離散数理工学 (2026 年度後学期)

第 2 回

低次元 (2) : 点配置と直線配置

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 10 月 20 日

最終更新 : 2026 年 10 月 19 日　22:40

今回の目標

今日の目標

点と直線の双対変換 を使って，問題を解決できる

- 例：凸包の計算

教訓

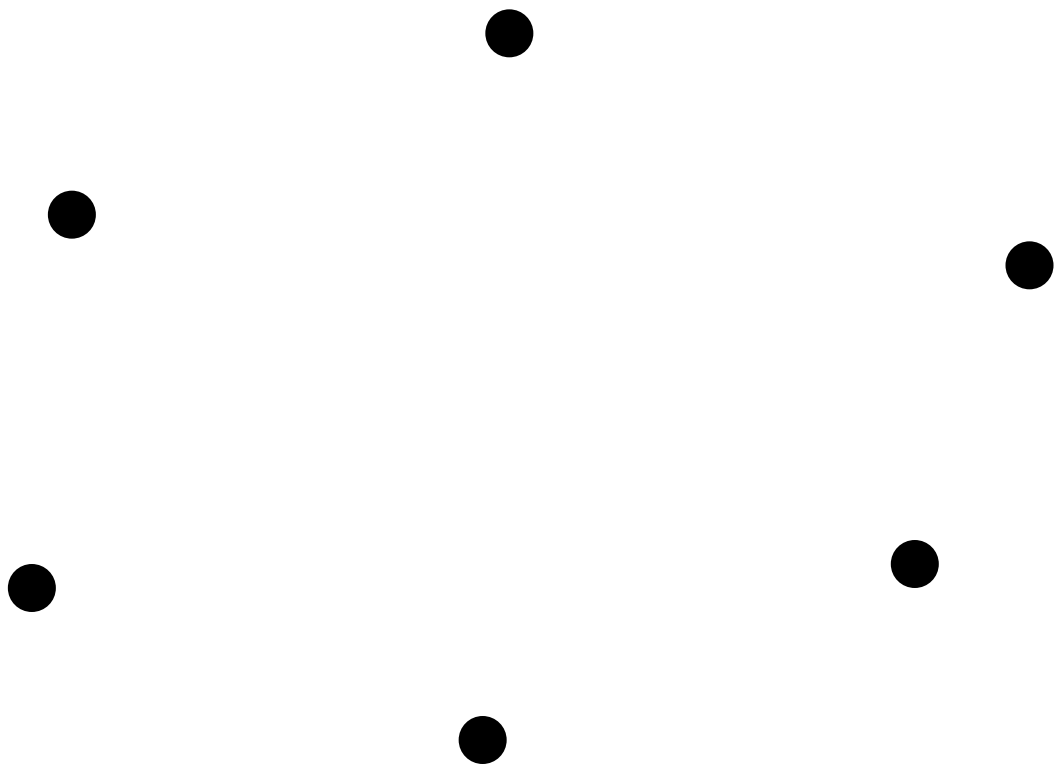
ひとつの対象を さまざまな視点から 眺める

目次

1. **凸多角形を記述する方法**
2. 点と直線の双対変換
3. 直線配置
4. 双対変換と凸多角形

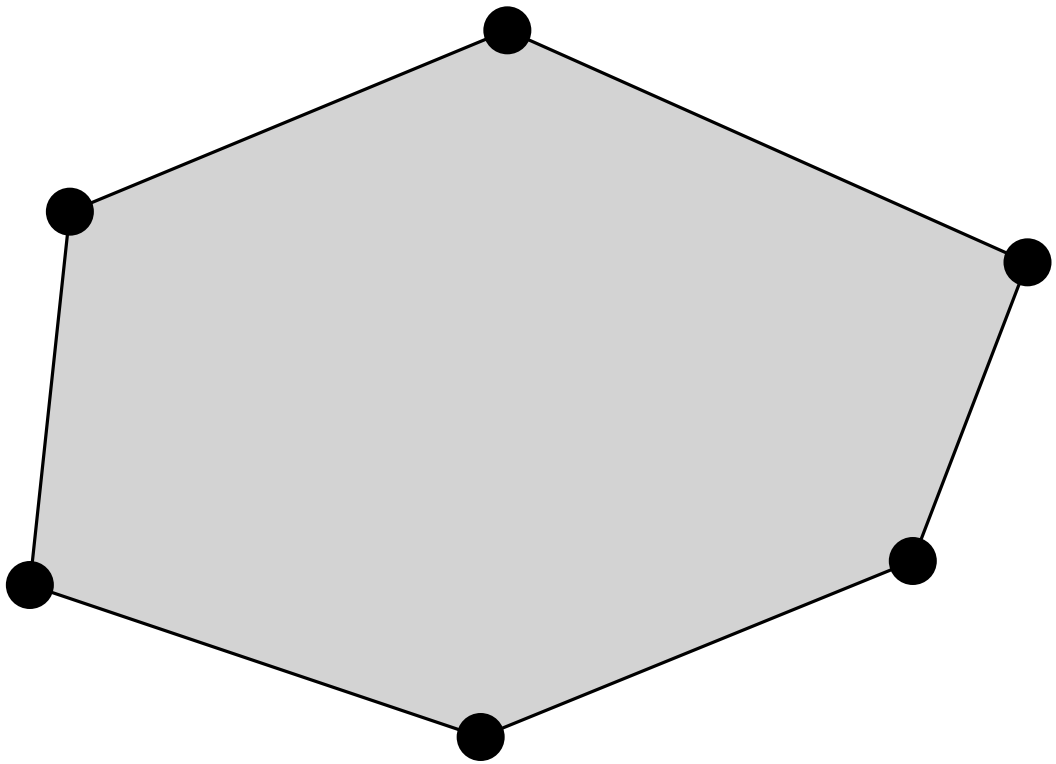
凸多角形の頂点による記述：例

頂点集合から一意に決まる



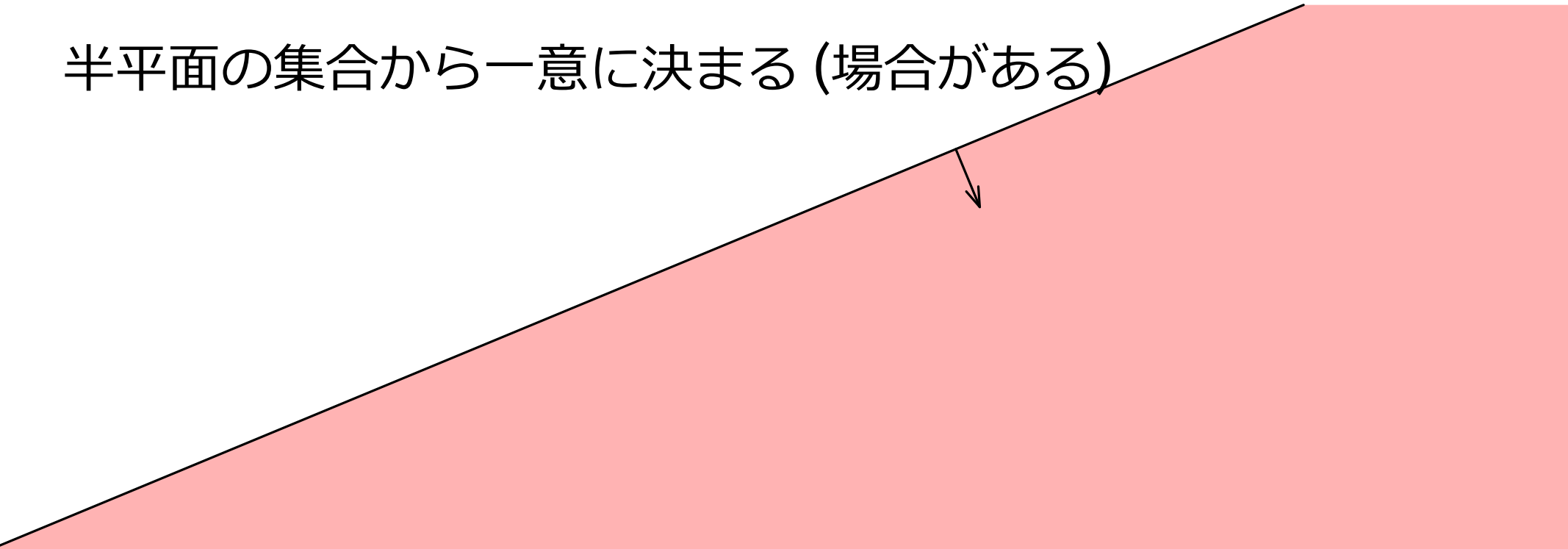
凸多角形の頂点による記述：例

頂点集合から一意に決まる



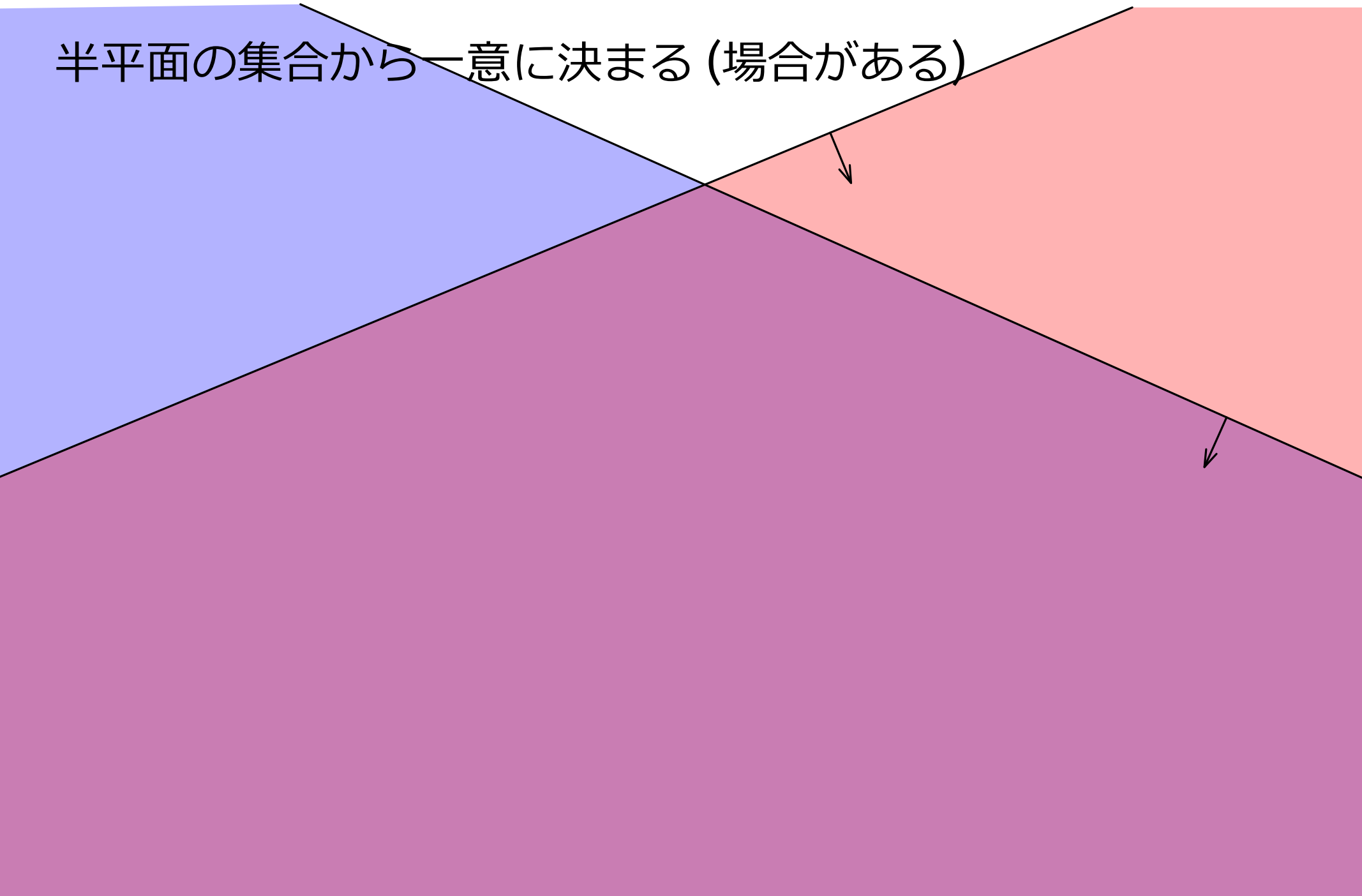
凸多角形の半平面による記述：例

半平面の集合から一意に決まる (場合がある)

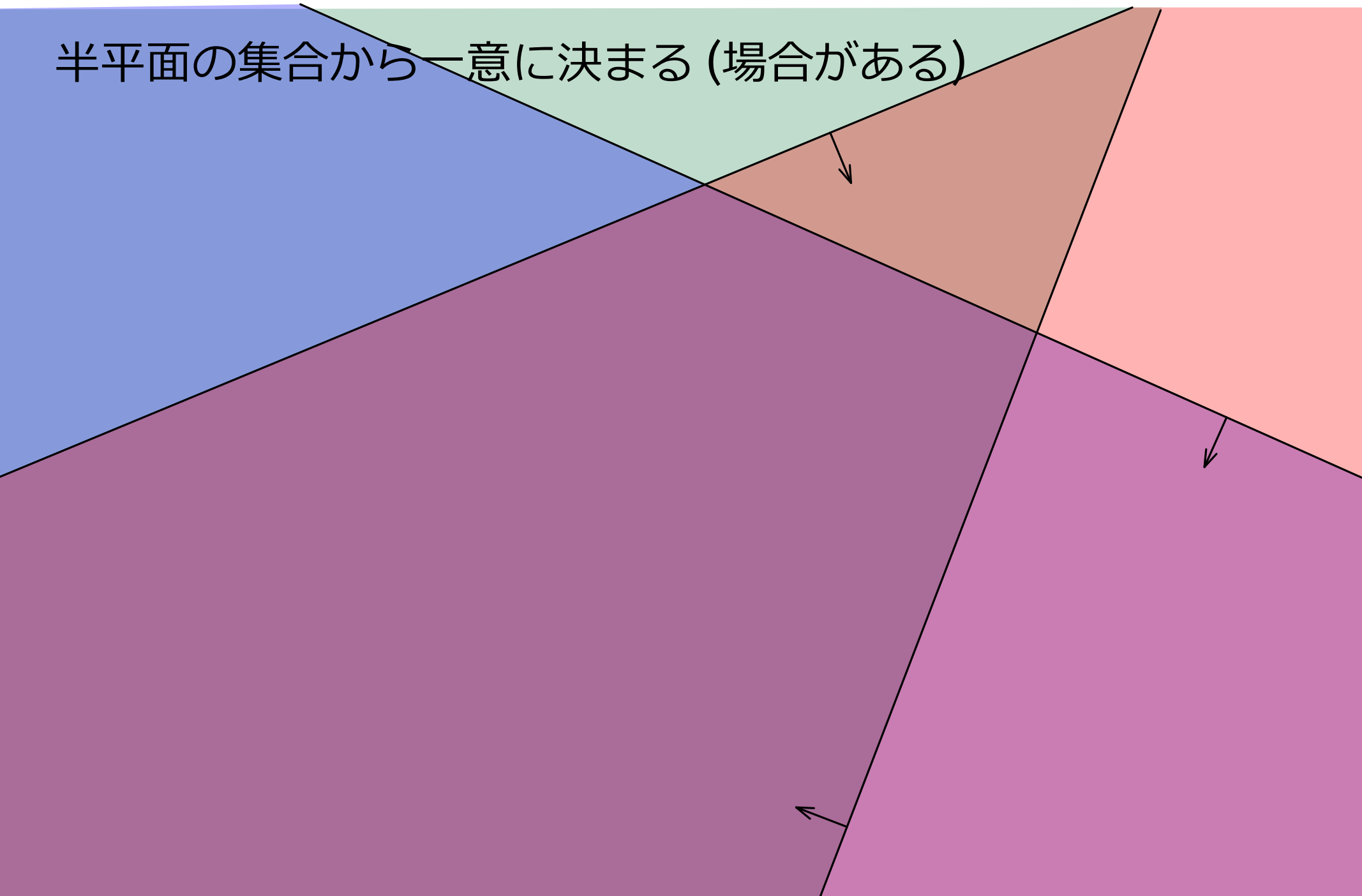


凸多角形の半平面による記述：例

半平面の集合から一意に決まる (場合がある)

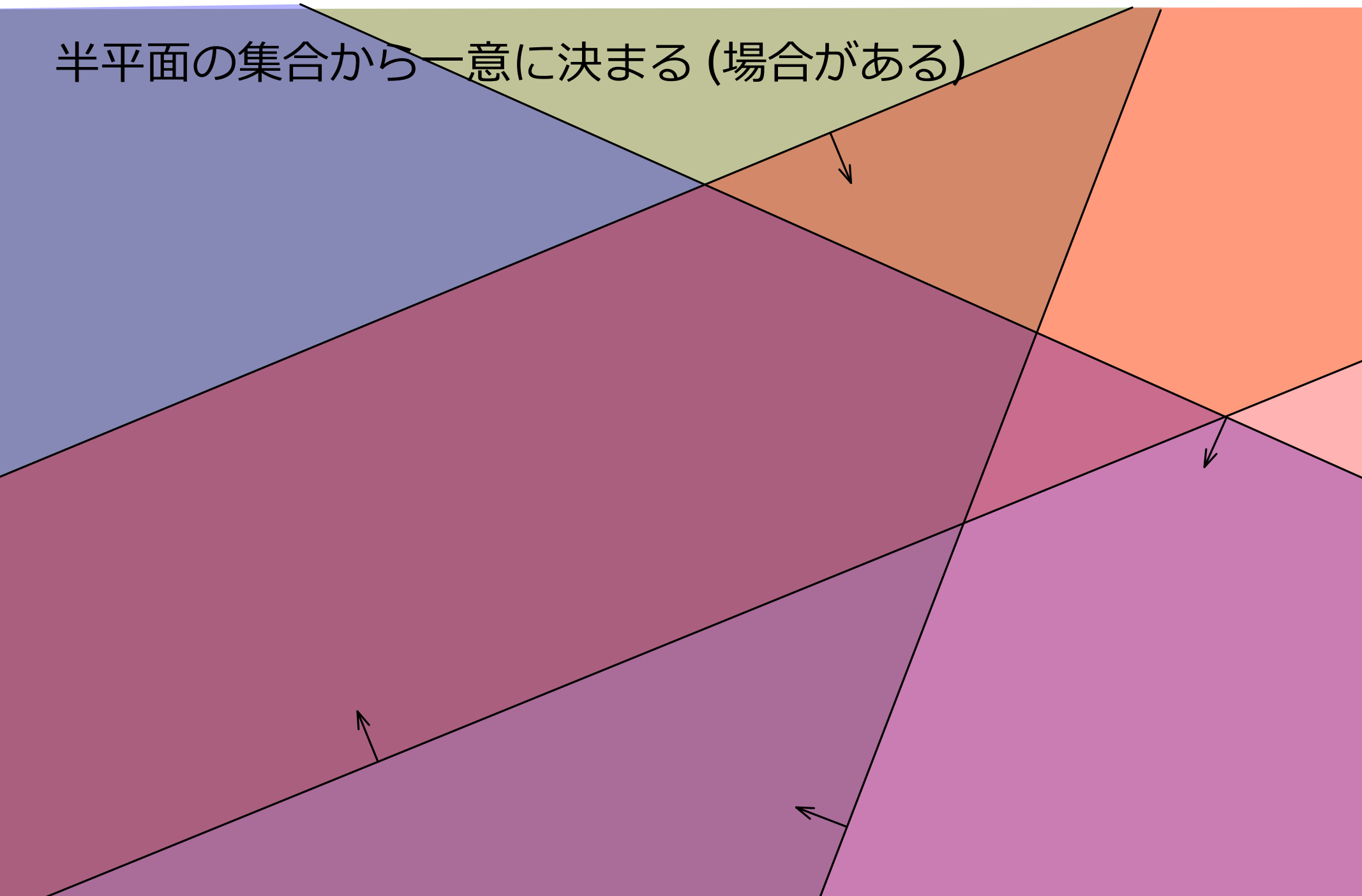


凸多角形の半平面による記述：例



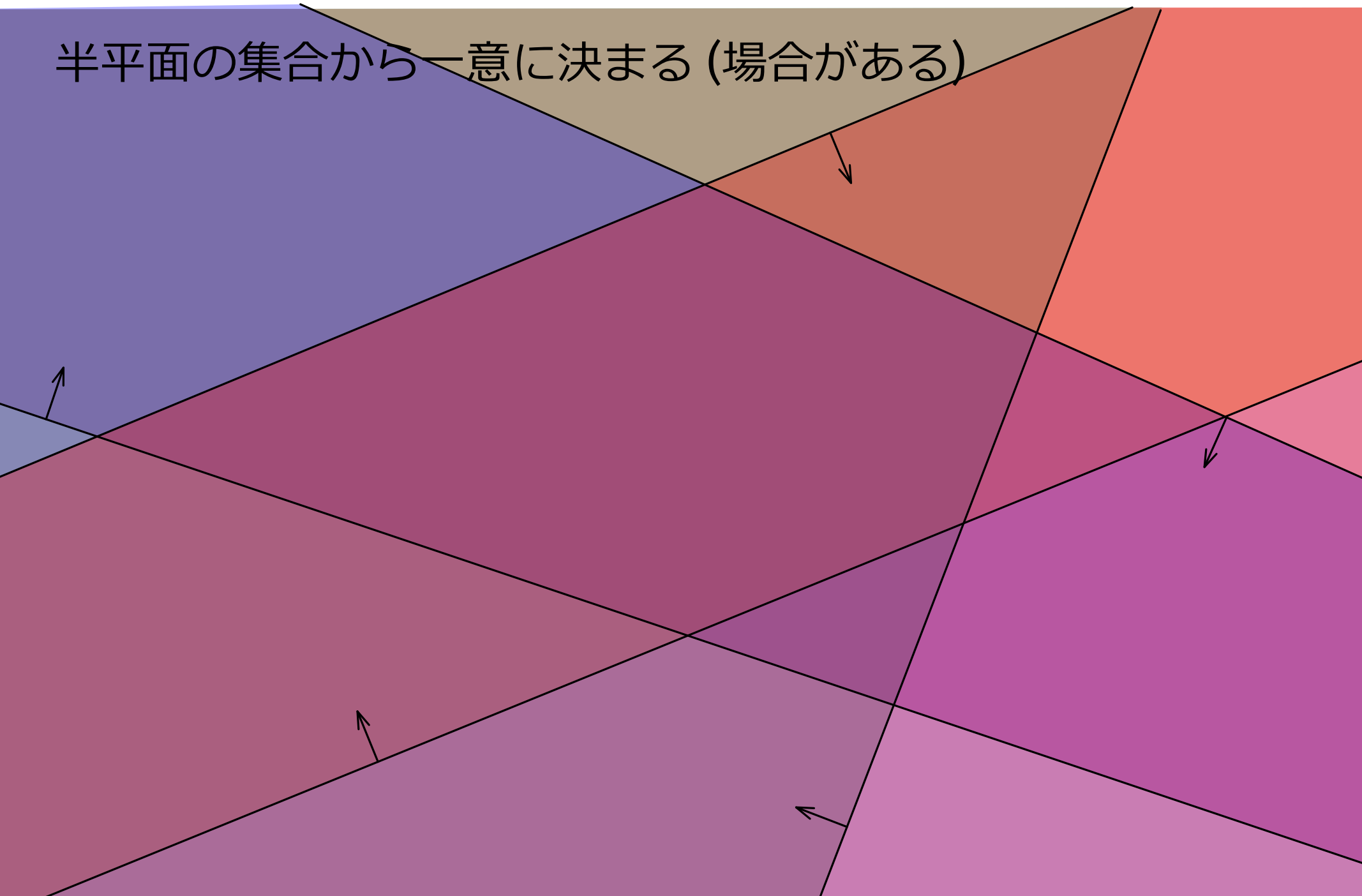
凸多角形の半平面による記述：例

半平面の集合から一意に決まる (場合がある)

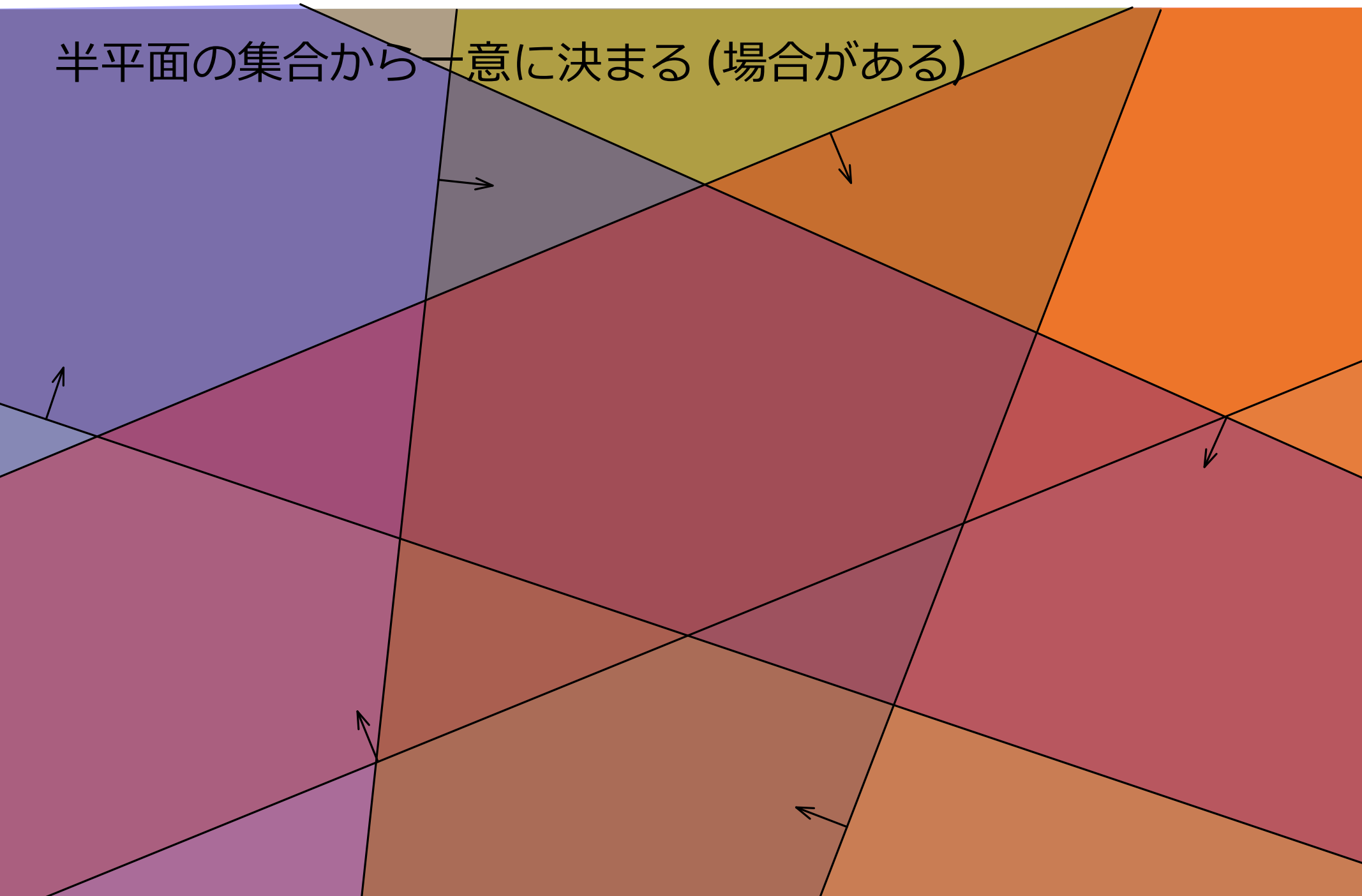


凸多角形の半平面による記述：例

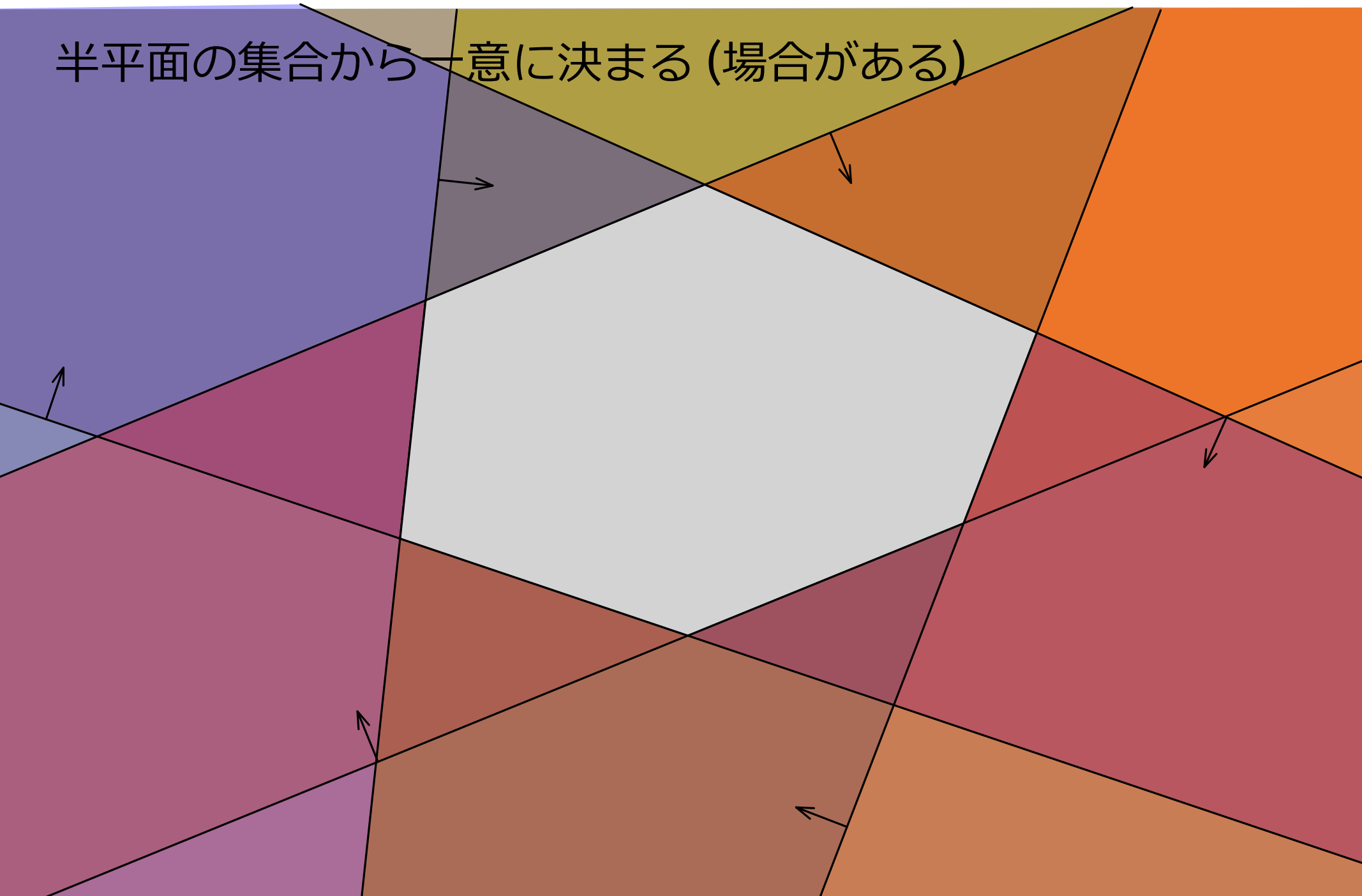
半平面の集合から一意に決まる (場合がある)



凸多角形の半平面による記述：例



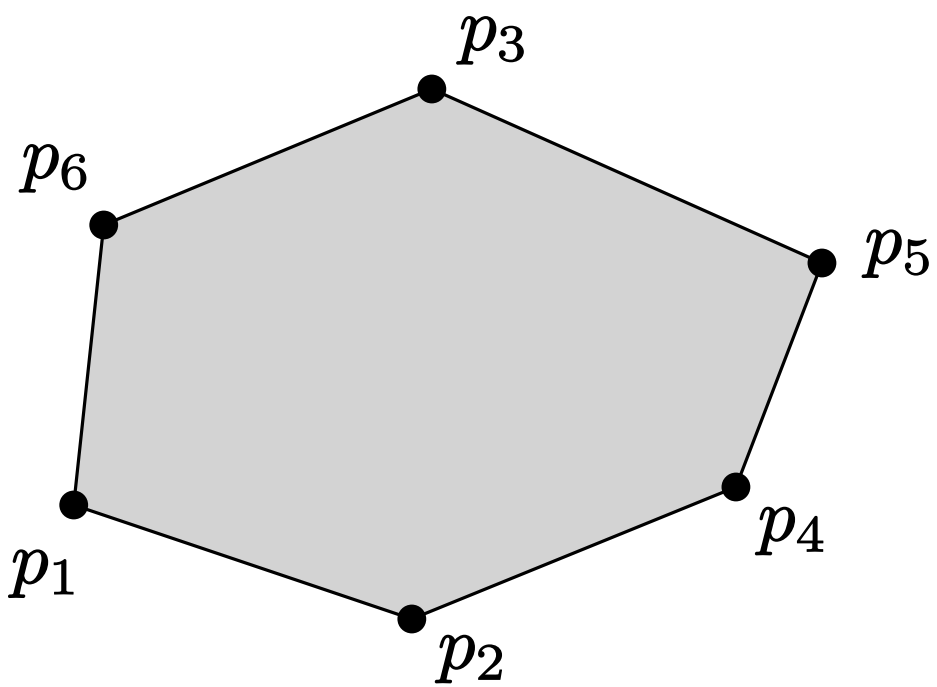
凸多角形の半平面による記述：例



凸多角形の頂点による記述

頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

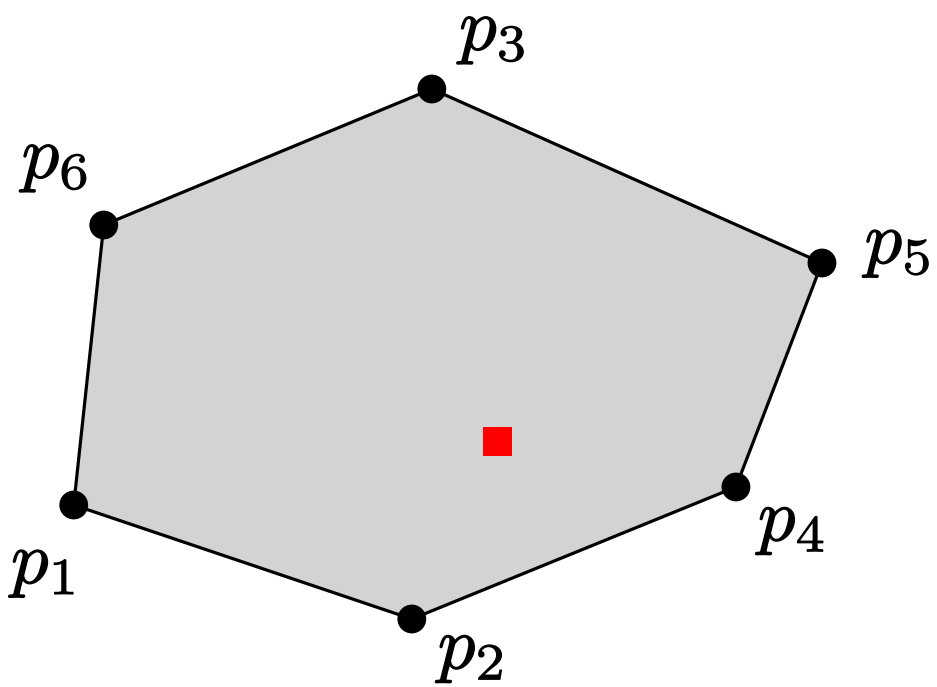
$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



凸多角形の頂点による記述

頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

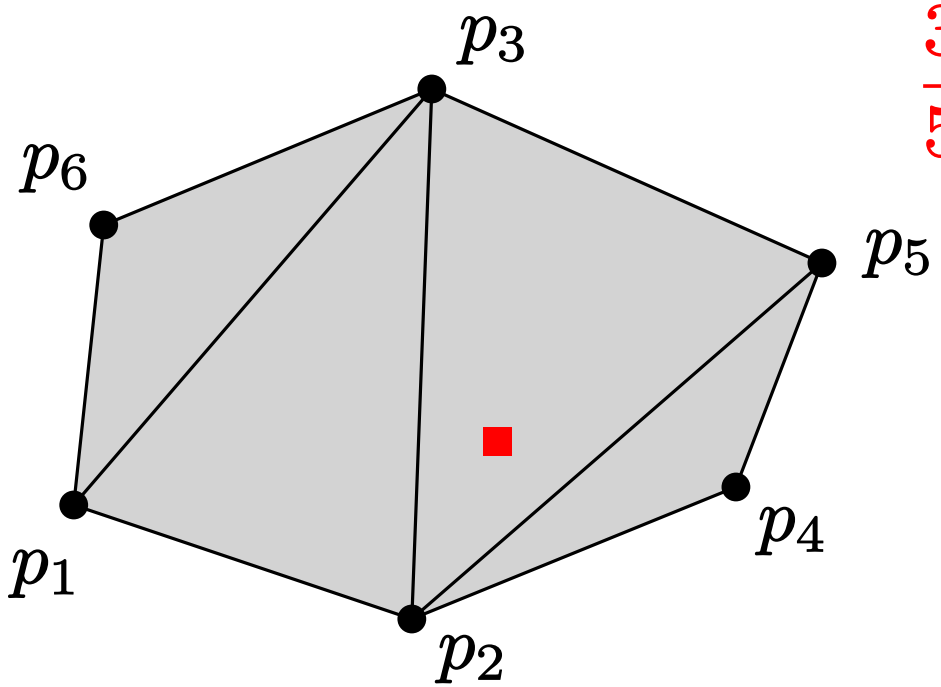
$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



凸多角形の頂点による記述

頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

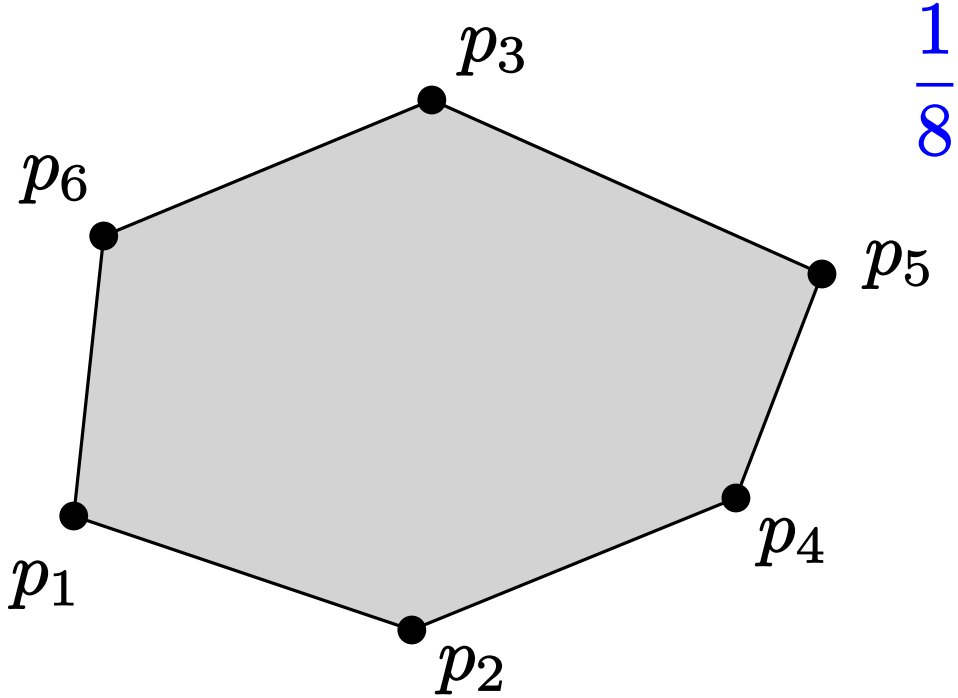


$$\frac{3}{5}p_2 + \frac{1}{5}p_3 + \frac{1}{5}p_5$$

凸多角形の頂点による記述

頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

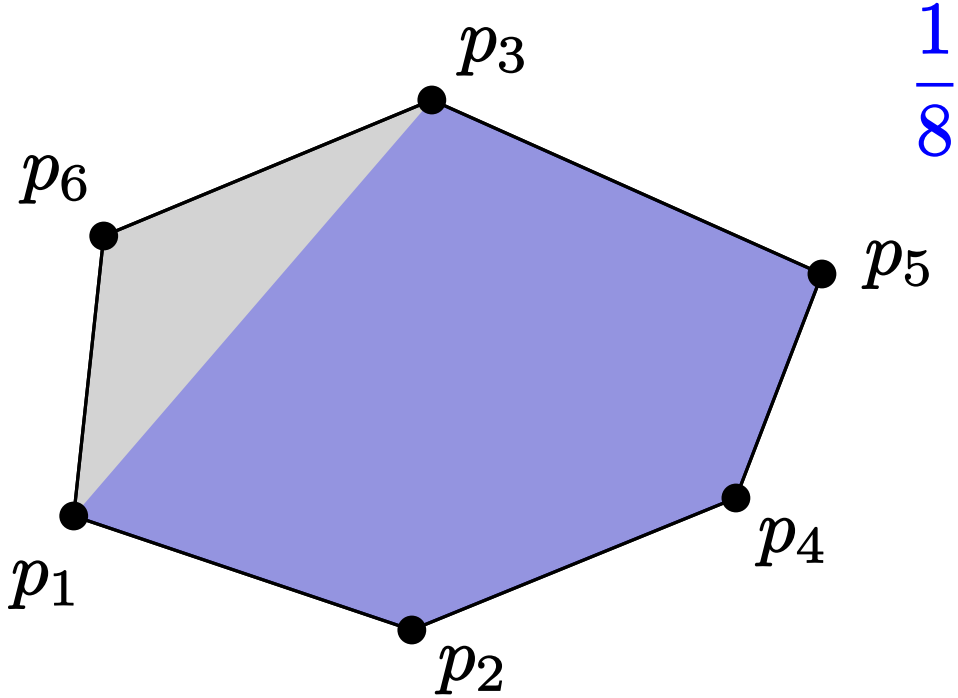


$$\frac{1}{8}p_1 + \frac{1}{8}p_2 + \frac{3}{8}p_3 + \frac{1}{8}p_4 + \frac{1}{4}p_5$$

凸多角形の頂点による記述

頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

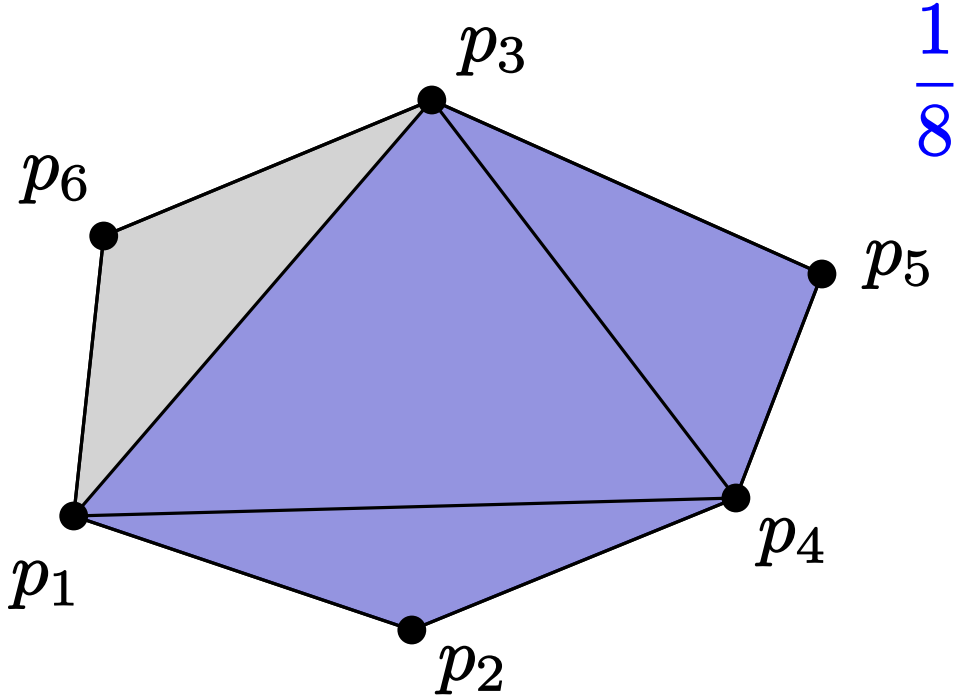


$$\frac{1}{8}p_1 + \frac{1}{8}p_2 + \frac{3}{8}p_3 + \frac{1}{8}p_4 + \frac{1}{4}p_5$$

凸多角形の頂点による記述

頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

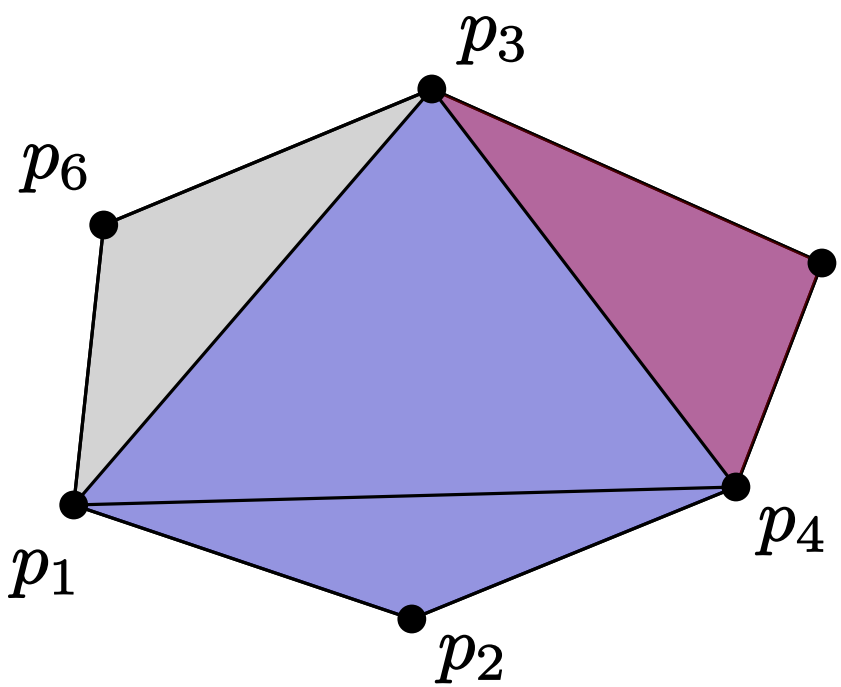


$$\frac{1}{8}p_1 + \frac{1}{8}p_2 + \frac{3}{8}p_3 + \frac{1}{8}p_4 + \frac{1}{4}p_5$$

凸多角形の頂点による記述

頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



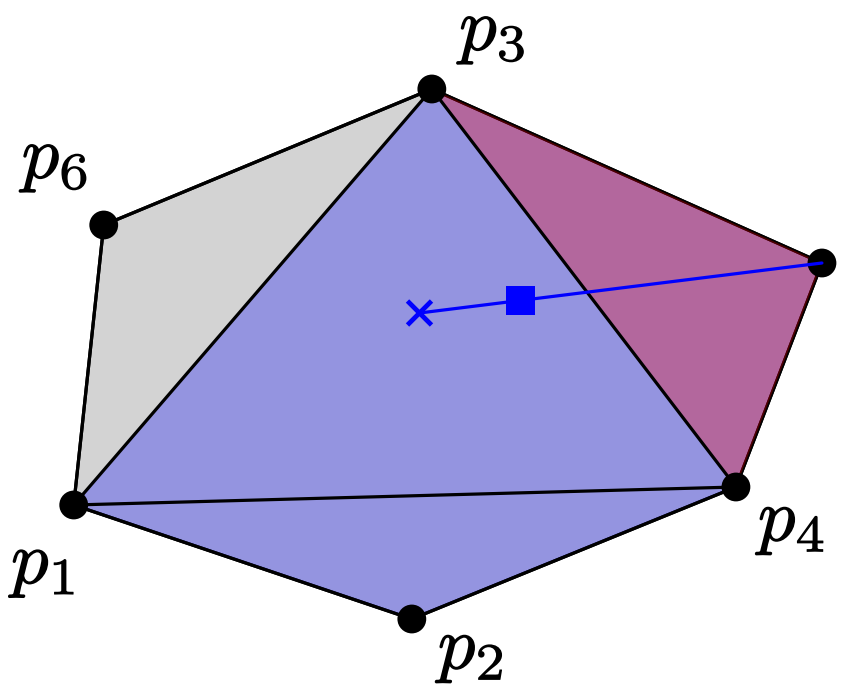
$$\frac{1}{8}p_1 + \frac{1}{8}p_2 + \frac{3}{8}p_3 + \frac{1}{8}p_4 + \frac{1}{4}p_5$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{6}p_4\right) + \frac{1}{4}p_5$$

凸多角形の頂点による記述

頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



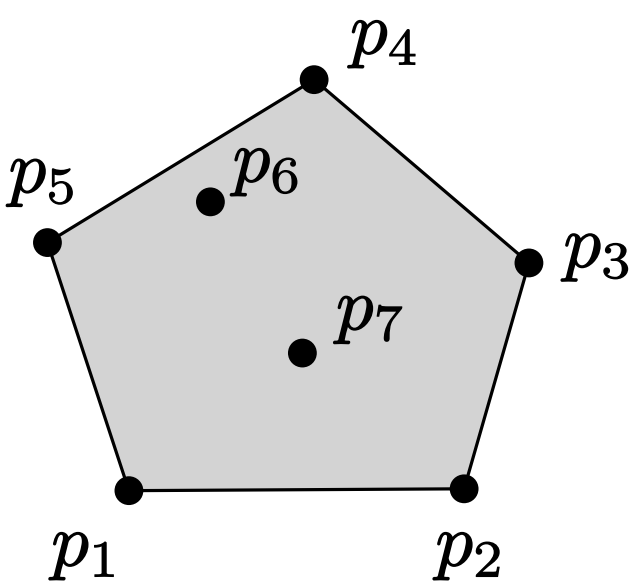
$$\frac{1}{8}p_1 + \frac{1}{8}p_2 + \frac{3}{8}p_3 + \frac{1}{8}p_4 + \frac{1}{4}p_5$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{6}p_4\right) + \frac{1}{4}p_5$$

冗長な点がある場合

$V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ が凸多角形の頂点集合でなくても，
次の集合は凸多角形になる

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

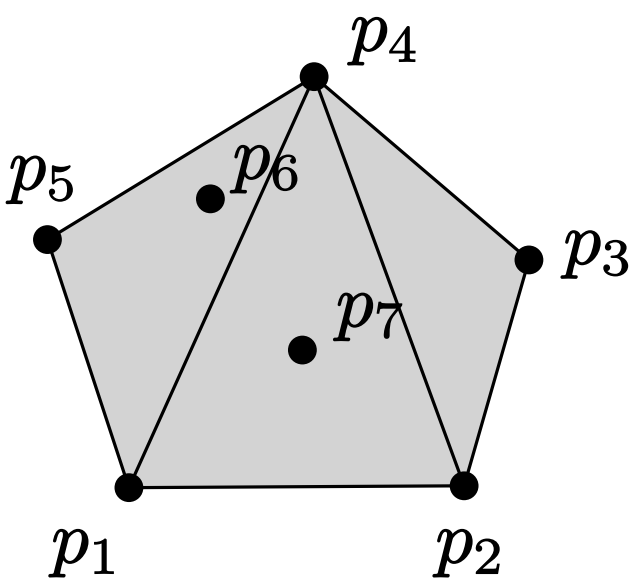


$$\frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7$$

冗長な点がある場合

$V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ が凸多角形の頂点集合でなくても，
次の集合は凸多角形になる

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



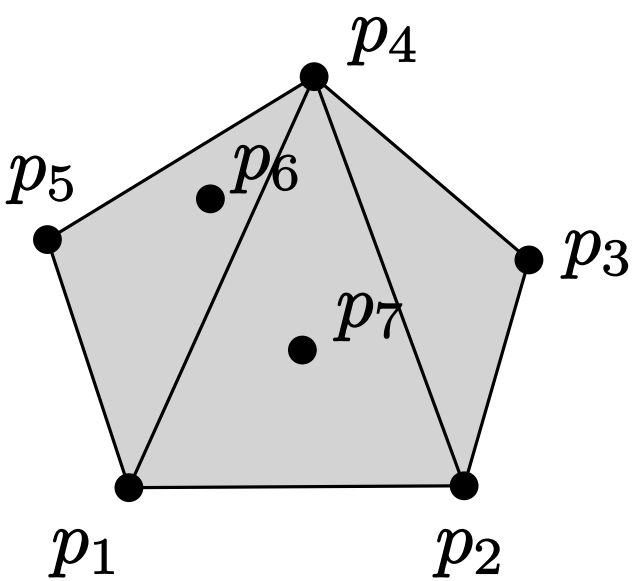
$$\frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7$$

$$= \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_4\right)$$

冗長な点がある場合

$V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ が凸多角形の頂点集合でなくても，
次の集合は凸多角形になる

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



$$\frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7$$

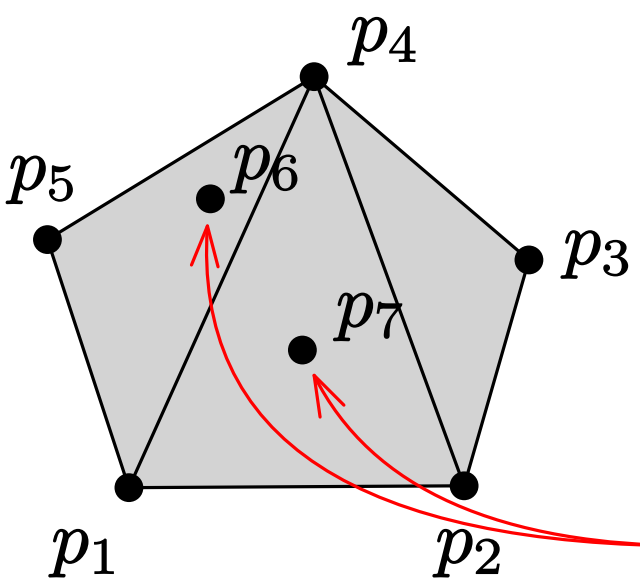
$$= \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_4\right)$$

$$= \frac{4}{15}p_1 + \frac{4}{15}p_2 + \frac{1}{15}p_4 + \frac{2}{5}p_5$$

冗長な点がある場合

$V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ が凸多角形の頂点集合でなくても，
次の集合は凸多角形になる

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



$$\frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7$$

$$= \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_4\right)$$

$$= \frac{4}{15}p_1 + \frac{4}{15}p_2 + \frac{1}{15}p_4 + \frac{2}{5}p_5$$

凸多角形を定めるうえで 冗長な点

凸結合

定義：凸結合

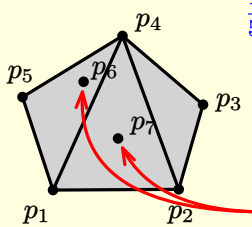
点 $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^2$ の **凸結合** とは，
次のような点 $p \in \mathbb{R}^2$ のこと

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ となる実数 } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0 \text{ が存在して，}$$

$$p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$$

$V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ が凸多角形の頂点集合でなくても，
次の集合は凸多角形になる

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$



$$\frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7$$
$$= \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_4\right)$$
$$= \frac{4}{15}p_1 + \frac{4}{15}p_2 + \frac{1}{15}p_4 + \frac{2}{5}p_5$$

凸多角形を定めるうえで 冗長な点

凸包

定義：凸包

点集合 $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の **凸包** とは, 次の集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

V の凸包を $\mathrm{CH}(V)$ と書くことがある

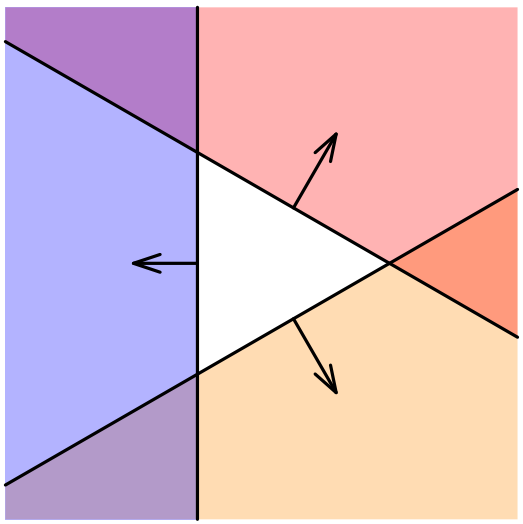
注

- $\mathrm{CH}(V)$ が凸多角形であるとは限らない
- 凸包の記法は文献によって異なる
  (他の記法の例：$\mathrm{conv}(V)$)

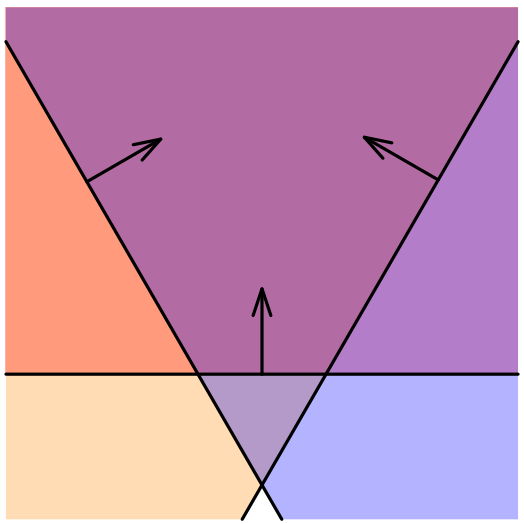
凸多角形の半平面による記述

半平面 $h_1, h_2, \ldots, h_n$ の共通部分が非空で有界であるとき，
それは 1 点か 線分か 凸多角形を表す

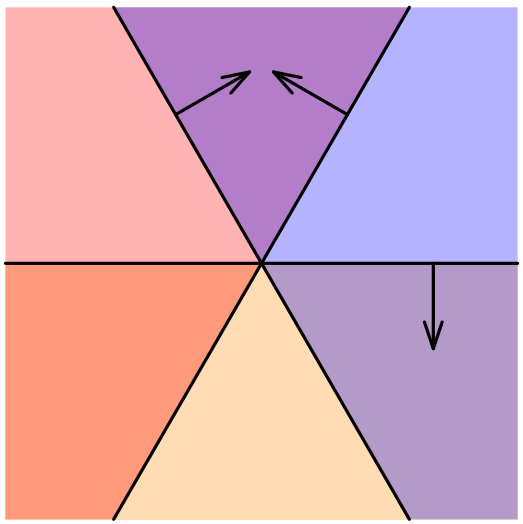
$$P = h_1 \cap h_2 \cap \cdots \cap h_n$$



空



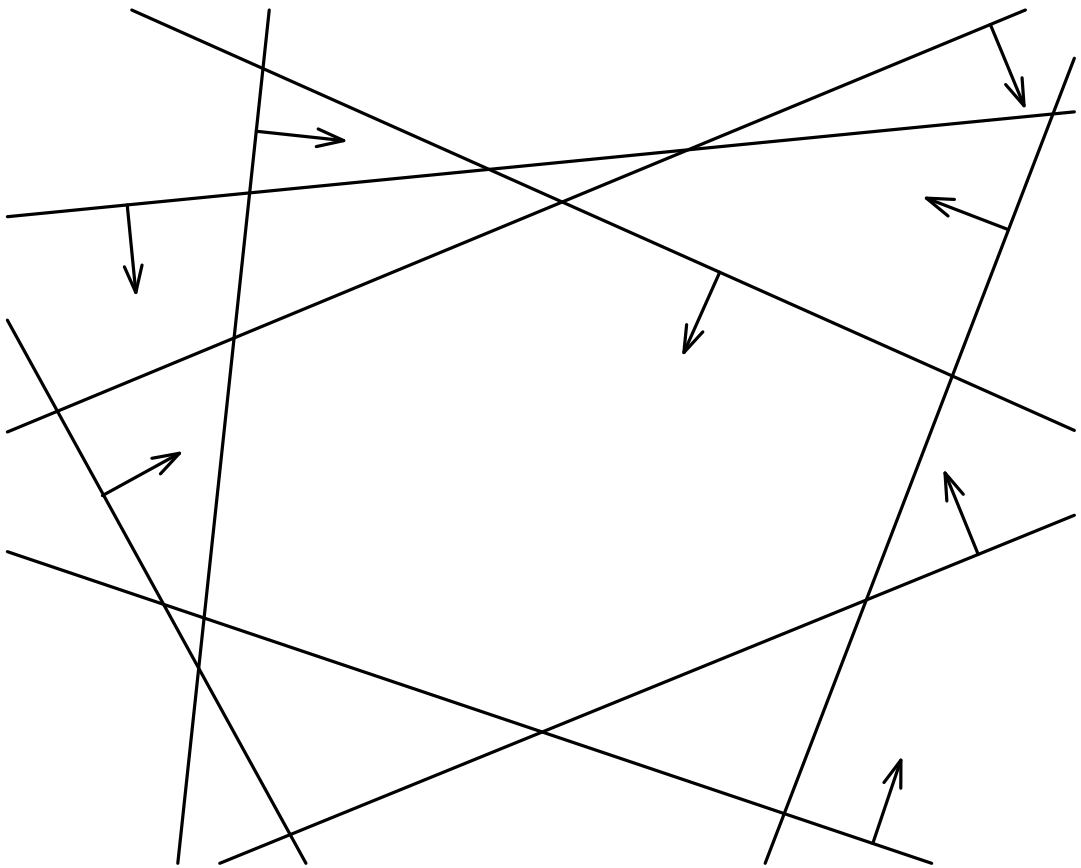
非有界



1 点

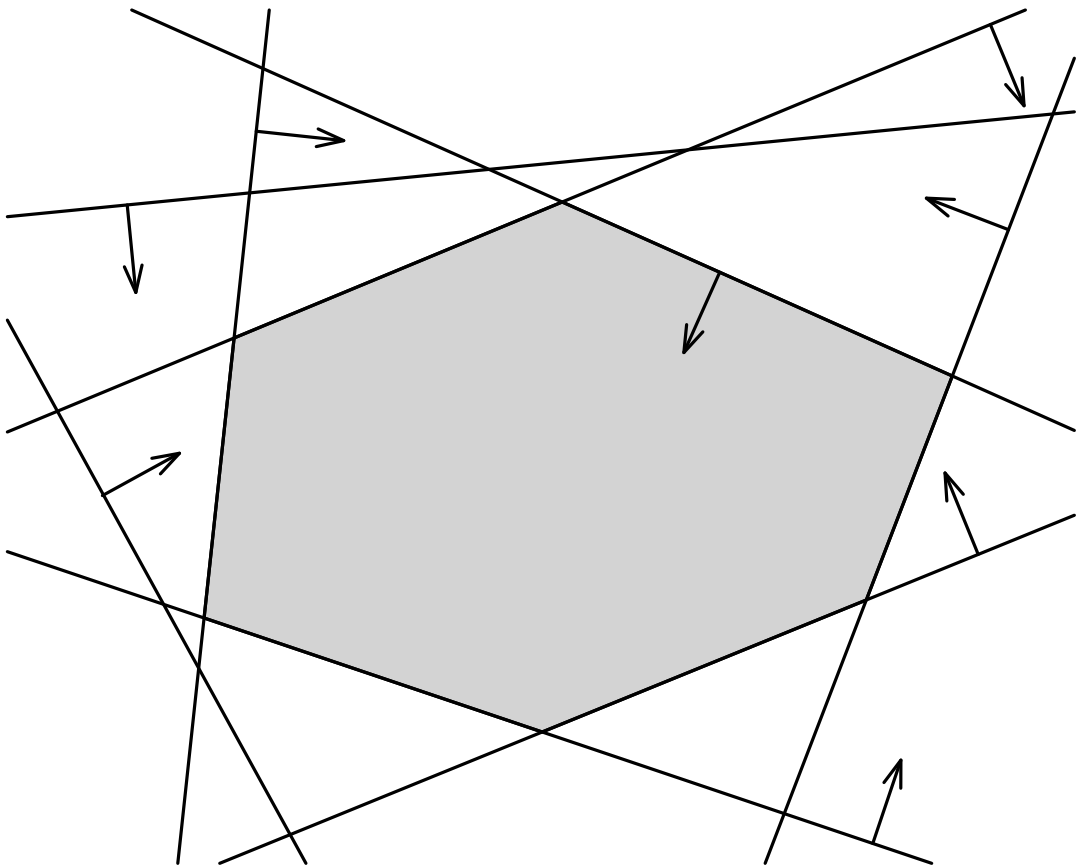
冗長な半平面がある場合

半平面 $h_1, h_2, \ldots, h_n$ の共通部分が凸多角形 P であっても,
$h_1, h_2, \ldots, h_n$ のすべてが P の辺を定める必要はない



冗長な半平面がある場合

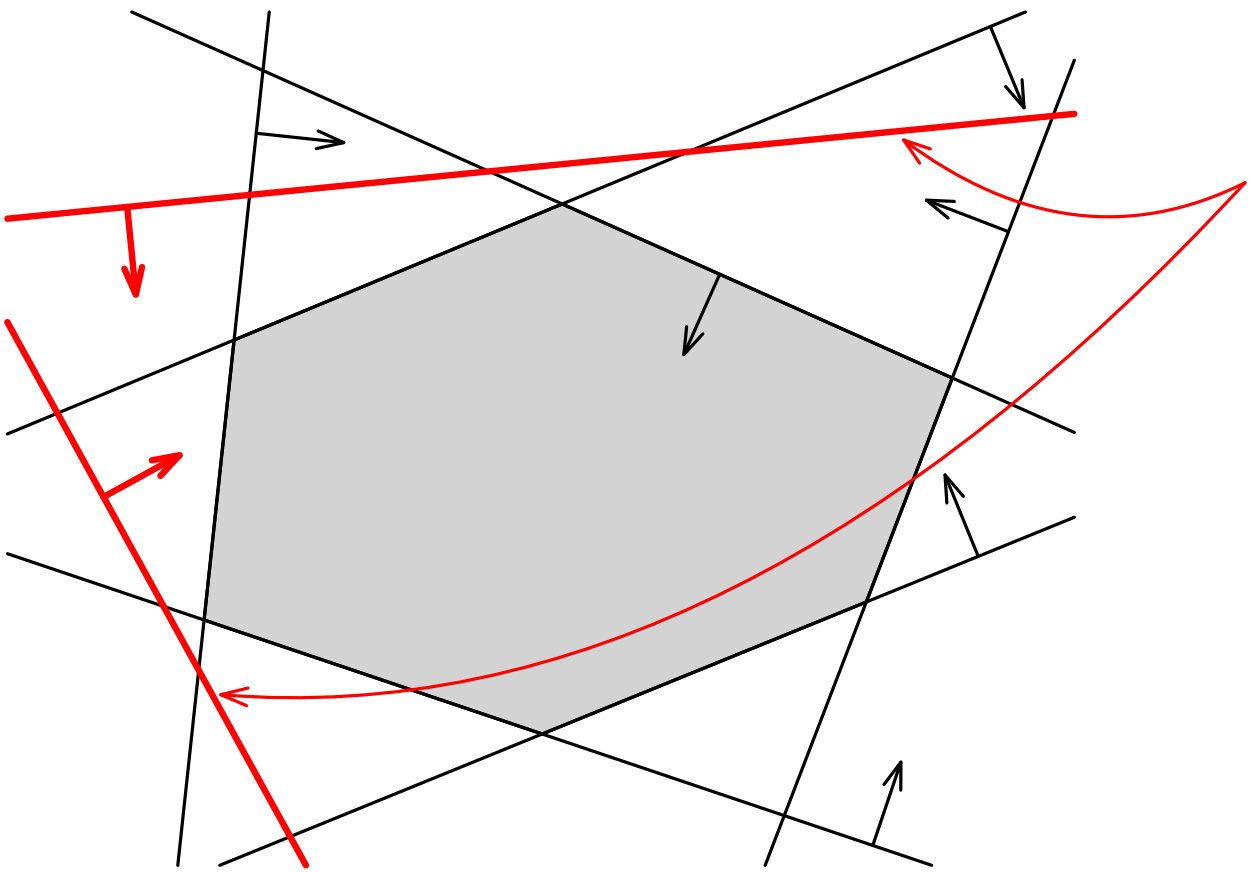
半平面 $h_1, h_2, \ldots, h_n$ の共通部分が凸多角形 P であっても,
$h_1, h_2, \ldots, h_n$ のすべてが P の辺を定める必要はない



冗長な半平面がある場合

半平面 $h_1, h_2, \ldots, h_n$ の共通部分が凸多角形 P であっても，

$h_1, h_2, \ldots, h_n$ のすべてが P の辺を定める必要はない

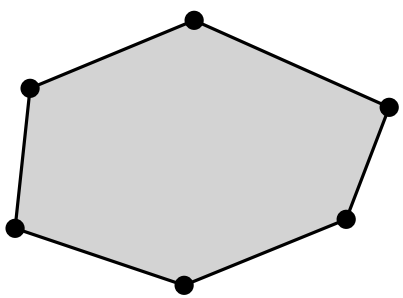


頂点による記述と半平面による記述

凸多角形は…

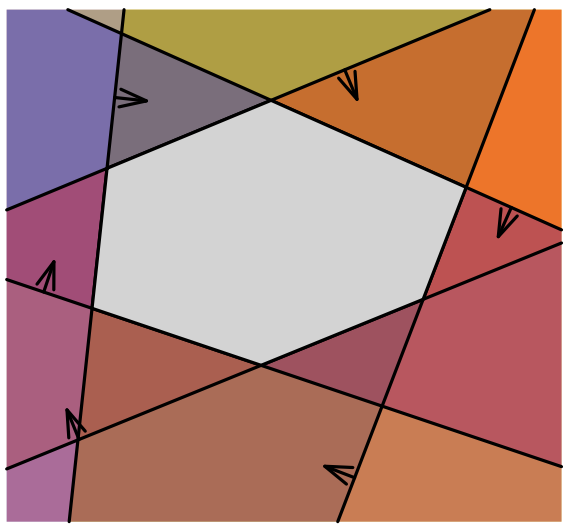
点集合の凸包

冗長な点がある場合あり



半平面集合の共通部分

冗長な半平面がある場合あり



課題

この 2 つの記述の間の関係は？

記述の間の関係？

例えば，次の 2 つの問題を考える

問題 1：頂点記述構成問題

入力： 点集合 $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
出力： 凸包 $\mathrm{CH}(V)$ の頂点集合 (反時計回りに)

問題 2：半平面記述構成問題

入力： 半平面の集合 $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$

出力： 共通部分 $\bigcap_{i=1}^{n} h_i$ の辺集合 (反時計回りに)

課題

この 2 つの問題を解くアルゴリズムの間の関係は？

記述の間の関係？ → 答え

例えば，次の 2 つの問題を考える

問題 1：頂点記述構成問題

入力： 点集合 $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
出力： 凸包 $\mathrm{CH}(V)$ の頂点集合 (反時計回りに)

問題 2：半平面記述構成問題

入力： 半平面の集合 $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$
出力： 共通部分 $\bigcap_{i=1}^{n} h_i$ の辺集合 (反時計回りに)

課題

この 2 つの問題を解くアルゴリズムの間の関係は？

解答

一方を解くアルゴリズムがあれば，
もう一方を解くアルゴリズムが **自動的に** 得られる

道具：双対変換

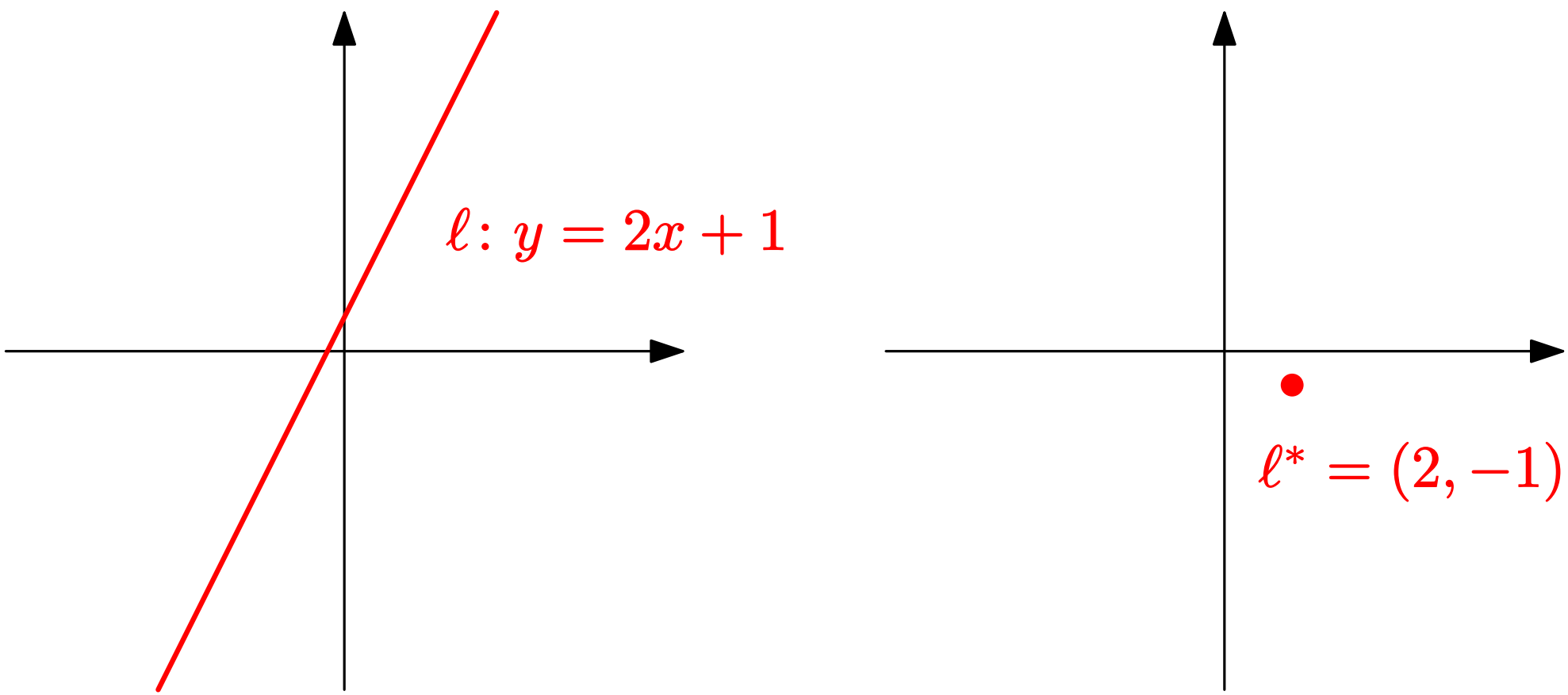
目次

1. 凸多角形を記述する方法
2. **点と直線の双対変換**
3. 直線配置
4. 双対変換と凸多角形

双対変換：直線 → 点

双対変換

直線 $\ell\colon y = ax + b$ を点 $\ell^* = (a, -b)$ に変換する

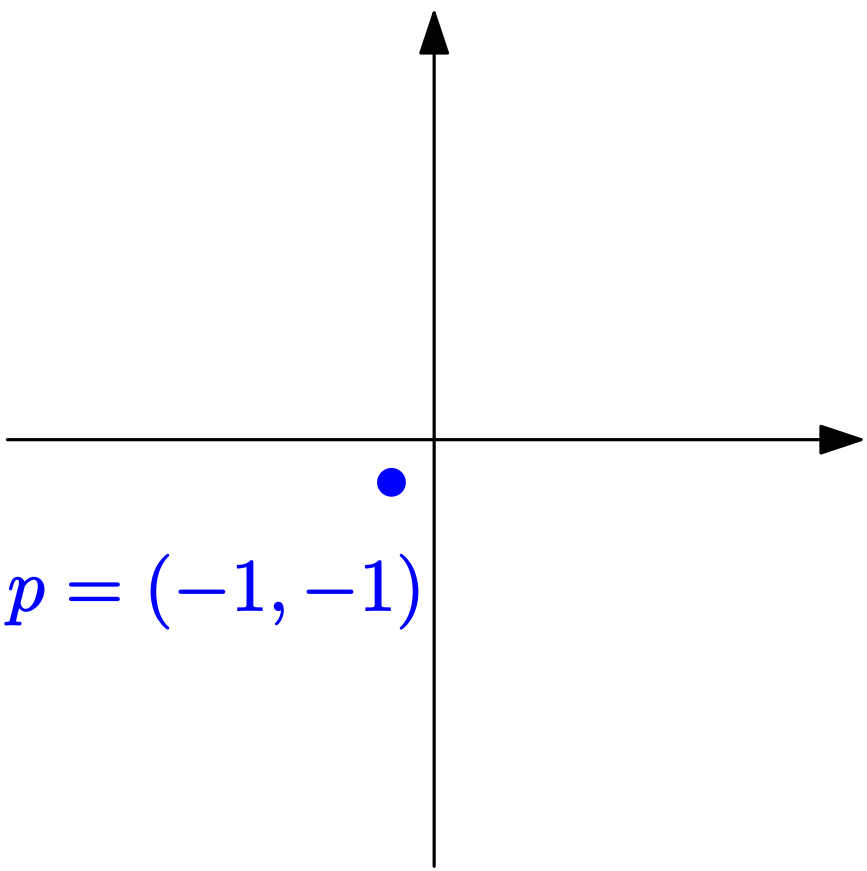


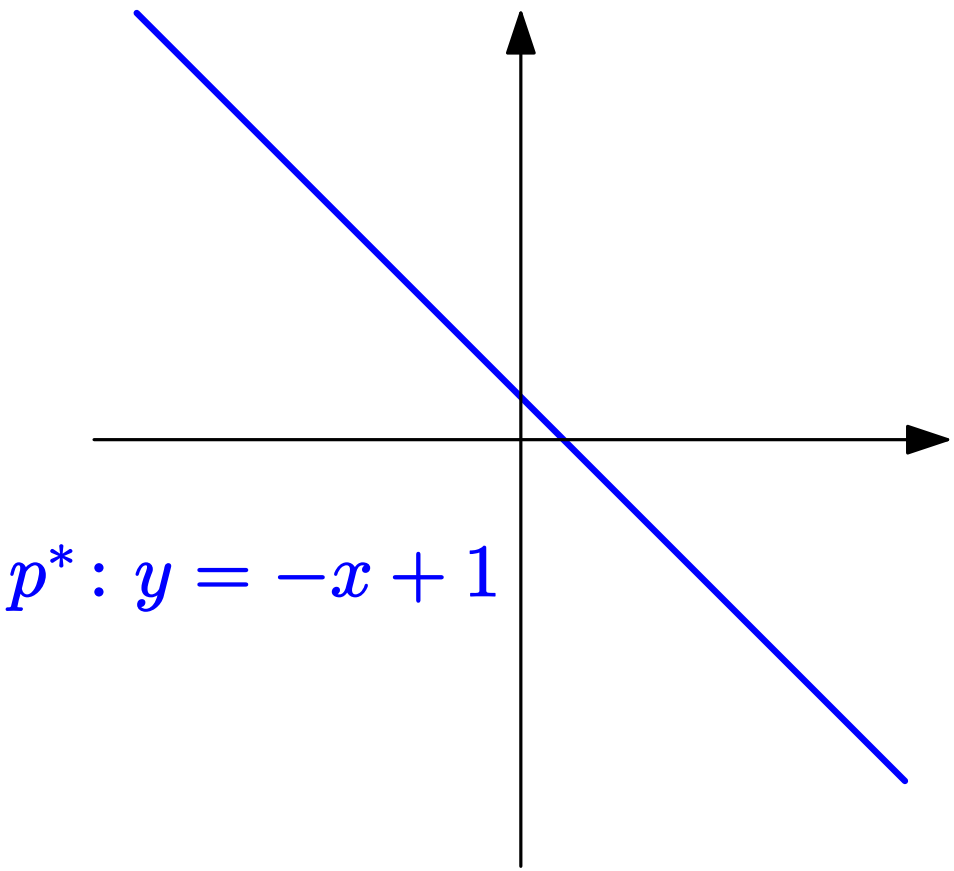
注：y 軸に平行な直線は変換できない

双対変換：点 → 直線

双対変換

点 $p = (a, b)$ を直線 $p^* : y = ax - b$ に変換する

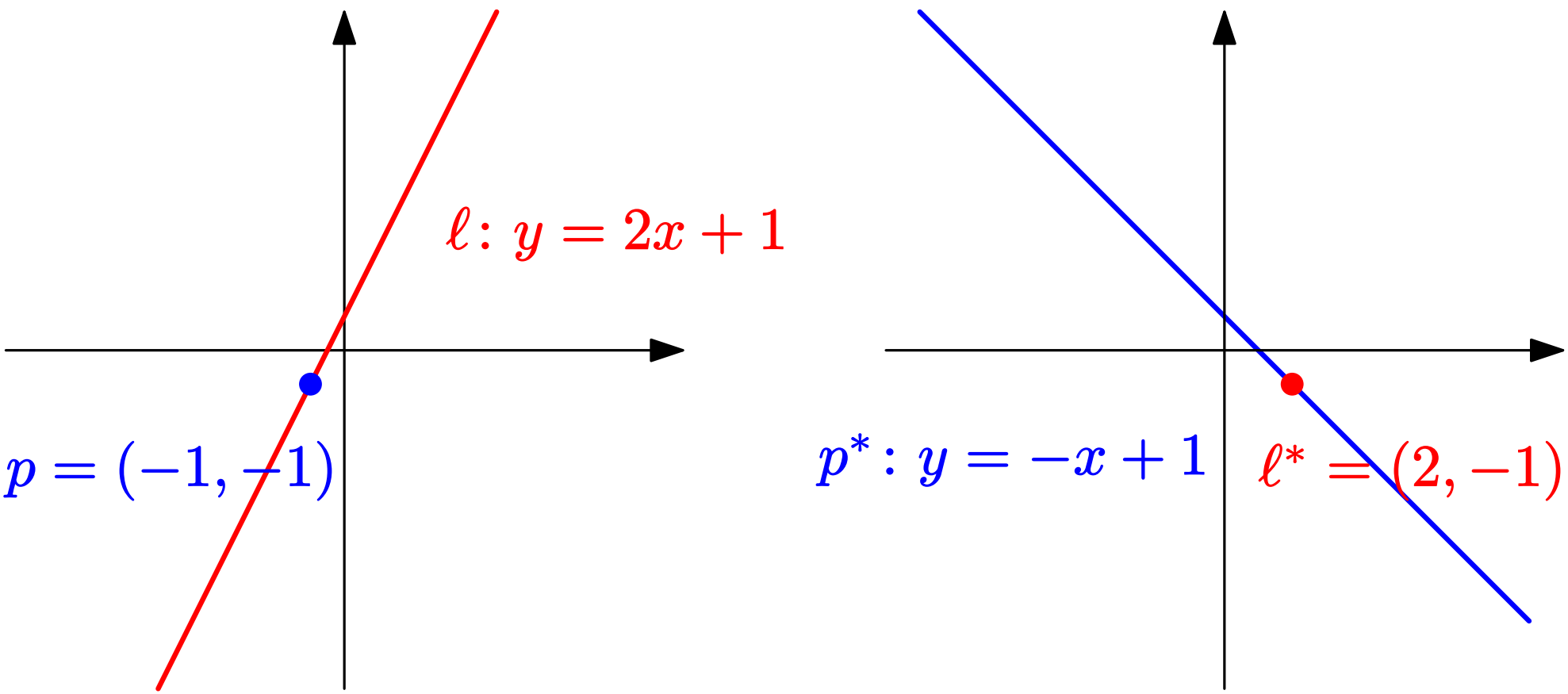




双対変換：操作のまとめ

双対変換

- 直線 $\ell\colon y = ax + b$ を点 $\ell^* = (a, -b)$ に変換する
- 点 $p = (a, b)$ を直線 $p^*\colon y = ax - b$ に変換する



変換を 2 回行うと…

双対変換

- 直線 $\ell\colon y = ax + b$ を点 $\ell^* = (a, -b)$ に変換する
- 点 $p = (a, b)$ を直線 $p^*\colon y = ax - b$ に変換する

$$\ell\colon y = ax + b \xrightarrow{\text{双対変換}} \ell^* = (a, -b)$$
$$\xrightarrow{\text{双対変換}} \ell^{**}\colon y = ax - (-b) = ax + b$$

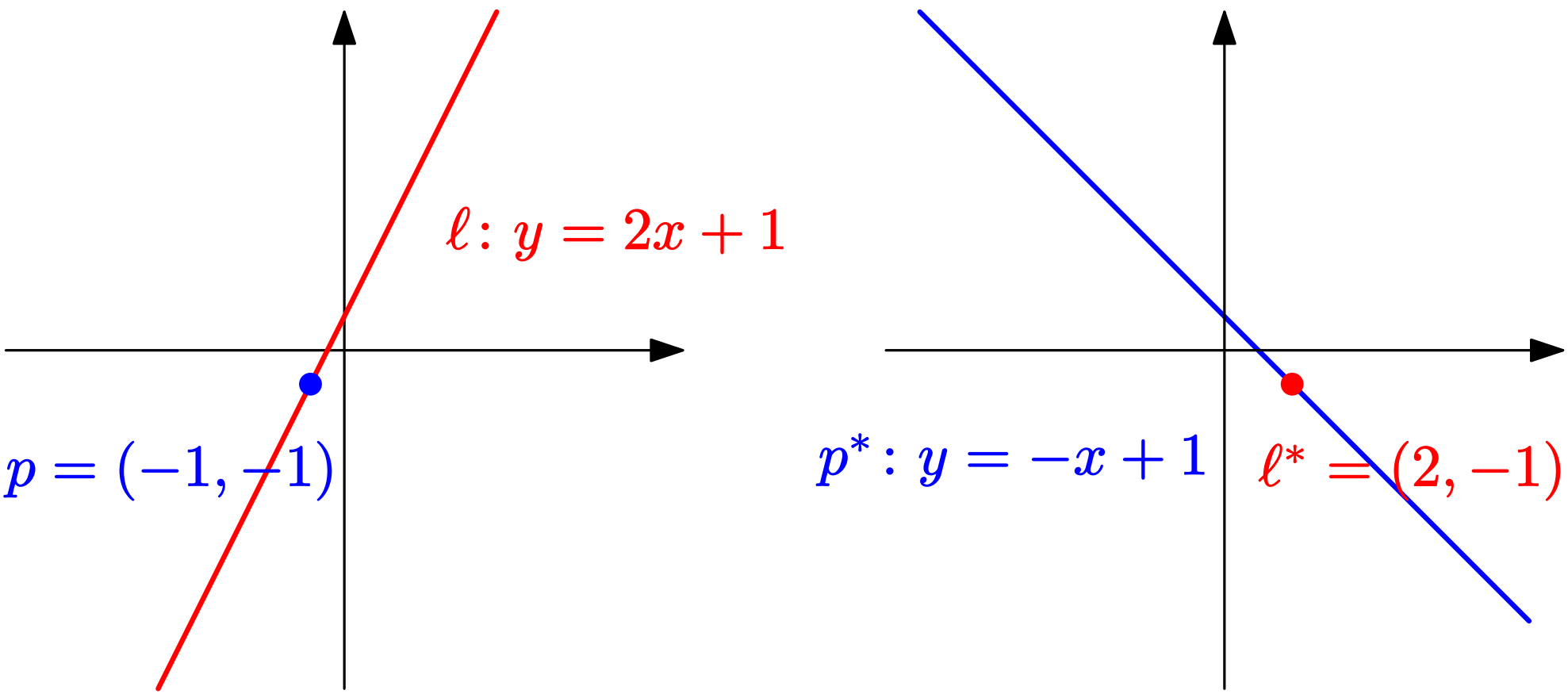
$$p = (a, b) \xrightarrow{\text{双対変換}} p^*\colon y = ax - b$$
$$\xrightarrow{\text{双対変換}} p^{**} = (a, -(-b)) = (a, b)$$

つまり，変換を 2 回行うと，もとに戻る

双対変換の性質 (1)：接続関係の保存

性質：双対変換は接続関係を保存する

点 $p = (a, b)$，直線 $\ell\colon y = cx + d$ に対して
点 p が直線 ℓ 上にある $\Leftrightarrow$ 点 ℓ^* が直線 p^* 上にある



双対変換の性質 (1)：接続関係の保存

性質：双対変換は接続関係を保存する

点 $p = (a, b)$，直線 $\ell\colon y = cx + d$ に対して
点 p が直線 ℓ 上にある $\Leftrightarrow$ 点 ℓ^* が直線 p^* 上にある

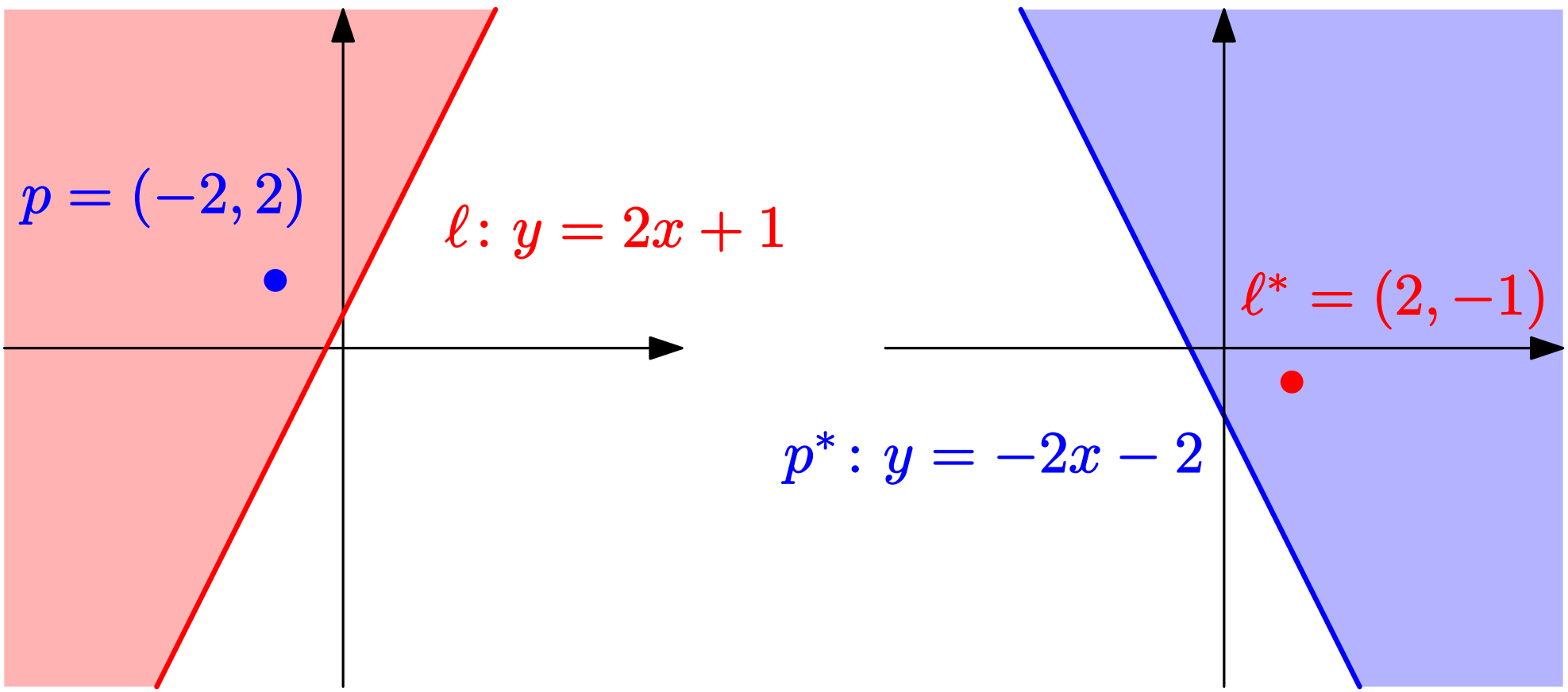
証明：$\ell^* = (c, -d)$，$p^*\colon y = ax - b$ なので，

p が ℓ 上にある
$\Leftrightarrow\ b = ca + d$
$\Leftrightarrow\ -d = ac - b$
$\Leftrightarrow$ 点 $(c, -d)$ が直線 $y = ax - b$ 上にある
$\Leftrightarrow\ \ell^*$ が p^* 上にある $\square$

双対変換の性質 (2)：上下関係の保存

性質：双対変換は上下関係を保存する

点 $p = (a, b)$，直線 $\ell\colon y = cx + d$ に対して
点 p が直線 ℓ の上側にある (下側にある)
$\Leftrightarrow$ 点 ℓ^* が直線 p^* の上側にある (下側にある)



双対変換の性質 (2)：上下関係の保存

性質：双対変換は上下関係を保存する

点 $p = (a, b)$，直線 $\ell\colon y = cx + d$ に対して
点 p が直線 ℓ の上側にある (下側にある)
$\Leftrightarrow$ 点 ℓ^* が直線 p^* の上側にある (下側にある)

証明：$\ell^* = (c, -d)$，$p^*\colon y = ax - b$ なので，

p が ℓ の上側にある
$\Leftrightarrow\ b \geq ca + d$
$\Leftrightarrow\ -d \geq ac - b$
$\Leftrightarrow$ 点 $(c, -d)$ が直線 $y = ax - b$ の上側にある
$\Leftrightarrow\ \ell^*$ が p^* の上側にある □

注：「上側」を「$>$」で定義しても証明は同様
「下側」の証明は「$\geq$」を「$\leq$」に変えればできる

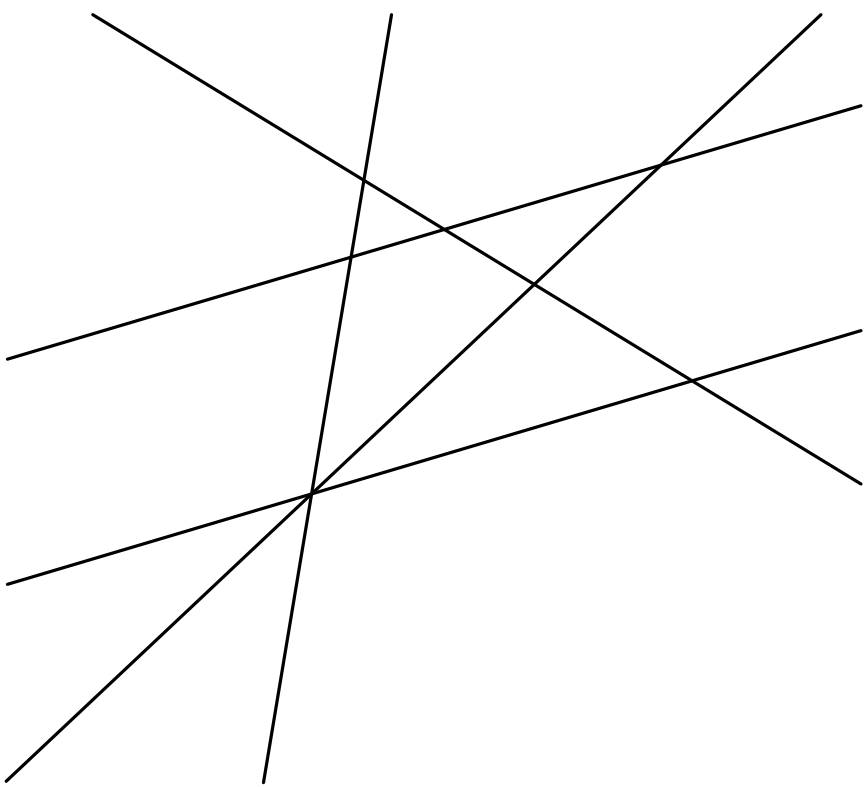
目次

1. 凸多角形を記述する方法
2. 点と直線の双対変換
3. **直線配置**
4. 双対変換と凸多角形

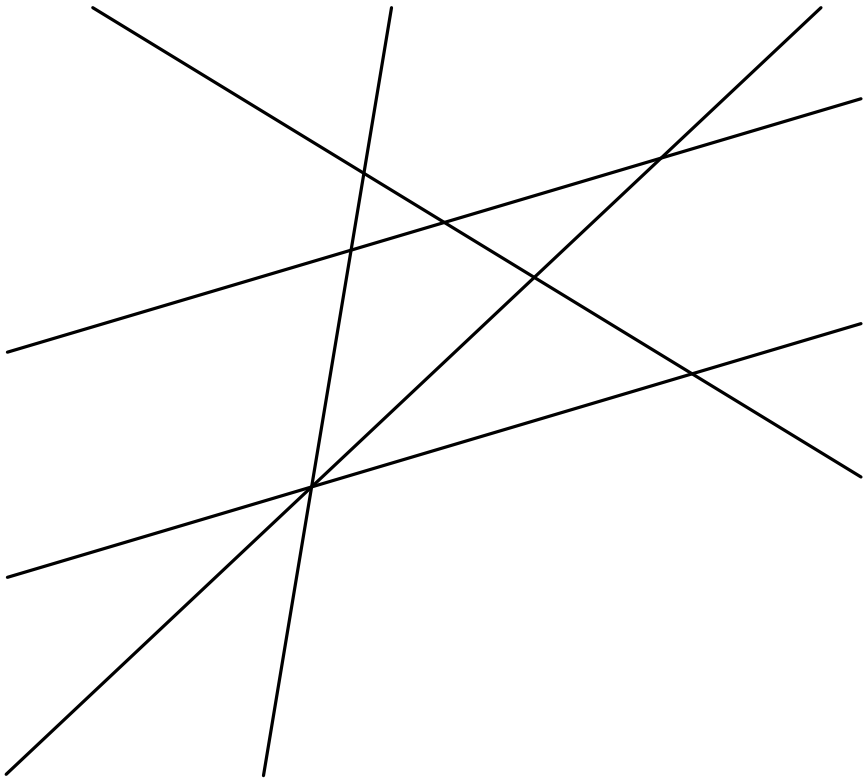
定義：直線配置

直点配置 とは 平面上の直線の集合のこと

双対変換によって，点集合は直線配置に写される

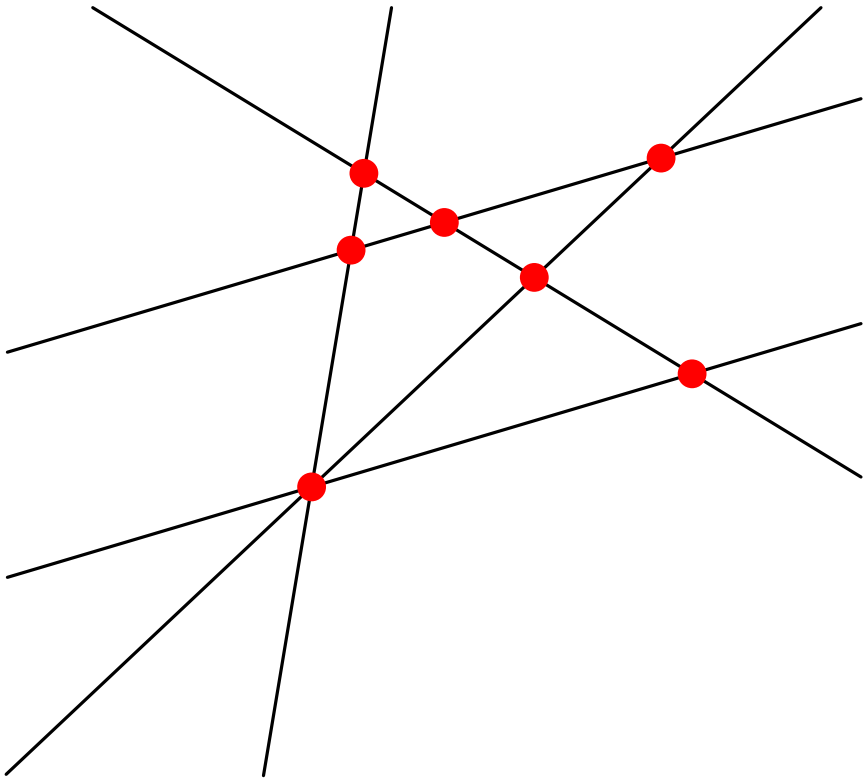


直線配置の構造



直線：5 個 (5 本)

直線配置の構造

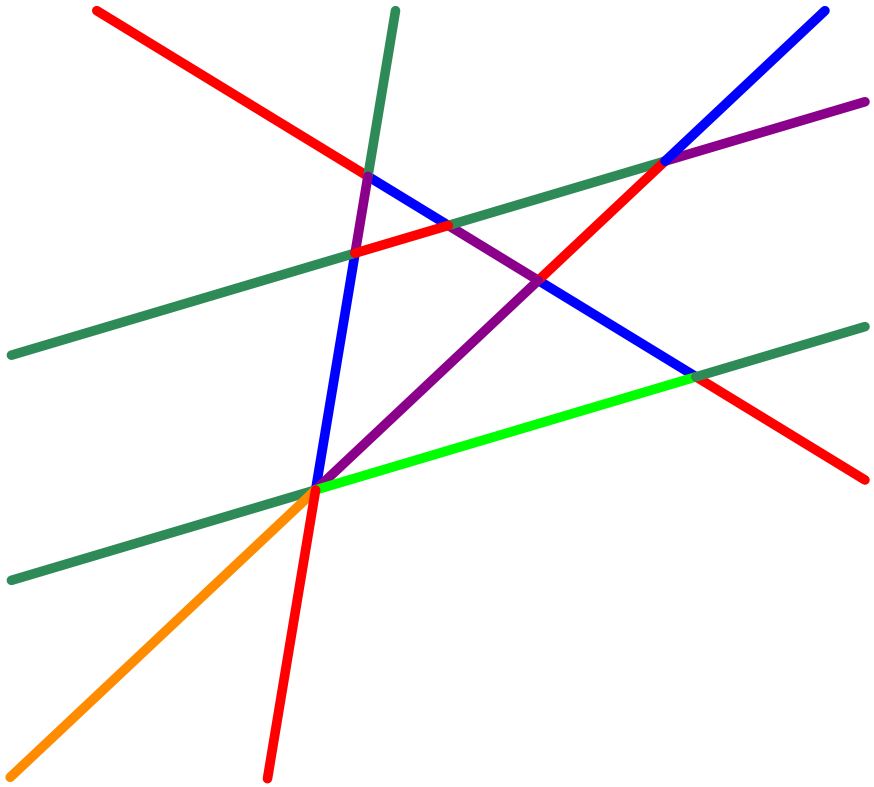


直線：5 個 (5 本)

頂点：7 個

直線配置の **頂点** とは，2 直線の交点

直線配置の構造



直線：5 個 (5 本)

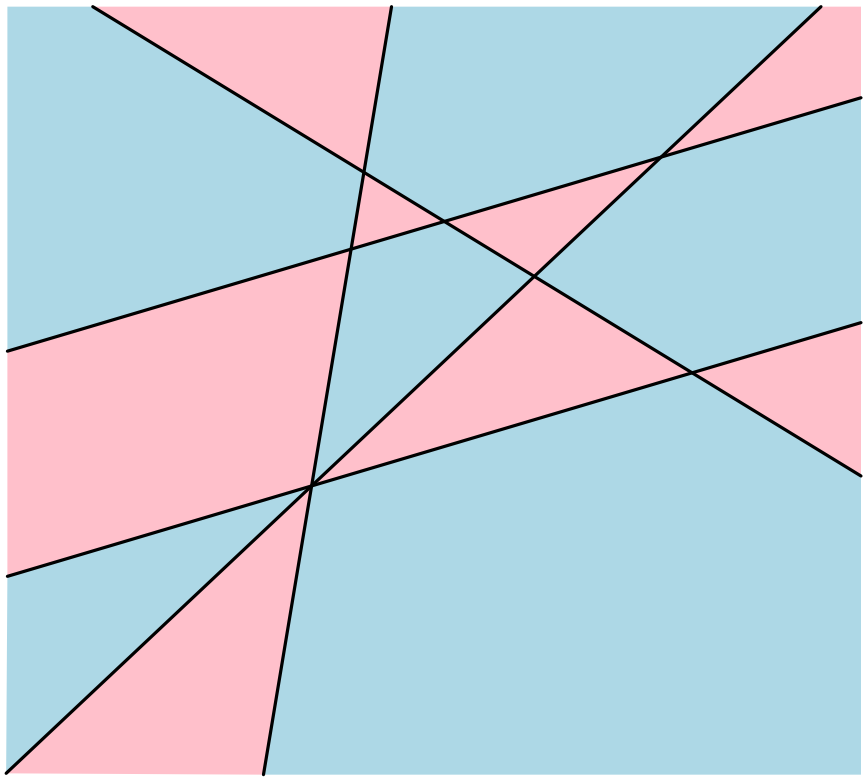
頂点：7 個

辺：20 個 (20 本)

直線配置の **頂点** とは，2 直線の交点

直線配置の **辺** とは，頂点で分けられた直線の一部分

直線配置の構造



直線：5 個 (5 本)

頂点：7 個

辺：20 個 (20 本)

セル：14 個

直線配置の **頂点** とは，2 直線の交点

直線配置の **辺** とは，頂点で分けられた直線の一部分

直線配置の **セル** (胞(ほう)) とは，直線で分けられた平面の一部分

上側エンベロープ

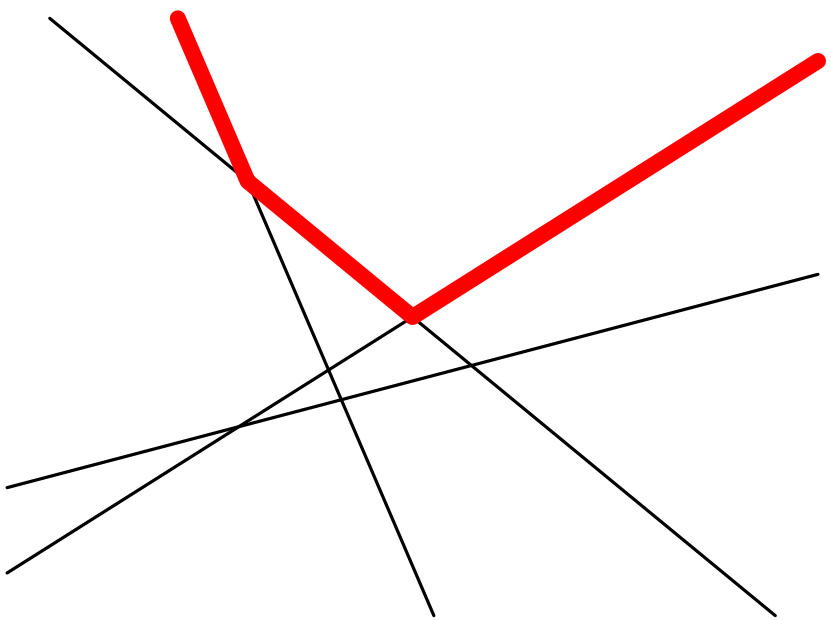
直線配置 $A = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$, $\ell_i : y = a_i x + b_i$

定義：上側エンベロープ (上側包絡線)

A の **上側エンベロープ** とは，次の関数 $\bar{e}$ のグラフ

$$\bar{e}(x) = \max\{a_i x + b_i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

$\bar{e}$ 自体を A の上側エンベロープと呼ぶこともある



下側エンベロープ

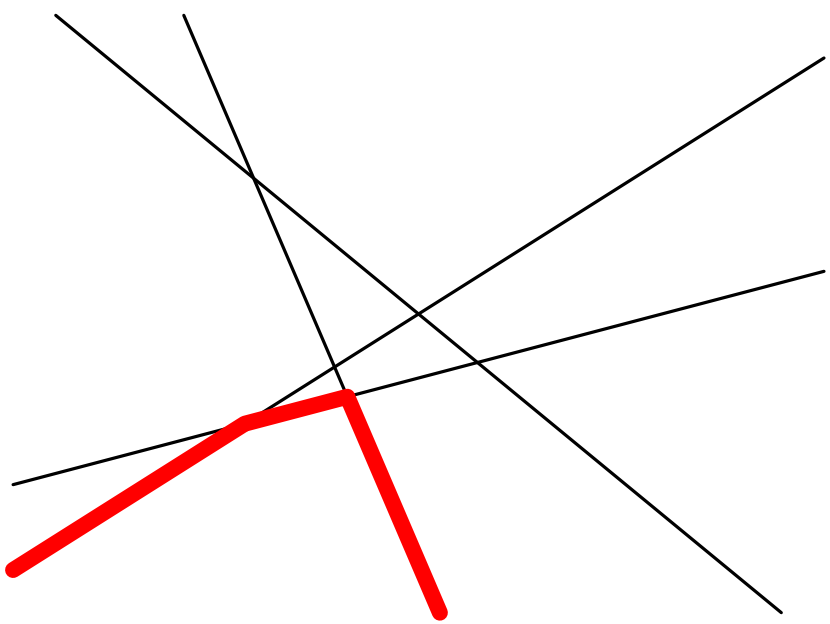
直線配置 $A = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n\}$, $\ell_i : y = a_i x + b_i$

定義：下側エンベロープ (下側包絡線)

A の **下側エンベロープ** とは，次の関数 $\underline{e}$ のグラフ

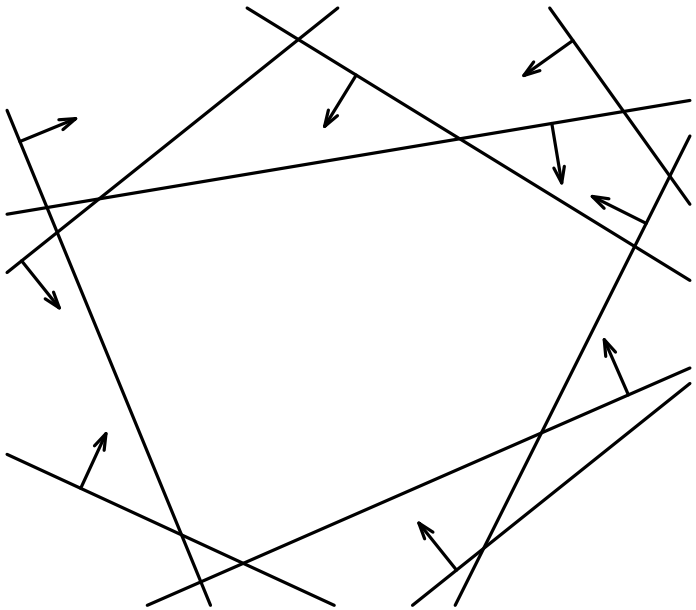
$$\underline{e}(x) = \min\{a_i x + b_i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

$\underline{e}$ 自体を A の下側エンベロープと呼ぶこともある



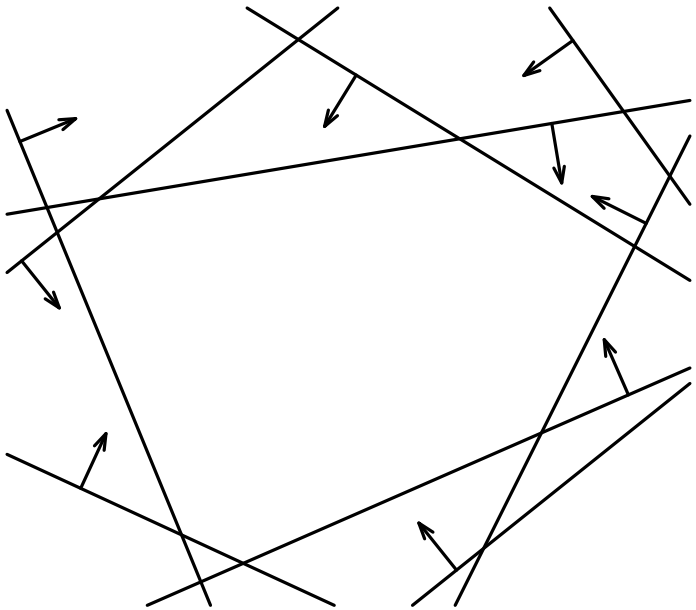
半平面の共通部分を求めるには

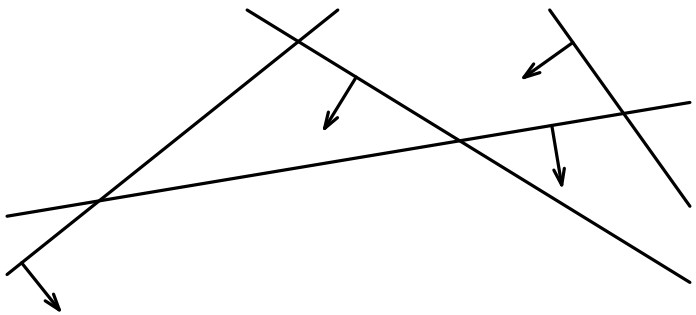
仮定：y 軸に平行な直線はない

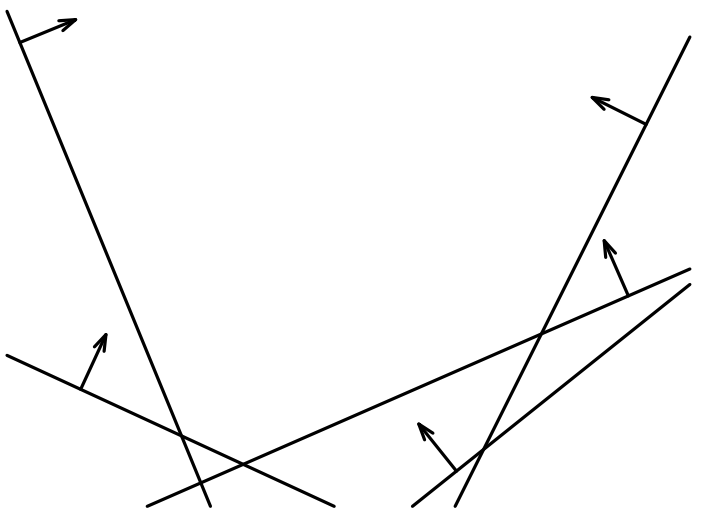


半平面の共通部分を求めるには

仮定：y 軸に平行な直線はない

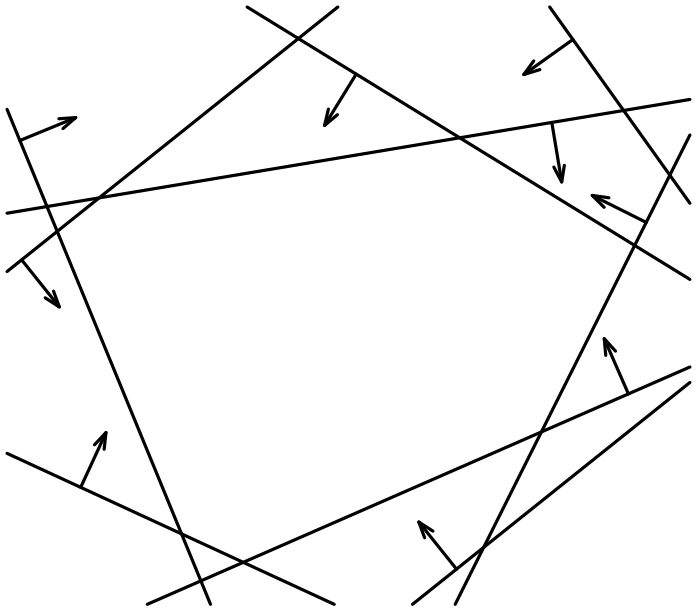


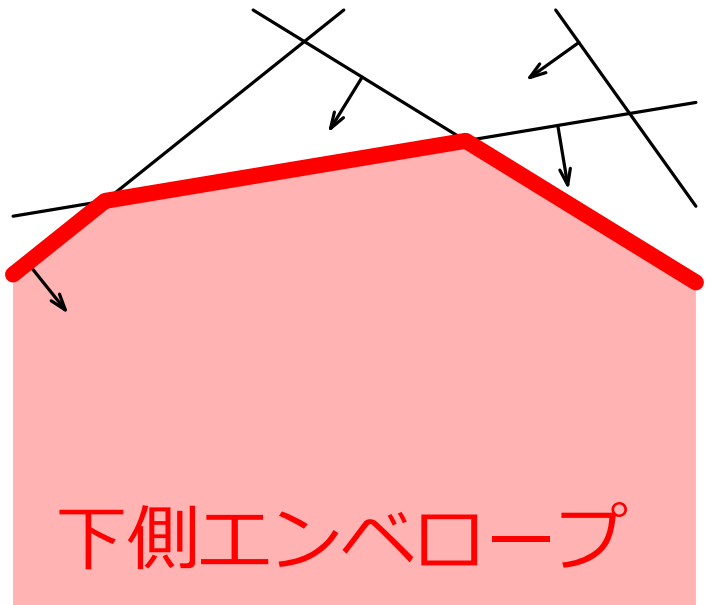


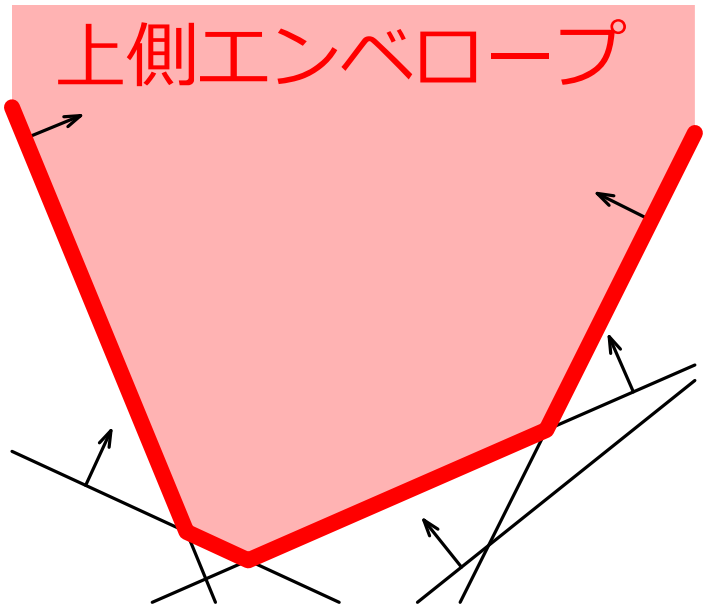


半平面の共通部分を求めるには

仮定：y 軸に平行な直線はない

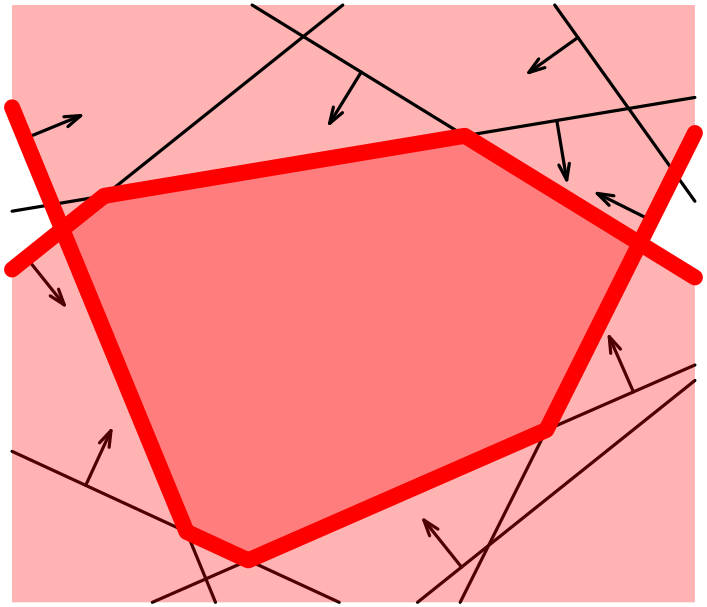


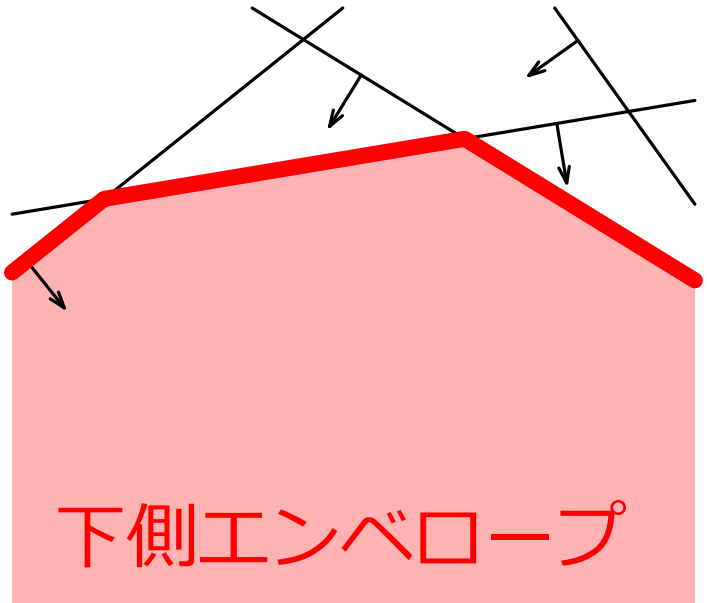


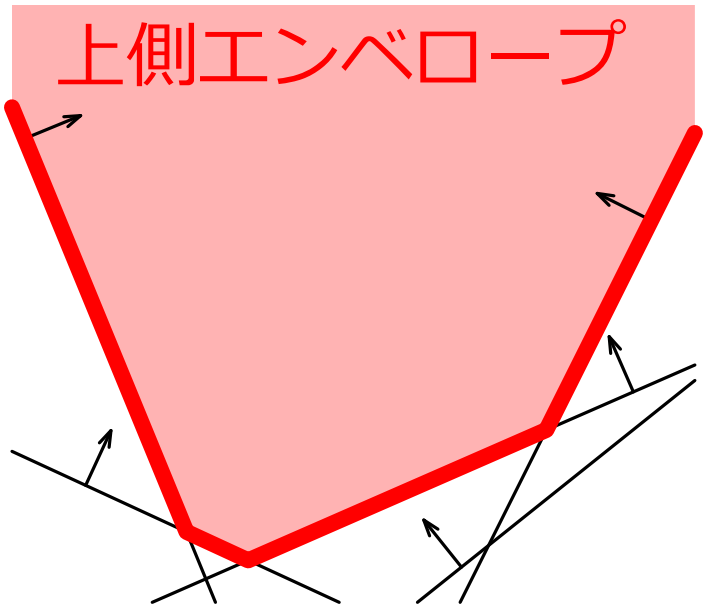


半平面の共通部分を求めるには

仮定：y 軸に平行な直線はない

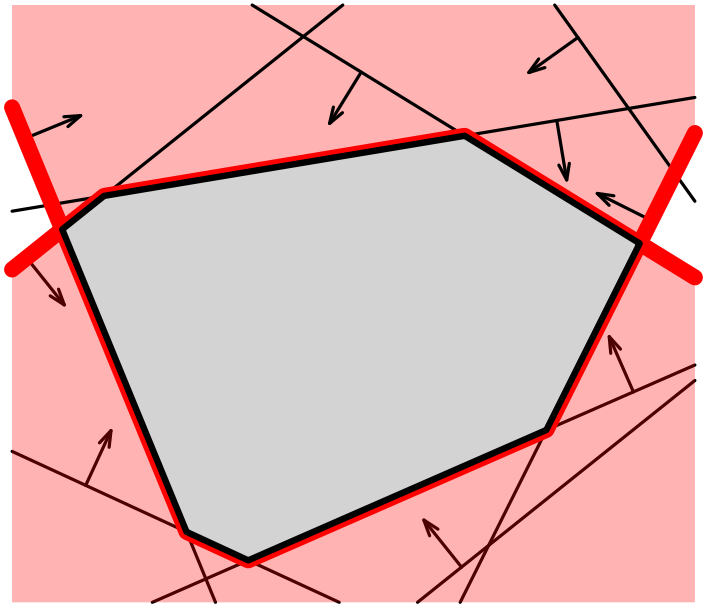


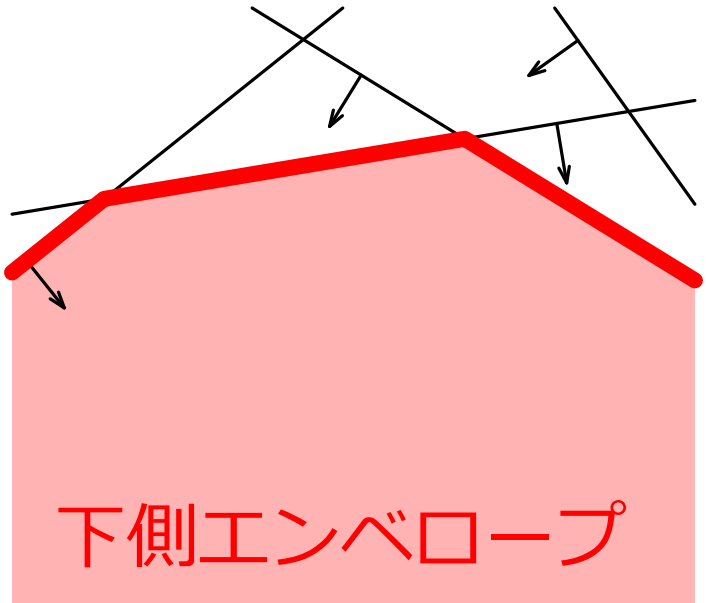


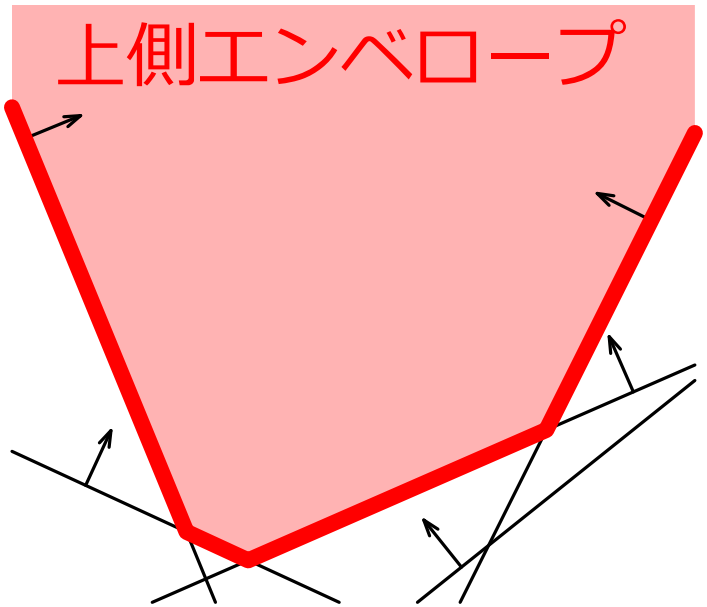


半平面の共通部分を求めるには

仮定：y 軸に平行な直線はない

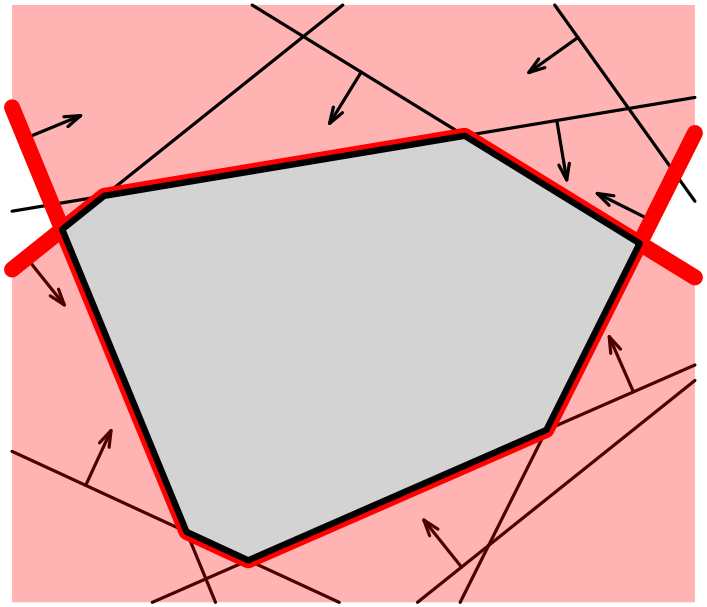






半平面の共通部分を求めるには

仮定：y 軸に平行な直線はない

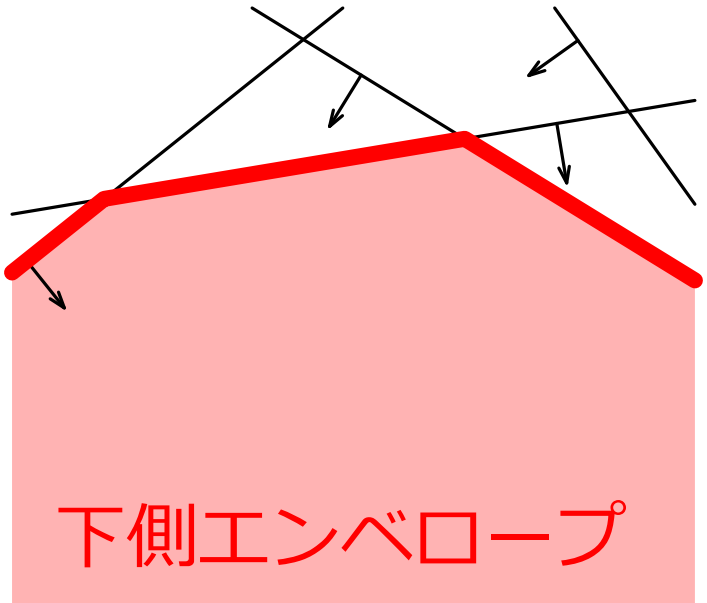


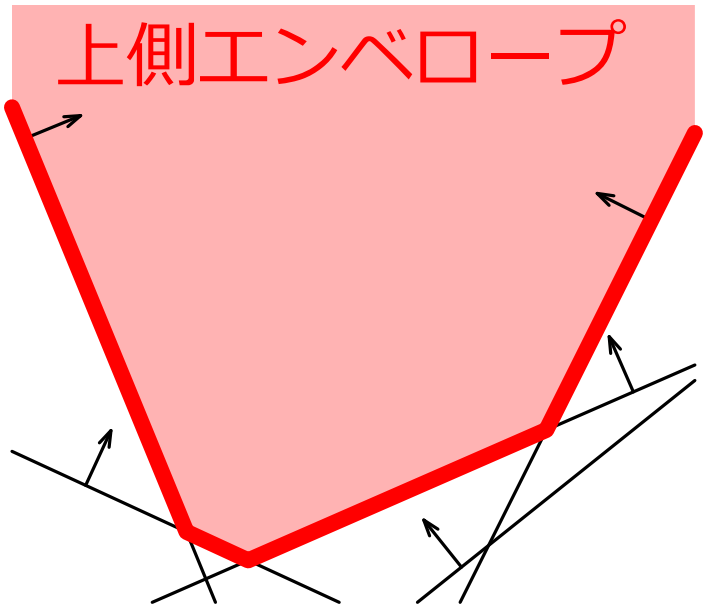
半空間の共通部分の計算

＝ 下側エンベロープの計算

＋ 上側エンベロープの計算

＋ O(直線の数)





目次

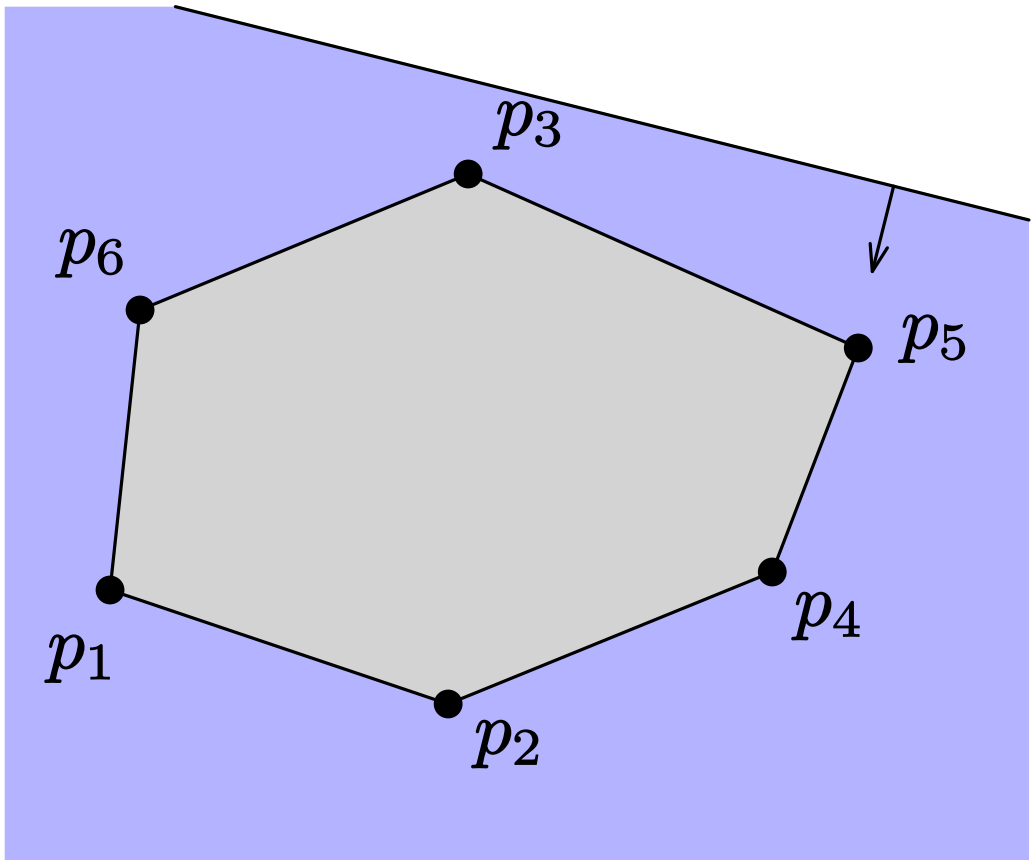
1. 凸多角形を記述する方法
2. 点と直線の双対変換
3. 直線配置
4. **双対変換と凸多角形**

半平面による凸包の記述

性質：半平面による凸包の記述

点集合 $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の凸包は
次のようにも書ける

$$\mathrm{CH}(V) = \bigcap \{\text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \ldots, p_n \in h\}$$



定義：凸包

点集合 $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の **凸包** とは，次の集合

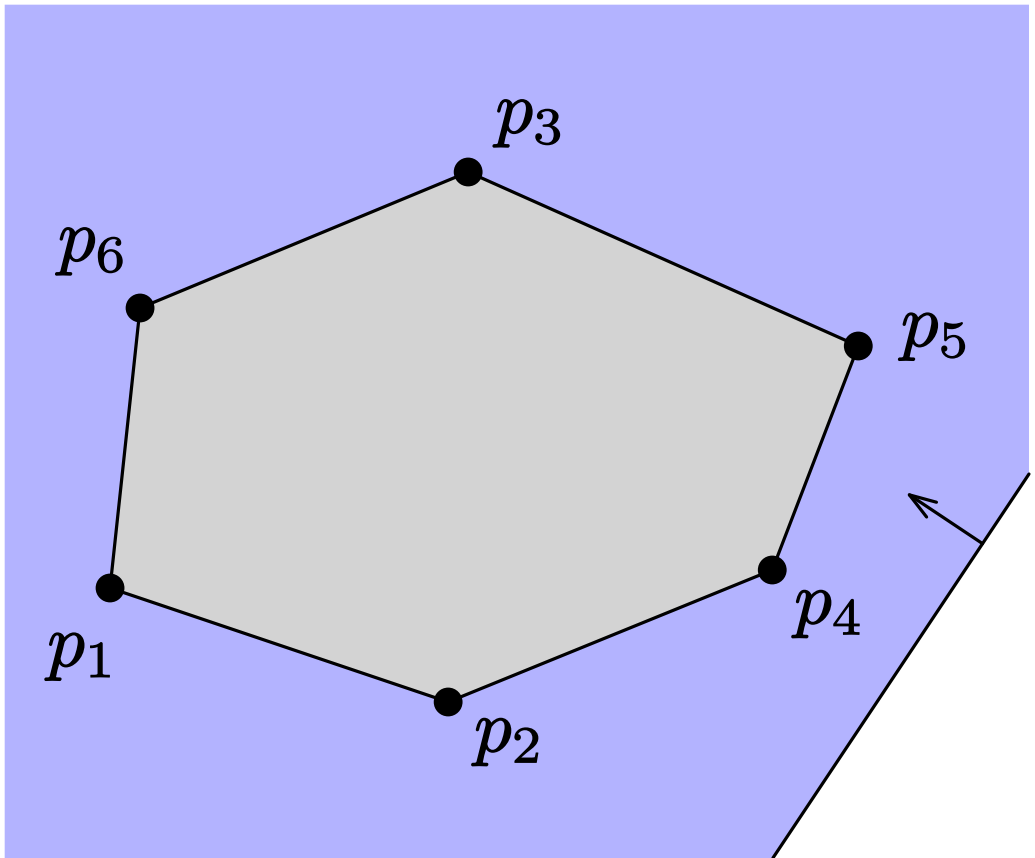
$$\mathrm{CH}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

半平面による凸包の記述

性質：半平面による凸包の記述

点集合 $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の凸包は
次のようにも書ける

$$\mathrm{CH}(V) = \bigcap \{\text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \ldots, p_n \in h\}$$



定義：凸包

点集合 $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の **凸包** とは，次の集合

$$\mathrm{CH}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

半平面による凸包の記述：証明 (1)

証明：V に対して，次のように集合 A, B を定める

- $A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$
- $B = \bigcap \{ \text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \ldots, p_n \in h \}$

証明すべきことは，$A = B$

- 以下，「$A \subseteq B$」を証明する
- 「$B \subseteq A$」は演習問題

半平面による凸包の記述：証明 (2)

証明：V に対して，次のように集合 A, B を定める

- $A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$
- $B = \bigcap \{\text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \ldots, p_n \in h\}$

[$A \subseteq B$ の証明] $p \in A$ とする

- ある $\lambda_i \geq 0$ が $\sum_i \lambda_i = 1$ と $p = \sum_i \lambda_i p_i$ を満たす
- $p_1, \ldots, p_n \in h$ を満たす任意の半平面 h を考える
- [目標] $p \in h$ を示すこと

半平面による凸包の記述：証明 (2)

証明：V に対して，次のように集合 A, B を定める

- $A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$
- $B = \bigcap \{\text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \ldots, p_n \in h\}$

[$A \subseteq B$ の証明] $p \in A$ とする

- ある $\lambda_i \geq 0$ が $\sum_i \lambda_i = 1$ と $p = \sum_i \lambda_i p_i$ を満たす
- $p_1, \ldots, p_n \in h$ を満たす任意の半平面 h を考える

h が $y \geq ax + b$ と書けるとき

- $p_i \in h$ より，$y_i \geq a x_i + b$
- $\therefore \sum_i \lambda_i y_i \geq \sum_i \lambda_i (a x_i + b)$ $(\because \ \lambda_i \geq 0)$
  $= a(\sum_i \lambda_i x_i) + b(\sum_i \lambda_i)$
  $= a(\sum_i \lambda_i x_i) + b$ $(\because \ \sum_i \lambda_i = 1)$

半平面による凸包の記述：証明 (2)

証明：V に対して，次のように集合 A, B を定める

- $A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \; (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$
- $B = \bigcap \{\text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \ldots, p_n \in h\}$

[$A \subseteq B$ の証明] $p \in A$ とする

- ある $\lambda_i \geq 0$ が $\sum_i \lambda_i = 1$ と $p = \sum_i \lambda_i p_i$ を満たす
- $p_1, \ldots, p_n \in h$ を満たす任意の半平面 h を考える

h が $x \geq c$ と書けるとき

- $p_i \in h$ より，$x_i \geq c$
- $\therefore \sum_i \lambda_i x_i \geq \sum_i \lambda_i c = c$

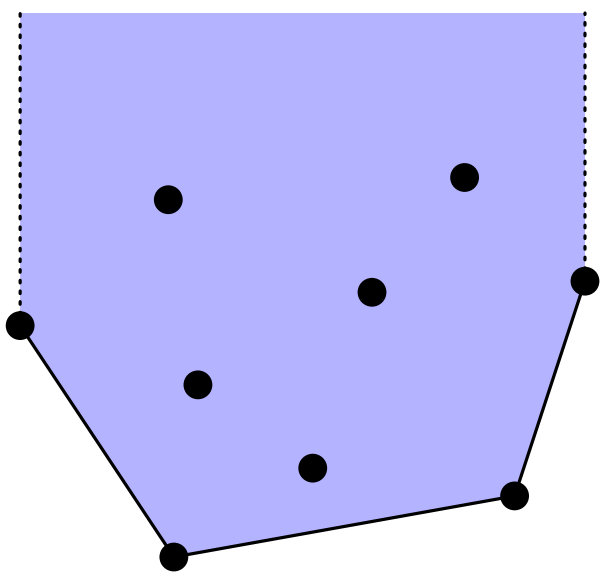
したがって，どちらの場合でも $p \in h$ □

下側凸包

定義：下側凸包

点集合 $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の **下側凸包** とは，

$$\bigcap \{\text{上側半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \ldots, p_n \in h\}$$



下側

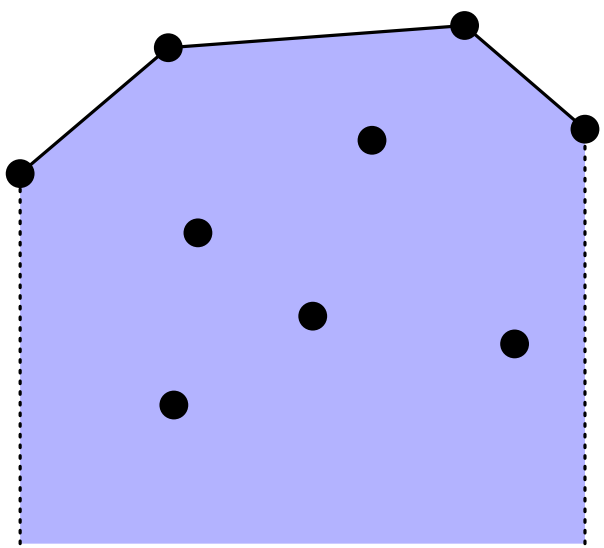
＝ 下から凸包を見る

上側凸包

定義：上側凸包

点集合 $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の **上側凸包** とは，

$$\bigcap \{\text{下側半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \ldots, p_n \in h\}$$

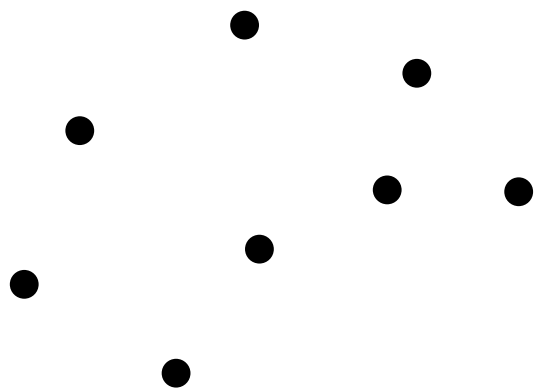


上側

＝ 上から凸包を見る

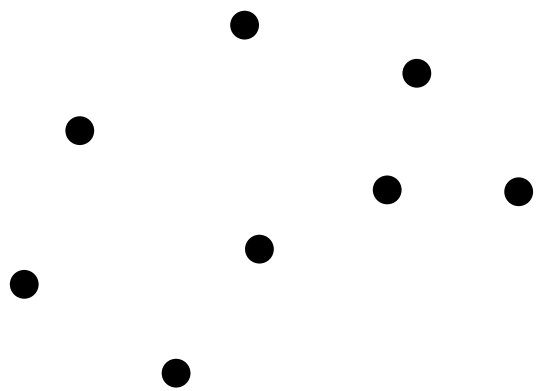
点集合の凸包を計算するには

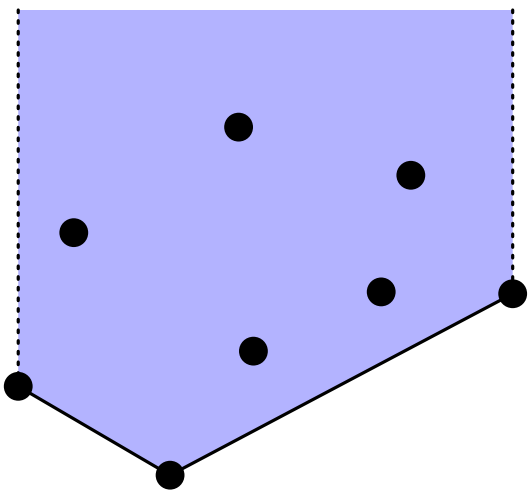
仮定：すべての点の x 座標は異なる



点集合の凸包を計算するには

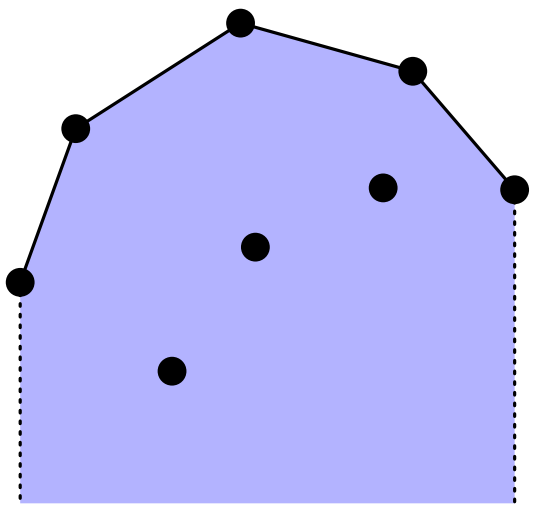
仮定：すべての点の x 座標は異なる





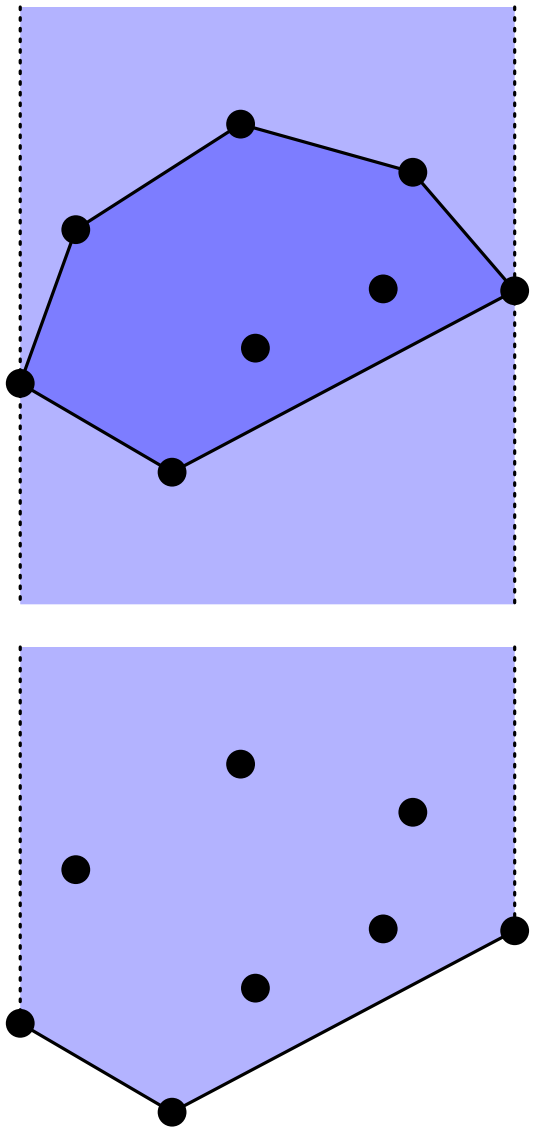
下側凸包

上側凸包



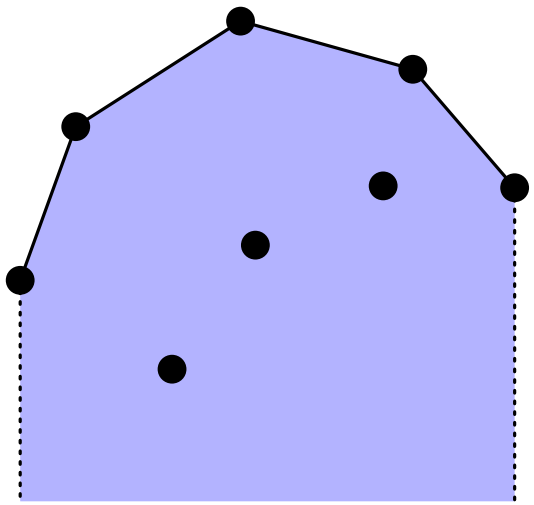
点集合の凸包を計算するには

仮定：すべての点の x 座標は異なる



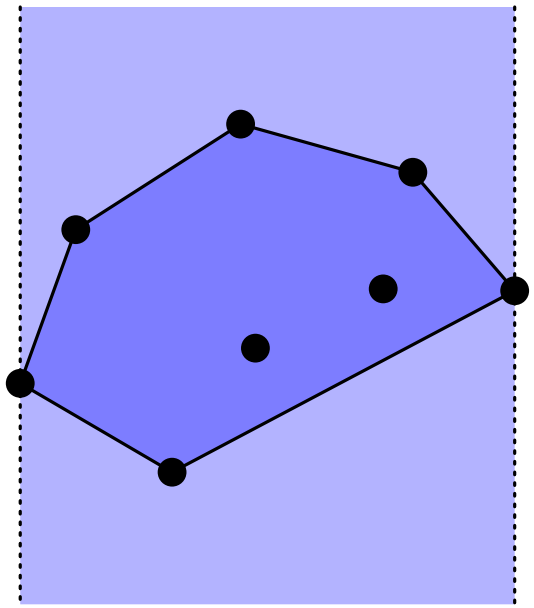
下側凸包

上側凸包



点集合の凸包を計算するには

仮定：すべての点の x 座標は異なる

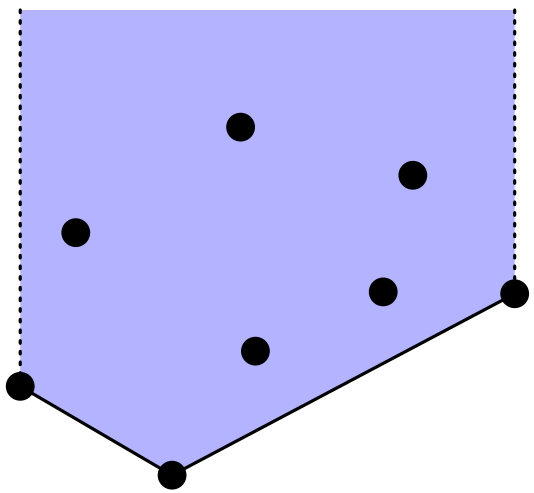


凸包の計算

＝ 下側凸包の計算

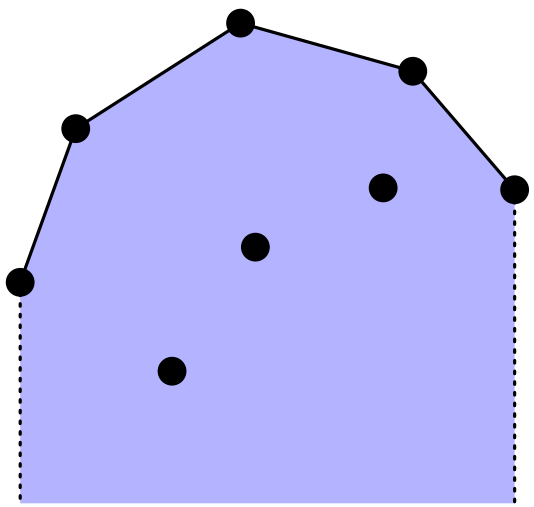
＋ 上側凸包の計算

＋ O(点の数)

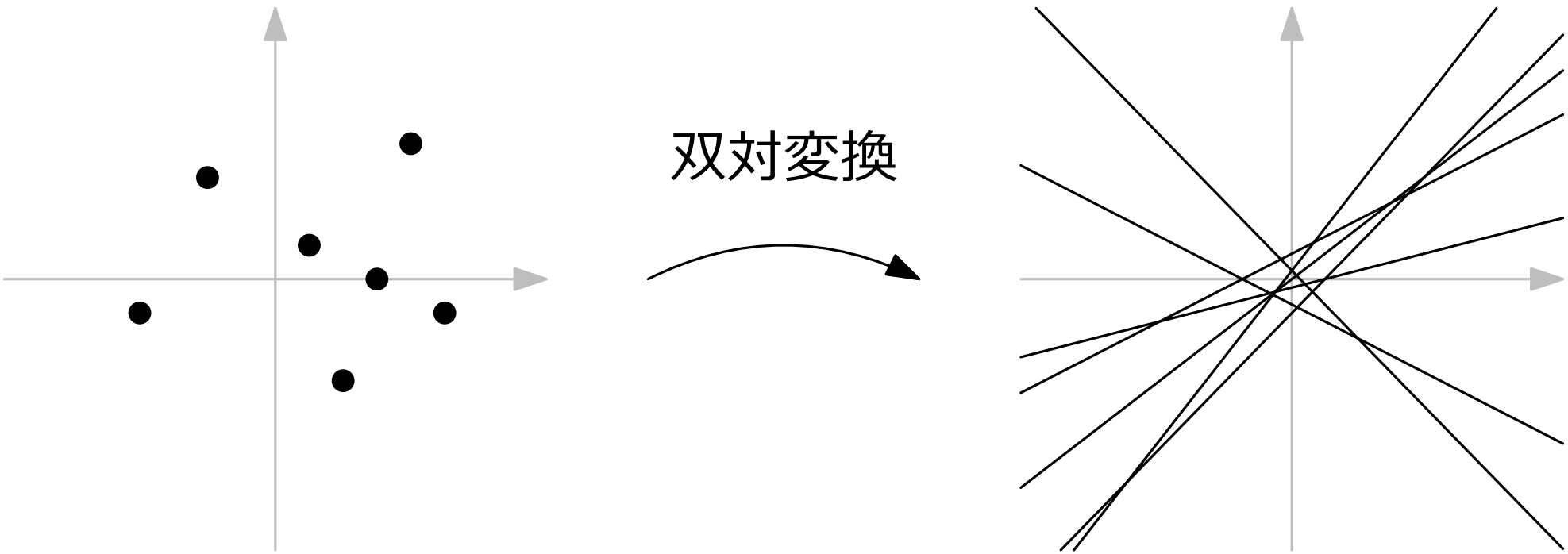


下側凸包

上側凸包

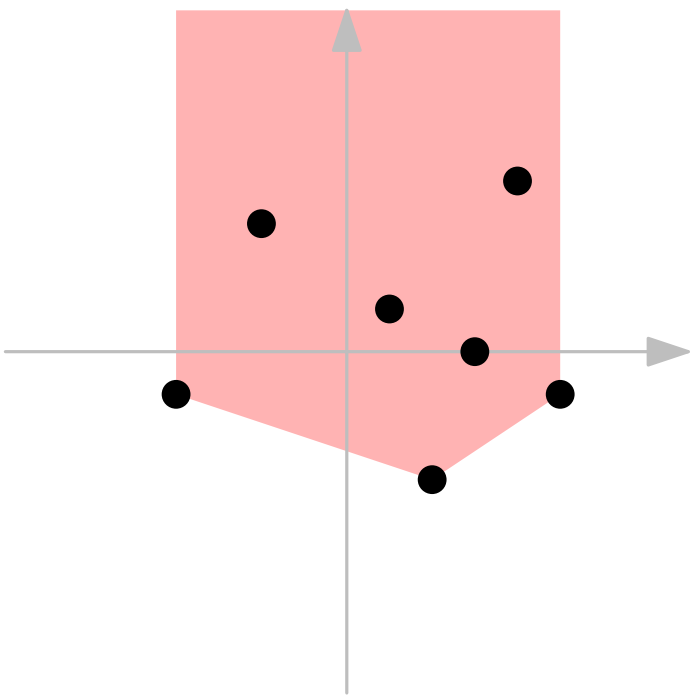


エンベロープから凸包へ



エンベロープから凸包へ

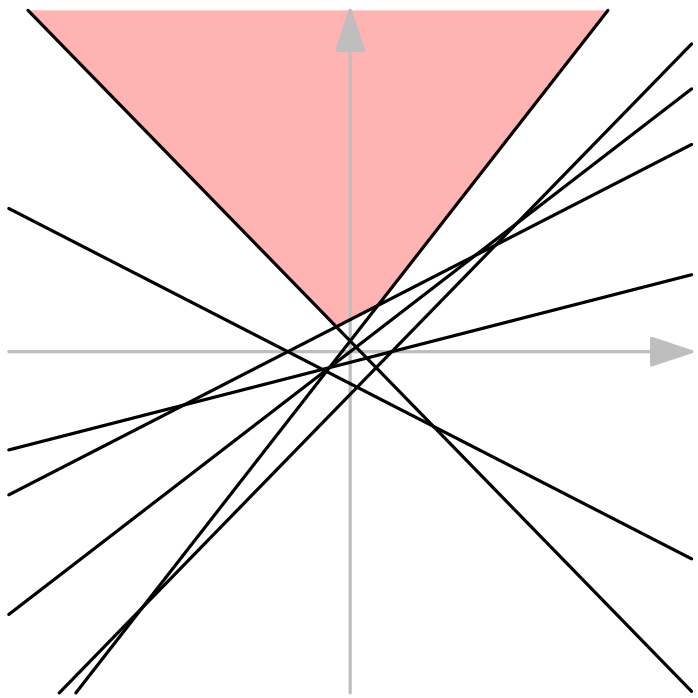
下側凸包



双対変換

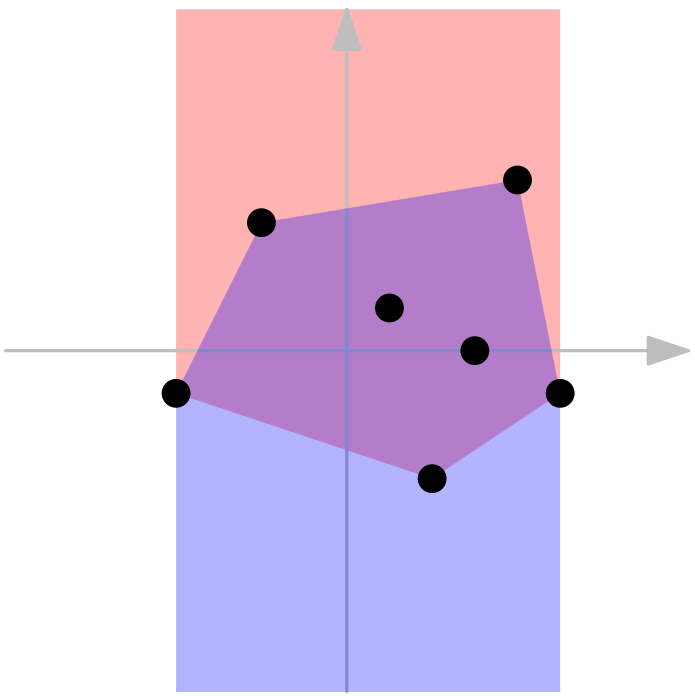


上側エンベロープ



エンベロープから凸包へ

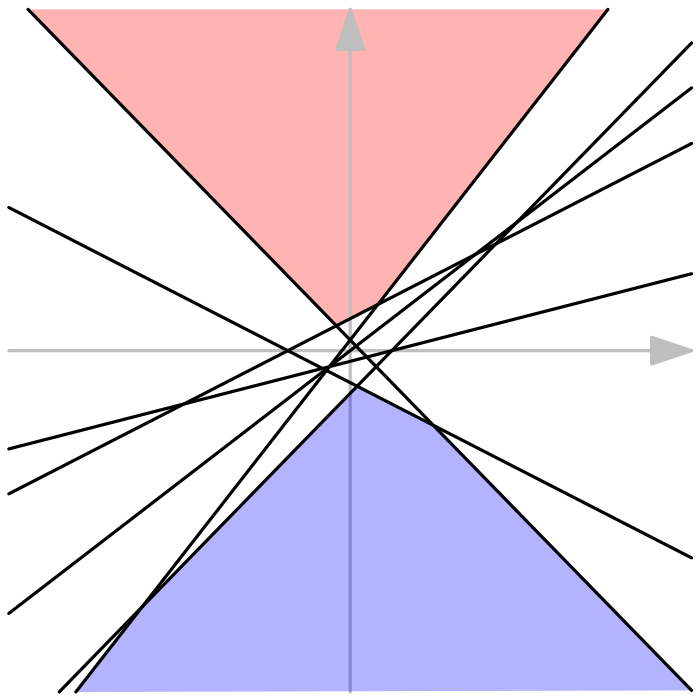
下側凸包



上側凸包

双対変換

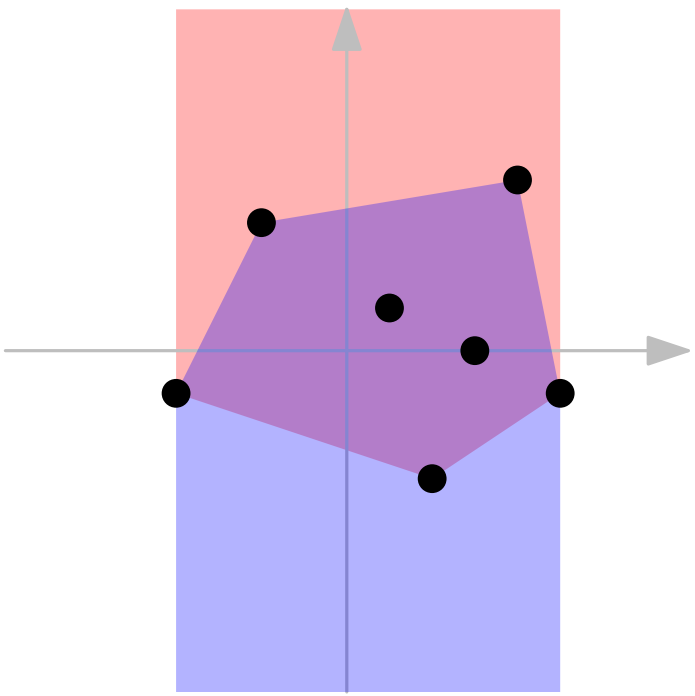
上側エンベロープ



下側エンベロープ

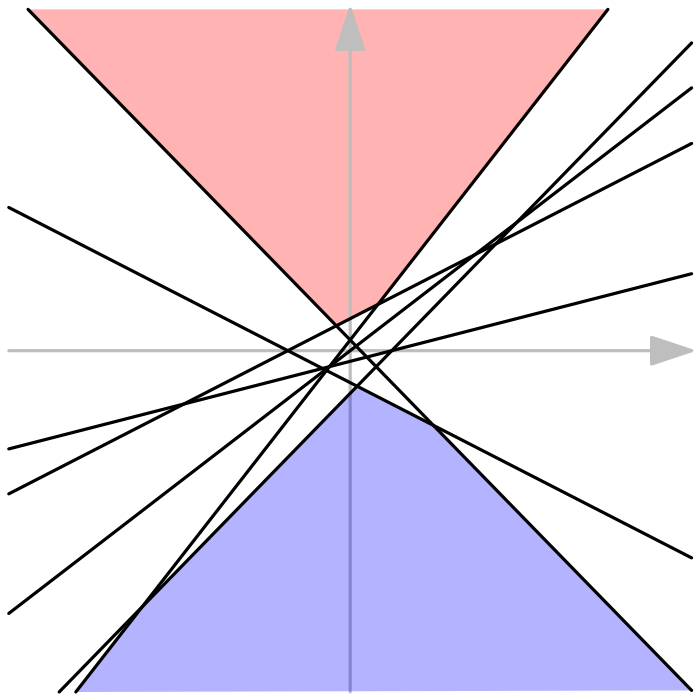
エンベロープから凸包へ

下側凸包



双対変換

上側エンベロープ

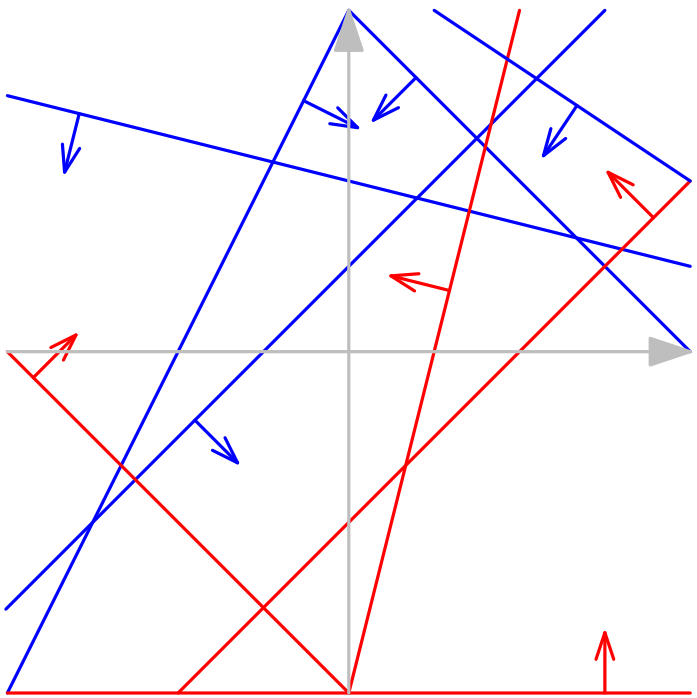


上側凸包

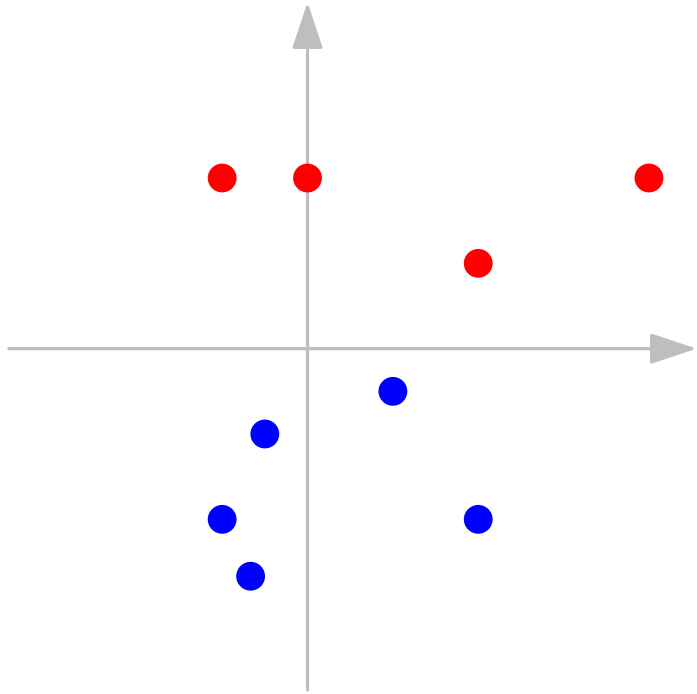
下側エンベロープ

$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \text{上側} \\ \text{下側} \end{array} \right\}$ エンベロープから，$\left\{ \begin{array}{l} \text{下側} \\ \text{上側} \end{array} \right\}$ 凸包が分かる

凸包からエンベロープへ

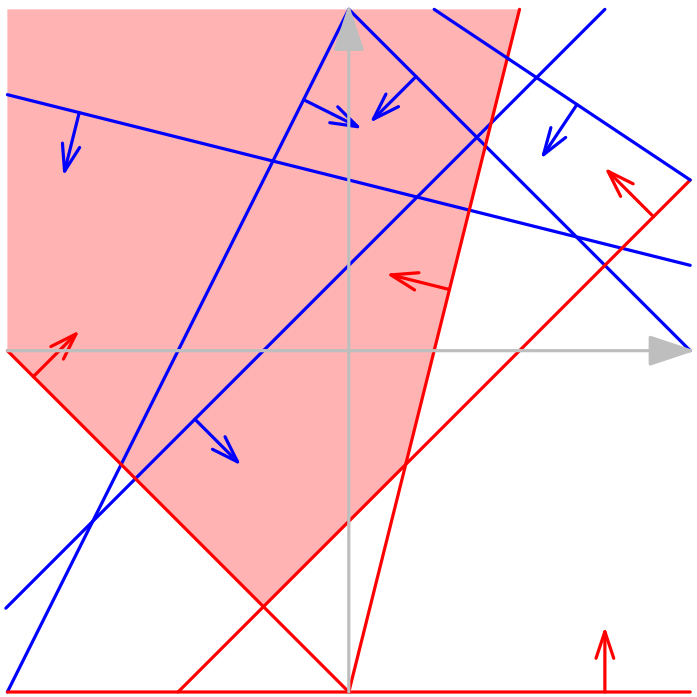


双対変換



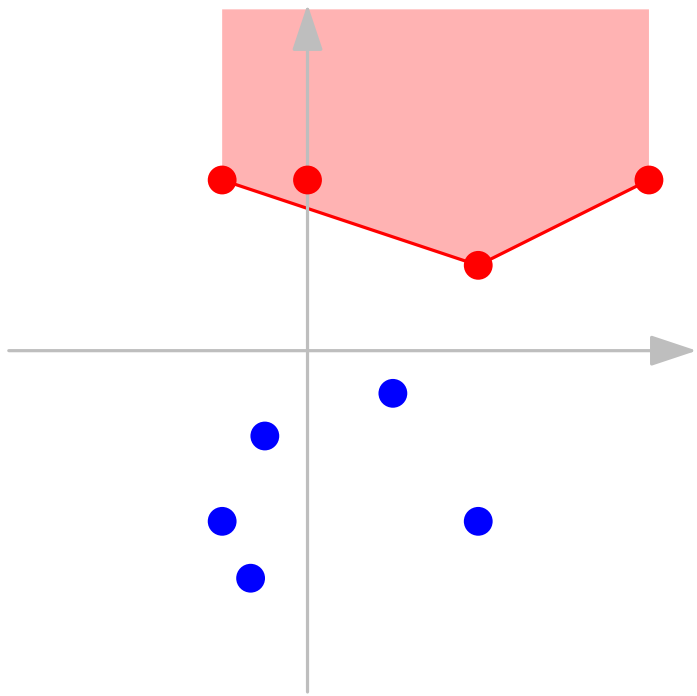
凸包からエンベロープへ

上側エンベロープ



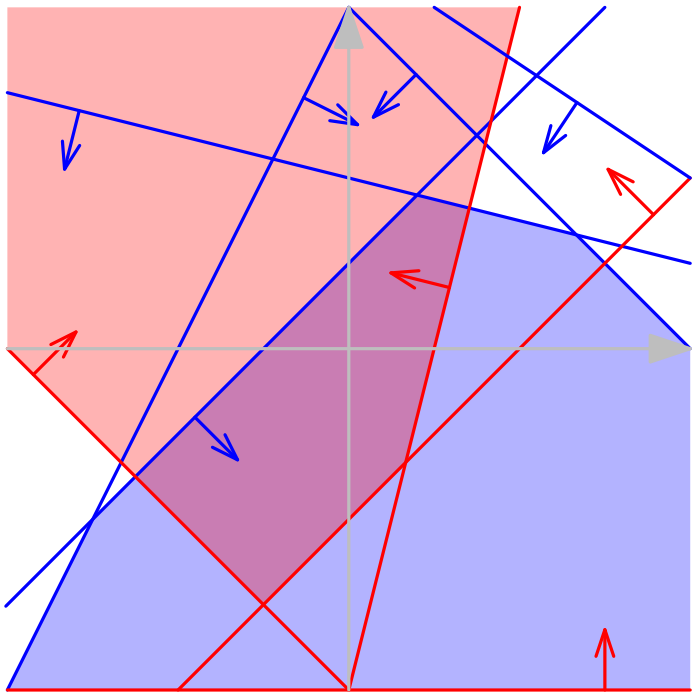
双対変換

下側凸包



凸包からエンベロープへ

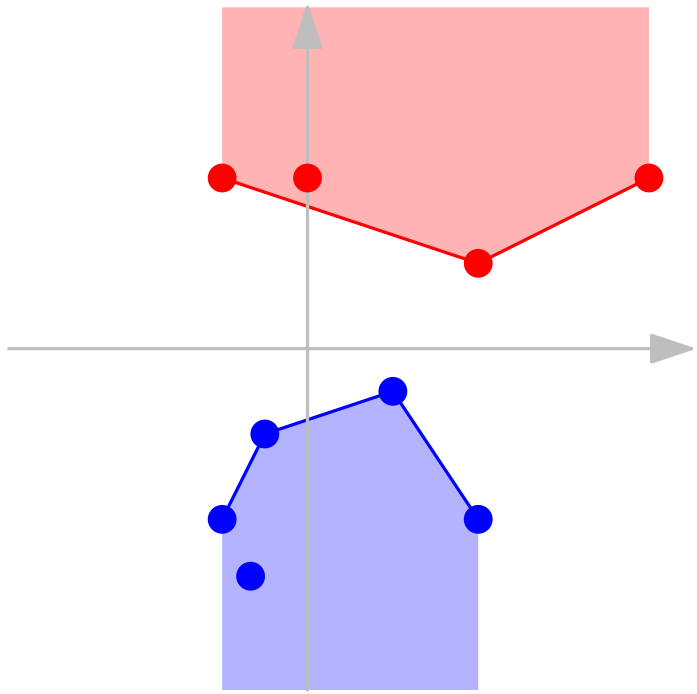
上側エンベロープ



下側エンベロープ

双対変換

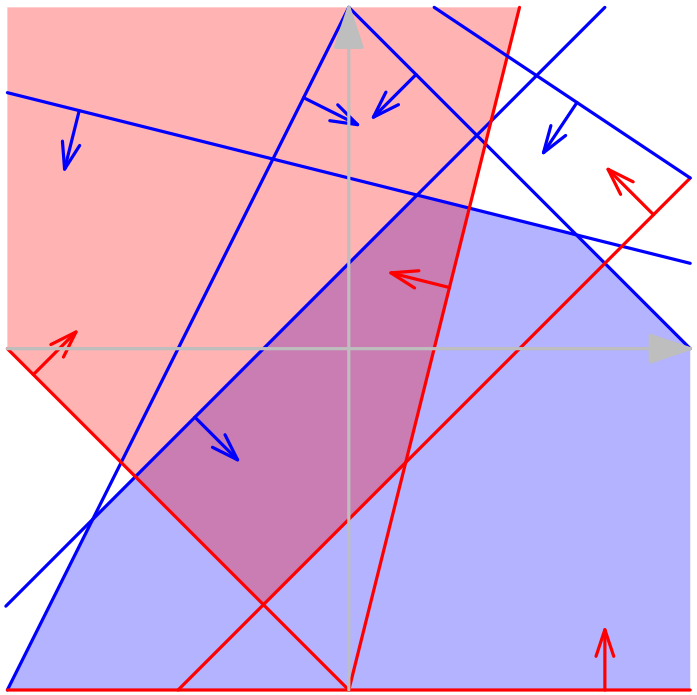
下側凸包



上側凸包

凸包からエンベロープへ

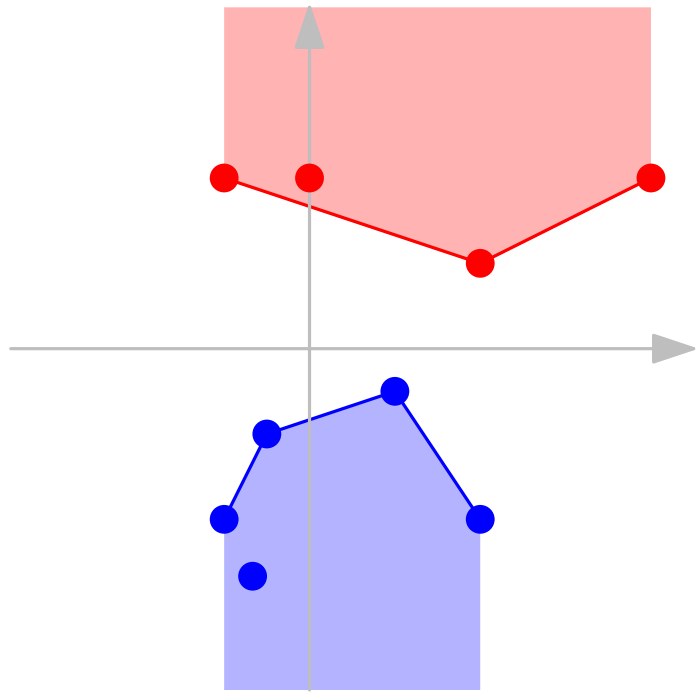
上側エンベロープ



下側エンベロープ

双対変換

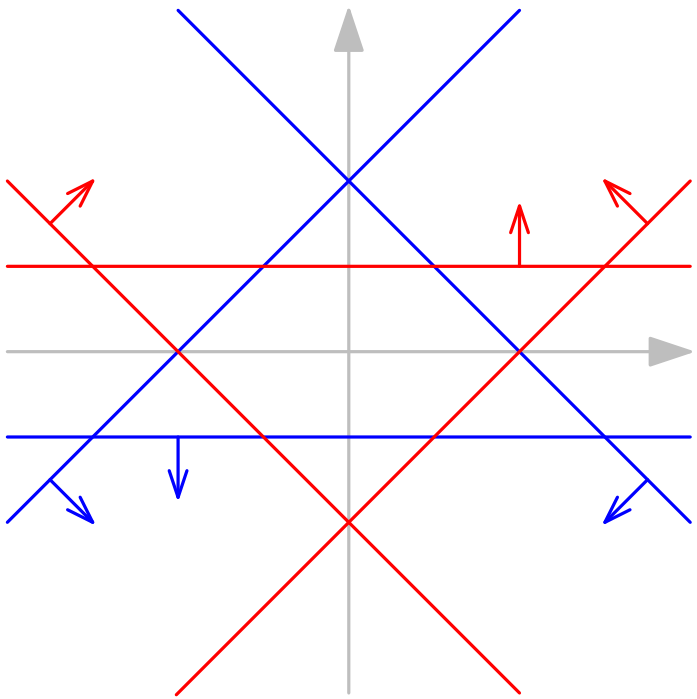
下側凸包



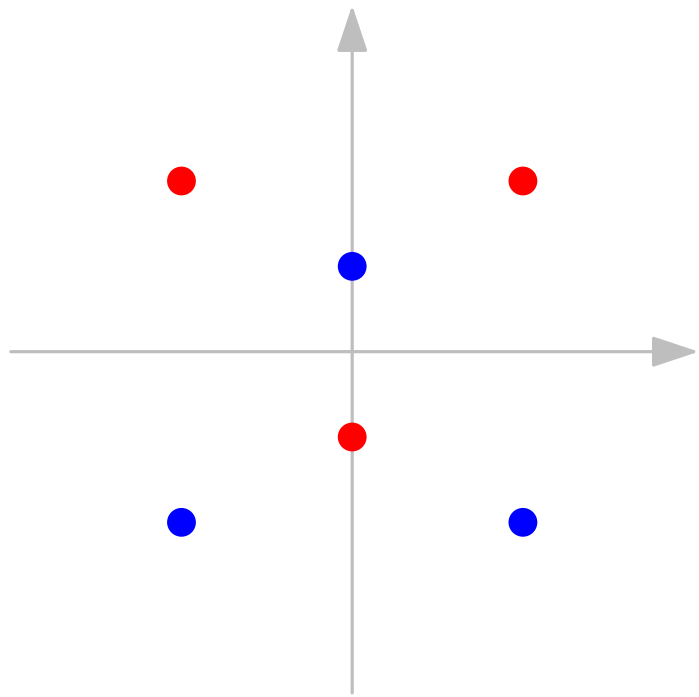
上側凸包

$\therefore \left\{ \begin{array}{c} \text{下側} \\ \text{上側} \end{array} \right\}$ 凸包から，$\left\{ \begin{array}{c} \text{上側} \\ \text{下側} \end{array} \right\}$ エンベロープが分かる

補足

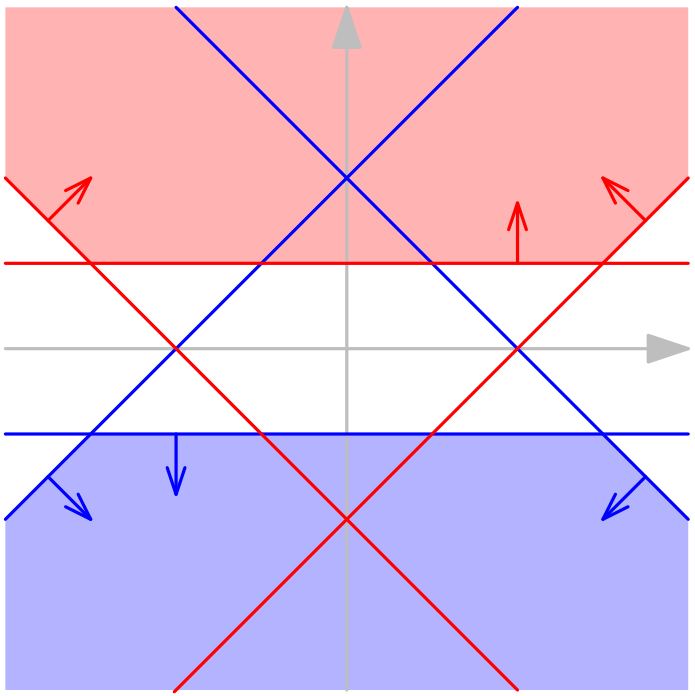


双対変換



補足

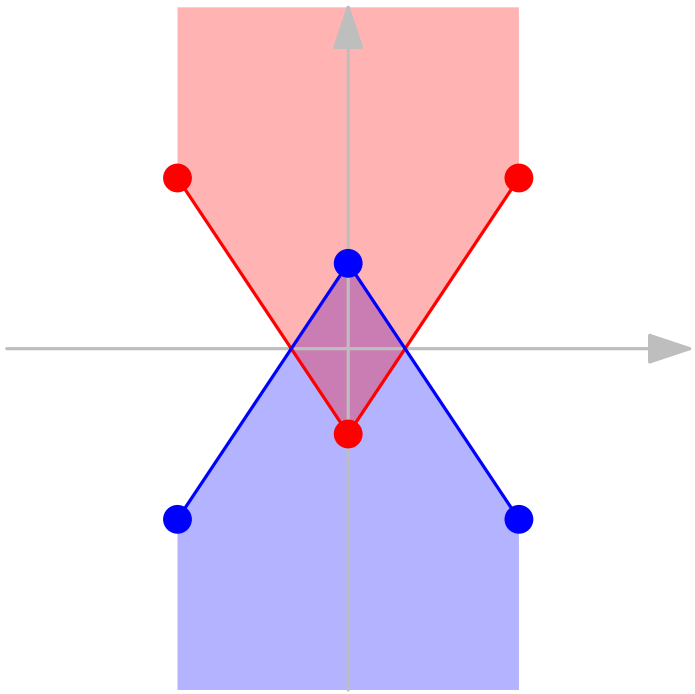
上側エンベロープ



下側エンベロープ

双対変換

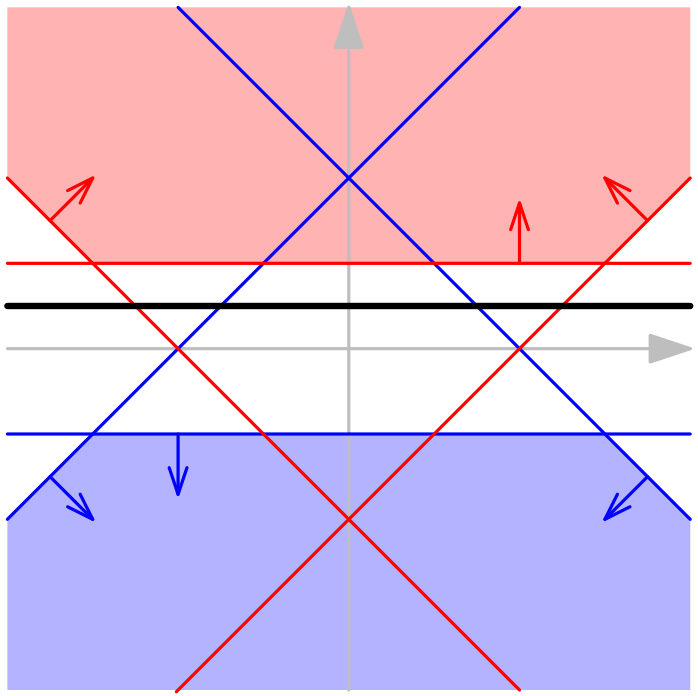
下側凸包



上側凸包

補足

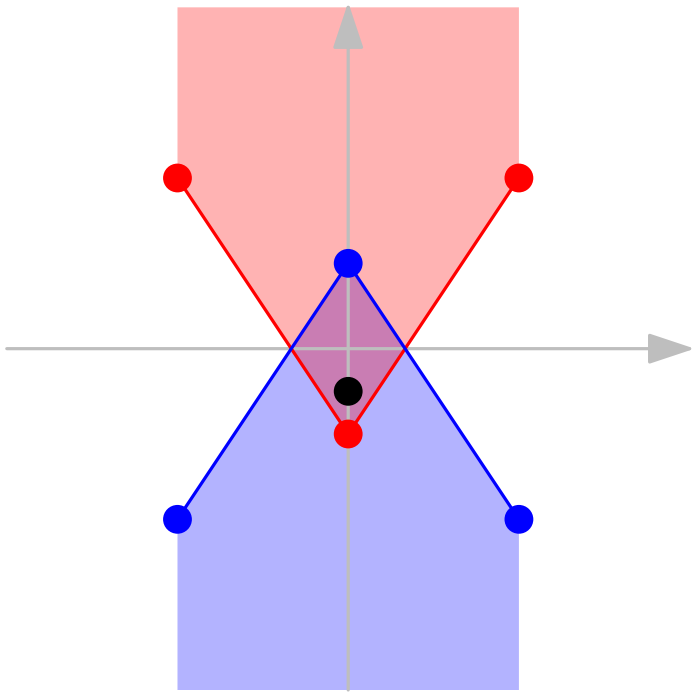
上側エンベロープ



下側エンベロープ

双対変換

下側凸包



上側凸包

まとめ

点 (a, b)	双対変換 $\longleftrightarrow$	直線 $y = ax - b$
点配置	$\longleftrightarrow$	直線配置
下側凸包	$\longleftrightarrow$	上側エンベロープ
上側凸包	$\longleftrightarrow$	下側エンベロープ

教訓

ひとつの対象を さまざまな視点から 眺める