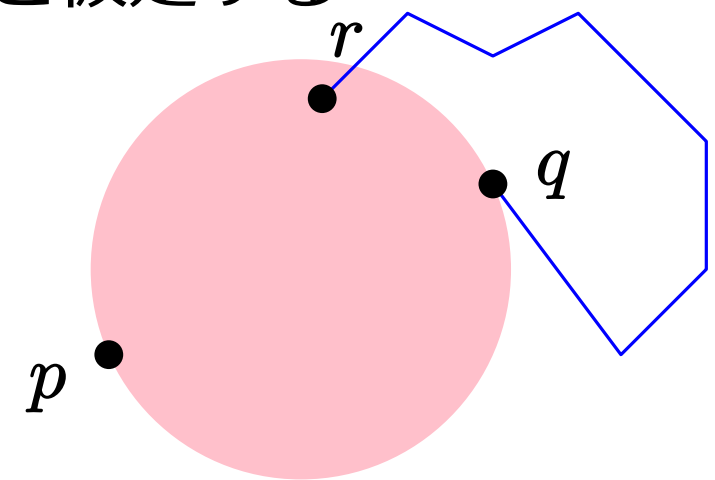
証明：最小全域木 T の辺 $\overline{pq}$ がデローネ・グラフの辺ではない
と仮定する



- $\overline{pq}$ を直径とする円板は P の他の点を含む
  (∵デローネ・グラフの定義)
- そのような点を 1 つ取り，r とする
- この最小全域木から $\overline{pq}$ を取り除いたとき，
  r から p にたどり着けないとする

最小全域木とデローネ・グラフ：証明

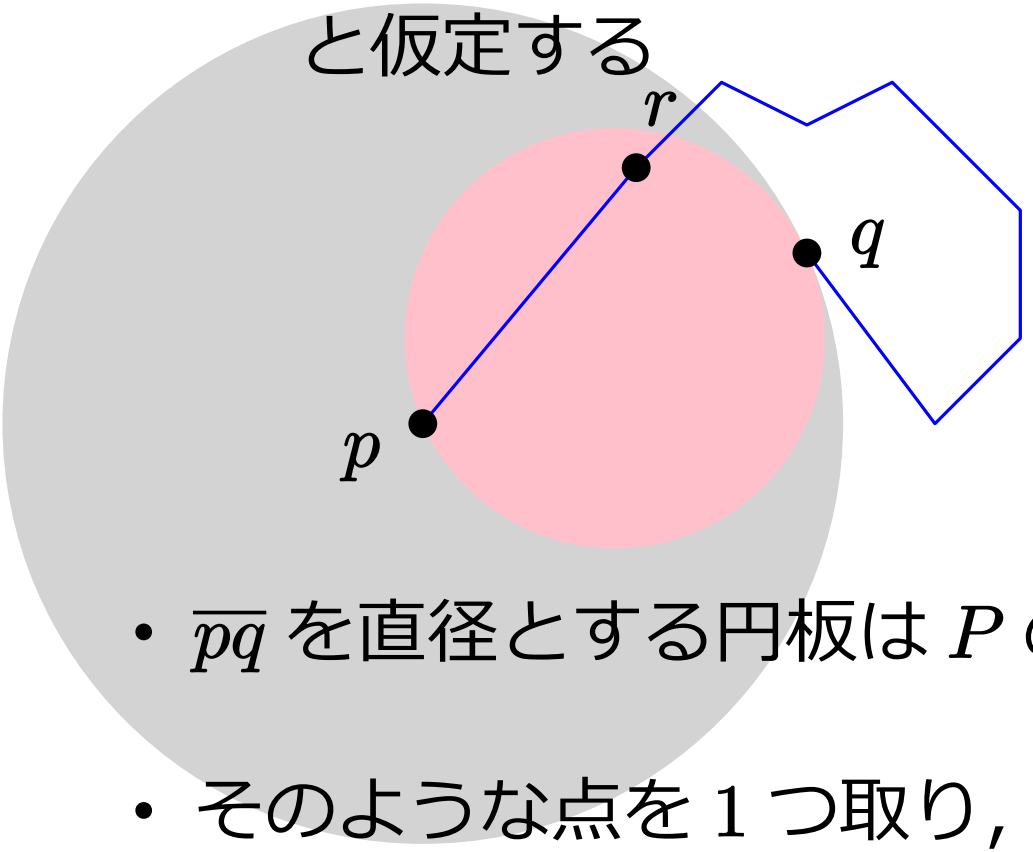
証明：最小全域木 T の辺 $\overline{pq}$ がデローネ・グラフの辺ではない
と仮定する



- $\overline{pq}$ を直径とする円板は P の他の点を含む
  (∵ デローネ・グラフの定義)
- そのような点を 1 つ取り，r とする
- この最小全域木から $\overline{pq}$ を取り除いたとき，
  r から p にたどり着けないとする

最小全域木とデローネ・グラフ：証明

証明：最小全域木 T の辺 $\overline{pq}$ がデローネ・グラフの辺ではない
と仮定する



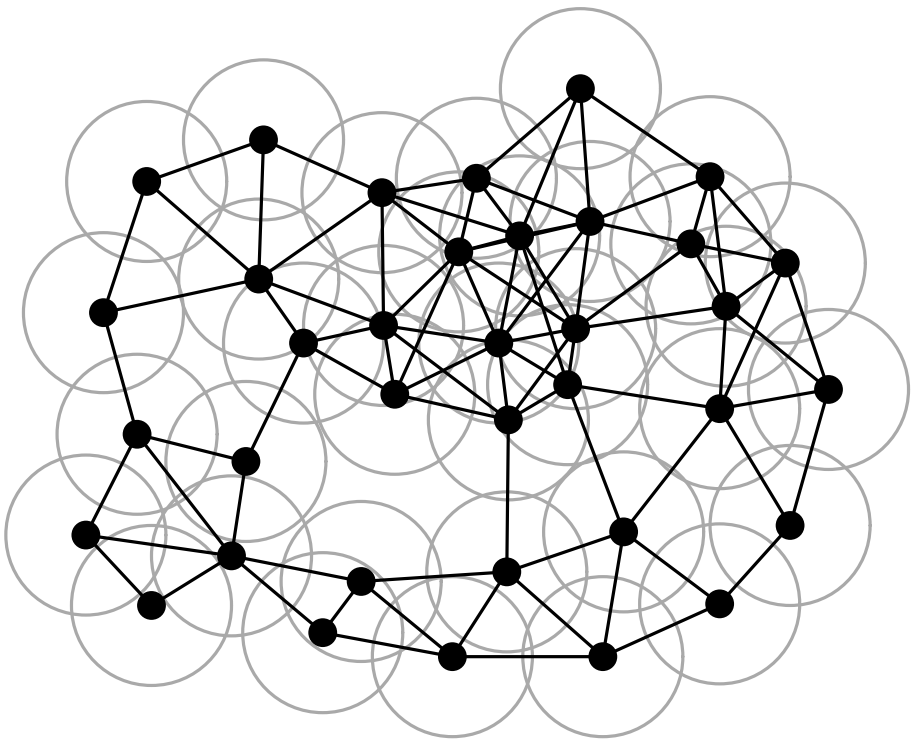
- $\overline{pq}$ を直径とする円板は P の他の点を含む
  (∵ デローネ・グラフの定義)
- そのような点を 1 つ取り，r とする
- この最小全域木から $\overline{pq}$ を取り除いたとき，
  r から p にたどり着けないとする
- $\overline{pr}$ を付け加えると，T よりも重みの小さな全域木が
  得られ，T が最小全域木であったことに矛盾 □

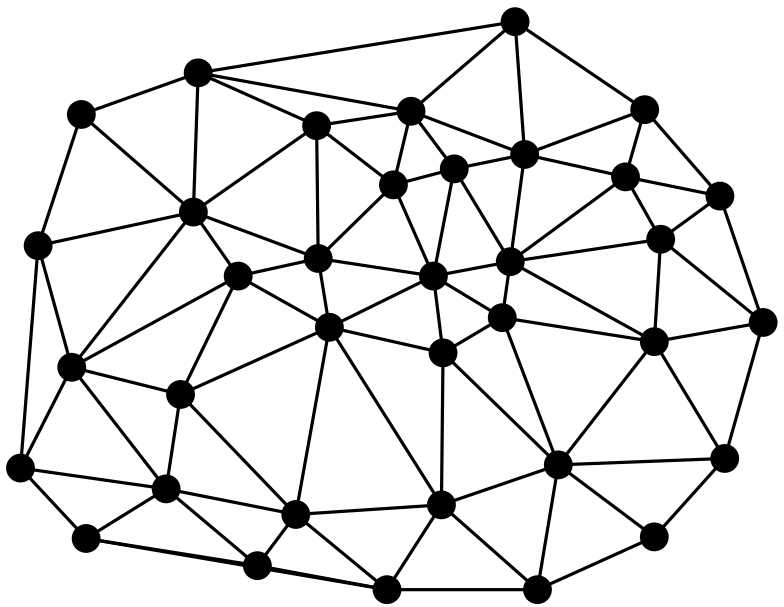
単位円グラフの最小全域木

有限点集合 P，P を頂点集合とする単位円グラフ G

性質：単位円グラフの最小全域木

e が G の最小全域木の辺
$\Rightarrow e$ は P のデローネ・グラフの辺





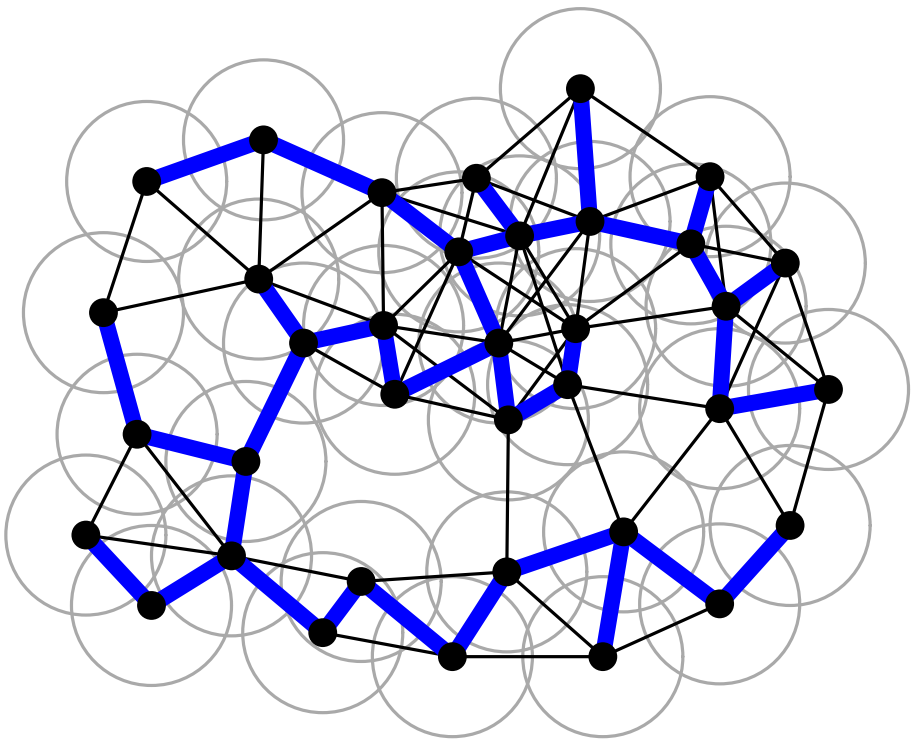
証明：演習問題

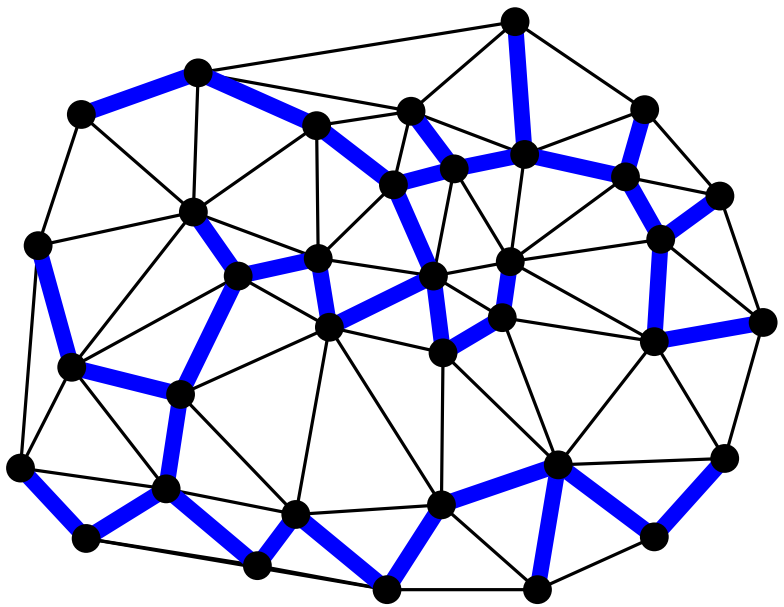
単位円グラフの最小全域木

有限点集合 P，P を頂点集合とする単位円グラフ G

性質：単位円グラフの最小全域木

e が G の最小全域木の辺
$\Rightarrow e$ は P のデローネ・グラフの辺

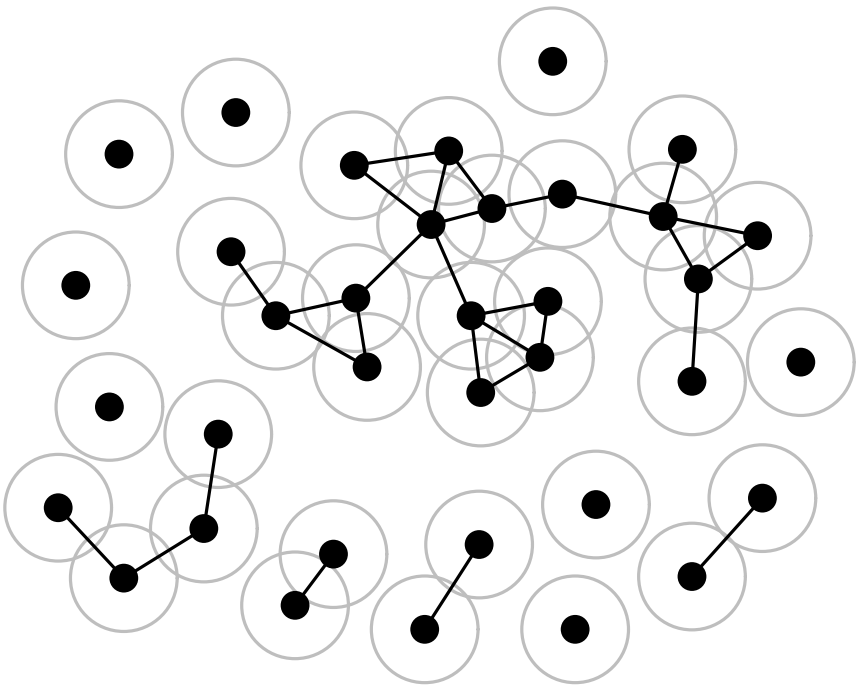


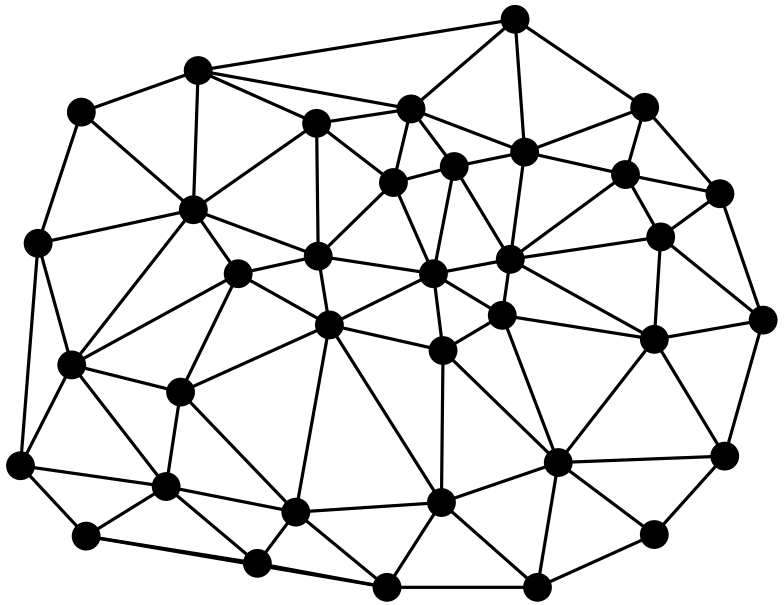


証明：演習問題

注意：単位円グラフの全域木

単位円グラフが連結でないとき，全域木は存在しない





性質 (再掲)：単位円グラフの最小全域木

e が G の最小全域木の辺
$\Rightarrow e$ は P のデローネ・グラフの辺

目次

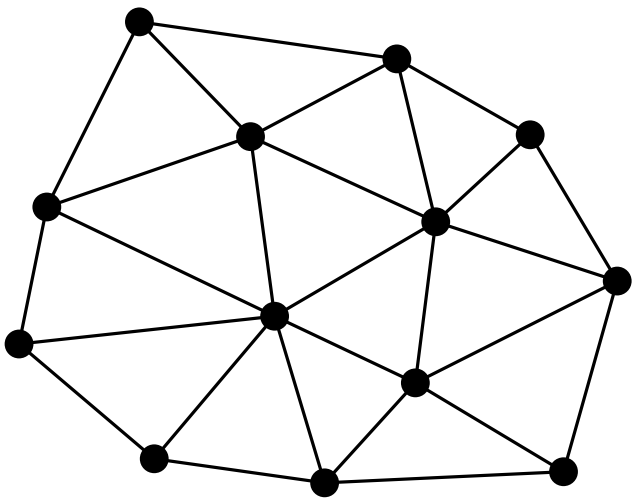
1. グラフと幾何グラフの用語
2. 単位円グラフとデローネ三角形分割
3. デローネ三角形分割と最小全域木
4. **他の近接グラフ**

近接グラフとは？

定義 (非形式)：近接グラフ

点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ を頂点集合とする **近接グラフ** とは
ある意味で近い 2 点を辺とする幾何グラフ

デローネ・グラフにおける近さ：
　他の点を含まない円板の存在



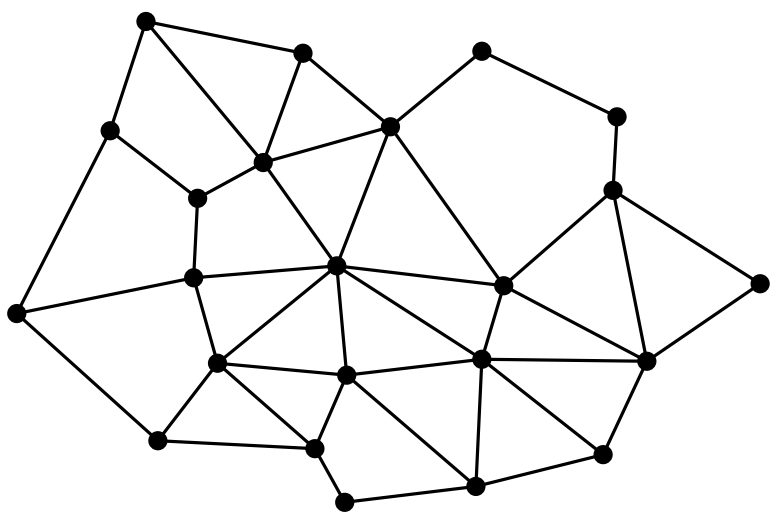
他の近さを考える $\rightsquigarrow$ 他の幾何グラフが得られる

ガブリエル・グラフ

定義：ガブリエル・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **ガブリエル・グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分}\,\overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \overline{pq}\,\text{を直径とする円板}\,D\,\text{に対して}, \\ \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$

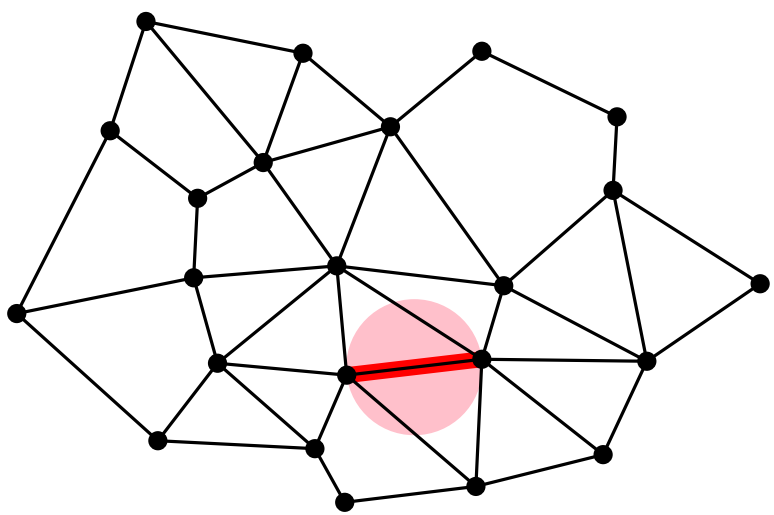


ガブリエル・グラフ

定義：ガブリエル・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **ガブリエル・グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \overline{pq} \text{ を直径とする円板 } D \text{ に対して，} \\ \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$

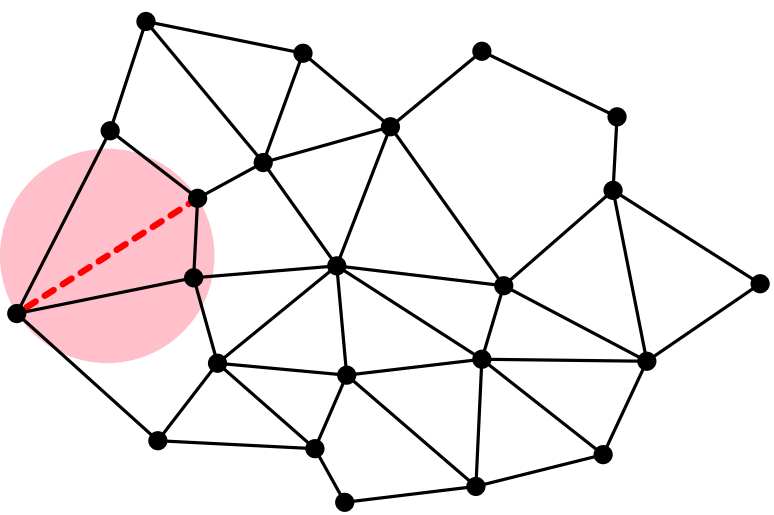


ガブリエル・グラフ

定義：ガブリエル・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **ガブリエル・グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \overline{pq} \text{ を直径とする円板 } D \text{ に対して，} \\ \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$

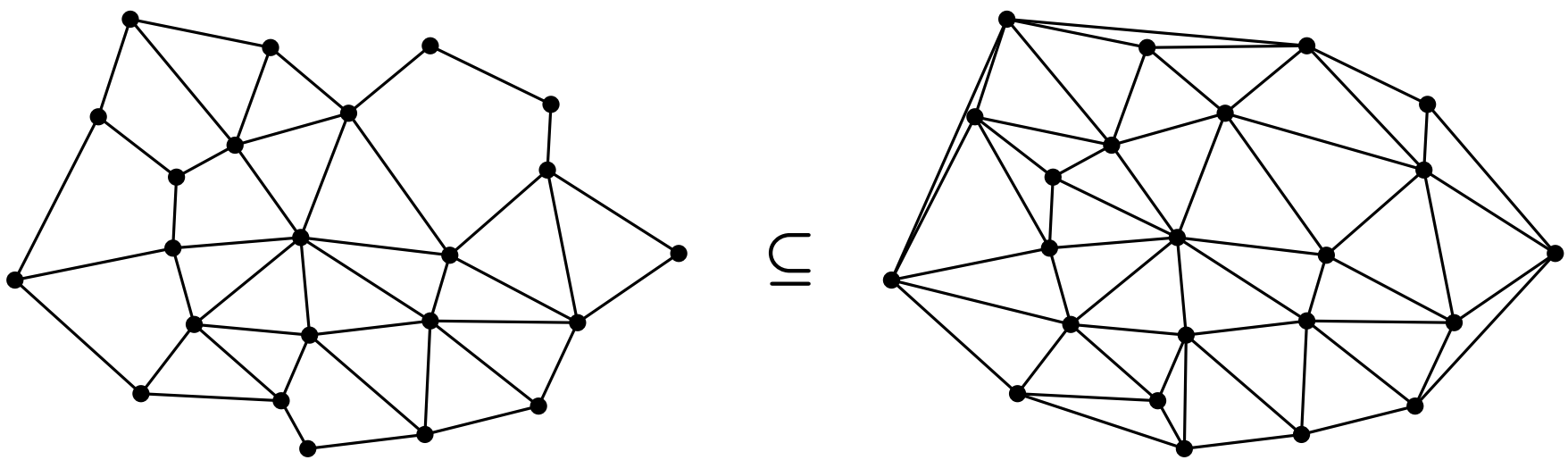


ガブリエル・グラフ

定義：ガブリエル・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **ガブリエル・グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分}\,\overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \overline{pq}\,\text{を直径とする円板}\,D\,\text{に対して}, \\ \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$



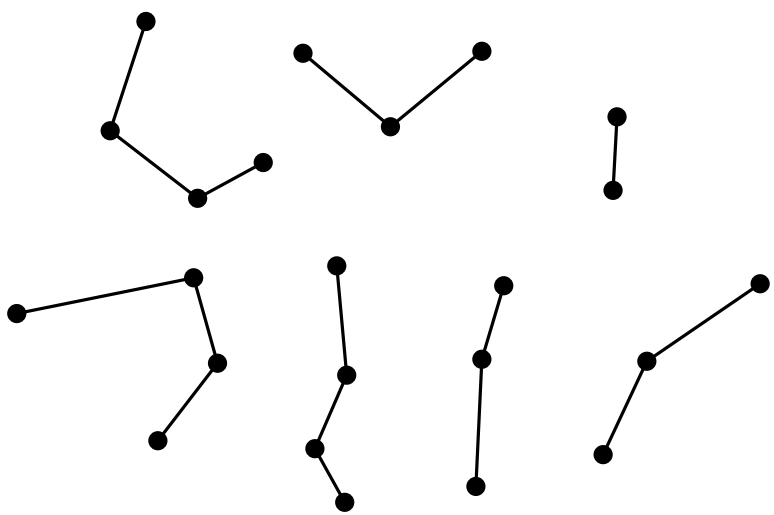
デローネ・グラフ

最近点グラフ

定義：最近点グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **最近点グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分}\,\overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ |\overline{pq}| = \min\{|\overline{pr}| \mid r \in P - \{p\}\} \end{array} \right\}$

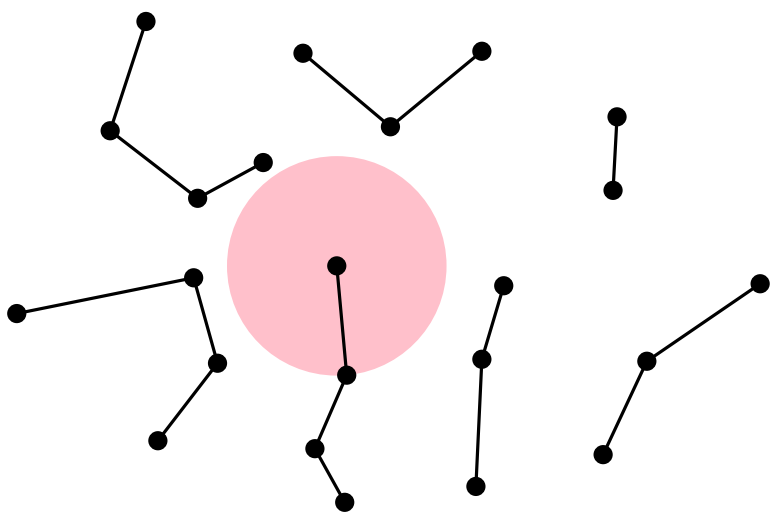


最近点グラフ

定義：最近点グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **最近点グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分}\ \overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ |\overline{pq}| = \min\{|\overline{pr}| \mid r \in P - \{p\}\} \end{array} \right\}$

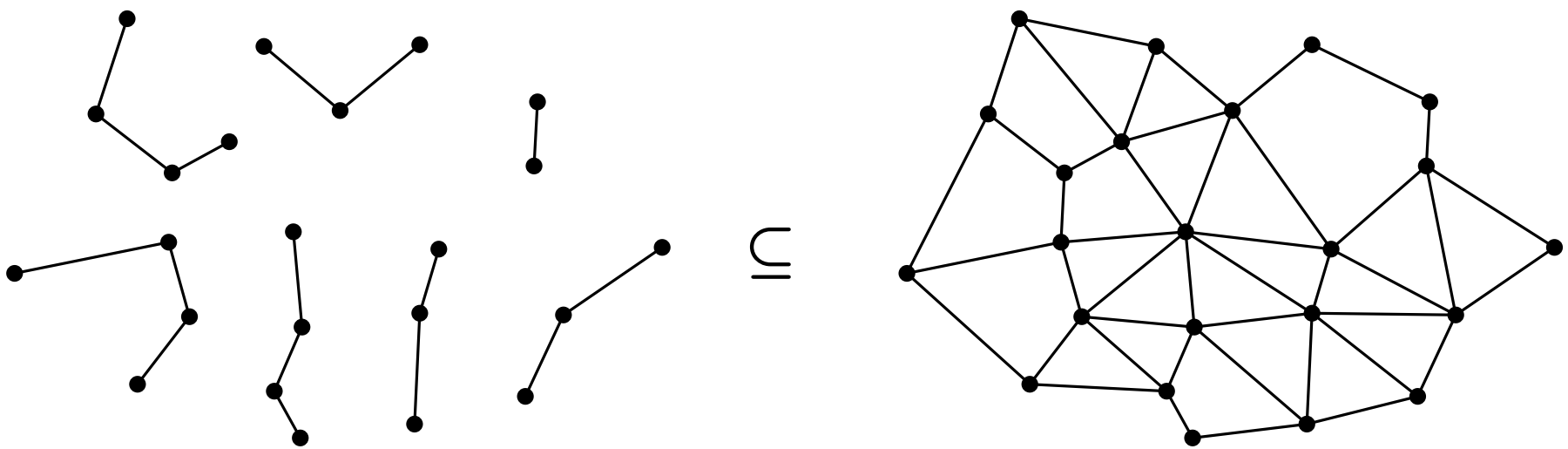


最近点グラフ

定義：最近点グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **最近点グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分}\,\overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ |\overline{pq}| = \min\{|\overline{pr}| \mid r \in P - \{p\}\} \end{array} \right\}$



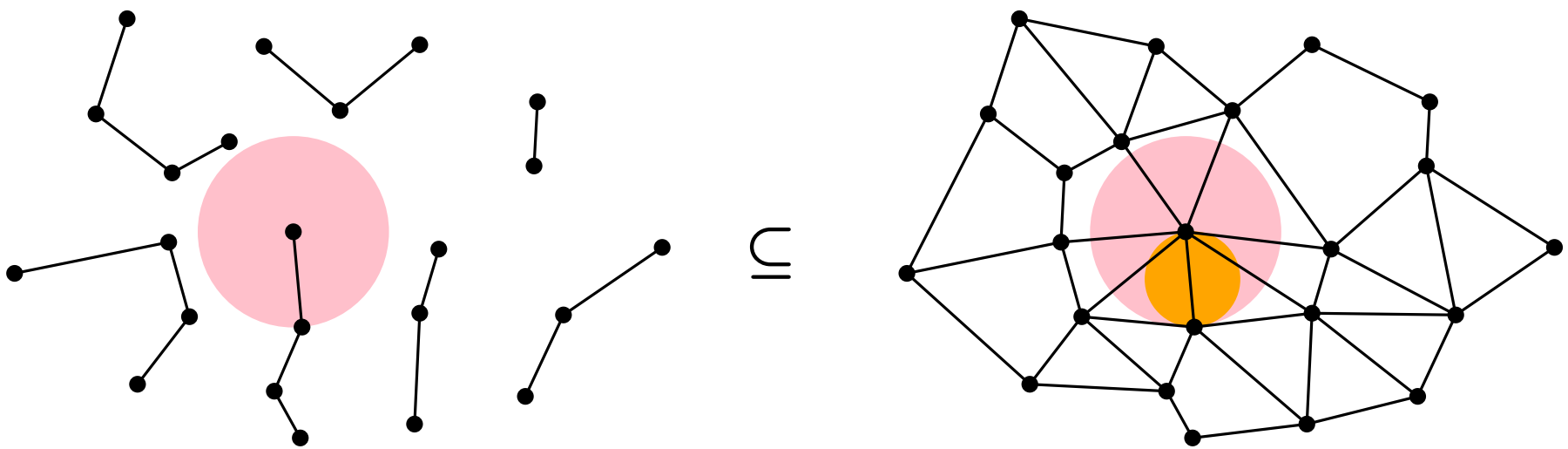
ガブリエル・グラフ

最近点グラフ

定義：最近点グラフ

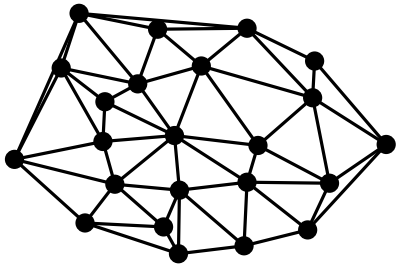
平面上の点集合 P を頂点集合とする **最近点グラフ** とは，次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

- $E = \left\{ \text{線分}\,\overline{pq} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in P, \\ |\overline{pq}| = \min\{|\overline{pr}| \mid r \in P - \{p\}\} \end{array} \right\}$



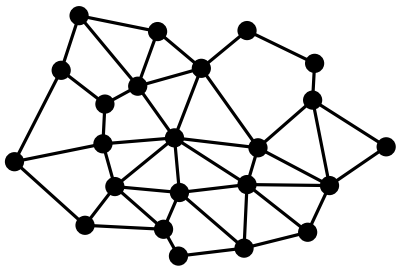
ガブリエル・グラフ

非交差近接グラフ同士の関係



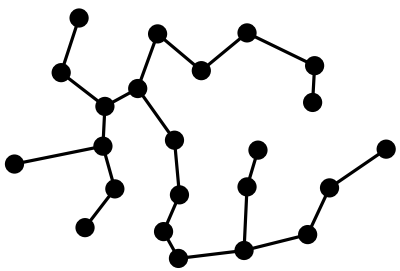
デローネ・グラフ

∪I



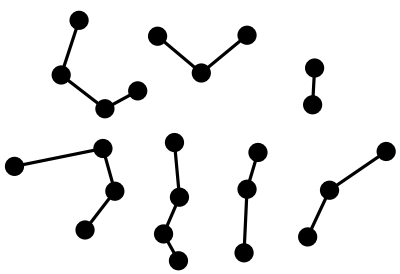
ガブリエル・グラフ

∪I　　(演習問題)



最小全域木

∪I　　(演習問題)



最近点グラフ

まとめ

今日の目標

点集合から得られるグラフを使って問題解決ができる

- デローネ三角形分割
- 単位円の交差グラフ

近接グラフ同士の関係を証明できる

教訓

計算幾何においても，グラフは重要な役割を果たす