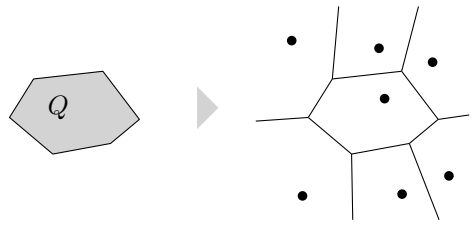
離散数理工学 (4) **2026 年 11 月 10 日**

演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2026 年 11 月 17 日 午前 9:00

授業内問題 4.1 任意の整数 $n \geq 3$ に対して，n 個の点の集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ で，P のボロノイ図がボロノイ頂点を 1 つも持たないようなものを見つけよ．

授業内問題 4.2 平面上に凸多角形 $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ が与えられている．このとき，ある有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ が存在して，P のボロノイ図が Q をボロノイ領域の 1 つとするようにできる．そのような P の構成法を 1 つ示せ．例を下の図に示す．



復習問題 4.3 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ のボロノイ図を考える．

1. 点 q があるボロノイ辺の相対的内点であるとき，q は P に最近点を 2 つ持つことを証明せよ．
2. 点 q があるボロノイ頂点であるとき，q は P に最近点を少なくとも 3 つ持つことを証明せよ．

復習問題 4.4 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ のボロノイ図を考える．このとき，点 p のボロノイ領域 $V(p)$ に対して，$p \in V(p)$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 4.5 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ のボロノイ図を考える．

1. 点 p のボロノイ領域 $V(p)$ が有界であるとき，$V(p)$ は凸多角形であることを証明せよ．
2. 点 p のボロノイ領域が非有界であるとき，そのときに限り，p は凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の境界上にあることを証明せよ．

復習問題 4.6 $n \geq 3$ とする．n 個の点からなる集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ では，すべてが 1 直線上にはなく，どの 4 点も 1 円周上にないものとする．このとき，P のボロノイ図において，ボロノイ辺の数は $3n-6$ 以下で，ボロノイ頂点の数は $2n-5$ 以下であることを証明せよ．(注意：デローネ三角形分割について，第 3 回で導出した性質を用いてもよい．)

復習問題 4.7 平面上の 2 点 $a = (1,1), b = (4,3) \in \mathbb{R}^2$ に対して，点 (x,y) と a のマンハッタン距離が (x,y) と b のマンハッタン距離と等しくなるための x, y の必要十分条件を与えよ．条件としては，できる限り簡潔なものが望ましい．

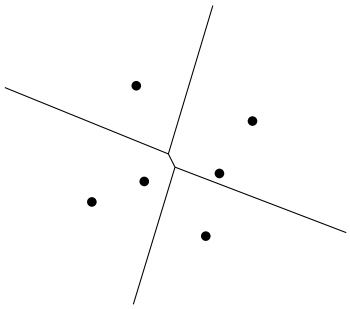
補足問題 4.8 平面上の 2 点 $a = (1,1), b = (4,4) \in \mathbb{R}^2$ に対して，点 (x,y) と a のマンハッタン距離が (x,y) と b のマンハッタン距離と等しくなるための x, y の必要十分条件を与えよ．条件としては，できる限り簡潔なものが望ましい．

追加問題 4.9 平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ のボロノイ図において，すべてのボロノイ領域が 6 つの辺を境界上に持つということはない．なぜか．証明せよ．(ヒント：演習問題 4.6 の結果を用いてもよい．)

追加問題 4.10 平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，各点 $p \in P$ のボロノイ領域 $V'(p)$ を

$$V'(p) = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} p \text{ と } q \text{ の距離} \geq r \text{ と } q \text{ の距離} \\ \forall\, r \in P - \{p\} \end{array} \right\}$$

と定義する．次の図はこの定義によって得られるボロノイ図の例である．



1. 任意の点 $p \in P$ に対して，$V'(p)$ は空集合であるか，非有界であることを証明せよ．
2. 点 p が凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の内点であるとき，$V'(p)$ は空集合であることを証明せよ．

(補足：この問題で定義されるボロノイ図は**最遠点ボロノイ図**とよく呼ばれる．)