離散数理工学 (2) **2026 年 10 月 20 日**

演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2026 年 10 月 27 日 午前 9:00

授業内問題 2.1 以下の問いに答えよ．

1. 平面上の異なる 3 点 p_1, p_2, p_3 が y 軸と平行ではない 1 直線上にあるとき，そのときに限り，それらの双対 p_1^*, p_2^*, p_3^* が 1 点で交わることを証明せよ．
2. 平面上で，y 軸と平行ではない異なる 3 直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 が 1 点で交わるとき，そのときに限り，それらの双対 $\ell_1^*, \ell_2^*, \ell_3^*$ が 1 直線上にあることを証明せよ．

復習問題 2.2

1. 平面上の点 p に対して，その双対の双対 p^{**} が p に等しいことを証明せよ．
2. 平面上で y 軸に平行ではない直線 ℓ に対して，その双対の双対 ℓ^{**} が ℓ に等しいことを証明せよ．

復習問題 2.3 平面上の点 p と y 軸に平行ではない直線 ℓ を考える．

1. 点 p が直線 ℓ の上にあるとき，そのときに限り，点 ℓ^* が直線 p^* の上にあることを証明せよ．
2. 点 p が直線 ℓ の上側にあるとき，そのときに限り，点 ℓ^* が直線 p^* の上側にあることを証明せよ．

復習問題 2.4 平面上の有限点集合 $V = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \quad (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{array} \right\},$$

$$B = \bigcap \{ \text{ 半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \ldots, p_n \in h \}$$

とする．このとき，$A \subseteq B$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 2.5 演習問題 2.4 の記法のもとで，$B \subseteq A$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 2.6 平面上の点の集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ において，どの 2 点の x 座標も異なるとする．点 $p_1 \in P$ が P の上側凸包の内点であるとき，そのときに限り，p_1^* が直線配置 $P^* = \{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*\}$ の下側エンベロープに現れないことを証明せよ．(注：授業では直感的に説明を行っているが，この問題では定義に基づいて証明を行うこと．)

追加問題 2.7 n 個の異なる直線からなる直線配置 $\mathcal{A}$ を考える．ただし，$n \geq 1$ であるとする

1. 直線配置 $\mathcal{A}$ の頂点の数が必ず $(n^2 - n)/2$ 以下であることを証明せよ．
2. 直線配置 $\mathcal{A}$ のセルの数が必ず $(n^2 + n + 2)/2$ 以下であることを証明せよ．

追加問題 2.8 平面上の異なる 4 点 p_1, p_2, p_3, p_4 を考える．ただし，これらの x 座標はすべて異なるものとする．このとき，線分 $\overline{p_1 p_2}$ と線分 $\overline{p_3 p_4}$ が交わることは双対 $p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*$ を使ってどのように表せるだろうか．その方法を記述せよ．