離散数理工学 (3) **2026 年 10 月 27 日**

演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2026 年 11 月 10 日 午前 9:00

授業内問題 3.1 任意の整数 $n \geq 3$ に対して，n 個の点の集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ で，P を頂点集合とするデローネ・グラフが有界な面をただ 1 つしか持たないようなものを見つけよ．

授業内問題 3.2 任意の整数 $n \geq 3$ に対して，n 個の点の集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ で，P を頂点集合とするデローネ三角形分割がちょうど $3n - 6$ 個の辺を持ち，かつ，(非有界面も含めて) ちょうど $2n - 4$ 個の面を持つものを見つけよ．

復習問題 3.3 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，P を頂点集合とするデローネ・グラフは非交差幾何グラフであることを証明せよ．

復習問題 3.4 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，P を頂点集合とする完全幾何グラフを G とする．また，G における辺の長さ (重み) はそのユークリッド長であるとする．このとき，辺 e が G の最小全域木に含まれるならば，e は P を頂点集合とするデローネ・グラフに含まれることを証明せよ．(補足：任意の全域木 T の性質として，「T には任意の 2 頂点を結ぶパスが一意に存在する」こと，「T の任意の辺を T から取り除くと，2 つの連結成分に分かれる」こと，「T に含まれない任意の辺を T に付け加えると，閉路がちょうど 1 つできる」ことを用いてもよい．)

復習問題 3.5 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，P を頂点集合とするガブリエル・グラフの辺は，P を頂点集合とするデローネ・グラフの辺でもあることを証明せよ．

復習問題 3.6 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，P を頂点集合とする最近点グラフの辺は，P を頂点集合とするガブリエル・グラフの辺でもあることを証明せよ．

補足問題 3.7 有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ において，P のすべての点が 1 直線上にはなく，かつ，P のどの 4 点も 1 円周上にはないとする．このとき，P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面はどれも三角形であることを証明せよ．

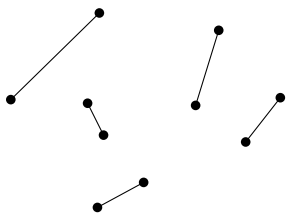
補足問題 3.8 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，P を頂点集合とする単位円グラフを G とする．また，G における辺の長さ (重み) はそのユークリッド長であるとする．このとき，辺 e が G の最小全域木に含まれるならば，e は P を頂点集合とするデローネ・グラフに含まれることを証明せよ．(ヒント：演習問題 3.4 の補足に書かれた内容を用いてもよい．) (注意：単位円グラフ G が最小全域木を持たないこともある．)

補足問題 3.9 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，P を頂点集合とする完全幾何グラフを G とする．また，G における辺の長さ (重み) はそのユークリッド長であるとする．このとき，辺 e が G の最小全域木に含まれるならば，e は P を頂点集合とするガブリエル・グラフに含まれることを証明せよ．(ヒント：演習問題 3.4 の補足に書かれた内容を用いてもよい．)

補足問題 3.10 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，P を頂点集合とする完全幾何グラフを G とする．また，G における辺の長さ (重み) はそのユークリッド長であるとする．このとき，辺 e が P を頂点集合とする最近点グラフに含まれるならば，e は G の最小全域木に含まれることを証明せよ．(ヒント：演習問題 3.4 の補足に書かれた内容を用いてもよい．)

追加問題 3.11 有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ において，すべての点が 1 直線上にはないと仮定する．集合 P の点の総数を n，凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の境界上の点の数を h とする．このとき，P の (任意の) 三角形分割における三角形の総数を n と h を用いた式によって表してみよ．(ヒント：オイラーの公式を用いよ．) (補足：つまり，三角形分割における三角形の総数は n と h にしか依存しない．)

追加問題 3.12 要素数が偶数の点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，P を頂点集合とする完全幾何グラフを G とする．また，G における辺の長さ (重み) はそのユークリッド長であるとする．幾何グラフ G の完全マッチングとは，G の部分グラフ $M = (P, E_M)$ で，どの頂点においても，それに接続する M の辺の数がちょうど 1 であるものである．完全マッチング M の重みとは，それに含まれる辺の長さ (重み) の総和である．



完全幾何グラフ G において，重みが最小の完全マッチングは非交差幾何グラフであることを証明せよ．(注意：重みが最小の完全マッチングがデローネ・グラフの部分グラフであるとは限らない．)