離散数理工学 (5) **2026 年 11 月 17 日**

演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2026 年 11 月 24 日 午前 9:00

授業内問題 5.1 任意の整数 $n \geq 3$ に対して，頂点数 n の多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ で，その可視グラフが非交差幾何グラフであるようなものを構成せよ．

授業内問題 5.2 多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ とその点 $s \in P$ で，P における可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数が P の頂点数よりも大きいものを構成せよ．(注：出題者は，P の頂点数が整数 $n \geq 6$ のとき，$\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数がおよそ $5n/3 - 2$ になるような例を構成できる．この問題では頂点数が $5n/3 - 2$ ほど大きな例を求めてはいないが，できるならば目指してみよ．)

復習問題 5.3 単純多角形 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ とその中の任意の 2 点 $s, t \in P$ に対して，s, t を結ぶ P 内の最短路は一意であることを証明せよ．(ヒント：演習問題 5.5 の結果を用いてもよい．)

復習問題 5.4 多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ とその中の任意の点 $s \in P$ を考える．

1. 可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ が単純多角形であることを証明せよ．(注：$\mathrm{Vis}(s)$ が多角形領域であることは仮定してよい．それが穴を持たないことを証明せよ．)
2. P の頂点数が n であるとき，可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数が $2n$ 以下であることを証明せよ．

補足問題 5.5 平面上の任意の 2 点 $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，以下の問いに答えよ．

1. 次の不等式
$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$
が成り立ち，等号が成り立つための必要十分条件が「ある実数 α が存在して，$p_1 = \alpha p_2$ が成り立つこと」であることを証明せよ．(注意：この不等式はコーシー・シュワルツの不等式と呼ばれるものの特別な場合である．)
2. 次の不等式
$$\|p_1 + p_2\|_2 \leq \|p_1\|_2 + \|p_2\|_2$$
が成り立ち，等号が成り立つための必要十分条件が「ある非負実数 α が存在して，$p_1 = \alpha p_2$ が成り立つこと」であることを証明せよ．(ヒント：両辺の 2 乗を考えるとよい．α が非負でなければならないことに注意せよ．)

追加問題 5.6

1. 任意の正整数 $k \geq 1$ に対して，多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ とその中の 2 点 s, t で，s, t を結ぶ P 内の異なる最短路が少なくとも k 個存在するものを構成せよ．
2. 前問と同じ設定で，さらに P の穴の数が $O(\log k)$ であるようなものを構成せよ．

追加問題 (発展) 5.7 任意の単純多角形 P とその中の任意の点 $s \in P$ を考える．単純多角形 P の頂点数が n であるとき，可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数が n 以下であることを証明せよ．