離散数理工学 (2026 年度後学期)

第 0 回

ガイダンス

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 10 月 6 日

最終更新：2026 年 10 月 3 日　10:27

講義概要

主題

離散幾何・計算幾何 に関する基礎概念を習得し，
諸分野における問題をそれらによってモデル化および
解決するための方法論を学習する.

達成目標

離散幾何・計算幾何 における

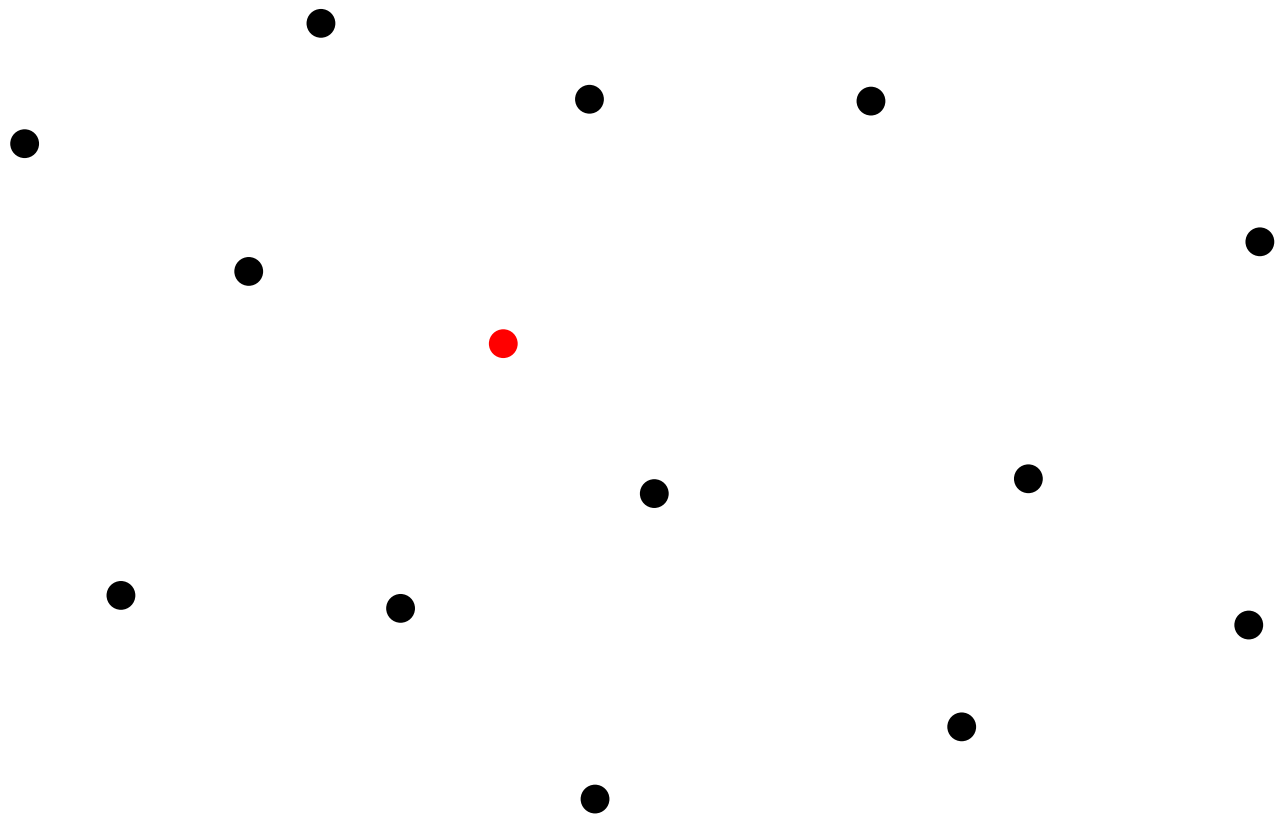
- 用語を正しく使うことができる
- 基本的な概念について，具体例の計算ができる
- 典型的な論法を用いて，証明を書くことができる

離散幾何 = discrete geometry

計算幾何 = computational geometry

典型的な問題 (1)：最近点問題

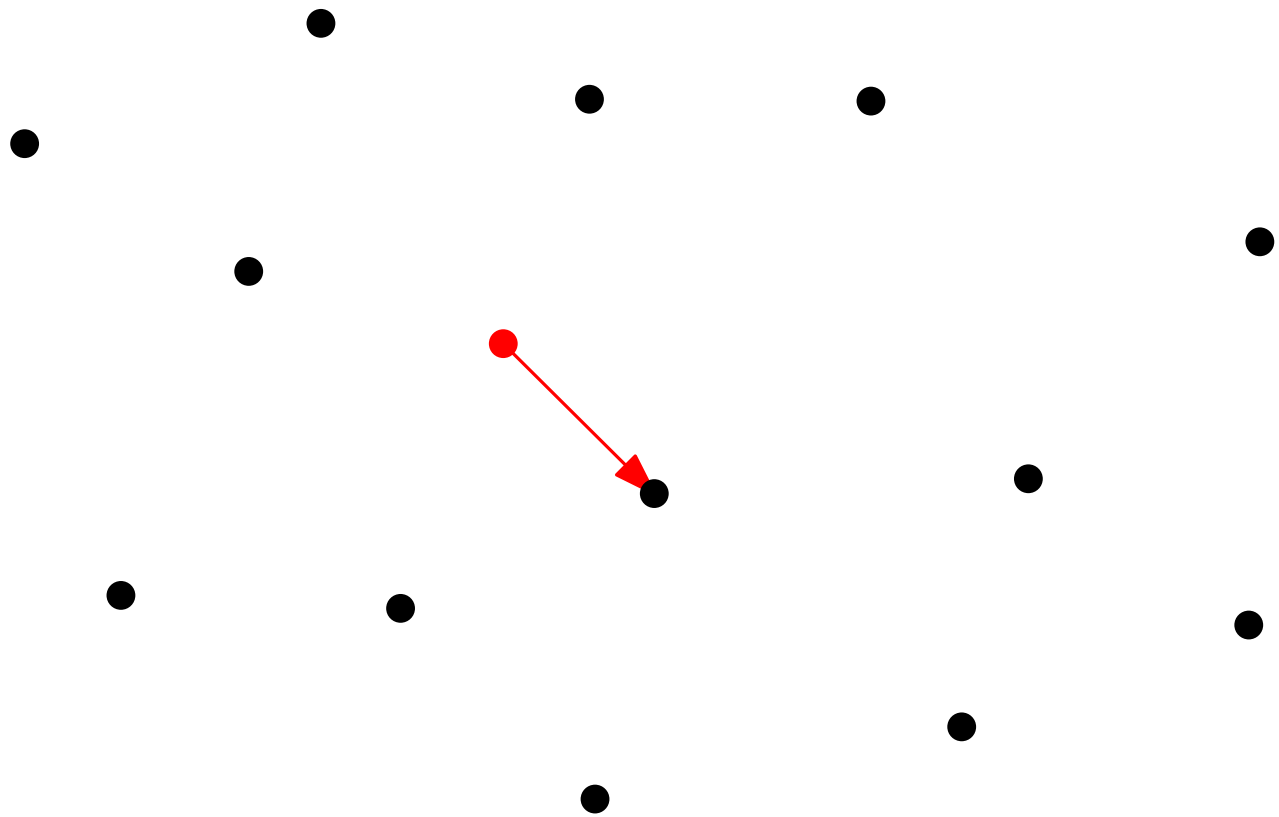
赤点に最も近い黒点はどれか？



典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

典型的な問題 (1)：最近点問題

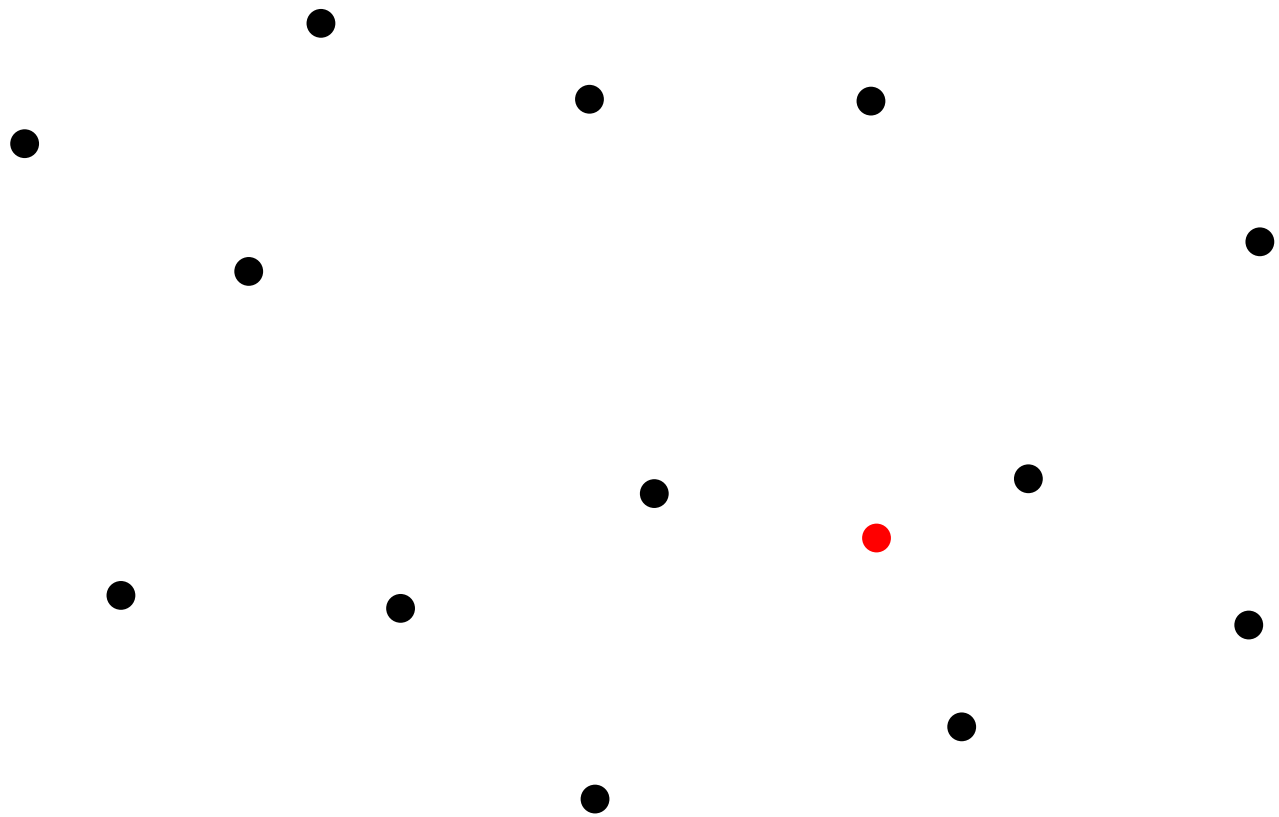
赤点に最も近い黒点はどれか？



典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

典型的な問題 (1)：最近点問題

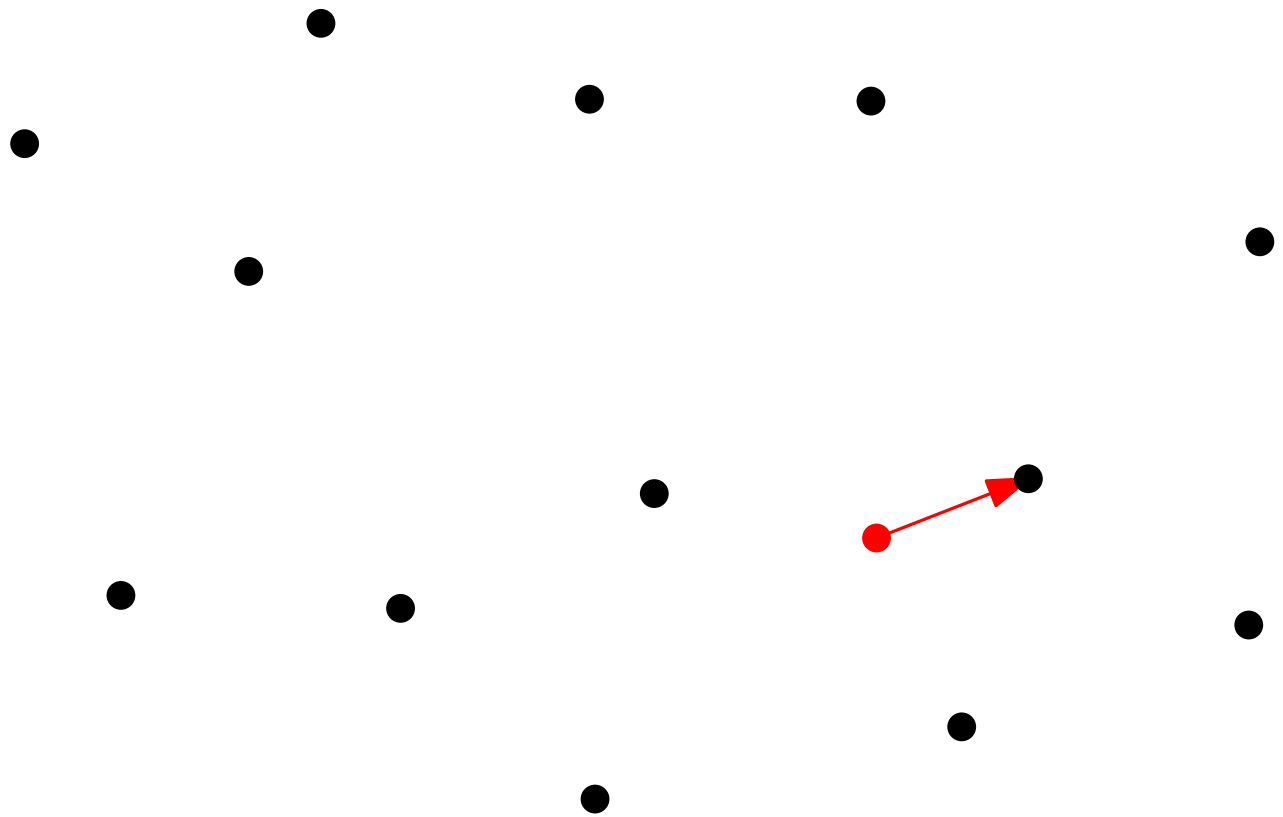
赤点に最も近い黒点はどれか？



典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

典型的な問題 (1)：最近点問題

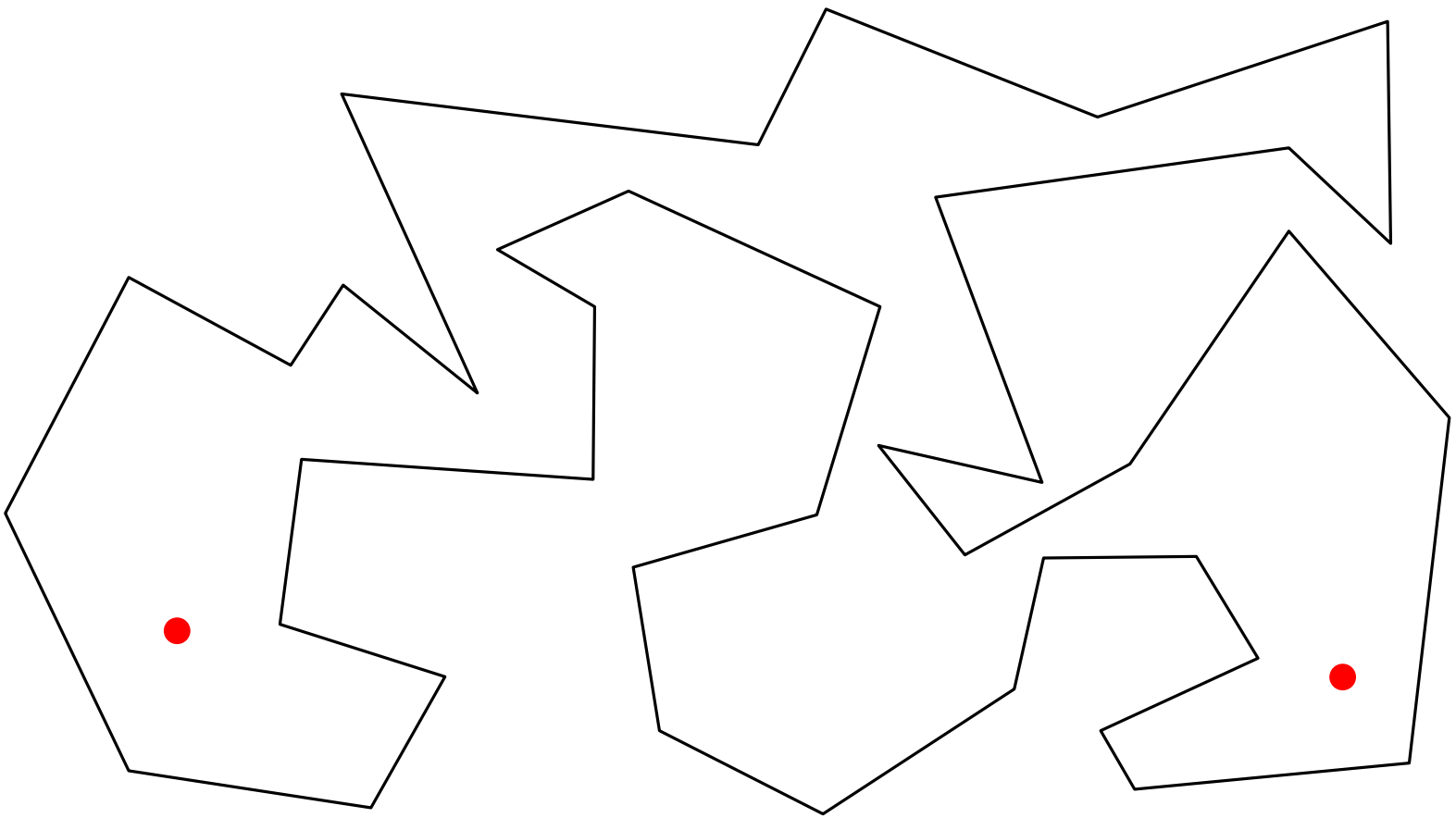
赤点に最も近い黒点はどれか？



典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

典型的な問題 (2)：最短路問題

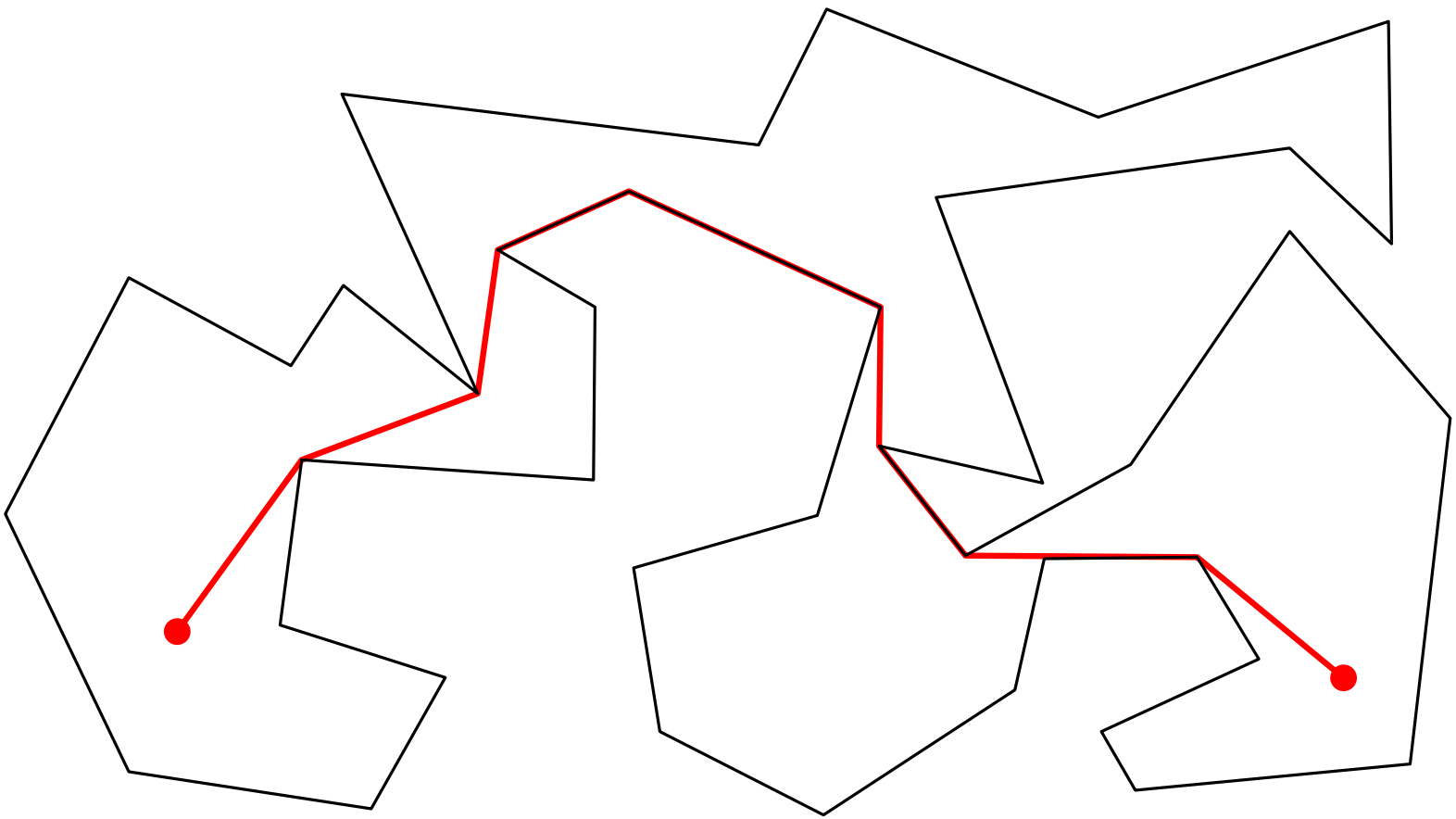
赤点の間の最短路は何か？



典型的な応用先：ロボット動作計画

典型的な問題 (2)：最短路問題

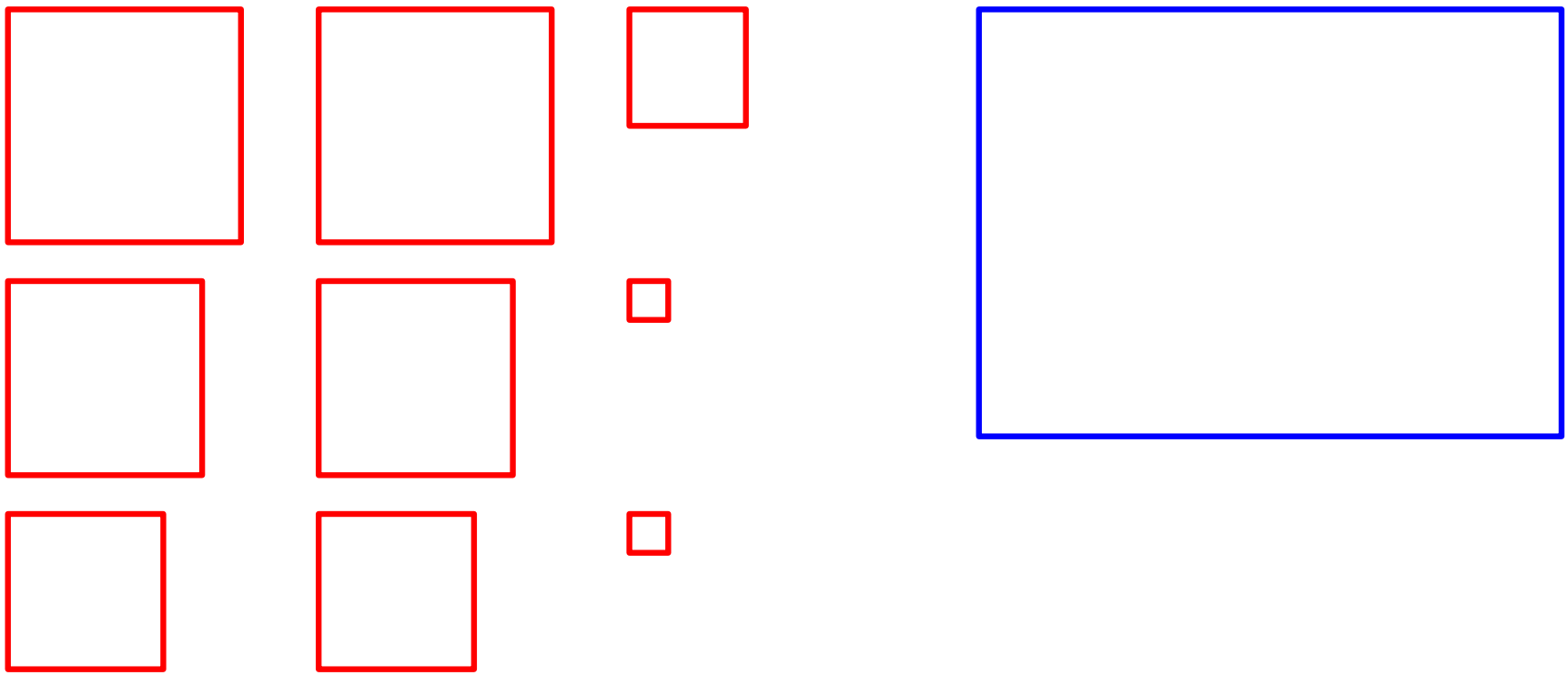
赤点の間の最短路は何か？



典型的な応用先：ロボット動作計画

典型的な問題 (3)：詰め込み問題

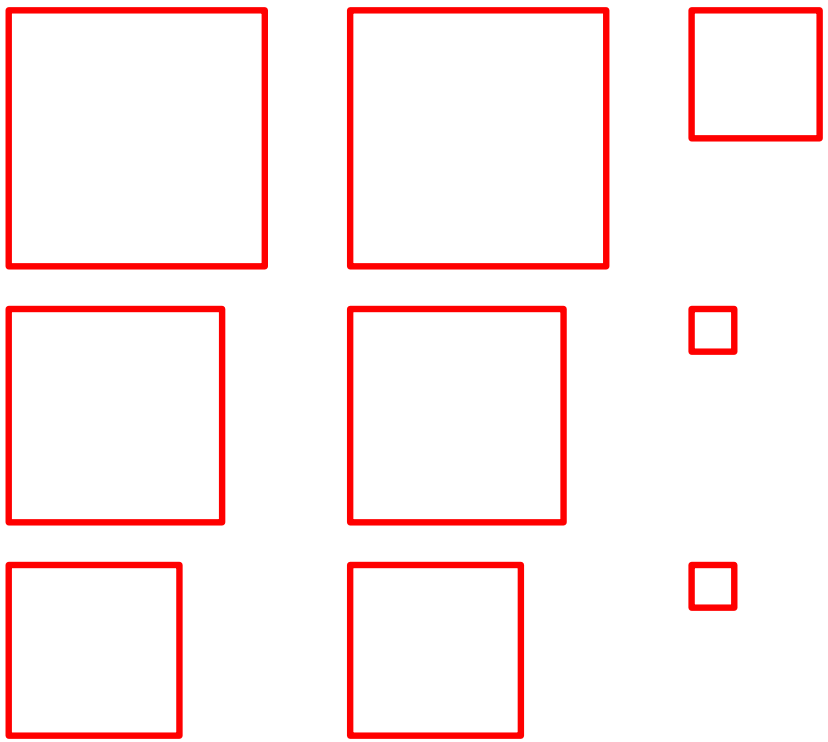
左側の正方形を重なりなく右側の長方形に詰め込めるか？

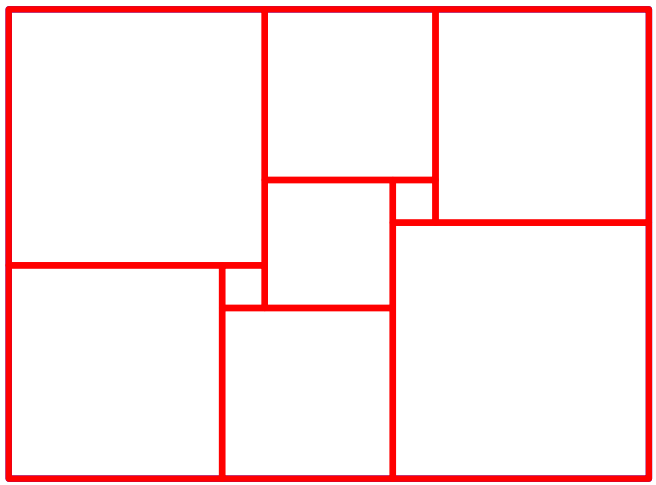


典型的な応用先：生産計画 (板取り問題)

典型的な問題 (3)：詰め込み問題

左側の正方形を重なりなく右側の長方形に詰め込めるか？

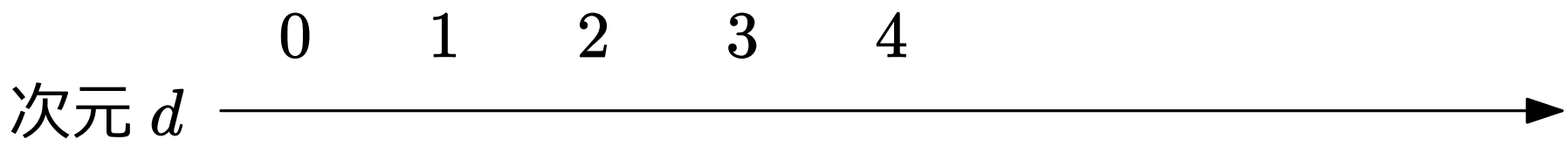




典型的な応用先：生産計画 (板取り問題)

次元：$1, 2, 3, 4, \ldots$

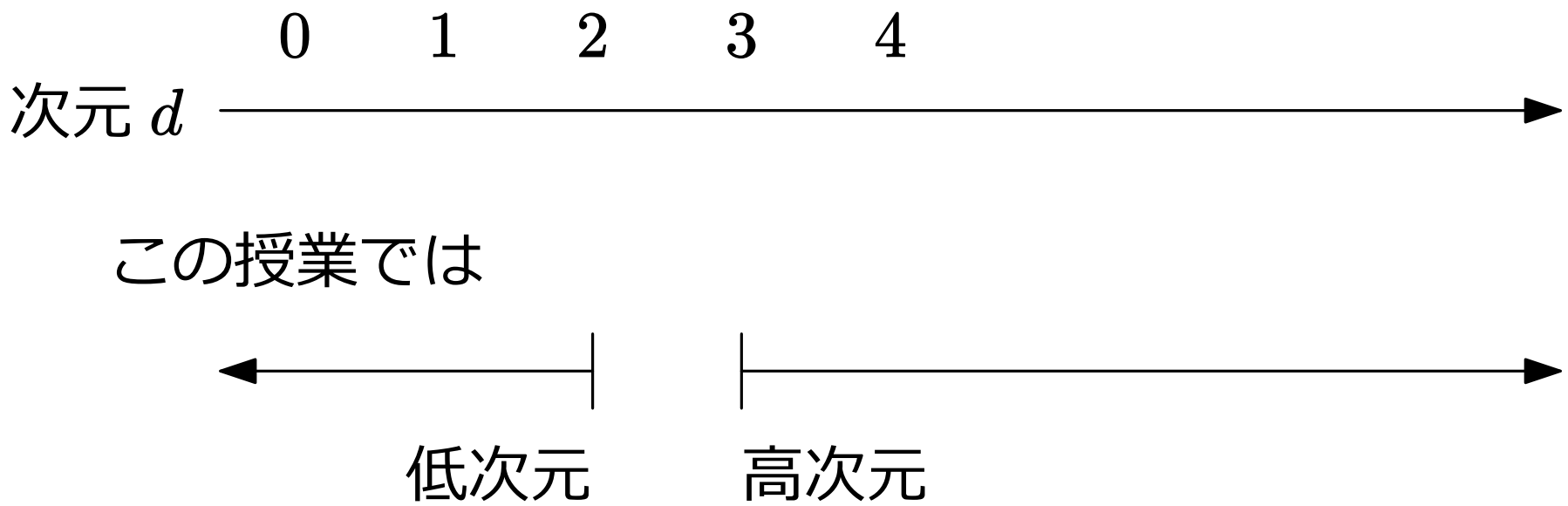
考える空間は $\mathbb{R}^d$



(注：「次元数」とは言わない)

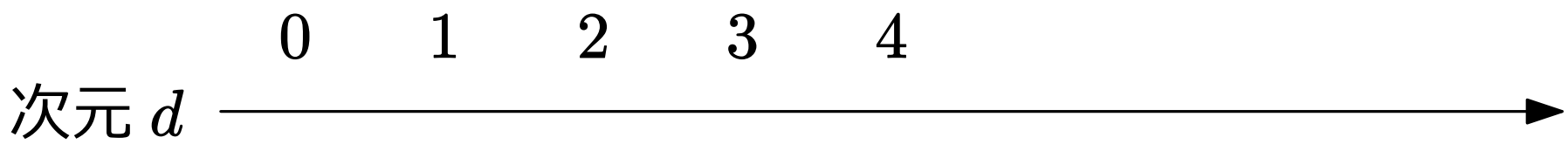
次元：$1, 2, 3, 4, \ldots$

考える空間は $\mathbb{R}^d$



次元：$1, 2, 3, 4, \ldots$

考える空間は $\mathbb{R}^d$



この授業では



教訓

高次元 における現象は
低次元 における現象と大きく違うことがある

→ **次元の呪い** (curse of dimensionality)

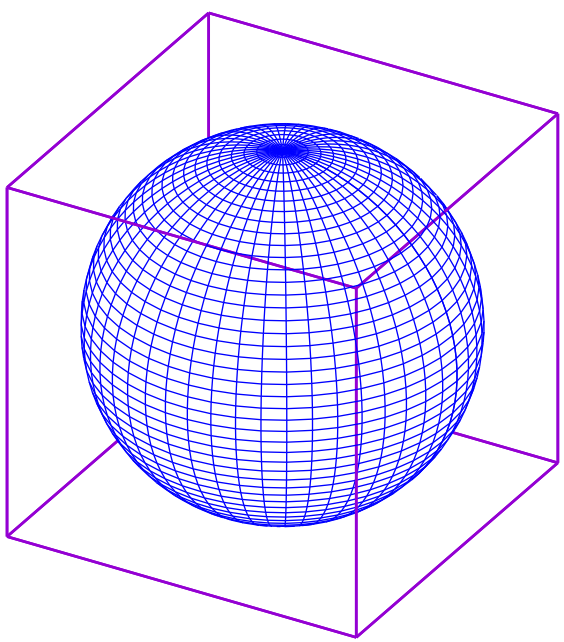
高次元の直感を養う (1)

d 次元立方体 $= \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, d\}$

体積 $= 2^d$

d 次元球体 $= \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\}$

体積 $= \dfrac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$



$d = 3$ の図

高次元の直感を養う (1)

d 次元立方体 $= \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, d\}$

体積 $= 2^d$

d 次元球体 $= \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \cdots + x_d^2 \le 1\right\}$

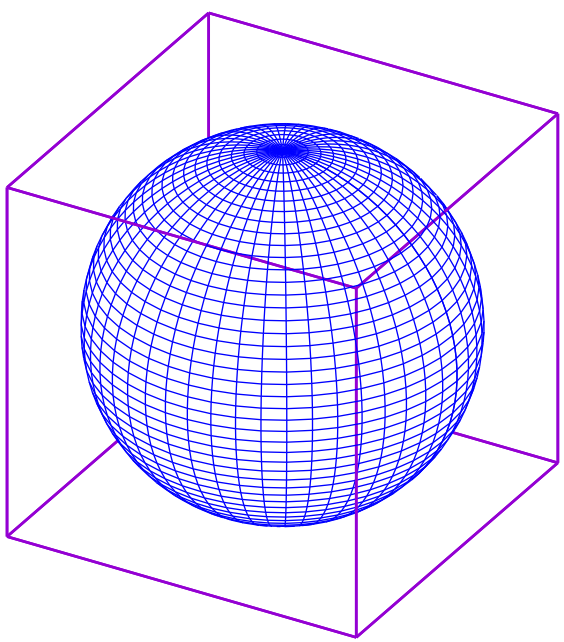
体積 $= \dfrac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$

体積を V_d とすると

$$V_1 = 2$$

$$V_2 = \pi$$

$$V_d = \frac{2\pi}{d} V_{d-2} \quad (d \ge 3)$$



$d = 3$ の図

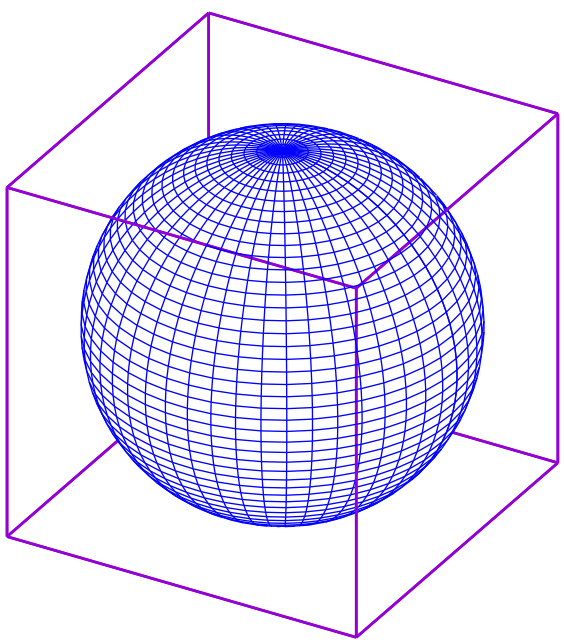
高次元の直感を養う (1)

d 次元立方体 $= \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, d\}$

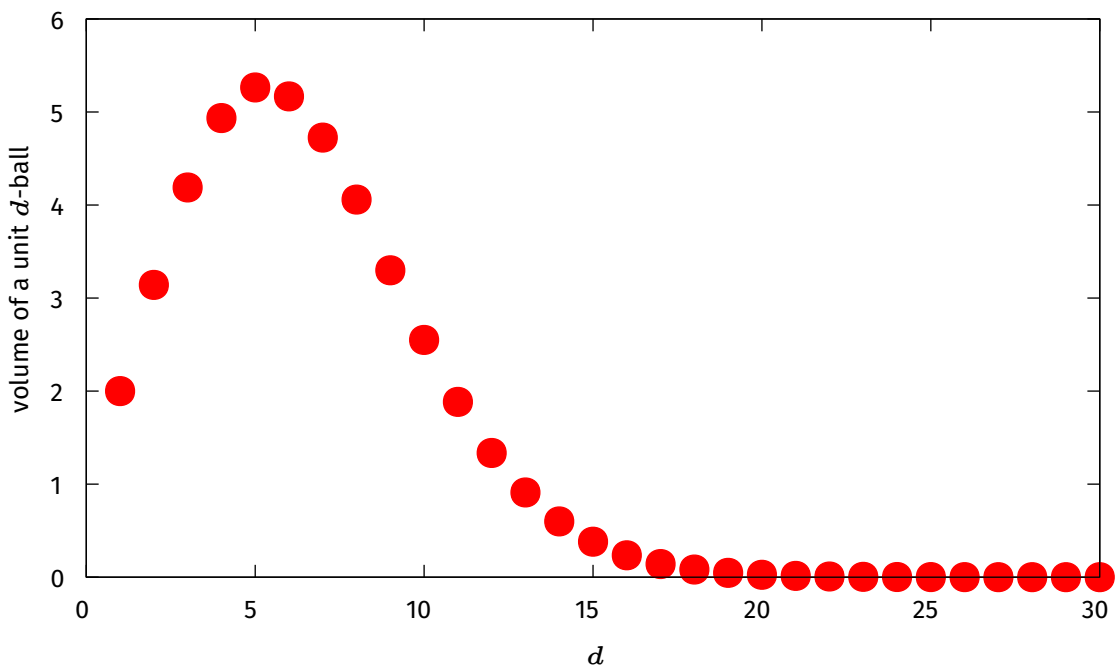
体積 $= 2^d$

d 次元球体 $= \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \cdots + x_d^2 \le 1\}$

体積 $= \dfrac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$



$d = 3$ の図



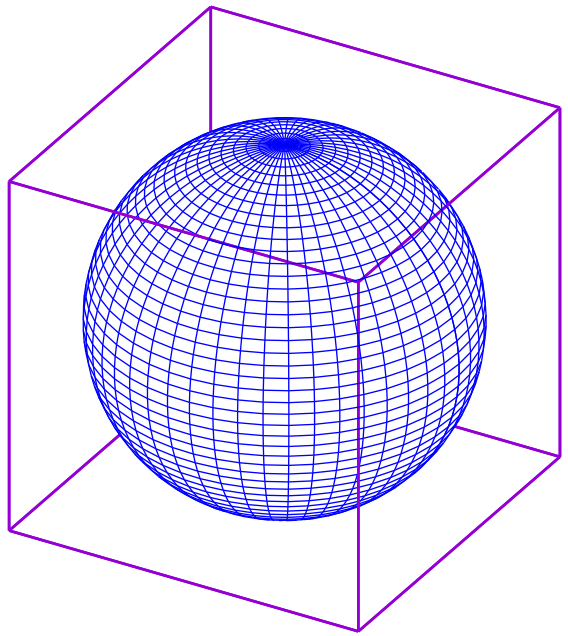
高次元の直感を養う (1)：帰結

問題：次を行うプログラムを作りたい

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{30}^2 \leq 1$ を満たす $(x_1, x_2, \ldots, x_{30})$ を一様分布から抽出する

次のアルゴリズムはどうか？

1. 各 x_i を独立に $[-1, 1]$ 上の一様分布から選ぶ
2. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{30}^2 \leq 1$ ならばこの $(x_1, x_2, \ldots, x_{30})$ を出力
3. そうでなければ先頭に戻る



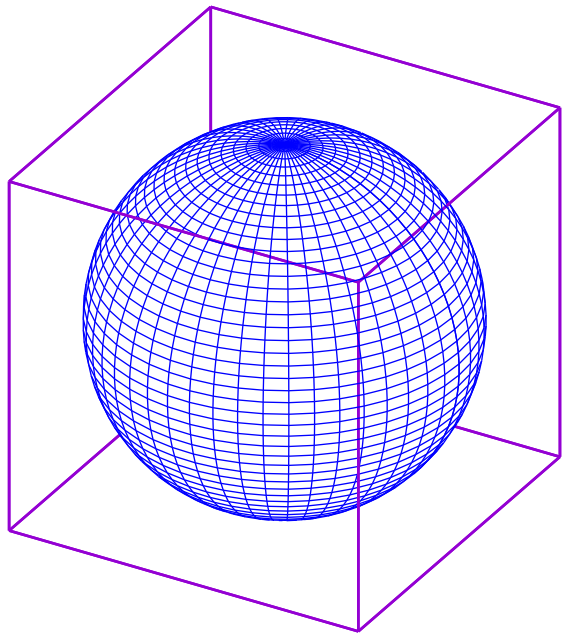
高次元の直感を養う (1)：帰結

問題：次を行うプログラムを作りたい

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{30}^2 \leq 1$ を満たす $(x_1, x_2, \ldots, x_{30})$ を一様分布から抽出する

次のアルゴリズムはどうか？

1. 各 x_i を独立に $[-1, 1]$ 上の一様分布から選ぶ
2. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{30}^2 \leq 1$ ならばこの $(x_1, x_2, \ldots, x_{30})$ を出力
3. そうでなければ先頭に戻る



$$\text{反復回数の期待値} = \frac{\text{30 次元立方体の体積}}{\text{30 次元球体の体積}} \approx 4.9 \times 10^{23}$$

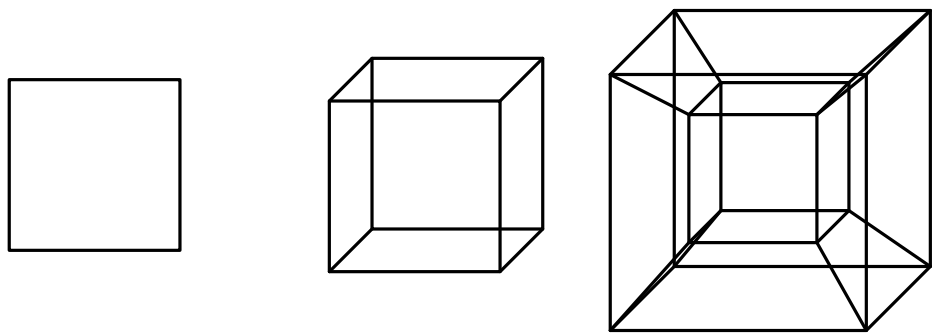
$\therefore$ **実用に耐えない！**

(補足：Box-Muller 法，Ziggurat 法)

高次元の直感を養う (2)

d 次元凸多面体

$d = 2$　　$d = 3$　　$d = 4$　　d : 定数



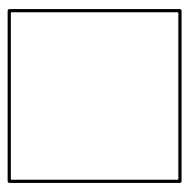
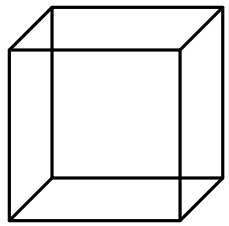
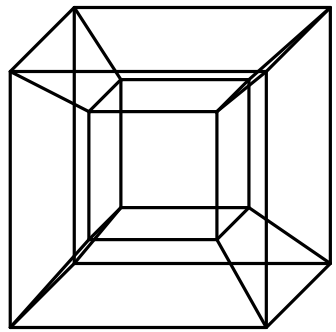
頂点数 n のときの

面の総数　　n　　$O(n)$

典型的な応用先：線形計画法 ($\rightsquigarrow$「数理計画法」)

高次元の直感を養う (2)

d 次元凸多面体

$d=2$	$d=3$	$d=4$	d : 定数
			

頂点数 n のときの

面の総数	n	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$

典型的な応用先：線形計画法 ($\rightsquigarrow$「数理計画法」)

なぜ高次元？ (1)：データサイエンス

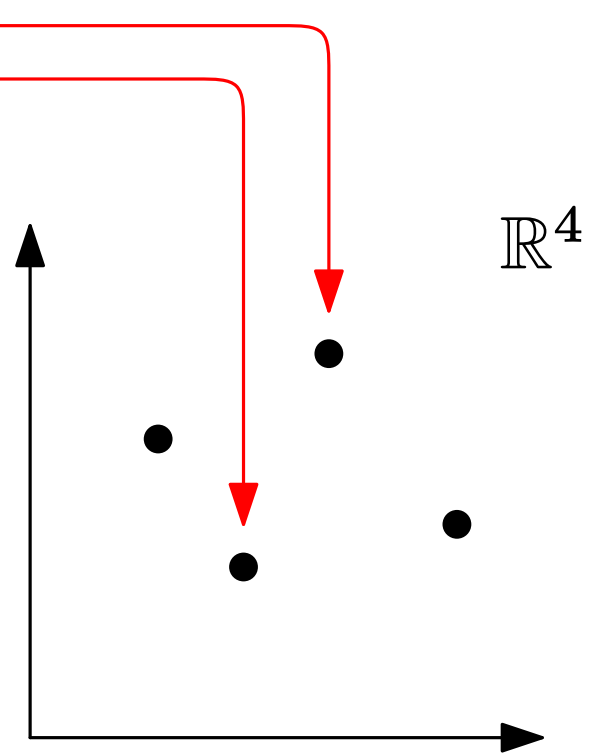
データサイエンスを離散幾何・計算幾何でとらえると

次元 ≈ 属性の総数

Fisher (1936) による アヤメのデータセット

	がくの長さ (cm)	がくの幅 (cm)	花弁の長さ (cm)	花弁の幅 (cm)	種
1	5.1	3.5	1.4	0.2	*I. setosa*
2	4.9	3.0	1.4	0.2	*I. setosa*
3	4.7	3.2	1.3	0.2	*I. setosa*
4	4.6	3.1	1.5	0.2	*I. setosa*
⋮					
150	5.9	3.0	5.1	1.8	*I. virginica*

(3 種)

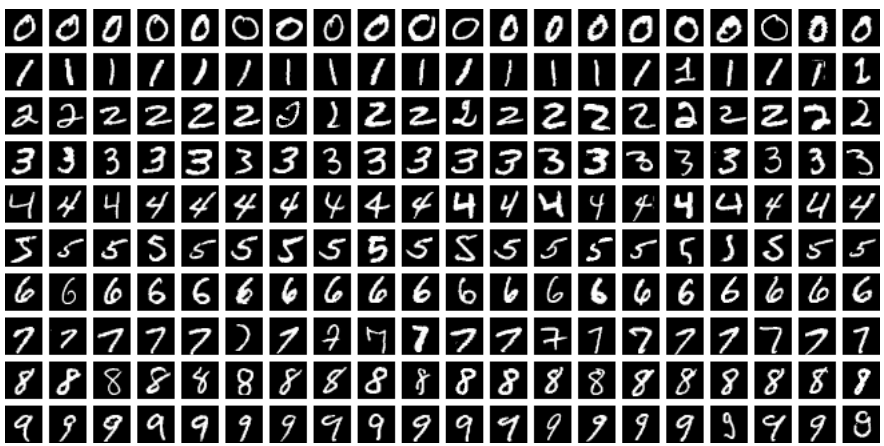


なぜ高次元？(1)：データサイエンス

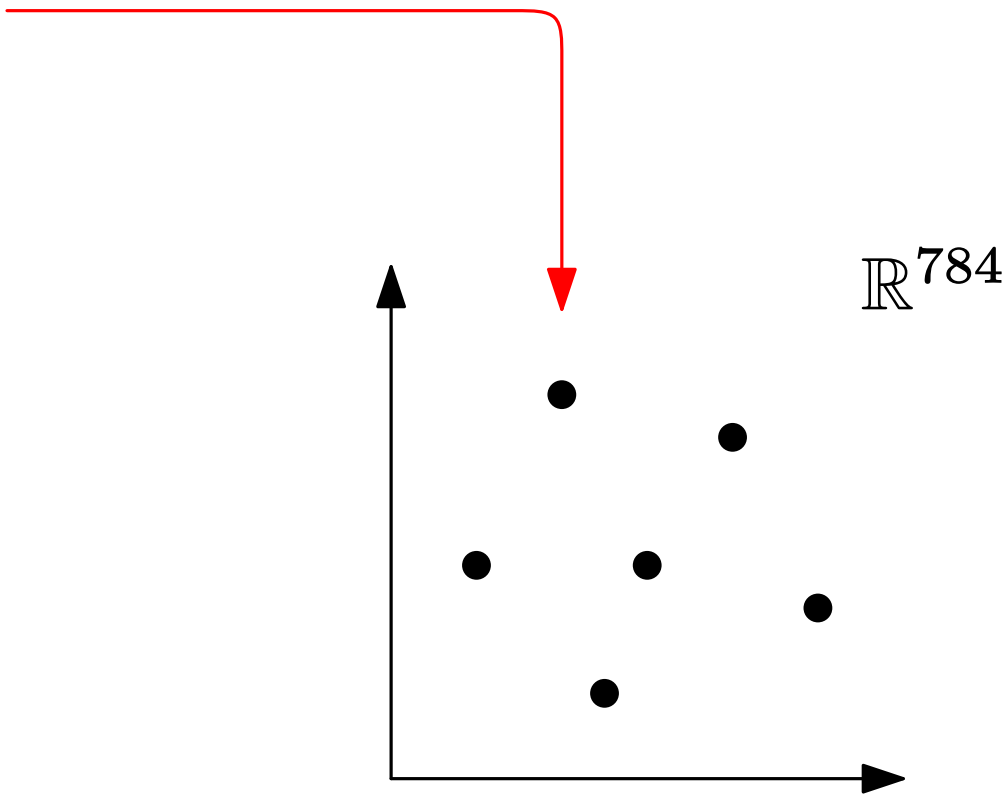
データサイエンスを離散幾何・計算幾何でとらえると

次元 ≈ 属性の総数

MNIST データベース (手書き文字認識)



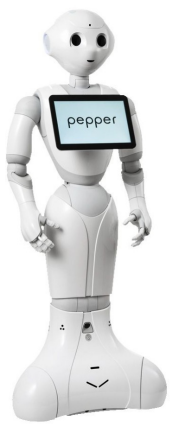
28 × 28 ピクセル



なぜ高次元？(2)：ロボティクス

ロボティクスを離散幾何・計算幾何でとらえると

次元 ≈ 自由度 (degrees of freedom, dof)，パラメータ数



Pepper

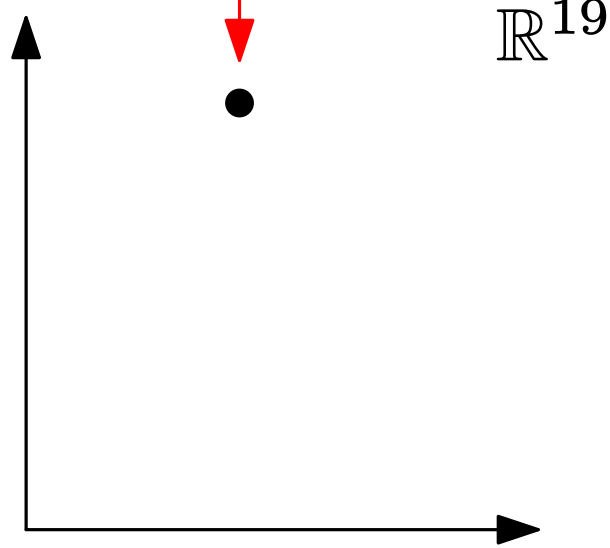
(自由度 $= 19$)



LOVOT

(自由度 $= 13$)

ひとつの姿勢



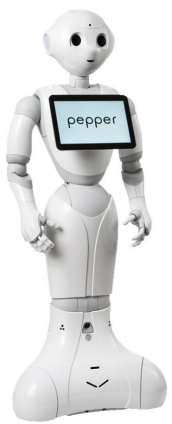
https://robotsguide.com/robots/pepper

https://robotsguide.com/robots/lovot

なぜ高次元？(2)：ロボティクス

ロボティクスを離散幾何・計算幾何でとらえると

次元 ≈ 自由度 (degrees of freedom, dof)，パラメータ数



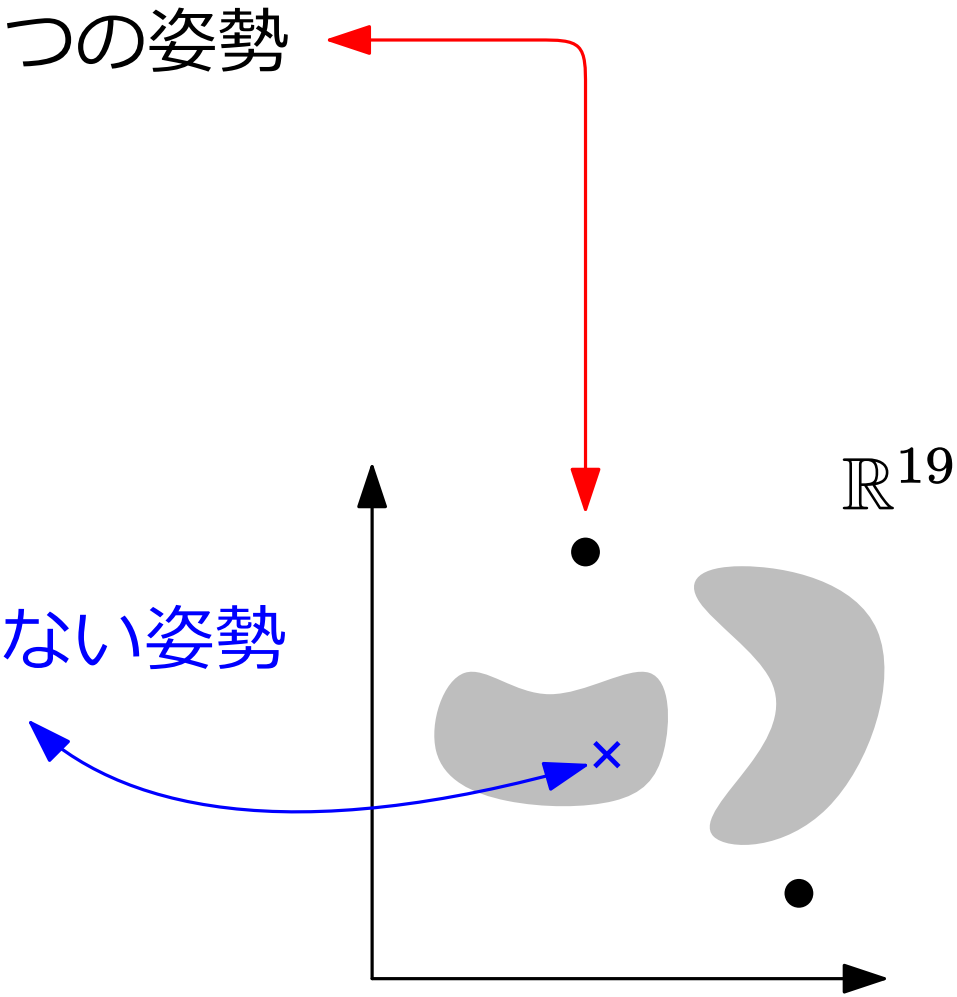
Pepper

(自由度 $= 19$)



LOVOT

(自由度 $= 13$)



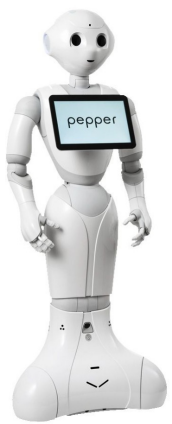
https://robotsguide.com/robots/pepper

https://robotsguide.com/robots/lovot

なぜ高次元？(2)：ロボティクス

ロボティクスを離散幾何・計算幾何でとらえると

次元 ≈ 自由度 (degrees of freedom, dof)，パラメータ数



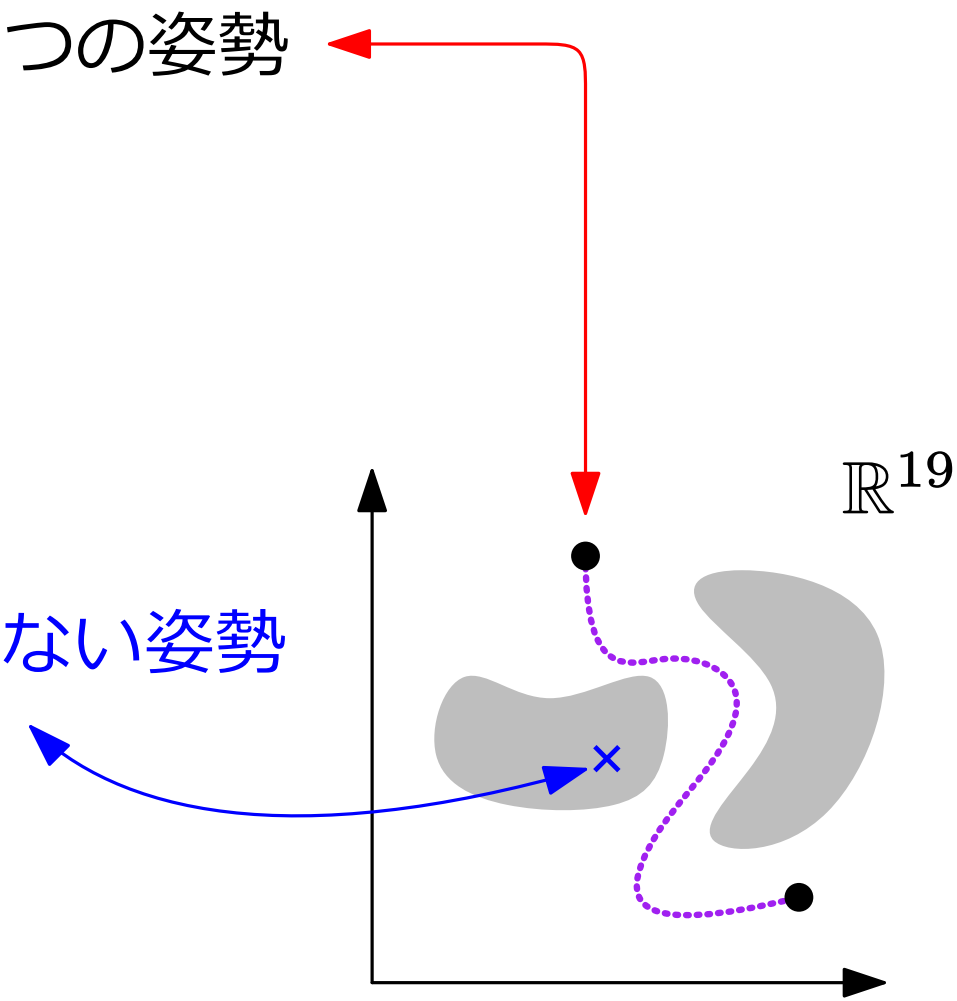
Pepper

(自由度 $= 19$)



LOVOT

(自由度 $= 13$)

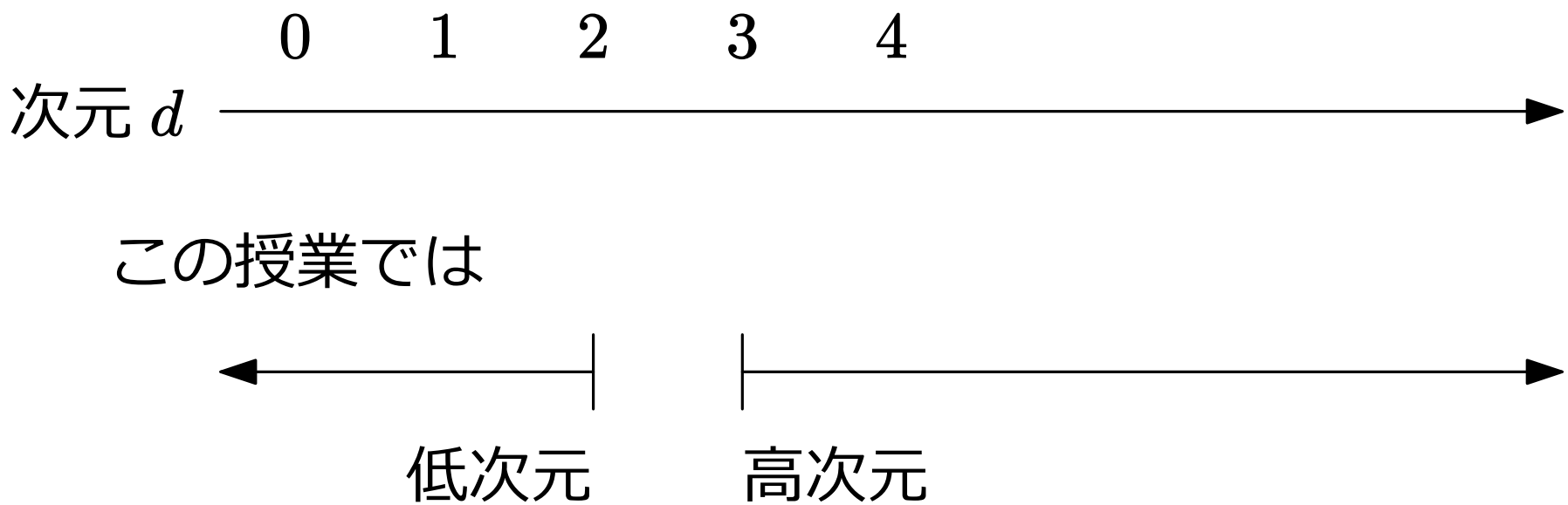


https://robotsguide.com/robots/pepper

https://robotsguide.com/robots/lovot

次元：1, 2, 3, 4, . . .

考える空間は $\mathbb{R}^d$



教訓

1 次元の問題 = 数値列 (配列) の問題

→ 2 次元の問題 はその一般化

1 次元：典型的な問題

問題：区間領域計数問題

入力：数値の配列 $A[0], A[1], \ldots, A[n-1]$
問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：2 つの数値 a, b
- 出力：A の中で，a 以上 b 以下の数値の総数

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	−2	6	7	10	−5	1	0	−6	4	12

1 次元：典型的な問題

問題：区間領域計数問題

入力：数値の配列 $A[0], A[1], \ldots, A[n-1]$
問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：2 つの数値 a, b
- 出力：A の中で，a 以上 b 以下の数値の総数

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	-2	6	7	10	-5	1	0	-6	4	12

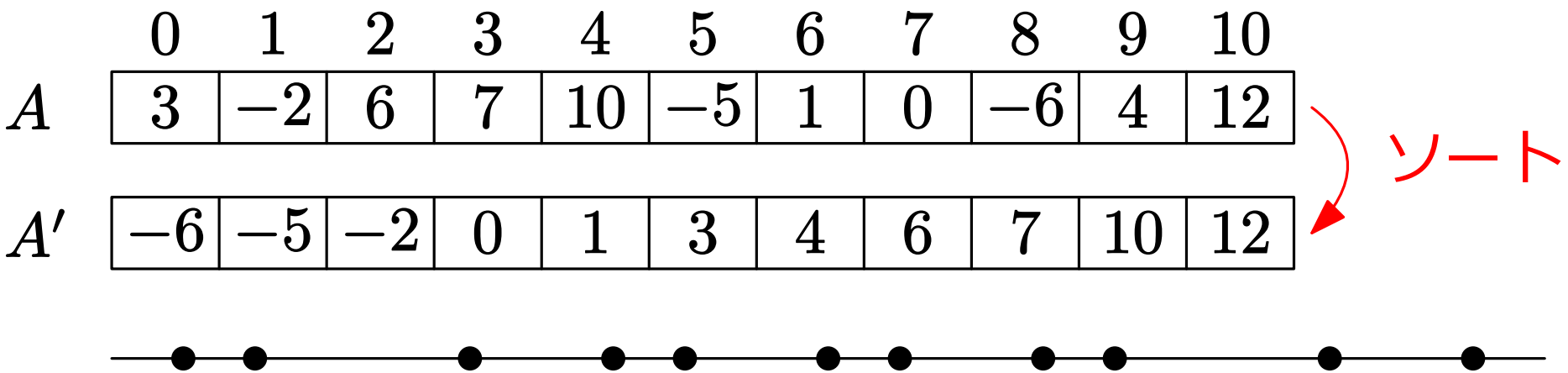
入力：$a = 1, b = 8$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ 出力：5

1 次元：典型的な問題

問題：区間領域計数問題

入力：数値の配列 $A[0], A[1], \ldots, A[n-1]$
問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：2 つの数値 a, b
- 出力：A の中で，a 以上 b 以下の数値の総数

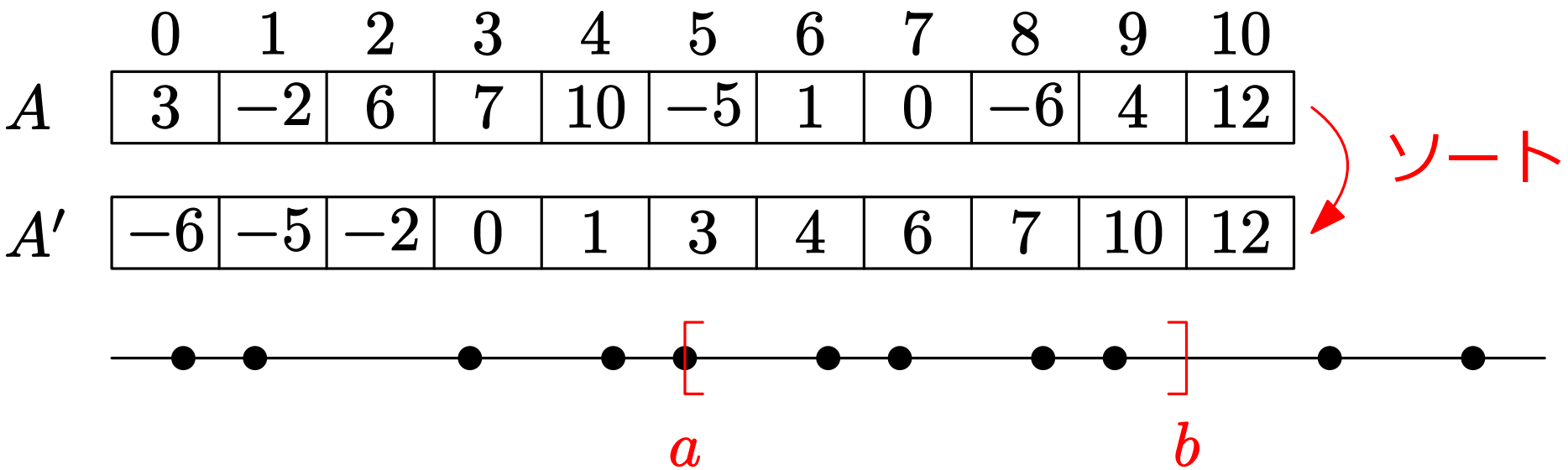


1 次元：典型的な問題

問題：区間領域計数問題

入力：数値の配列 $A[0], A[1], \ldots, A[n-1]$
問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：2 つの数値 a, b
- 出力：A の中で，a 以上 b 以下の数値の総数

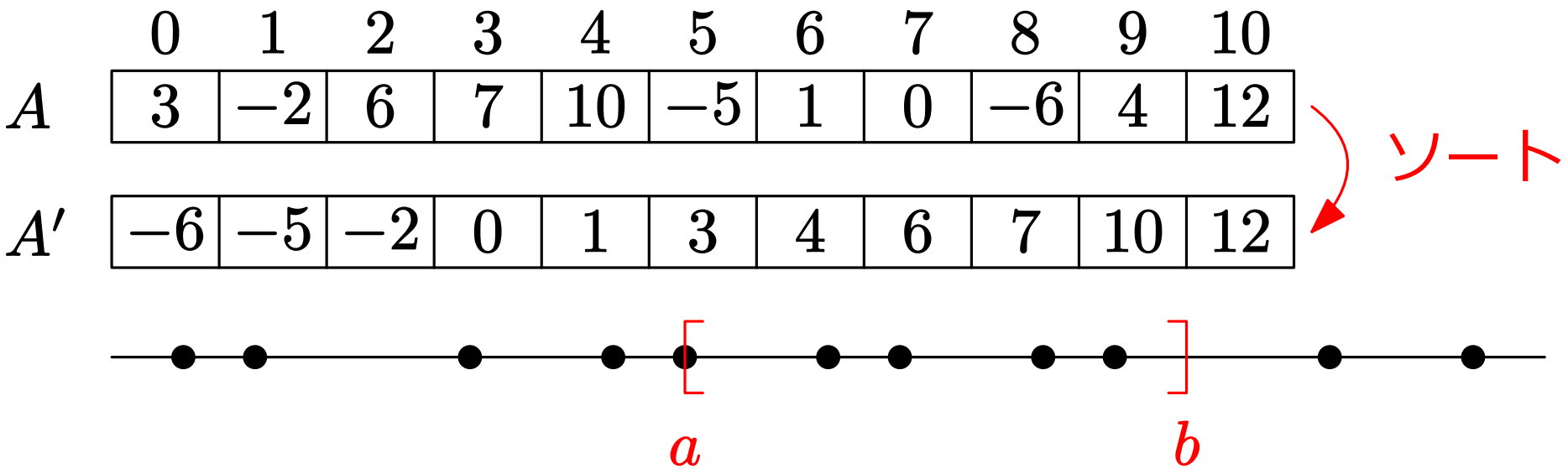


1 次元：典型的な問題

問題：区間領域計数問題

入力：数値の配列 $A[0], A[1], \ldots, A[n-1]$
問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：2 つの数値 a, b
- 出力：A の中で，a 以上 b 以下の数値の総数



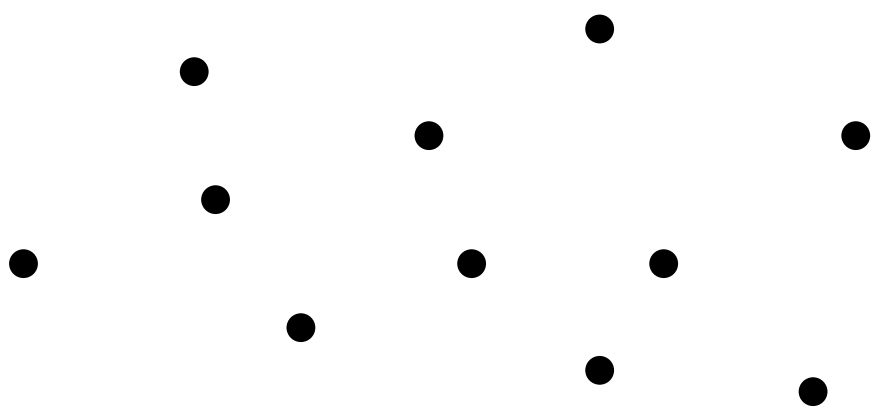
$\rightsquigarrow$ 前処理 $O(n \log n)$ 時間，各クエリ $O(\log n)$ 時間

2 次元：典型的な問題

問題：三角形領域計数問題

入力：2 次元の点の配列 $A[0], A[1], \ldots, A[n-1]$
問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：3 つの点 a, b, c
- 出力：A の中で，$\triangle abc$ 内にある点の総数

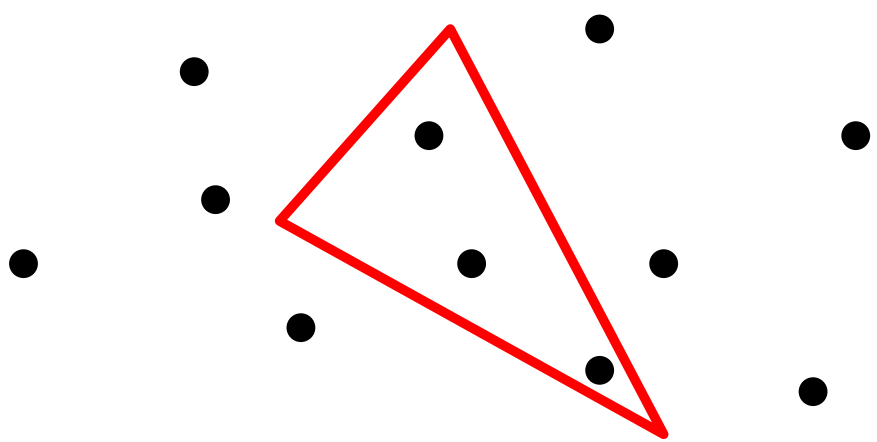


2 次元：典型的な問題

問題：三角形領域計数問題

入力：2 次元の点の配列 $A[0], A[1], \ldots, A[n-1]$
問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：3 つの点 a, b, c
- 出力：A の中で，$\triangle abc$ 内にある点の総数

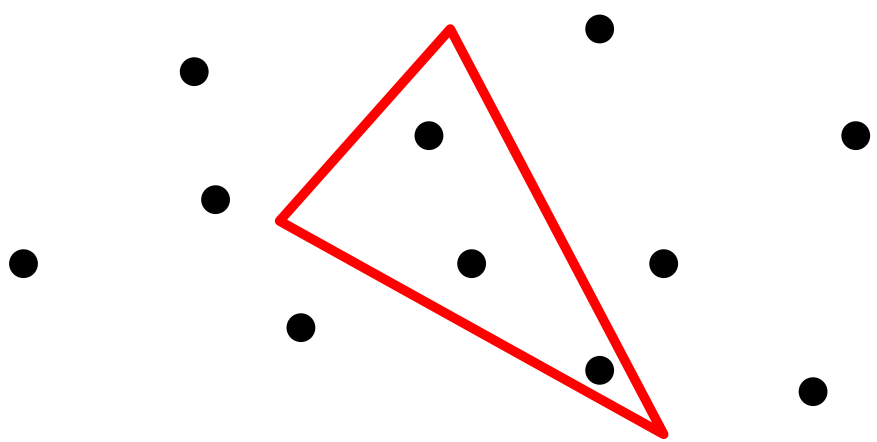


2 次元：典型的な問題

問題：三角形領域計数問題

入力：2 次元の点の配列 $A[0], A[1], \ldots, A[n-1]$
問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：3 つの点 a, b, c
- 出力：A の中で，$\triangle abc$ 内にある点の総数

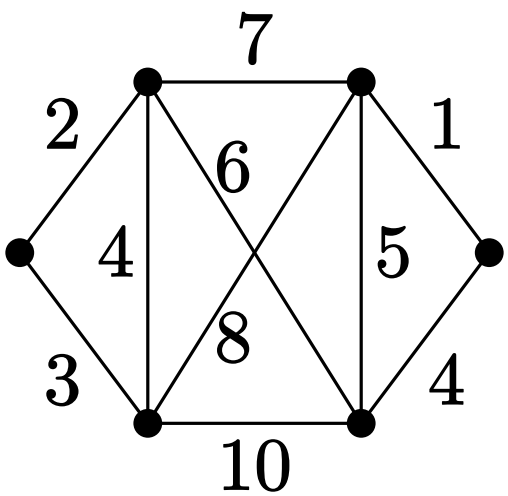


$\rightsquigarrow$ 前処理 $O(n \log n)$ 時間？，各クエリ $O(\log n)$ 時間？

計算幾何のご利益

幾何情報を使うと，高速化できることがある

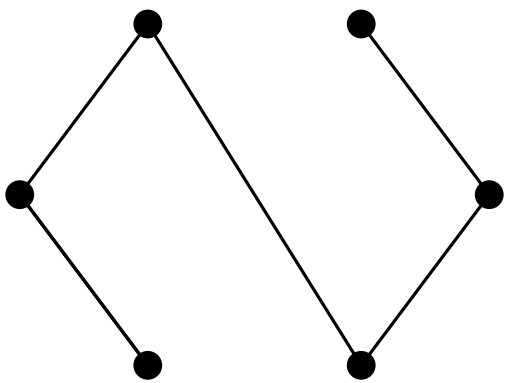
例：最小全域木



計算幾何のご利益

幾何情報を使うと，高速化できることがある

例：最小全域木　(頂点数 $= n$，辺数 $= m$)



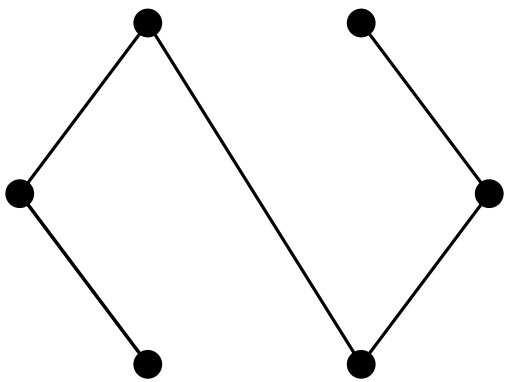
クラスカル法

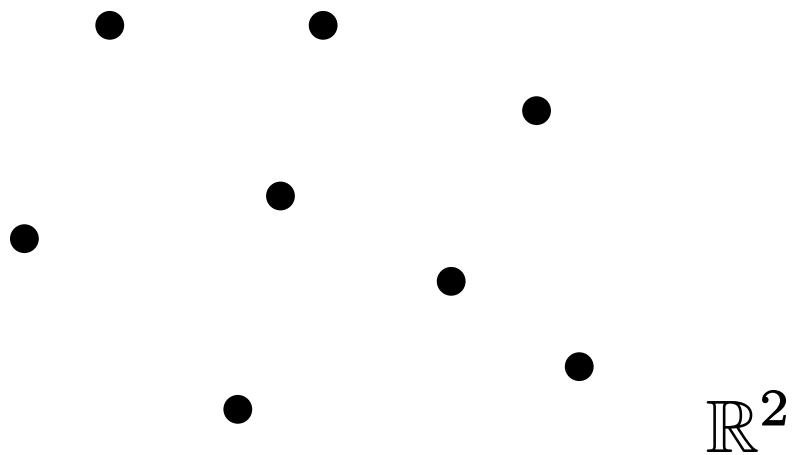
$O(m \log n)$

計算幾何のご利益

幾何情報を使うと，高速化できることがある

例：最小全域木　(頂点数 $= n$，辺数 $= m$)





辺長 = ユークリッド

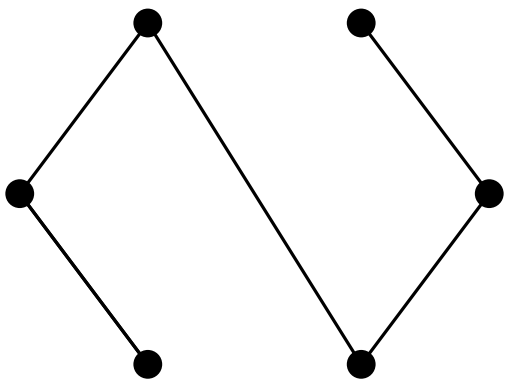
クラスカル法

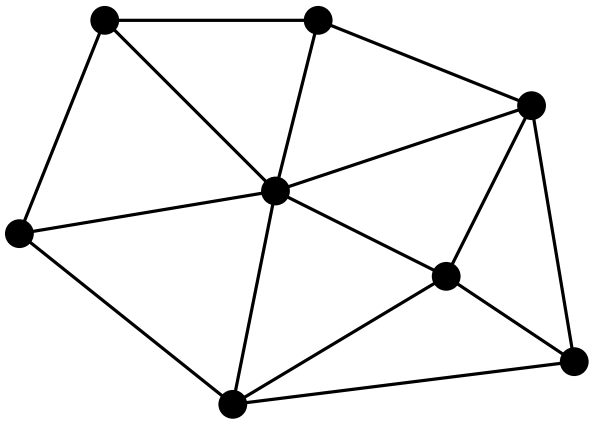
$O(m \log n)$

計算幾何のご利益

幾何情報を使うと，高速化できることがある

例：最小全域木　(頂点数 $= n$，辺数 $= m$)





$\mathbb{R}^2$

辺長 = ユークリッド

クラスカル法

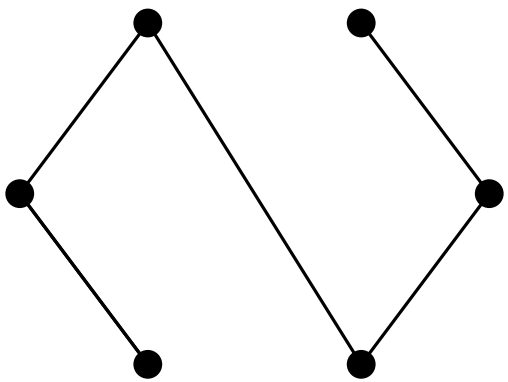
$O(m \log n)$

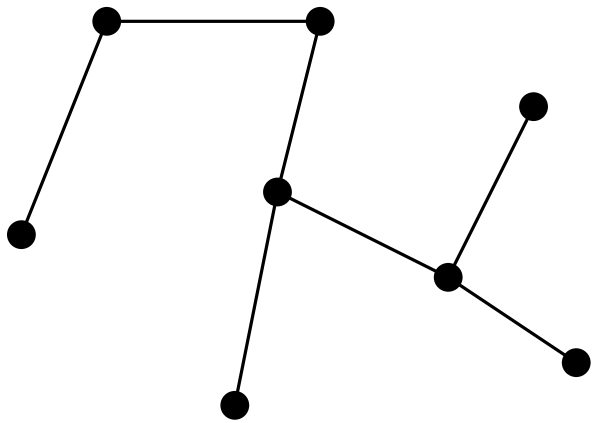
デローネ三角形分割

計算幾何のご利益

幾何情報を使うと，高速化できることがある

例：最小全域木　(頂点数 $= n$，辺数 $= m$)





$\mathbb{R}^2$

辺長 = ユークリッド

クラスカル法

$O(m \log n)$

デローネ三角形分割

$O(n \log n)$

スケジュール (前半)

0. ガイダンス (10/6)
1. 低次元 (1) : 多角形と三角形分割 (10/13)
2. 低次元 (2) : 点配置と直線配置 (10/20)
3. 低次元 (3) : 近接グラフと交差グラフ (10/27)

＊ 休み (文化の日) (11/3)

4. 低次元 (4) : 距離とボロノイ図 (11/10)
5. 低次元 (5) : 多角形内の距離 (11/17)
6. 低次元 (6) : 二次曲線と楕円 (11/24)

＊ 休み (秋ターム試験) (12/1)

○ 中間試験 (12/8)

注 : この授業で **アルゴリズムは扱わない**

この授業では **アルゴリズムの背後にある数理を扱う**

スケジュール (後半)

7. 高次元 (1)：高次元の物体の取り扱い方 (12/15)
8. 高次元 (2)：凸集合と凸包 (12/22)
   * 休み (冬季休業) (12/29)
9. 高次元 (3)：凸多面体の面構造 (1/5)
10. 高次元 (4)：点配置と超平面配置 (1/12)
11. 高次元 (5)：点配置と次元削減 (1/19)
12. 高次元 (6)：距離とボロノイ図 (1/26)
    * 休み (修士論文発表会) (2/2)
    ○ 期末試験 (2/9)

注：この授業で **アルゴリズムは扱わない**

この授業では **アルゴリズムの背後にある数理を扱う**

教員

- 岡本　吉央　(おかもと　よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：https://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント (TA)

- 堀 悠人 (ほり　ゆうと)
- 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- https://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2026/dme/
- 注意：資料の入手は各学生が自ら行う

講義資料

各回の資料

- 講義動画 (YouTube)
- スライド
- 演習問題 ← 教室で参照できるように，各自が準備
- 用語集

* コメント

全回の資料

- 演習シート

授業の受け方

授業時間まで

講義動画 (オンデマンド) を視聴する

- 質問・コメントを Classroom で投稿する
- 授業内演習問題の解答を準備しておく

授業時間中

リアルタイム対面授業に参加する

- 授業内演習問題に取り組む
- 質問・コメントを直接行う

授業時間の後

演習問題に取り組む

- 取り組み方は後述

演習問題

演習問題の種類

- 授業内演習問題：教室で取り組む問題
- 復習問題：授業で取り上げた内容を反復する問題
- 補足問題：授業で省略した内容を補足する問題
- 追加問題：授業の内容に追加する問題

＊ 発展問題：少し難しい (かもしれない) 問題

演習問題の進め方方

- 教室で取り組む　⇝ 演習シート
- 自習で取り組む　⇝ レポート
- 注意：「模範解答」「想定解答」は存在しない

演習問題：授業内演習

授業内演習の行い方

- **グループで行うことを推奨する**
- 授業内演習問題に取り組む
- 演習シートに自分なりの解答を書く
- 解けたら，教員・TA に解答を説明する
- 解けなかったら，教員・TA にヒントを聞く
- 10:30 頃に演習シートを提出して「授業内演習を完了」する
- 授業内演習を完了すると，1 点が与えられる

注意

- 9:20 までに入室しないといけない
  - 鉄道遅延等による遅刻は申し出る
- **学生証を持参し，提示する**ように準備する
- 授業内演習の解答を事前に準備してきてもよい

演習問題：レポートの提出

レポートの提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出 **してもよい**
- 提出は教室 (紙) か Classroom (PDF ファイル) で行う
- レポートには提出締切がある
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて，返却される
  - 返却された内容については，再提出ができる

成績評価

次の 3 つを総合して行う

- 中間試験 (50 点)
- 期末試験 (50 点)
- 毎回の演習問題 (計 12 点)

$$\text{成績} = \min\{100, \text{中間試験} + \text{期末試験} + \text{演習問題}\}$$

試験

出題形式

- 演習問題と同じ形式の問題を **4 問** 出題する
- その中の 2 問は演習問題と **同一** である
  (ただし，「発展」の演習問題は出題されない)
- 解答時間は 90 分である
- 全問に解答する
- **A4 用紙両面に自筆で書いたメモ** を持ち込める

前提知識

I 類の 2 年後学期までの必修授業の内容

特に，次のものは頻出する

- 離散数学
- 線形代数学
- 基礎的なプログラミング，アルゴリズム
- 論理的に文章を読み書きする能力

覚えている必要はない (忘れたときに思い出せるようにする)

参考書

購入する必要はない

- M. ドバーグ，O. チョン，M. ファンクリベルド，M. オーバーマーズ，『コンピュータ・ジオメトリ (計算幾何学：アルゴリズムと応用) 第 3 版』，2010 年，近代科学社.
- 杉原厚吉，『計算幾何学』，朝倉書店，2013 年.
- 福田公明，森山園子，『凸多面体と計算』，共立出版，2025 年.
- J. マトウシェク，『離散幾何学講義』，丸善出版，2012 年.

他にも，計算幾何，離散幾何に関する書籍は参考になるかもしれない

今日の残りの時間

授業内演習をグループで取り組む練習を行う

- 1 グループの人数 = 3 名から 5 名
- 相談の方法はグループにお任せ
- 教員と TA は，巡回してヒントなどを出す

注意：今日の授業内演習を完了しても 1 点にならない

質問・コメント投稿の練習を行う

- Classroom にコメント投稿フォームがある
- 内容はなんでもよいので，投稿してみる
  - 授業に関係のあることが思い浮かばなければ，雑談でよい