理論計算機科学特論 (2026 年前学期)

計算複雑性の基礎

第 11 回

多項式階層：$\mathrm{P} = \mathrm{NP} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{PH}$

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 6 月 23 日

最終更新：2026 年 6 月 23 日　11:28

スケジュール (前半)

1. 計算理論の復習 (4/7)
2. 時間計算量：P, NP, coNP (4/14)
3. 帰着と完全性：NP 完全 (4/21)
4. 領域計算量：L, NL, PSPACE (4/28)

$*$ 休み (祝日) (5/5)

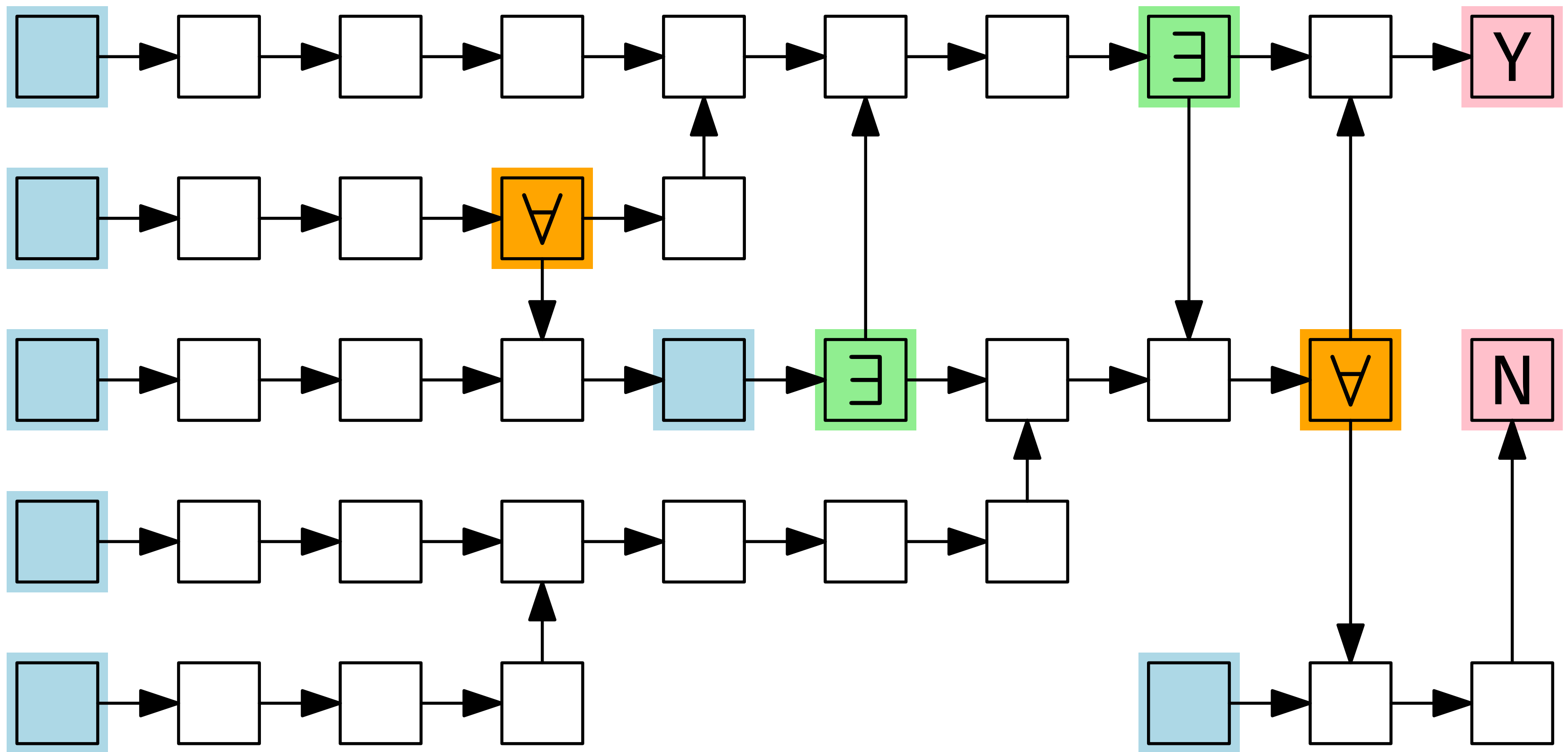
5. 時間と領域の関係：$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$ (5/12)
6. 階層定理：$\mathrm{P} \neq \mathrm{EXPTIME}$ (5/19)
7. Ladner の定理：$\mathrm{NP} - \mathrm{P} = \mathrm{NPC} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}$ (5/26)

スケジュール (後半)

8. Savitch の定理：PSPACE = NPSPACE (6/2)
9. Immerman-Szelepcsényi の定理：NL = coNL (6/9)
10. 交代性計算：AP = PSPACE (6/16)
11. **多項式階層**：$\mathrm{P} = \mathrm{NP} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{PH}$ (6/23)
12. 確率的計算：$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{BPP} \subseteq \mathrm{PP}$, $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PP}$ (6/30)
13. 対話証明系 (1)：$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{MA} \subseteq \mathrm{AM}$ (7/7)
14. 対話証明系 (2)：$\mathrm{IP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ (7/14)
15. 対話証明系 (3)：$\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{IP}$ (7/21)

$*$ 休み (授業のない日) (7/28)

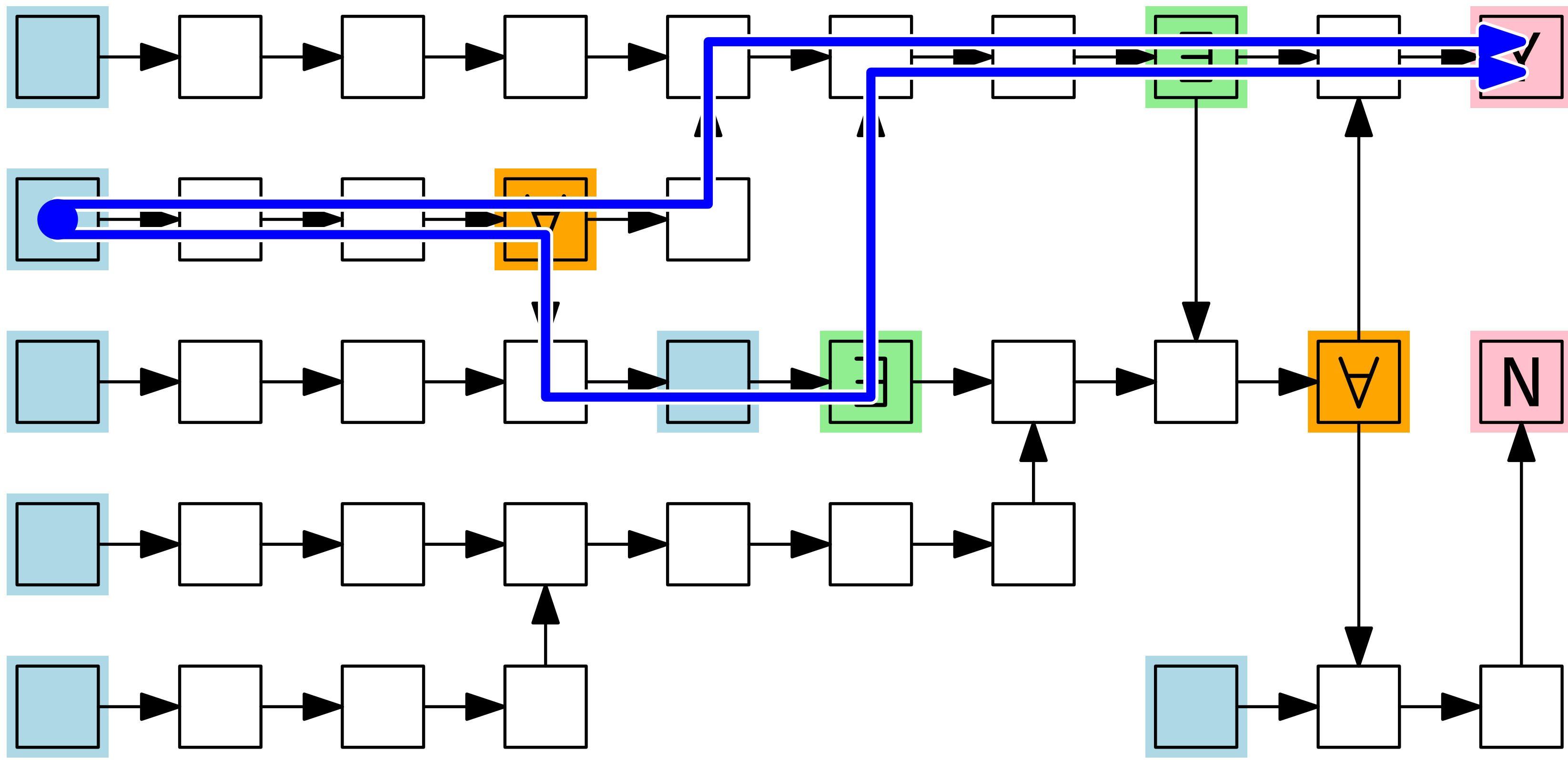
[復習] 交代性：時点状況から見る



5 種類の時点状況

- 開始状況
- 停止状況
- 決定性状況
- 存在状況 (非決定性)
- 全称状況 (非決定性)

[復習] 交代性：時点状況から見る



5 種類の時点状況

開始状況

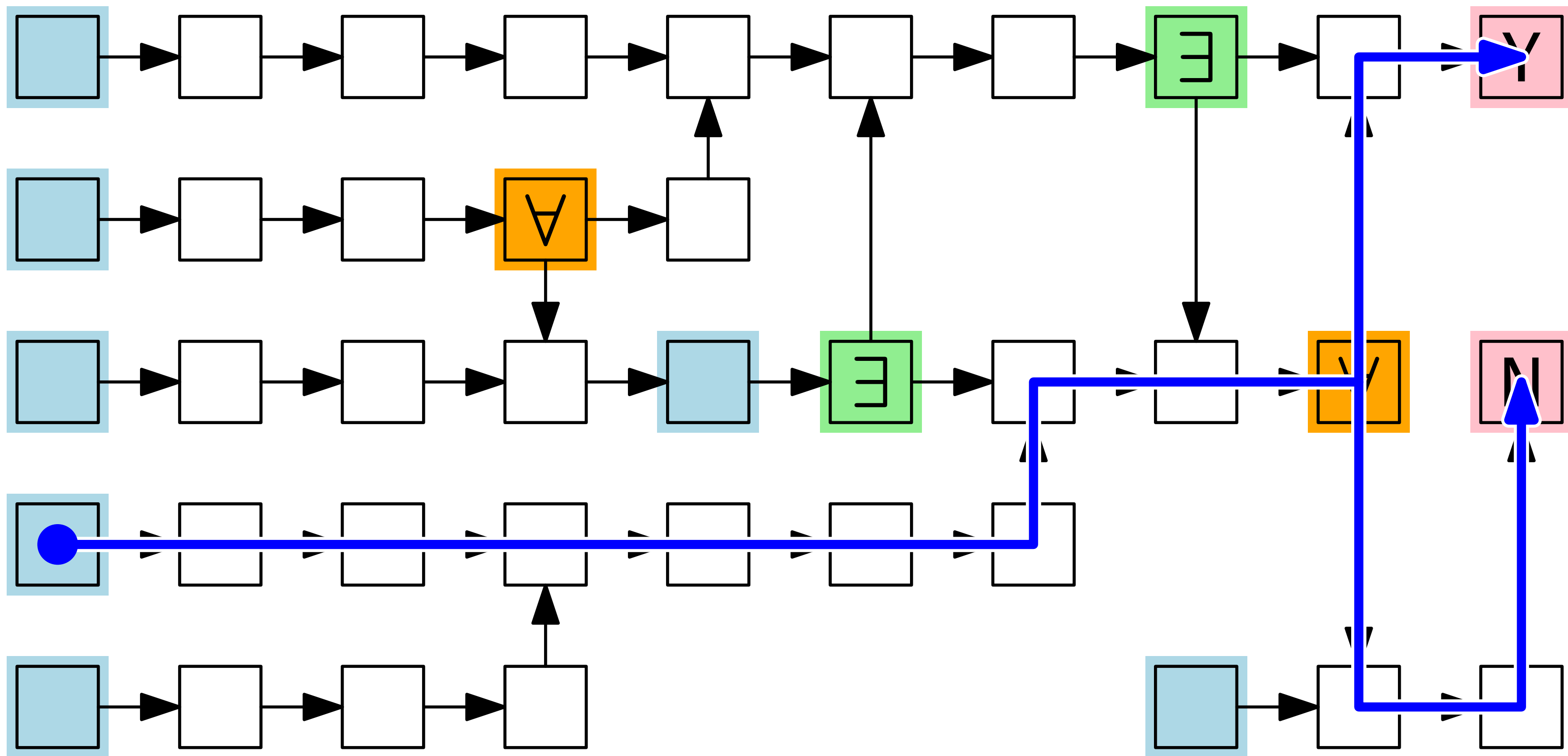
決定性状況

停止状況

存在状況 (非決定性)

全称状況 (非決定性)

[復習] 交代性：時点状況から見る



5 種類の時点状況

- 開始状況
- 決定性状況
- 停止状況
- 存在状況 (非決定性)
- 全称状況 (非決定性)

[復習] 交代性を持つ計算

交代性を持つプログラムでは

命令 guess-∃ と guess-∀ を使える

- 有限集合 X に対して，guess-∃(X) とすると，X の要素を 1 つ好きなように選べる
- 有限集合 X に対して，guess-∀(X) とすると，X の要素をすべて考えて分岐する

それらにかかる時間 $= O(\log|X|)$ ステップ

交代性における guess-∃ $\quad=\quad$ 非決定性における guess

交代性 $=$ alternation (名詞)

交代的 $=$ alternating (形容詞)

(Chandra, Kozen, Stockmeyer ’81)

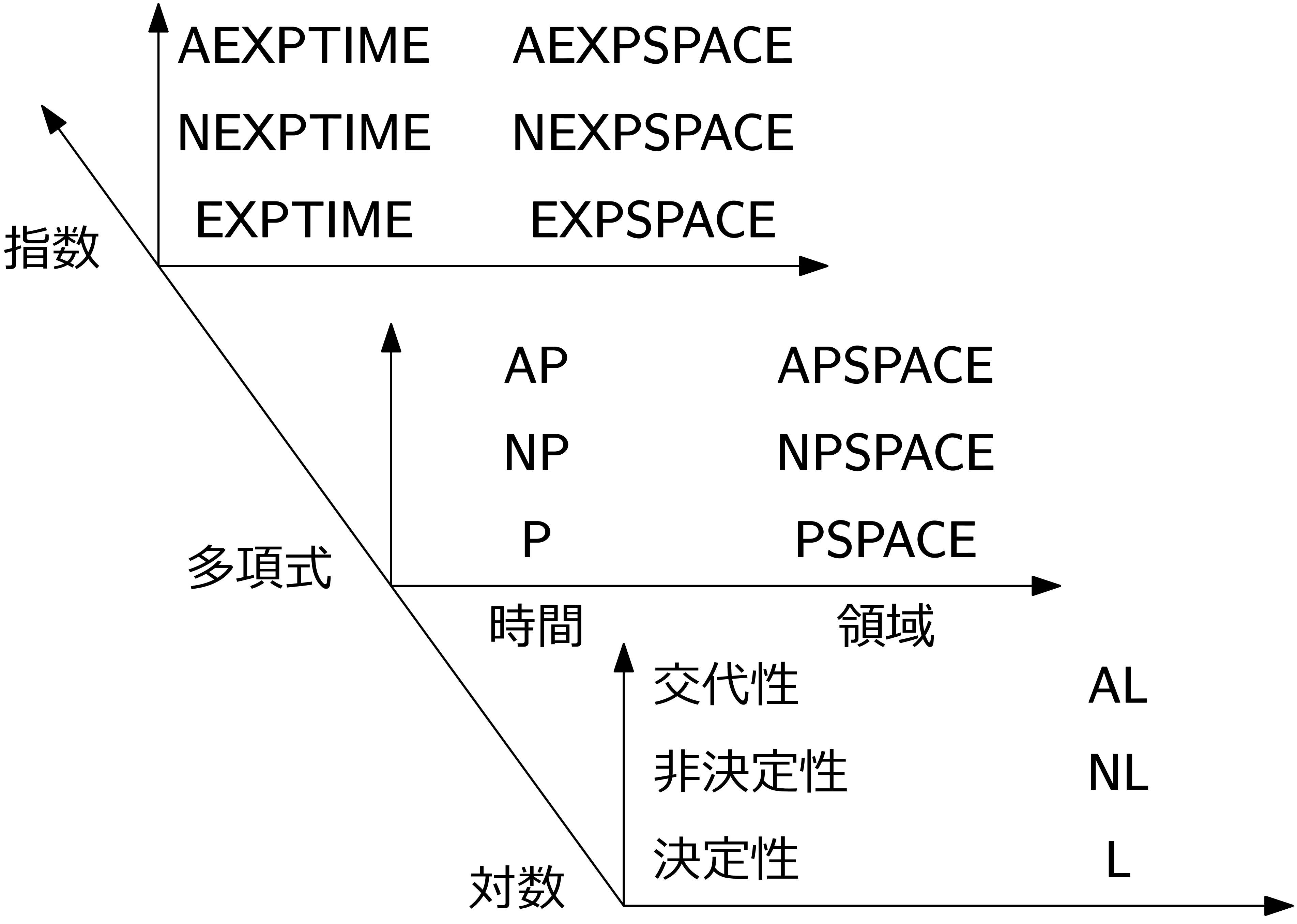
[復習] 交代性を使って解くとは？

定義 (非形式)：交代性アルゴリズム

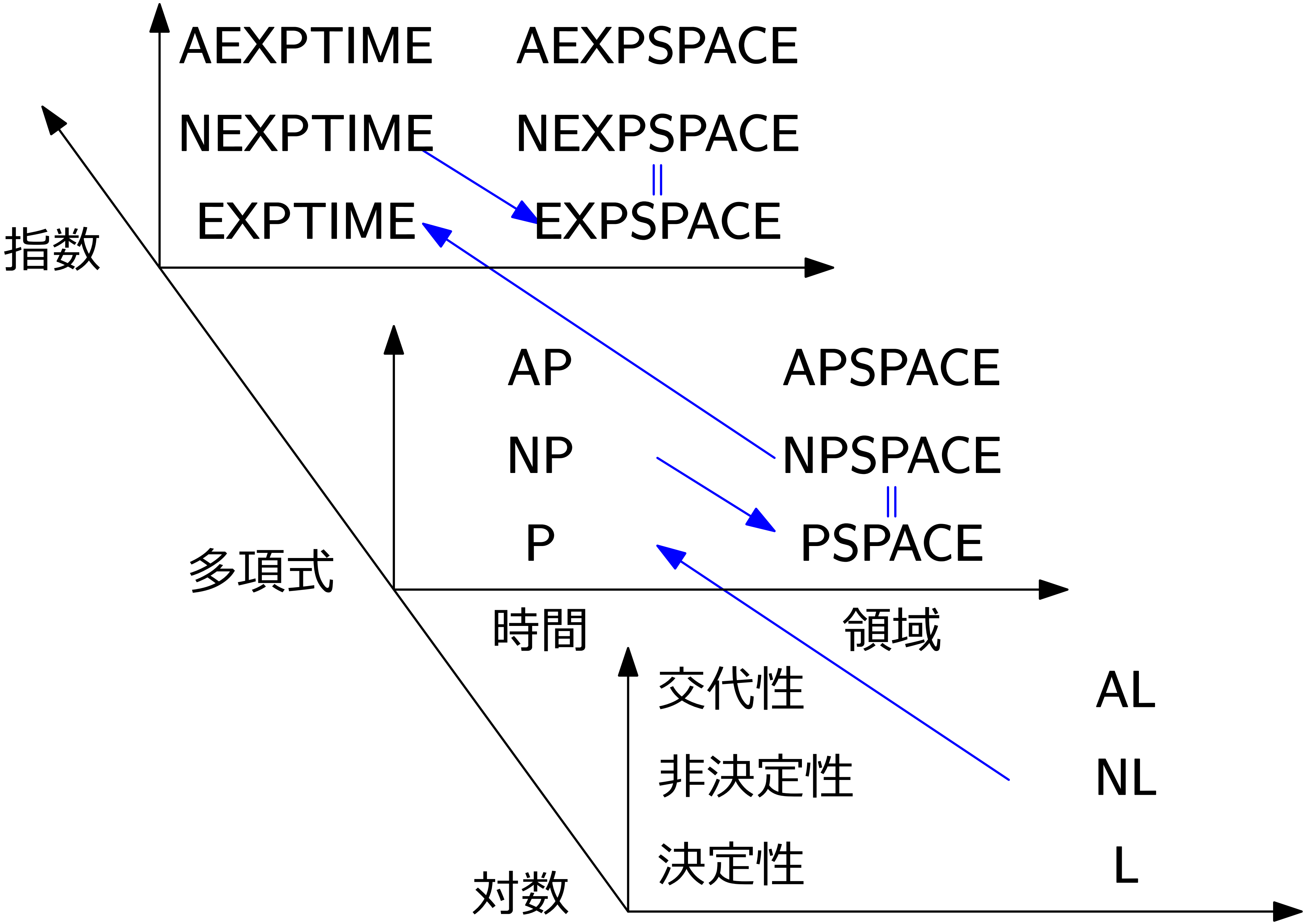
判定問題 P を **解く交代性アルゴリズム** とは,
任意の入力 I に対して，次を行うもの

- 存在状況に到達したとき，guess をうまく選んで次が成り立つ
  1. どの経路も必ず停止状況に到達する
  2. I が Yes インスタンス $\Rightarrow$ すべての経路が Yes の停止状況に到達
  3. I が No インスタンス $\Rightarrow$ ある経路が No の停止状況に到達

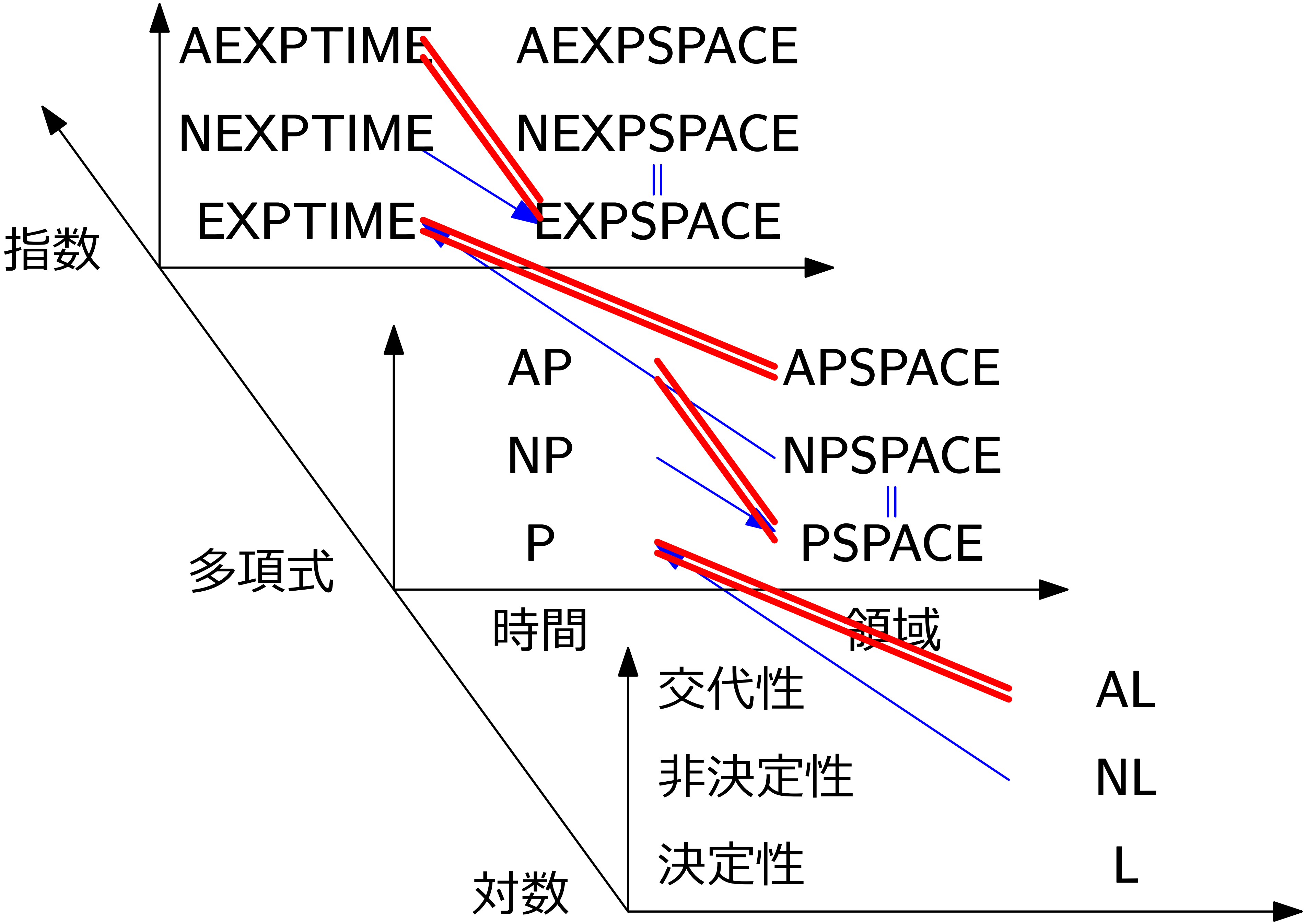
フロアごと？に書くと


AEXPTIME
AEXPSPACE
NEXPTIME
NEXPSPACE
EXPTIME
EXPSPACE
指数
AP
APSPACE
NP
NPSPACE
P
PSPACE
多項式
時間
領域
交代性
AL
非決定性
NL
決定性
L
対数

フロアごと？に書くと


AEXPTIME
AEXPSPACE
NEXPTIME
NEXPSPACE
EXPTIME
EXPSPACE
指数
AP
APSPACE
NP
NPSPACE
P
PSPACE
多項式
時間
領域
交代性
AL
非決定性
NL
決定性
L
対数

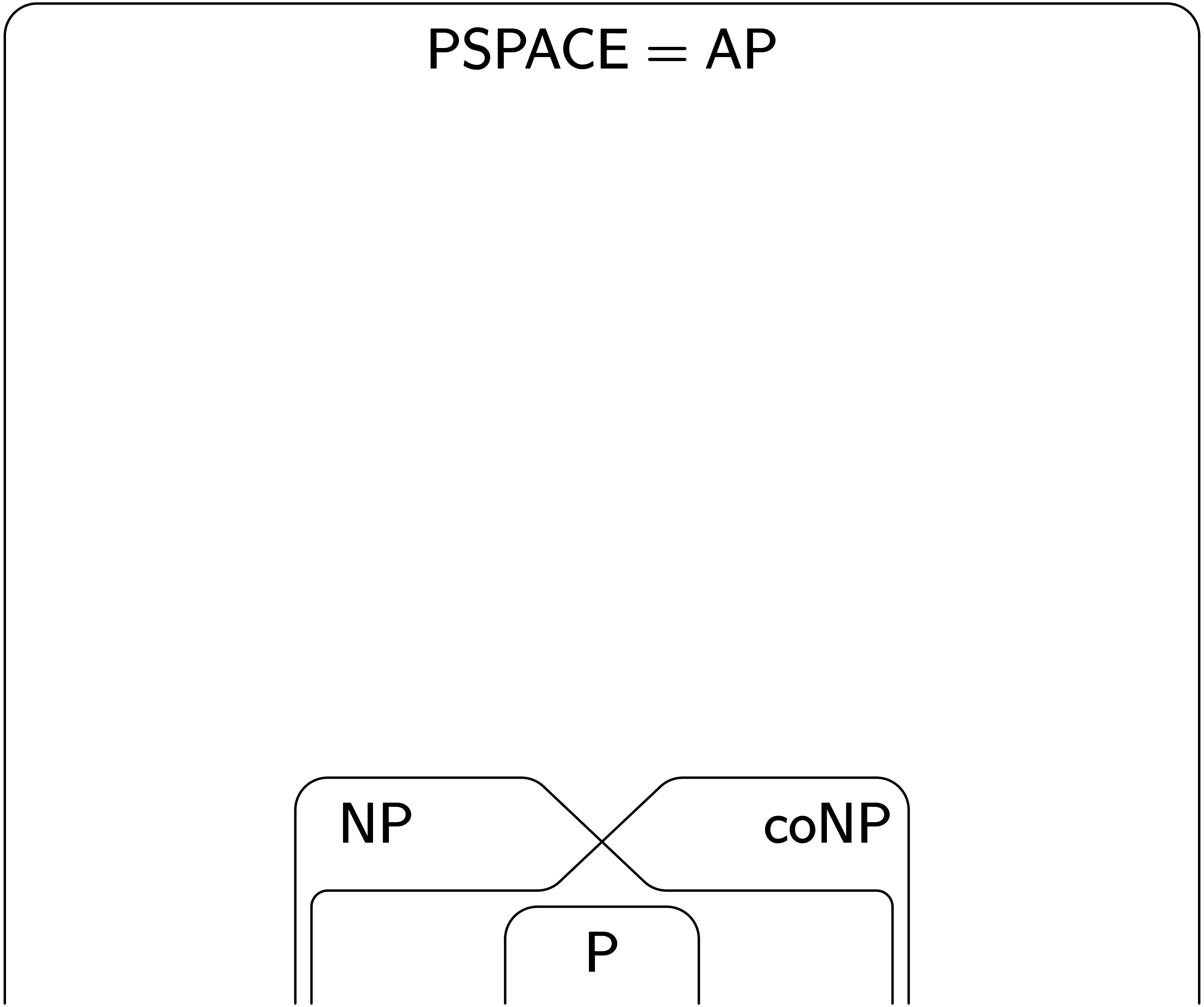
フロアごと？ に書くと


AEXPTIME
AEXPSPACE
NEXPTIME
NEXPSPACE
EXPTIME
EXPSPACE
指数
AP
APSPACE
NP
NPSPACE
P
PSPACE
多項式
時間
領域
交代性
AL
非決定性
NL
決定性
L
対数

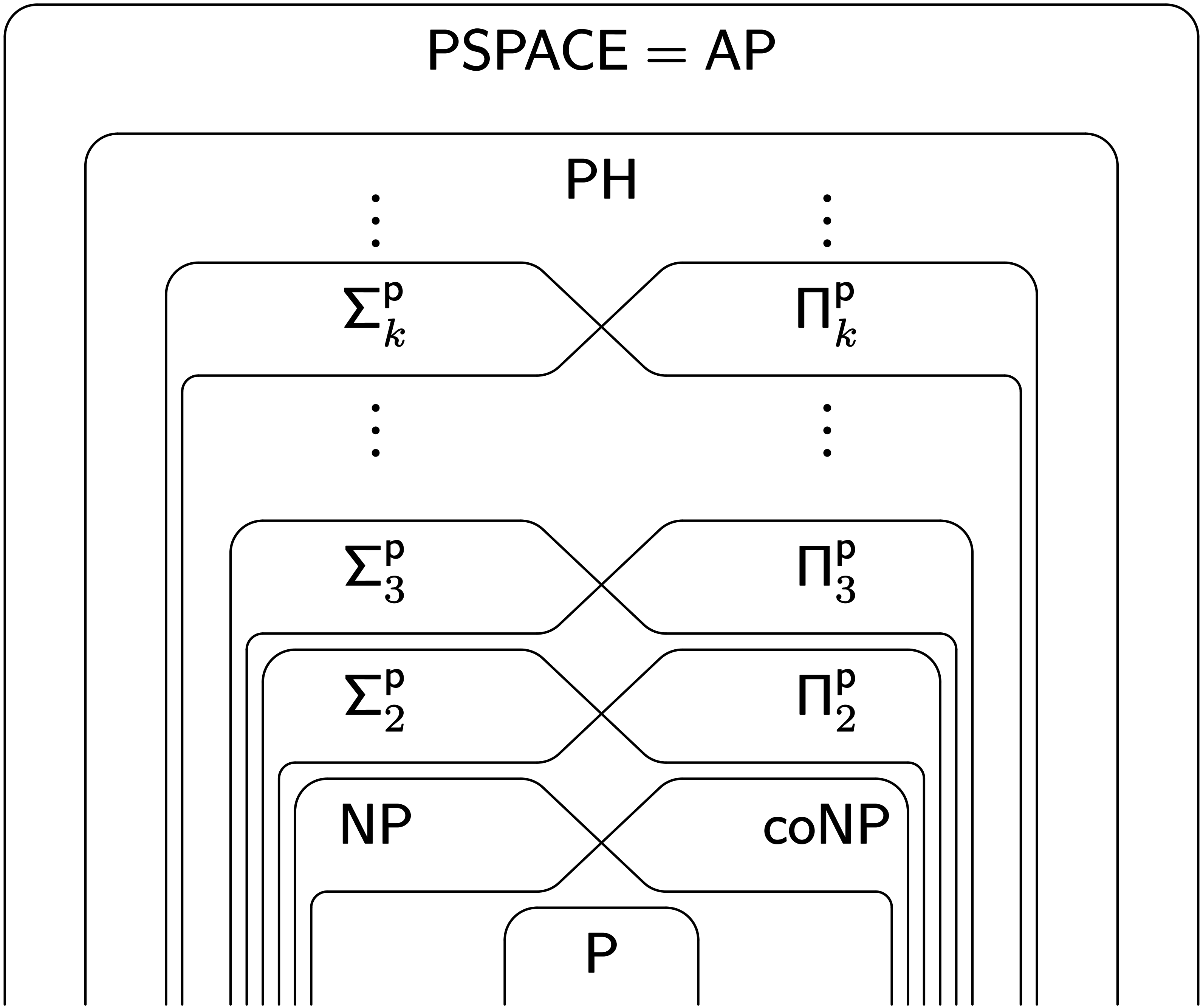
本日の内容

1. **多項式階層とは？**
2. 多項式階層における完全問題
3. 多項式階層の崩壊

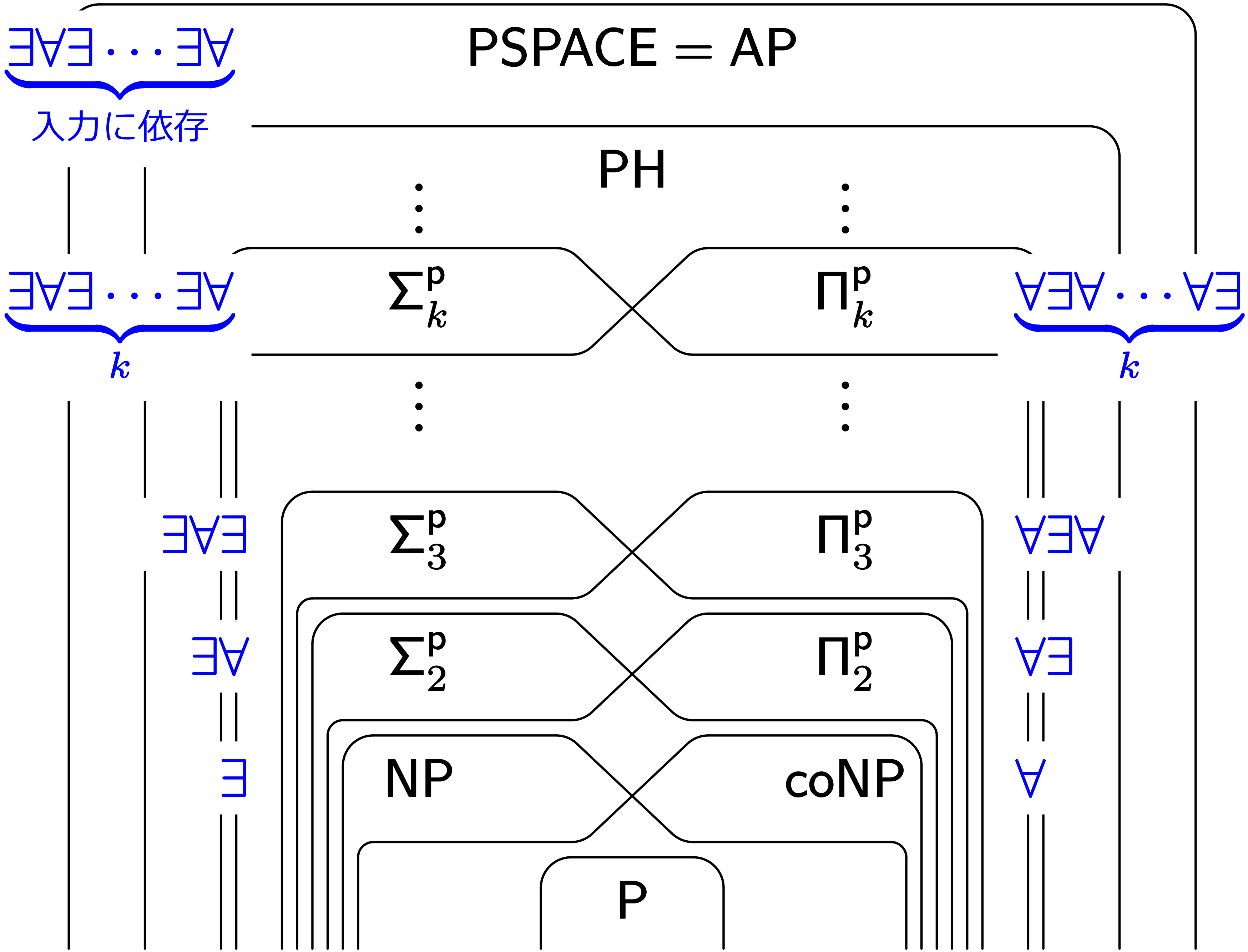
PSPACE と多項式階層



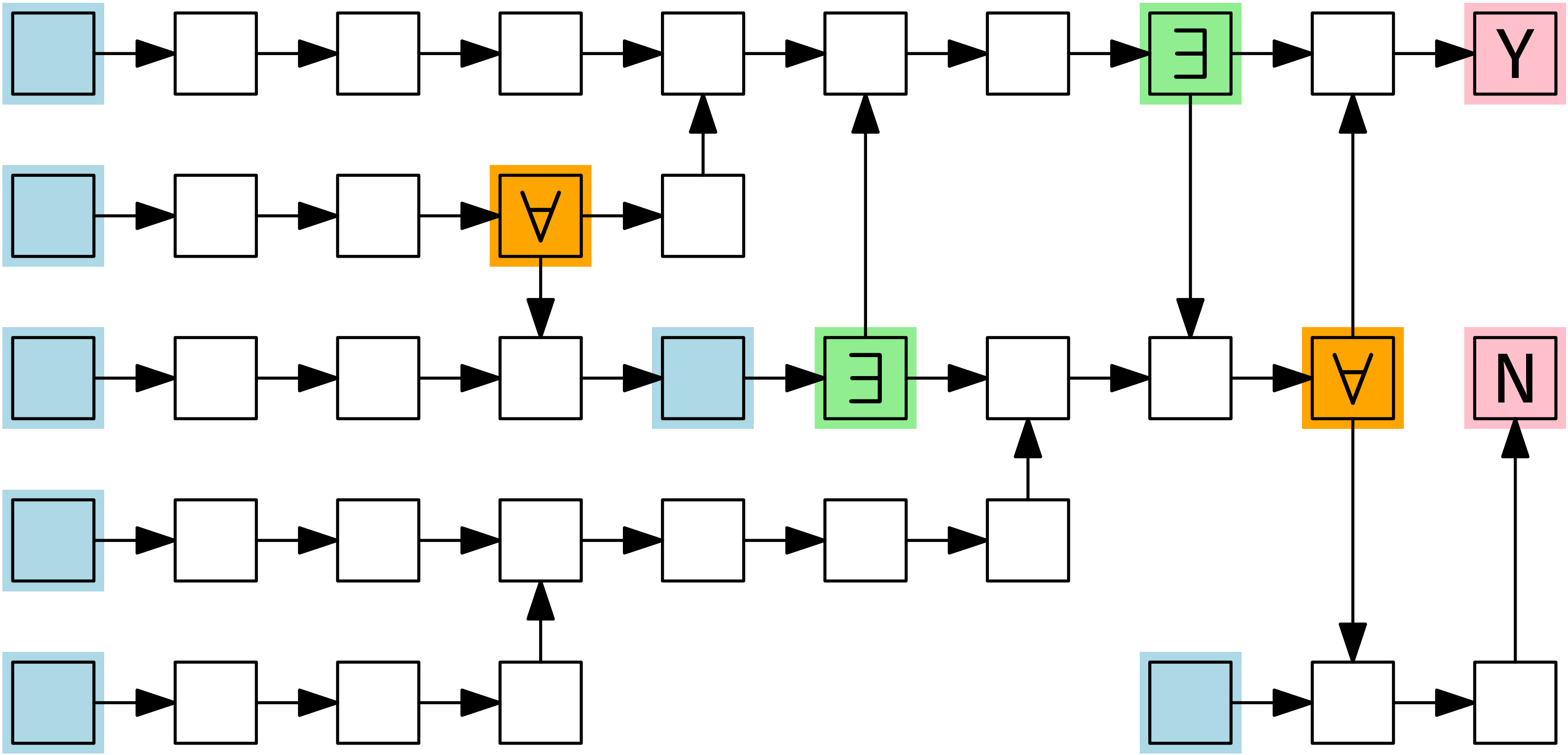
PSPACE と多項式階層



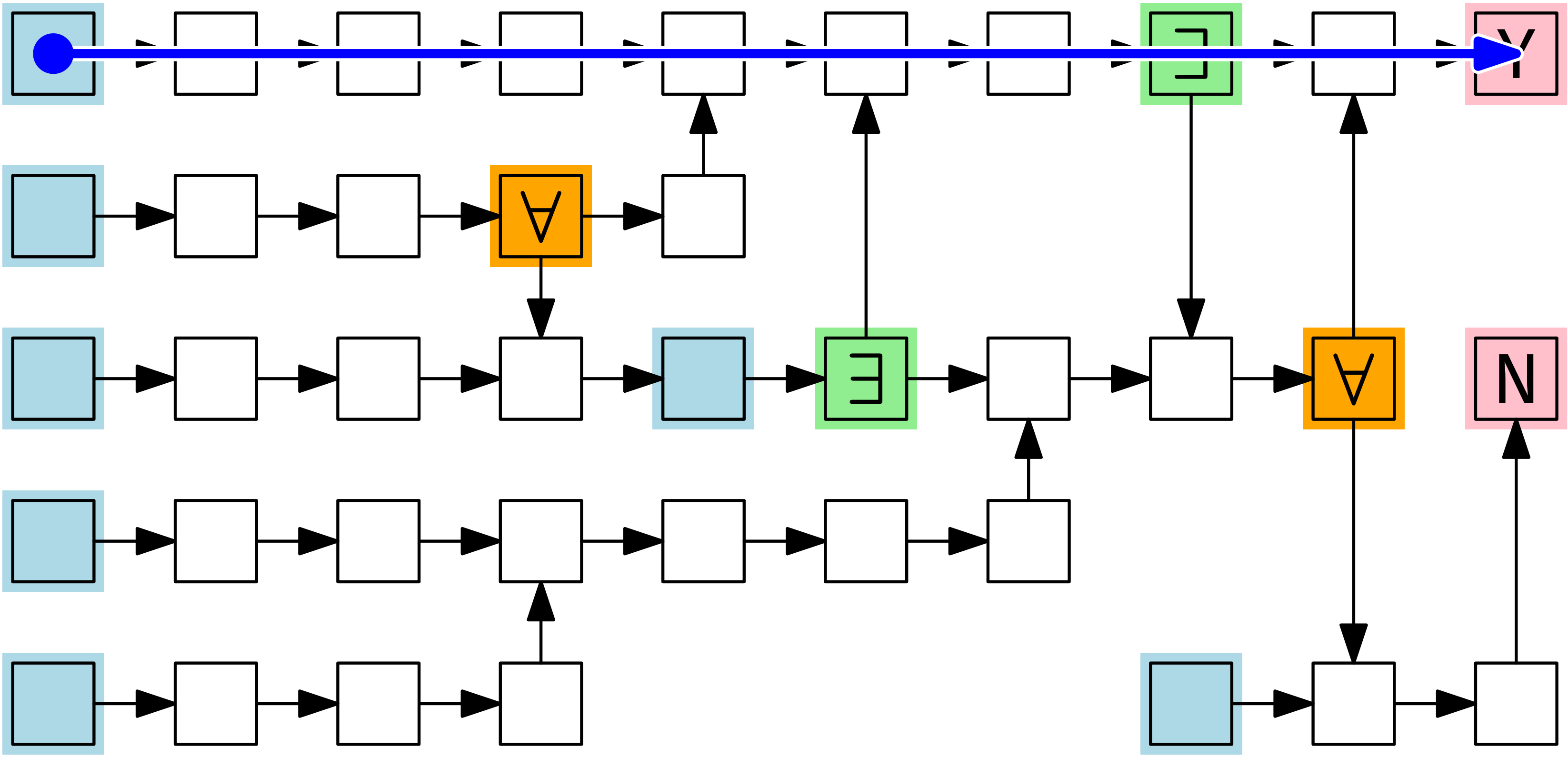
PSPACE と多項式階層



限定交代性

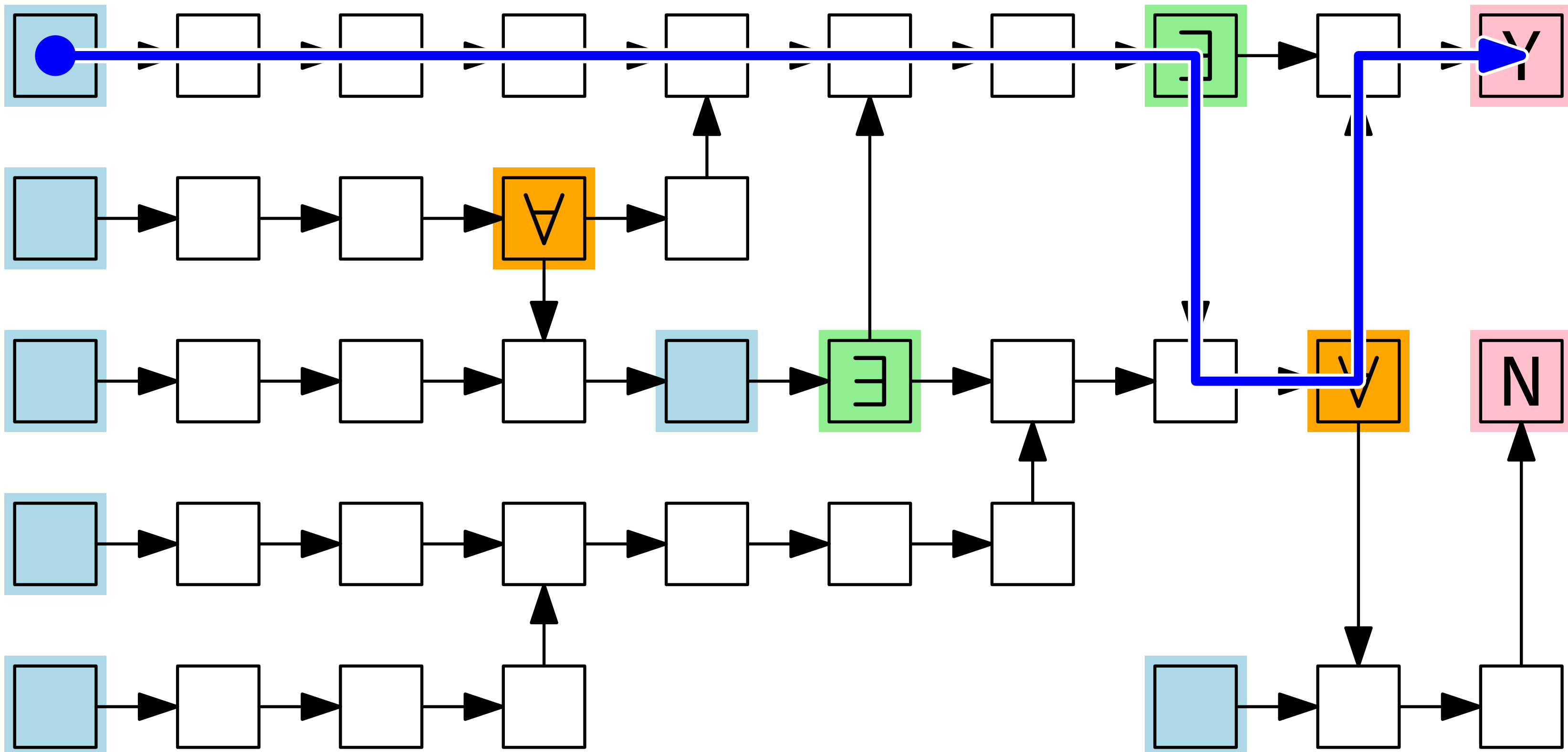


限定交代性



∃

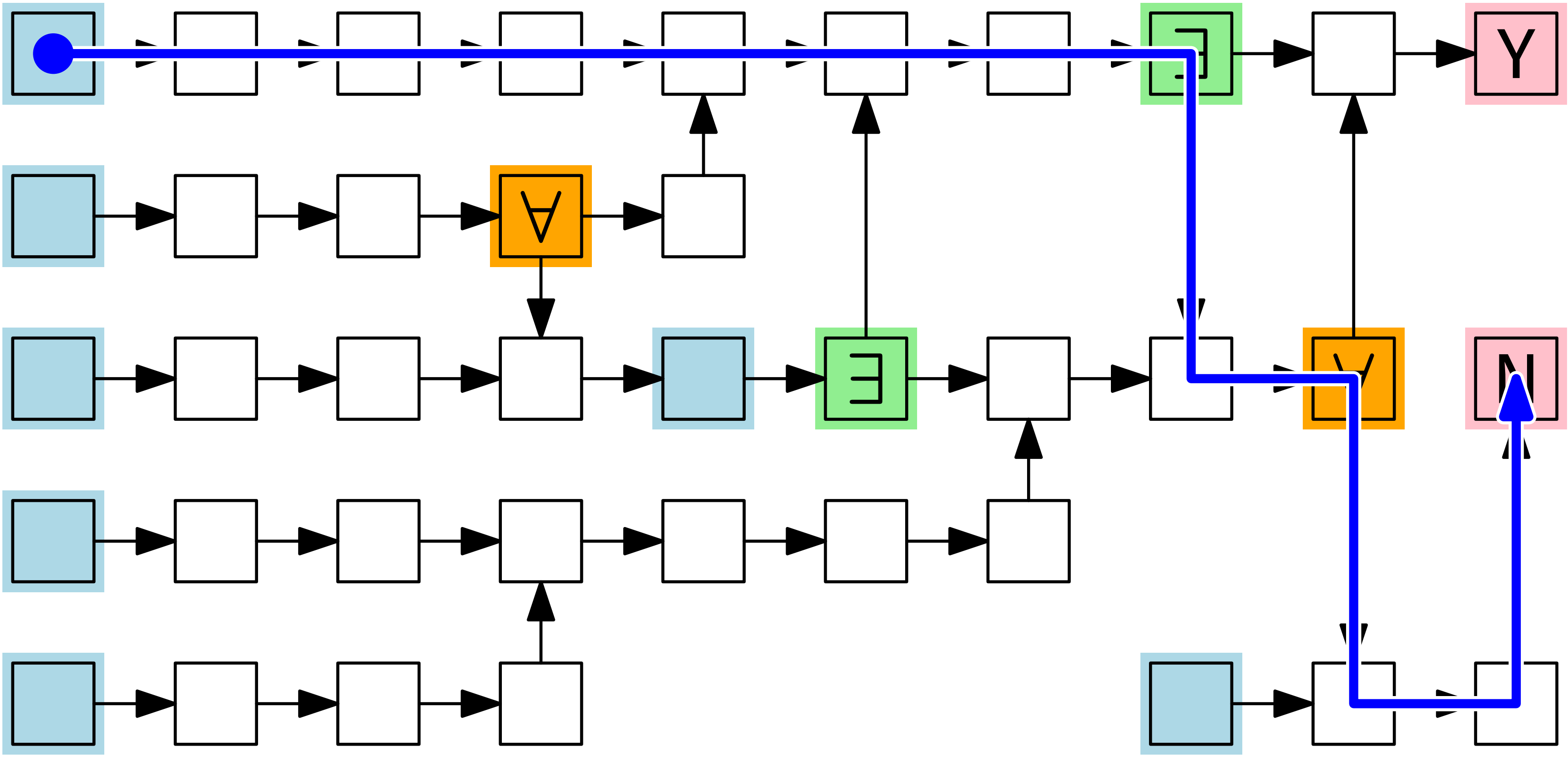
限定交代性



∃

∃∀

限定交代性

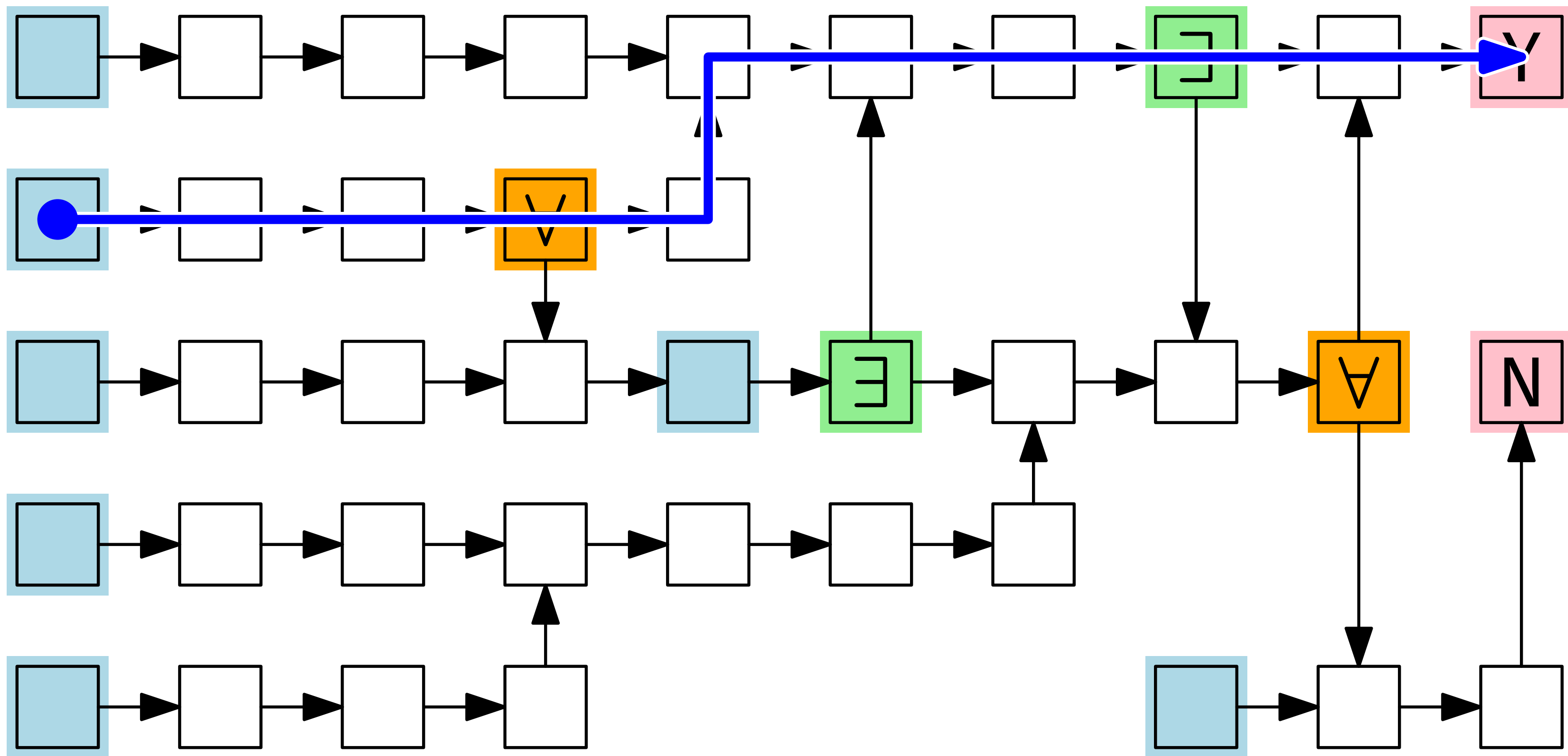


∃

∃∀

∃∀

限定交代性

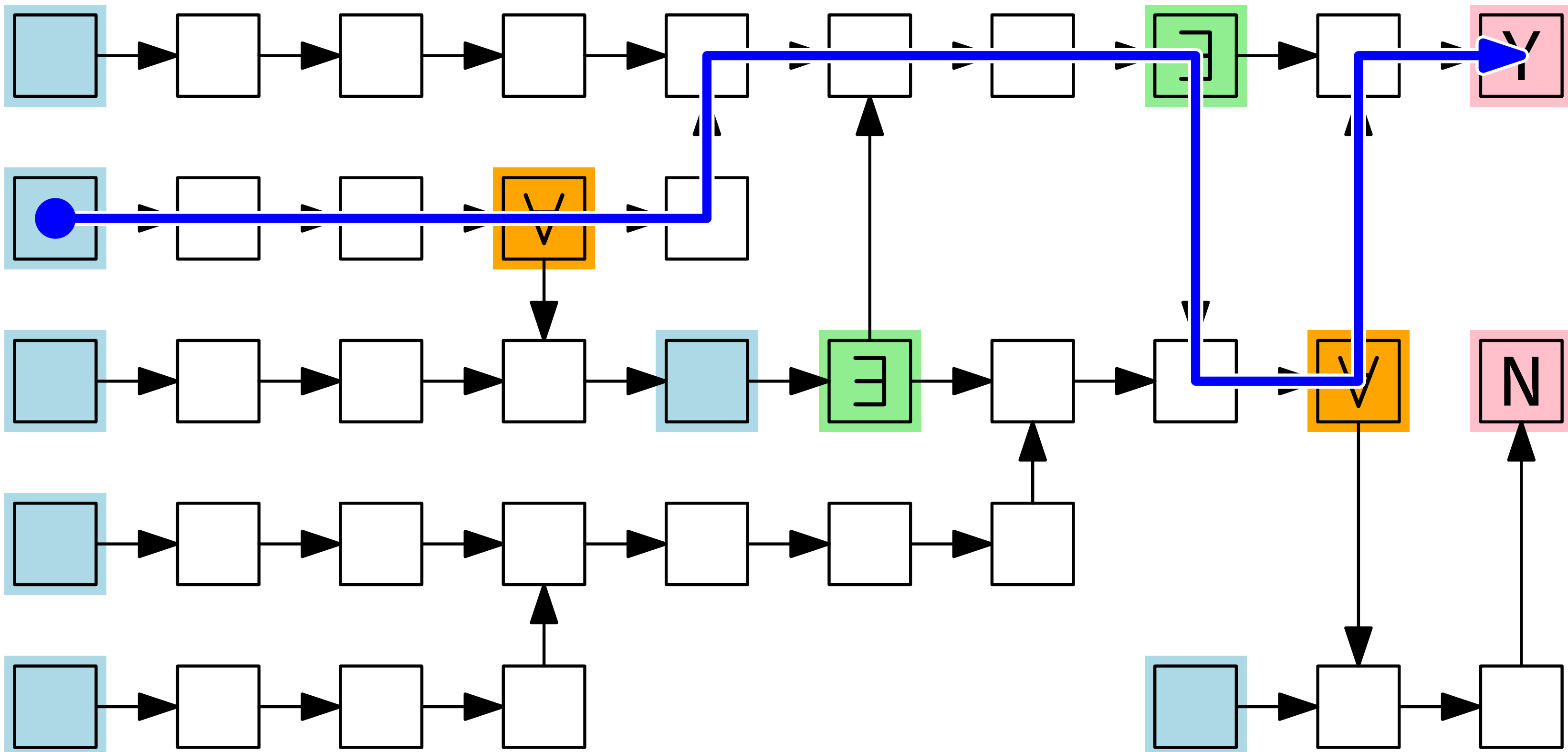


$\exists$

$\exists\forall$

$\exists\forall$

$\forall\exists$



∀
∃
∃
∀
Y
N

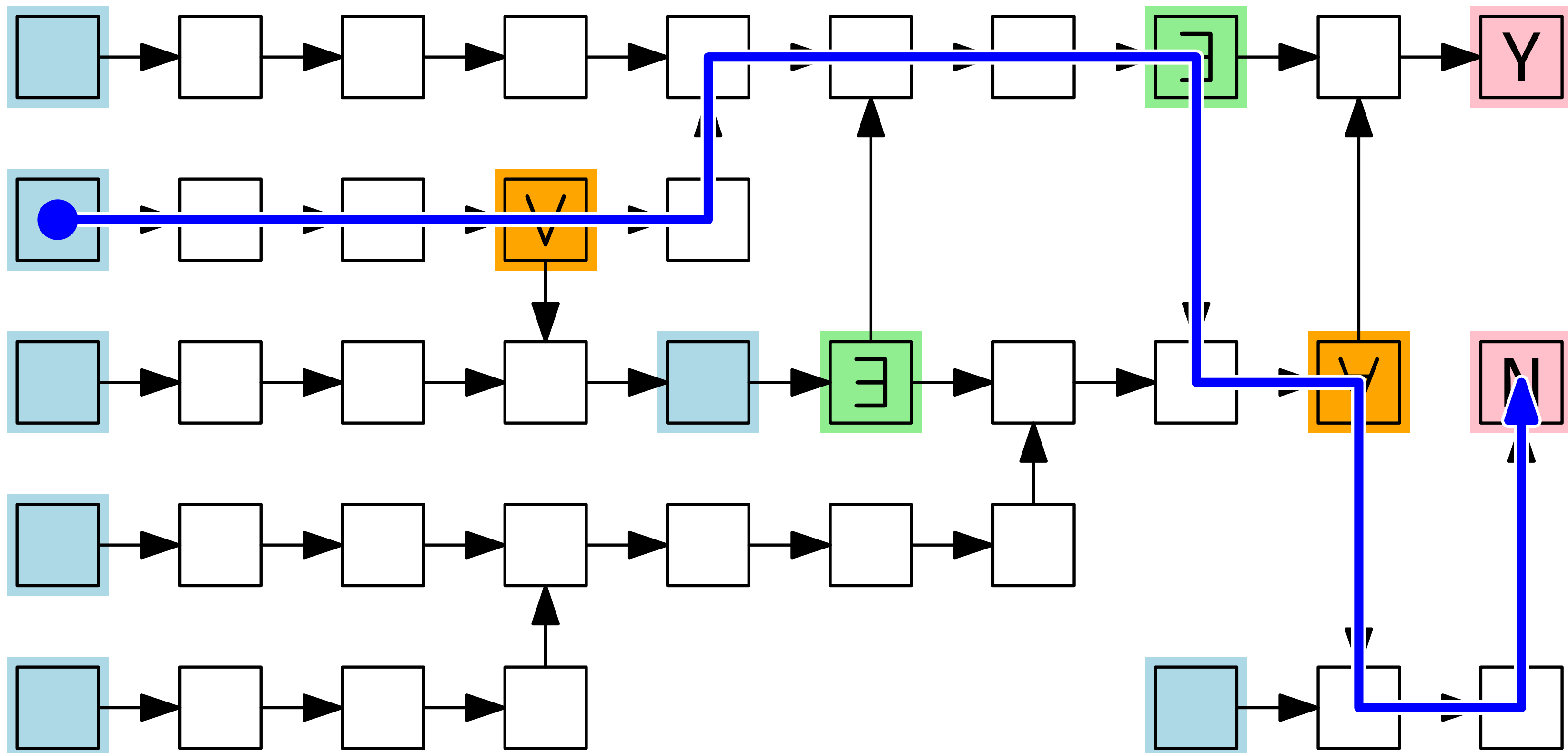
∃

∃∀

∃∀

∀∃

∀∃∀


∃
Y
∀
∃
∀
N

∃

∃∀

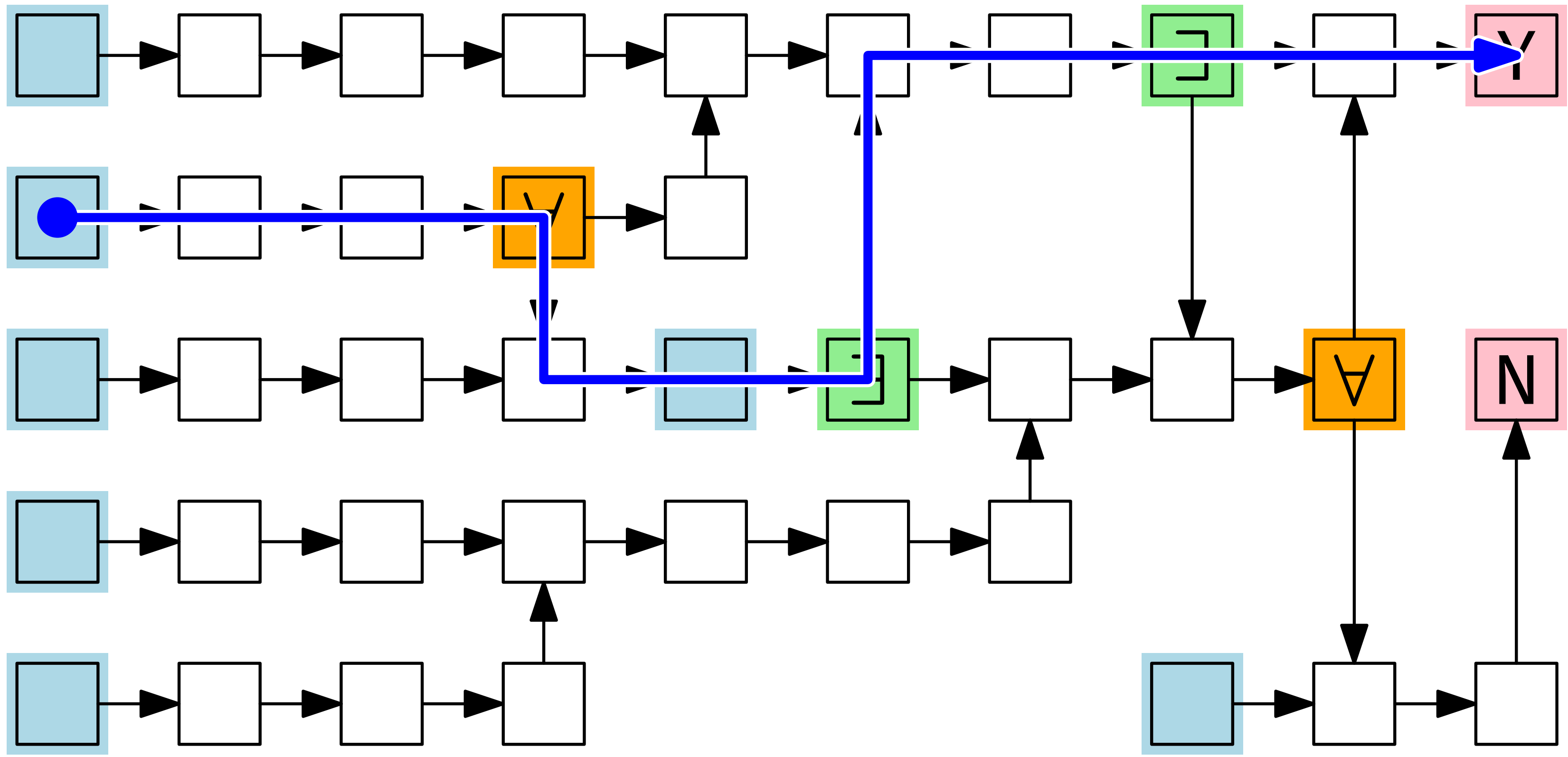
∃∀

∀∃

∀∃∀

∀∃∀

限定交代性



∃   ∀∃   (∀∃∃)

∃∀

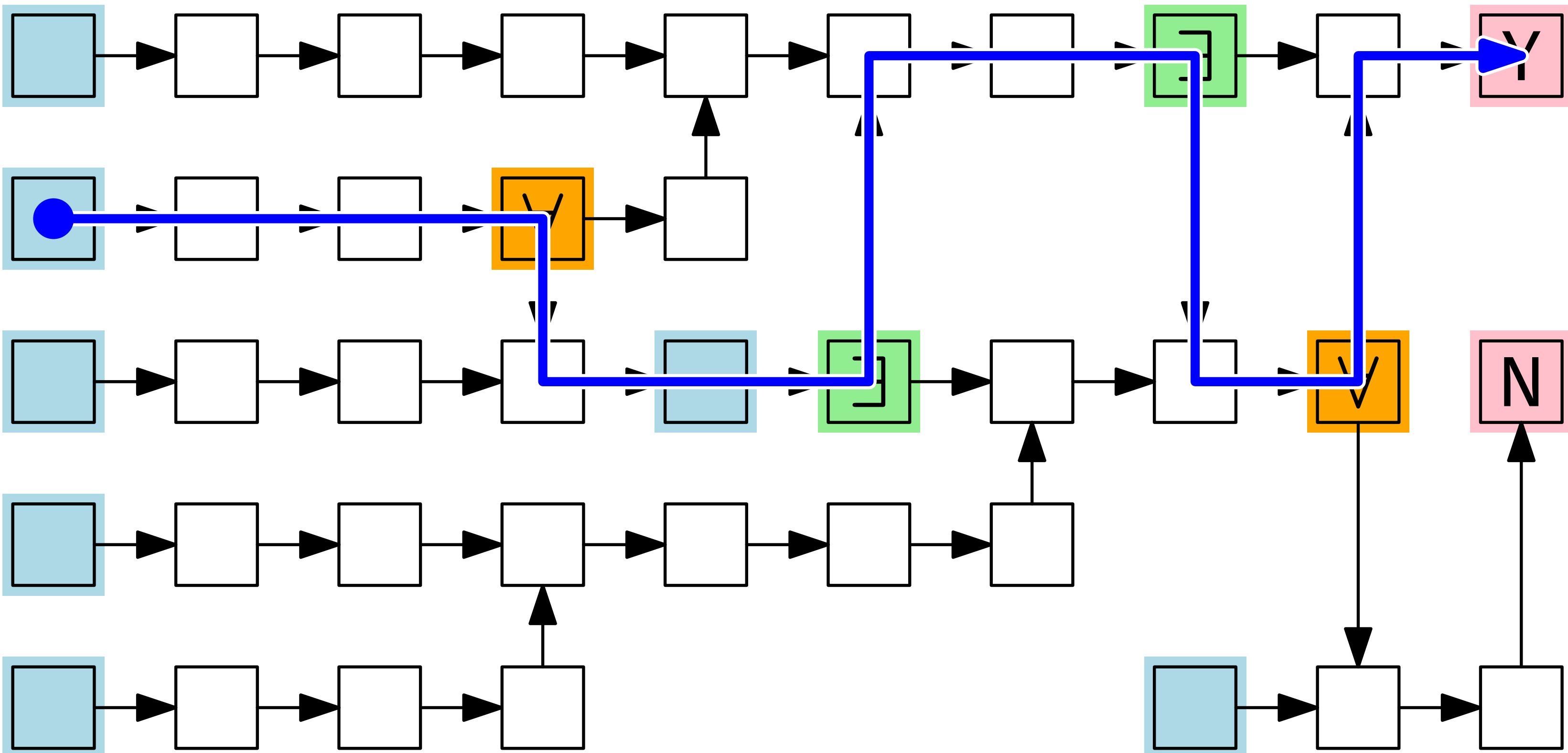
∃∀

∀∃

∀∃∀

∀∃∀

限定交代性



∃ ∀∃

∃∀ ∀∃∀ (∀∃∃∀)

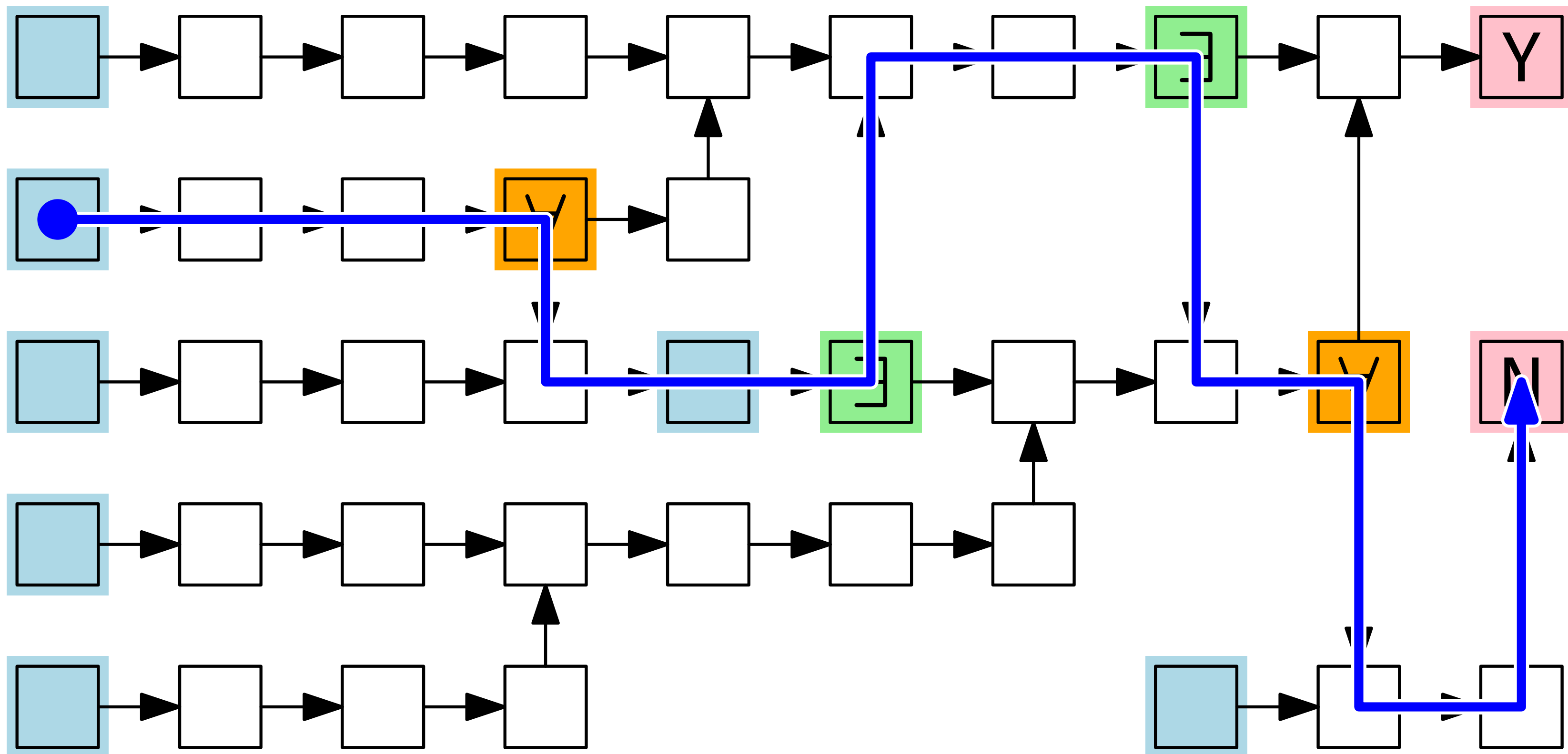
∃∀

∀∃

∀∃∀

∀∃∀

限定交代性



$\exists$

$\exists\forall$

$\exists\forall$

$\forall\exists$

$\forall\exists\forall$

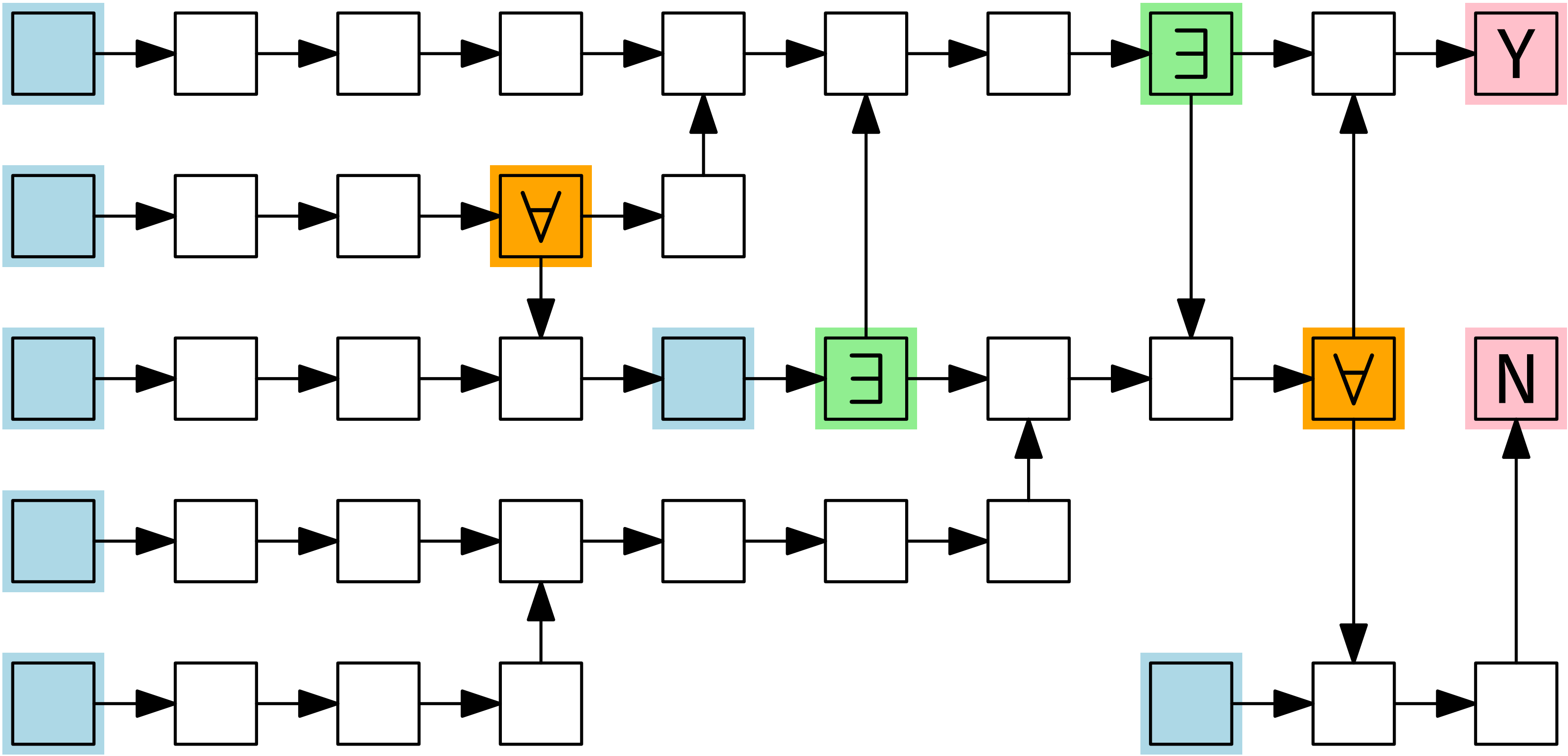
$\forall\exists\forall$

$\forall\exists$

$\forall\exists\forall$

$\forall\exists\forall \quad (\forall\exists\exists\forall)$

限定交代性



∃	∀∃
∃∀	∀∃∀
∃∀	∀∃∀
∀∃	⋮
∀∃∀	
∀∃∀	

最も長い量化子の交代は ∀∃∀

限定交代性：複雑性クラス Σ_k^{p} と Π_k^{p}

整数 $k \geq 0$ (定数)

定義：Σ_k^{p} (Meyer, Stockmeyer '72, Stockmeyer '76)

クラス Σ_k^{p} とは，
最大長の交代がどれも ∃ で始まり，k 個の量化子を持つ
多項式時間交代性アルゴリズムで解ける判定問題全体

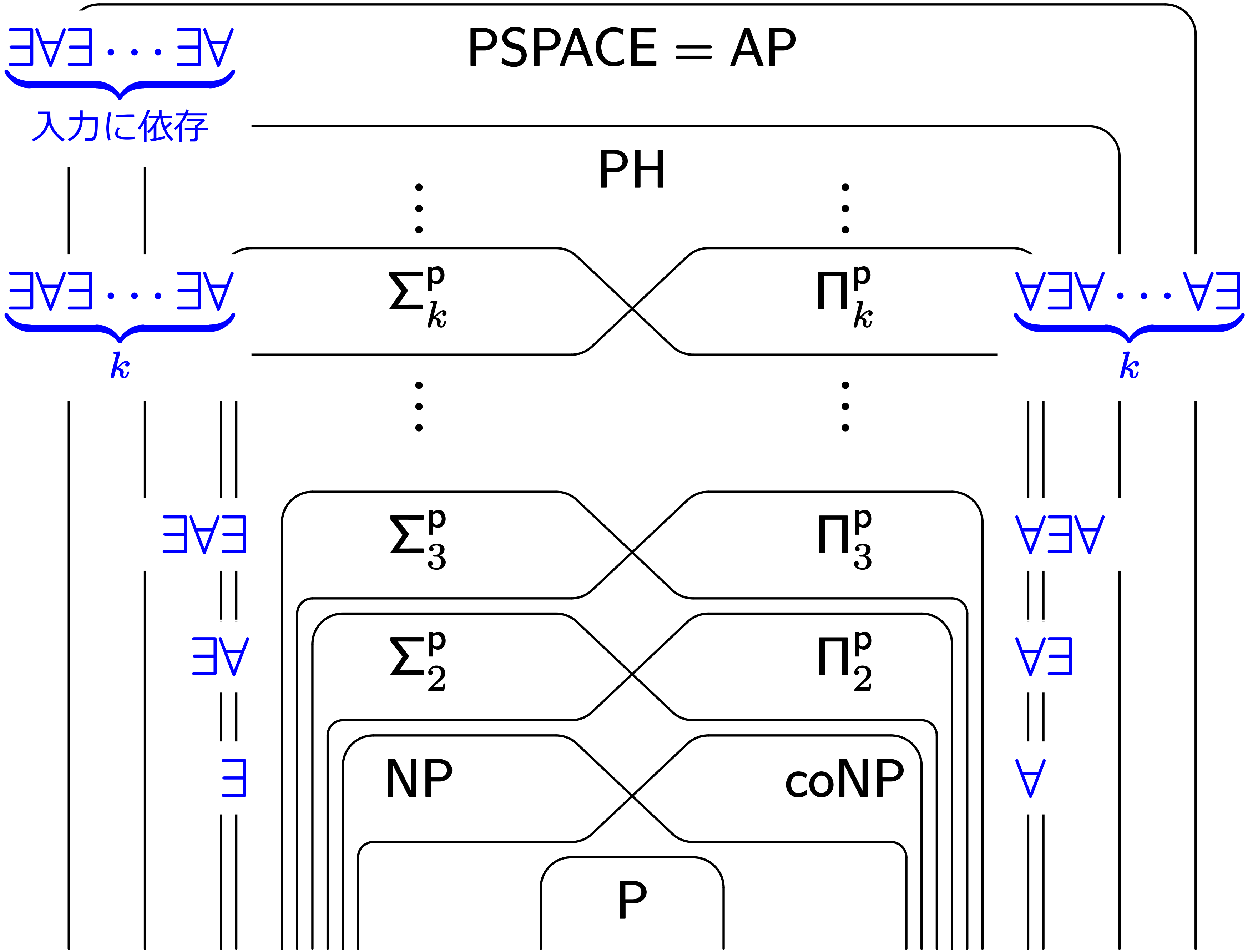
定義：Π_k^{p} (Meyer, Stockmeyer '72, Stockmeyer '76)

クラス Π_k^{p} とは，
最大長の交代がどれも ∀ で始まり，k 個の量化子を持つ
多項式時間交代性アルゴリズムで解ける判定問題全体

読み方：シグマ・k・ピー，パイ・k・ピー

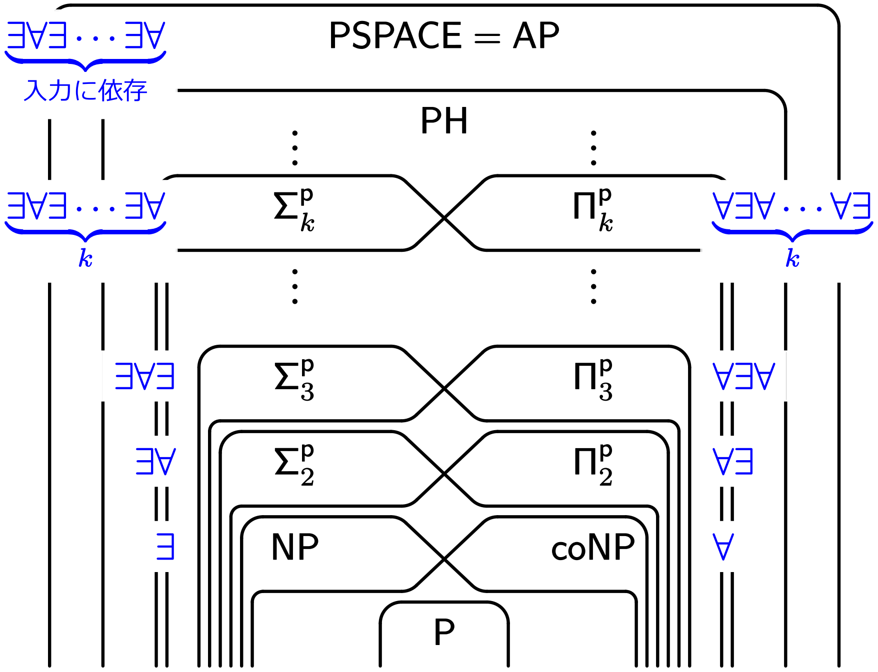
Σ は sum，Π は product，p は polynomial の意

PSPACE と多項式階層：再



性質：定義から簡単に分かる

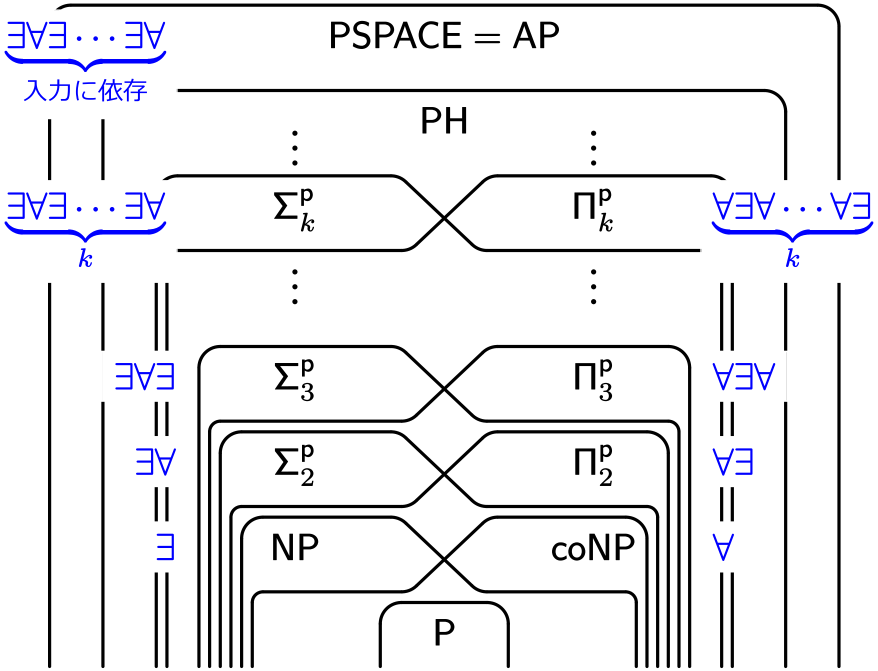
- $\Sigma_0^{\mathsf{p}} = \Pi_0^{\mathsf{p}} = \mathsf{P}$
- 任意の整数 $k \geq 0$ に対して
  - $\Sigma_k^{\mathsf{p}} \subseteq \Pi_{k+1}^{\mathsf{p}}, \quad \Sigma_k^{\mathsf{p}} \subseteq \Sigma_{k+1}^{\mathsf{p}}$
  - $\Pi_k^{\mathsf{p}} \subseteq \Sigma_{k+1}^{\mathsf{p}}, \quad \Pi_k^{\mathsf{p}} \subseteq \Pi_{k+1}^{\mathsf{p}}$



限定交代性：性質 (2)

性質：定義から簡単に分かる

- $\Sigma_1^{\mathsf{p}} = \mathsf{NP}, \quad \Pi_1^{\mathsf{p}} = \mathsf{coNP}$
- 任意の整数 $k \geq 0$ に対して，
  - $\mathsf{co}\Sigma_k^{\mathsf{p}} = \Pi_k^{\mathsf{p}}$
  - $\mathsf{co}\Pi_k^{\mathsf{p}} = \Sigma_k^{\mathsf{p}}$



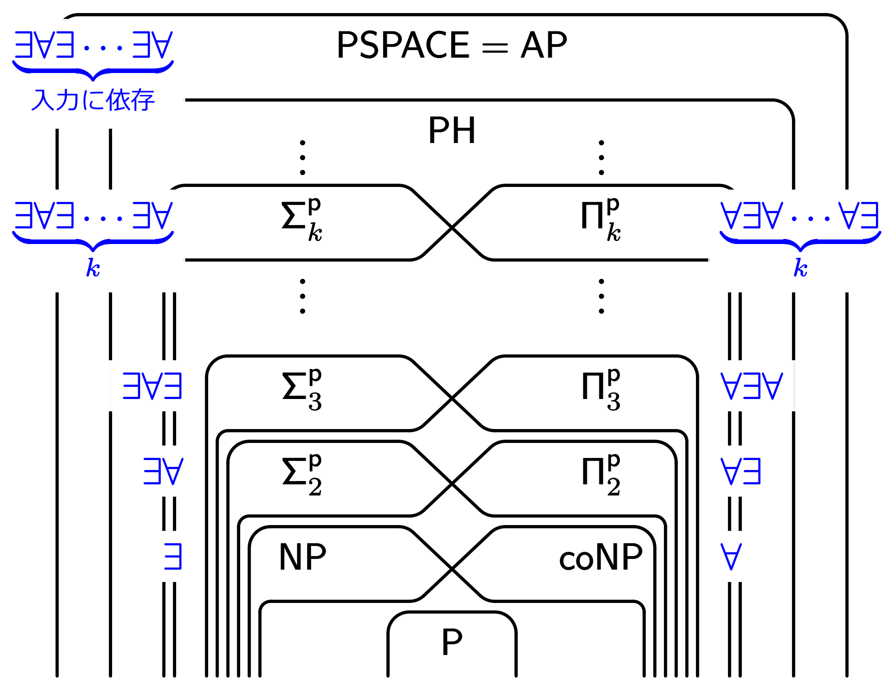
多項式階層 (多項式時間階層)

定義：PH (Meyer, Stockmeyer '72, Stockmeyer '76)

$$\mathsf{PH} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma_k^{\mathsf{p}}$$

PH は polynomial hierarchy の意

(polynomial-time hierarchy)

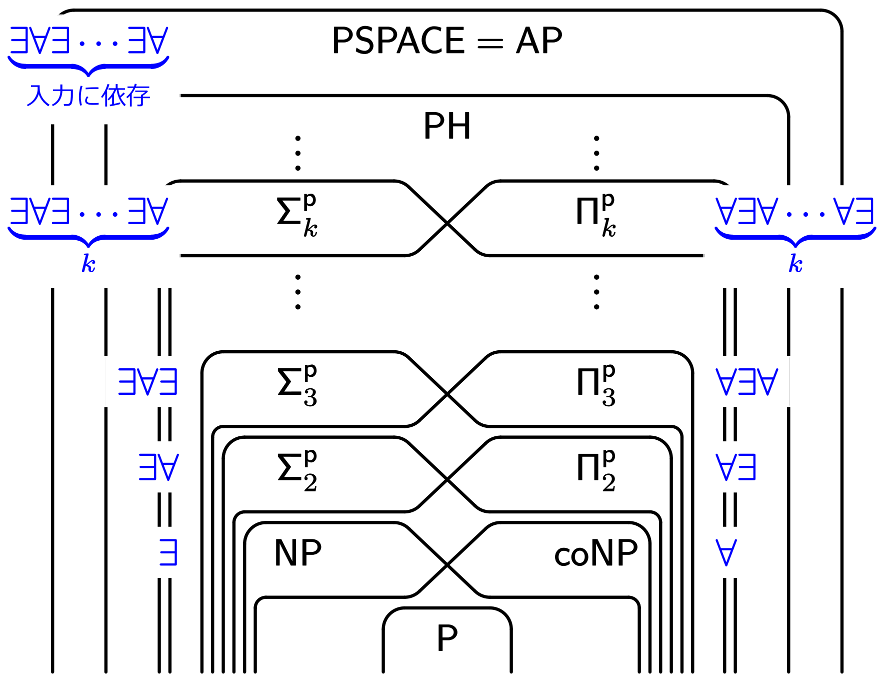


多項式階層：性質

性質：定義と今までの議論から簡単に分かる

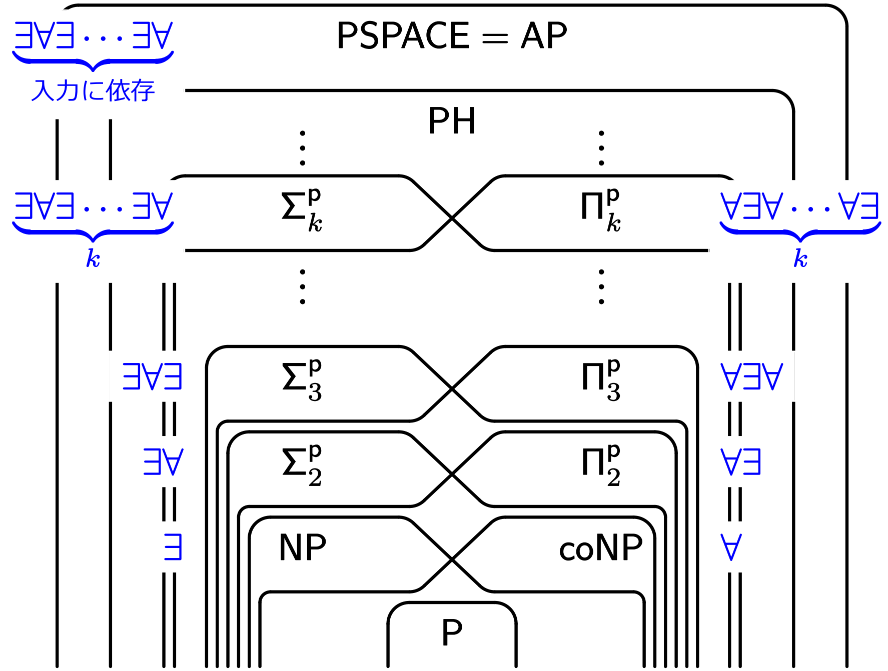
- PH $\subseteq$ PSPACE
- 任意の整数 $k \geq 0$ に対して
  - $\Sigma_k^{\mathsf{p}} \subseteq \mathsf{PH}, \quad \Pi_k^{\mathsf{p}} \subseteq \mathsf{PH}$

<u>定義</u> (再)：$\mathsf{PH} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Sigma_k^{\mathsf{p}}$



未解決問題

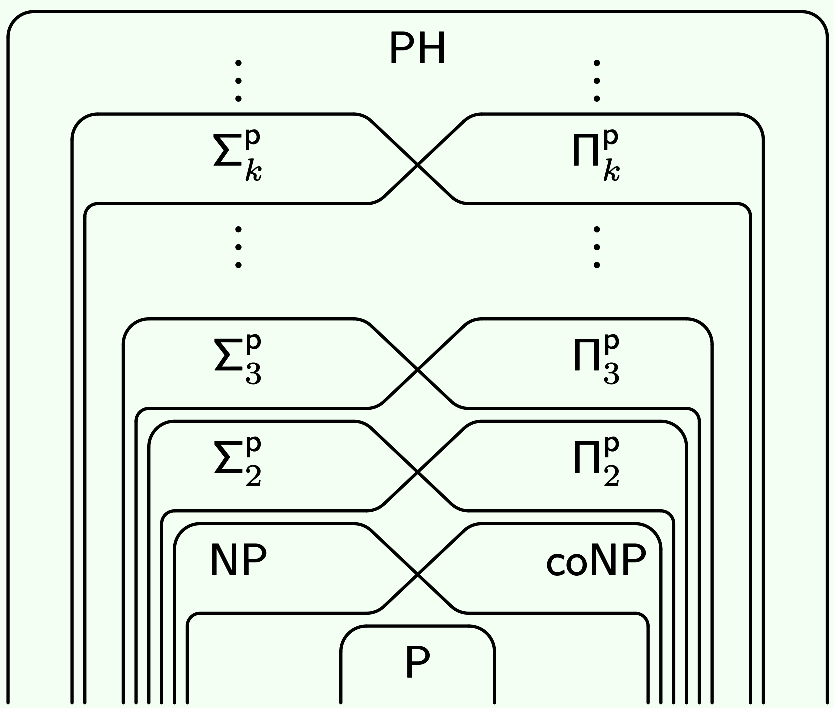
- $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{PH} \stackrel{?}{=} \mathsf{PSPACE}$
- 任意の整定数 $\ell > k \geq 0$ に対して
  - $\Sigma_k^{\mathsf{p}} \stackrel{?}{=} \Pi_\ell^{\mathsf{p}}$, $\Sigma_k^{\mathsf{p}} \stackrel{?}{=} \Sigma_\ell^{\mathsf{p}}$, $\Pi_k^{\mathsf{p}} \stackrel{?}{=} \Sigma_\ell^{\mathsf{p}}$, $\Pi_k^{\mathsf{p}} \stackrel{?}{=} \Pi_\ell^{\mathsf{p}}$
  - $\Sigma_k^{\mathsf{p}} \stackrel{?}{=} \mathsf{PH}$, $\Pi_k^{\mathsf{p}} \stackrel{?}{=} \mathsf{PH}$



注意

「**多項式階層**」という用語は次の 2 つの意味で用いられる

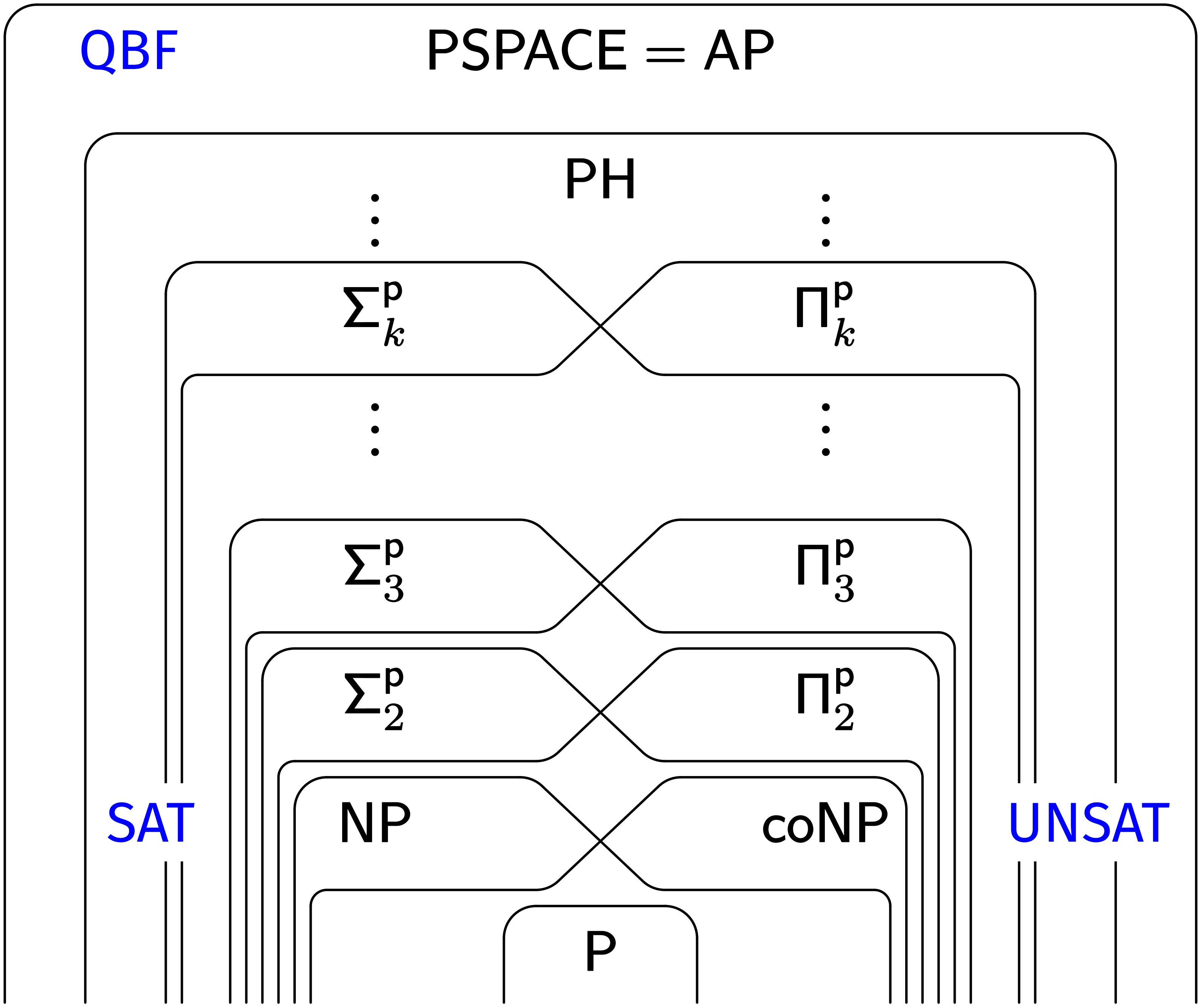
1. 複雑性クラス PH
2. 次の図で表される複雑性クラスの包含関係全体



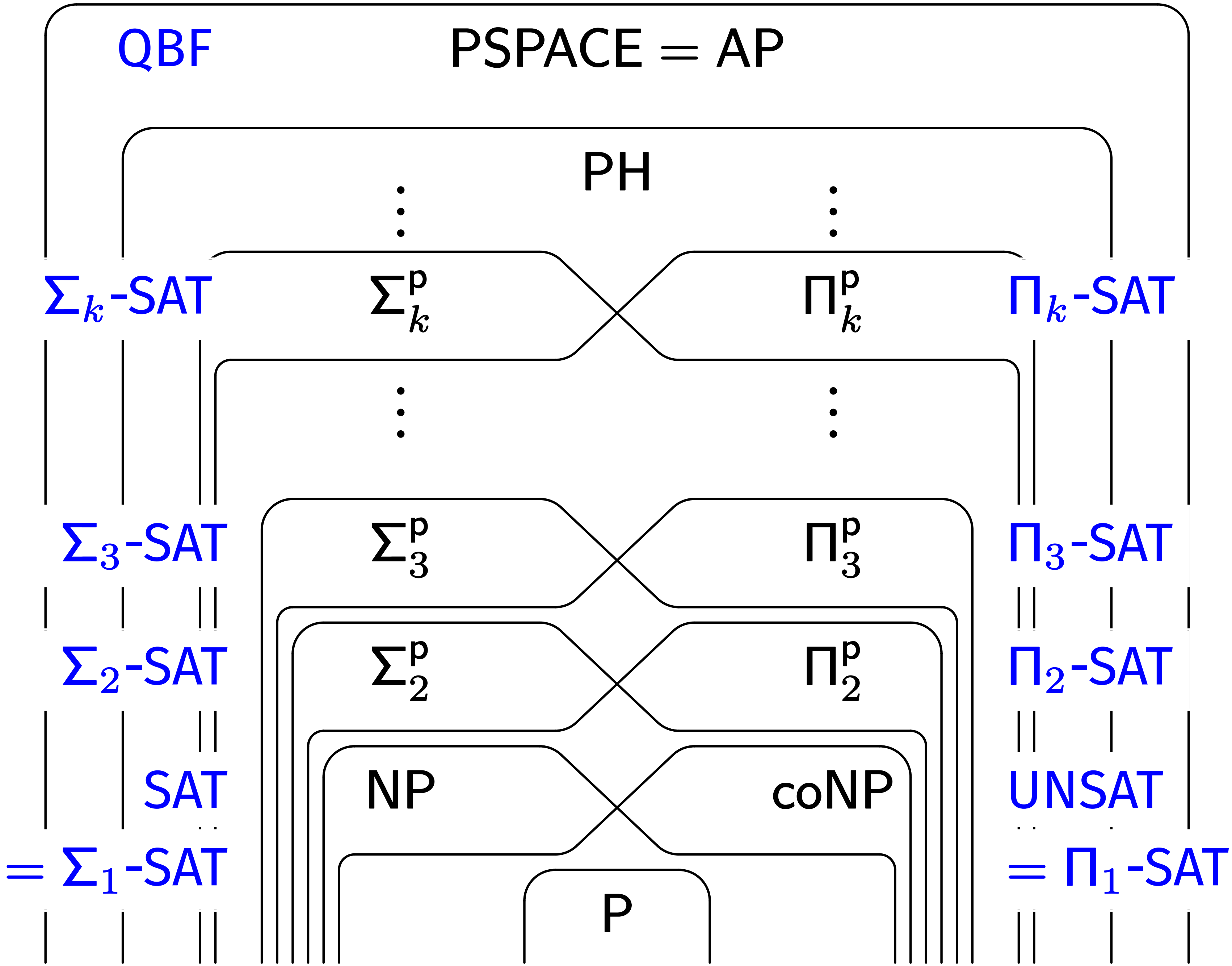
本日の内容

1. 多項式階層とは？
2. **多項式階層における完全問題**
3. 多項式階層の崩壊

多項式階層と完全問題


QBF
PSPACE = AP
PH
Σ_k^{p}
Π_k^{p}
Σ_3^{p}
Π_3^{p}
Σ_2^{p}
Π_2^{p}
SAT
NP
coNP
UNSAT
P

多項式階層と完全問題


QBF
PSPACE = AP
PH
Σ_k-SAT
Σ^p_k
Π^p_k
Π_k-SAT
Σ_3-SAT
Σ^p_3
Π^p_3
Π_3-SAT
Σ_2-SAT
Σ^p_2
Π^p_2
Π_2-SAT
SAT
= Σ_1-SAT
NP
coNP
UNSAT
= Π_1-SAT
P

[復習] QBF

問題：QBF (量化論理式問題，限定論理式問題)

入力： 命題論理式 $\varphi(X)$ $\quad$ (X は変数集合)

X の分割 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ $\quad$ (X_i は空でもよい)

出力： k が奇数，$\exists X_1 \, \forall X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes

$\forall X_1 \, \exists X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

k が偶数，$\exists X_1 \, \forall X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes

$\forall X_1 \, \exists X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

QBF = Quantified Boolean Formula problem

注：SAT は $X = X_1$ の場合に対応

性質 (証明しない) $\quad$ (Stockmeyer, Meyer ’73)

QBF は PSPACE 完全

問題：Σ_2-SAT

入力： 命題論理式 $\varphi(X)$ （X は変数集合）
X の 2 分割 X_1, X_2 （X_1, X_2 は空でもよい）

出力： $\exists X_1 \, \forall X_2 \colon \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes
$\forall X_1 \, \exists X_2 \colon \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

注：SAT は $X = X_1$ の場合に対応

性質 (証明しない) (Stockmeyer ’76, Wrathall ’76)

Σ_2-SAT は Σ_2^{p} 完全

Π_2-SAT

問題：Π_2-SAT

入力： 命題論理式 $\varphi(X)$ （X は変数集合）
X の 2 分割 X_1, X_2 （X_1, X_2 は空でもよい）

出力： $\forall X_1\, \exists X_2 \colon \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes
$\exists X_1\, \forall X_2 \colon \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

注：UNSAT は $X = X_1$ の場合に対応
SAT は $X = X_2$ の場合に対応

注：Π_2-SAT $= \overline{\Sigma_2\text{-SAT}}$

性質 (証明しない) (Stockmeyer '76, Wrathall '76)

Π_2-SAT は Π_2^{p} 完全

Σ_k-SAT

k は正整数の定数

問題：Σ_k-SAT

入力： 命題論理式 $\varphi(X)$ 　　(X は変数集合)

X の k 分割 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ 　　(X_i は空でもよい)

出力： k が奇数，$\exists X_1 \forall X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes

$\forall X_1 \exists X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

k が偶数，$\exists X_1 \forall X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes

$\forall X_1 \exists X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

注：QBF では k が非定数 $\leftrightarrow$ Σ_k-SAT では k が定数

性質 (証明しない) 　　(Stockmeyer ’76, Wrathall ’76)

任意の正定数 k に対して，Σ_k-SAT は Σ^{p}_k 完全

Π_k-SAT

k は正整数の定数

問題：Π_k-SAT

入力： 命題論理式 $\varphi(X)$ (X は変数集合)

X の k 分割 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ (X_i は空でもよい)

出力： k が奇数，$\forall X_1\, \exists X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes

$\exists X_1\, \forall X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

k が偶数，$\forall X_1\, \exists X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes

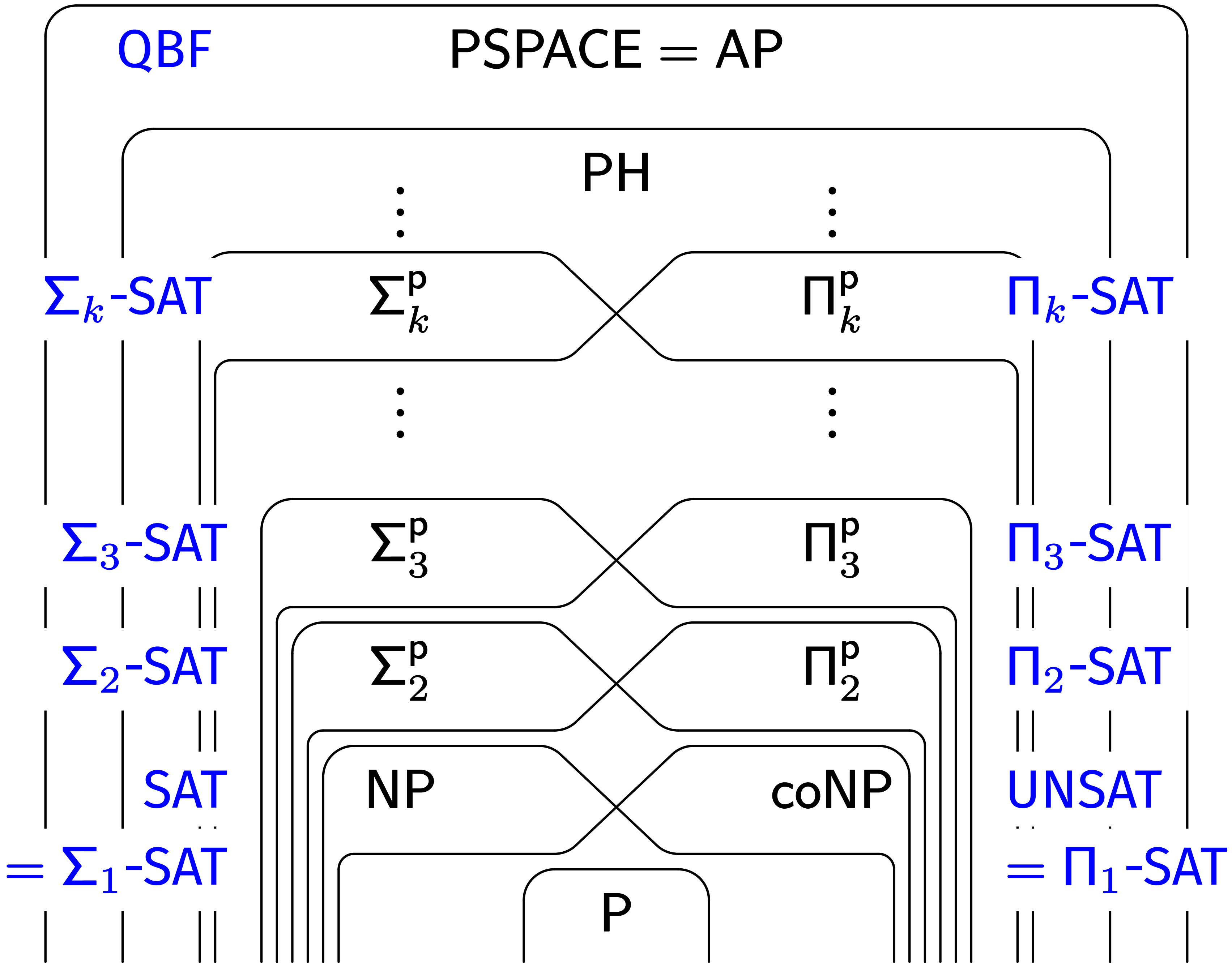
$\exists X_1\, \forall X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

注：$\Pi_k\text{-SAT} = \overline{\Sigma_k\text{-SAT}}$

性質 (証明しない) (Stockmeyer ’76, Wrathall ’76)

任意の正定数 k に対して，Π_k-SAT は Π_k^{p} 完全

再掲：多項式階層と完全問題



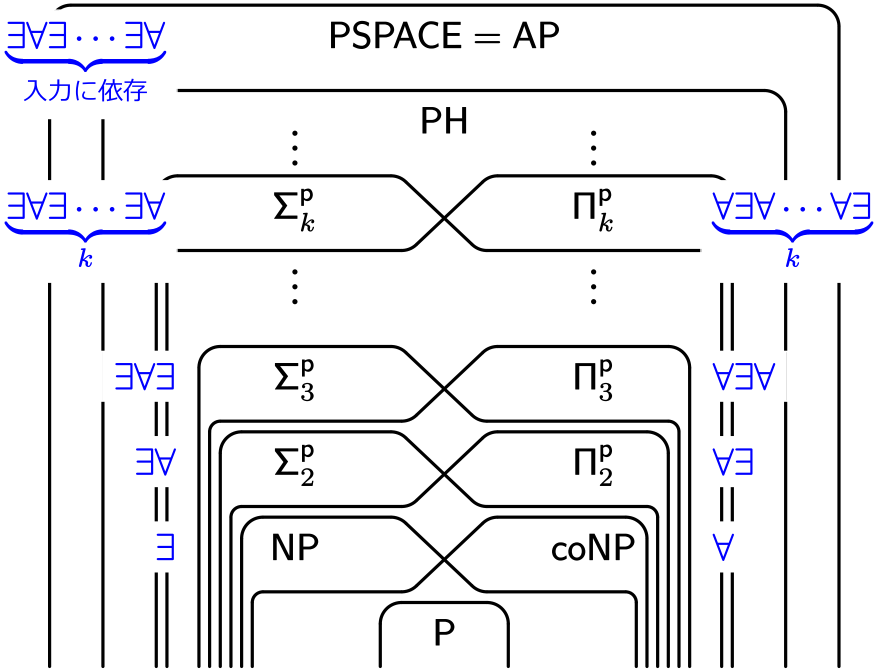
本日の内容

1. 多項式階層とは？
2. 多項式階層における完全問題
3. **多項式階層の崩壊**

多項式階層の崩壊

内容：次の 2 つを紹介する

1. $\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow \mathsf{P} = \mathsf{PH}$
2. PH 完全問題が存在 $\Rightarrow$ ある k に対して，$\Sigma_k^{\mathsf{p}} = \mathsf{PH}$



多項式階層の崩壊

内容：次の 2 つを紹介する

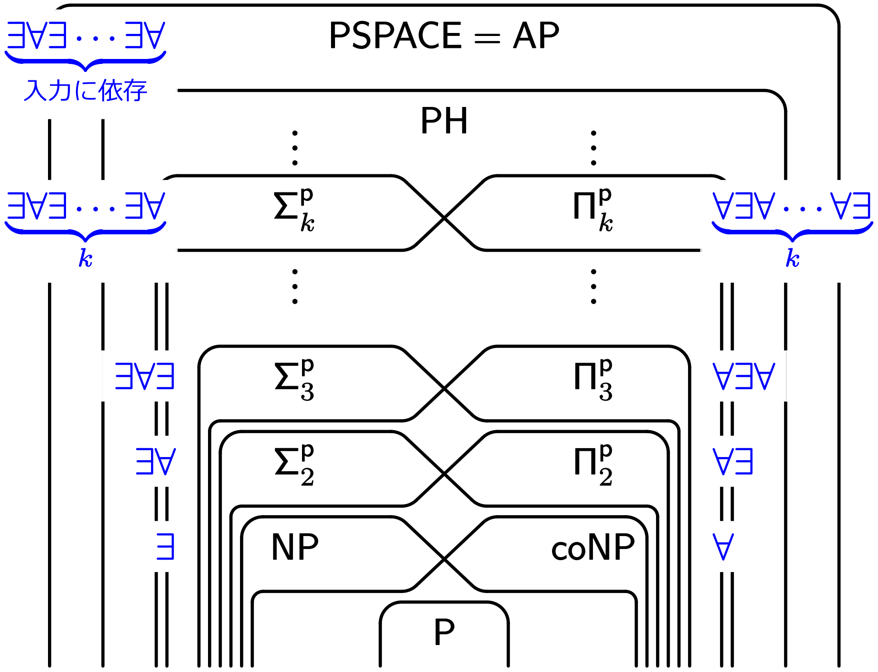
1. $\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow \underline{\mathsf{P} = \mathsf{PH}}$

   多項式階層が崩壊する（つぶれる）

2. PH 完全問題が存在 $\Rightarrow$ ある k に対して，$\underline{\Sigma_k^{\mathsf{p}} = \mathsf{PH}}$

   多項式階層が第 k 段に崩壊する

崩壊する = collapse



多項式階層の崩壊 (1)

性質 (Stockmeyer '76)

$$\mathrm{P} = \mathrm{NP} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P} = \mathrm{PH}$$

多項式階層の崩壊 (1)

性質 (Stockmeyer '76)

$\mathsf{P} = \mathsf{NP} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P} = \mathsf{PH}$

証明：次を証明すれば十分

証明すべきこと

$\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow$
すべての整数 $k = 0, 1, \ldots$ に対して，$\mathsf{P} = \Sigma_k^{\mathsf{p}} \cap \Pi_k^{\mathsf{p}}$

これが証明できたとすると

- 任意の $P \in \mathsf{PH}$ を考える
- ある整数 i が存在して，$P \in \Sigma_i^{\mathsf{p}}$
- $\mathsf{P} = \Sigma_i^{\mathsf{p}}$ より，$P \in \mathsf{P}$ $\square$

多項式階層の崩壊 (1)：証明 (1)

証明すべきこと

$\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow$
すべての整数 $k = 0, 1, \ldots$ に対して，$\mathsf{P} = \Sigma_k^{\mathsf{p}} \cap \Pi_k^{\mathsf{p}}$

<u>証明</u>：k に関する帰納法

- $k = 0$ のとき，$\Sigma_0^{\mathsf{p}} = \mathsf{P}$，$\Pi_0^{\mathsf{p}} = \mathsf{P}$ なので，$\Sigma_0^{\mathsf{p}} \cap \Pi_0^{\mathsf{p}} = \mathsf{P}$

多項式階層の崩壊 (1)：証明 (1)

証明すべきこと

$\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow$
すべての整数 $k = 0, 1, \ldots$ に対して，$\mathsf{P} = \Sigma_k^{\mathsf{p}} \cap \Pi_k^{\mathsf{p}}$

証明：k に関する帰納法

- $k = 0$ のとき，$\Sigma_0^{\mathsf{p}} = \mathsf{P}$，$\Pi_0^{\mathsf{p}} = \mathsf{P}$ なので，$\Sigma_0^{\mathsf{p}} \cap \Pi_0^{\mathsf{p}} = \mathsf{P}$
- $k = 1$ のとき，$\Sigma_1^{\mathsf{p}} = \mathsf{NP} = \mathsf{P}$ なので，
  $\mathsf{P} = \mathsf{coNP} = \Pi_1^{\mathsf{p}}$ であり，$\mathsf{P} = \Sigma_1^{\mathsf{p}} \cap \Pi_1^{\mathsf{p}}$ となる

性質：$\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Leftrightarrow \mathsf{P} = \mathsf{coNP}$

証明すべきこと

$\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow$
すべての整数 $k = 0, 1, \ldots$ に対して，$\mathsf{P} = \Sigma_k^{\mathsf{p}} \cap \Pi_k^{\mathsf{p}}$

証明：k に関する帰納法

- $k = 0$ のとき，$\Sigma_0^{\mathsf{p}} = \mathsf{P}$，$\Pi_0^{\mathsf{p}} = \mathsf{P}$ なので，$\Sigma_0^{\mathsf{p}} \cap \Pi_0^{\mathsf{p}} = \mathsf{P}$
- $k = 1$ のとき，$\Sigma_1^{\mathsf{p}} = \mathsf{NP} = \mathsf{P}$ なので，
  $\mathsf{P} = \mathsf{coNP} = \Pi_1^{\mathsf{p}}$ であり，$\mathsf{P} = \Sigma_1^{\mathsf{p}} \cap \Pi_1^{\mathsf{p}}$ となる

- $i \geq 1$ に対して
  $\mathsf{P} = \Sigma_i^{\mathsf{p}} \cap \Pi_i^{\mathsf{p}} \Rightarrow \mathsf{P} = \Sigma_{i+1}^{\mathsf{p}} \cap \Pi_{i+1}^{\mathsf{p}}$ を証明する
- 目標：Σ_{i+1}-SAT $\in \mathsf{P}$，Π_{i+1}-SAT $\in \mathsf{P}$

多項式階層の崩壊 (1)：証明 (2)

Σ_{i+1}-SAT のアルゴリズム (入力：$\varphi, X_1, X_2, \ldots, X_{i+1}$)

(仮定：Π_i-SAT $\in$ P)

1. $\alpha_1 :=$ guess-$\exists(\{X_1$ に対する割当$\})$
2. $\varphi(\alpha_1, X_2, \ldots, X_{i+1})$ に対して，
   Π_i-SAT の多項式時間アルゴリズムを適用

問題：Σ_k-SAT

入力： 命題論理式 $\varphi(X)$ 　(X は変数集合)

X の k 分割 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ 　(X_i は空でもよい)

出力： k が奇数，$\exists X_1 \forall X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes

$\forall X_1 \exists X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

k が偶数，$\exists X_1 \forall X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes

$\forall X_1 \exists X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

Σ_{i+1}-SAT のアルゴリズム (入力：$\varphi, X_1, X_2, \ldots, X_{i+1}$)

(仮定：Π_i-SAT $\in$ P)

1. $\alpha_1 :=$ guess-$\exists$($\{X_1$ に対する割当$\}$)
2. $\varphi(\alpha_1, X_2, \ldots, X_{i+1})$ に対して，
   Π_i-SAT の多項式時間アルゴリズムを適用

$\therefore \Sigma_{i+1}$-SAT $\in$ NP $=$ P

仮定

$\therefore \Sigma^{\mathrm{p}}_{i+1} =$ P

問題：Σ_k-SAT

入力： 命題論理式 $\varphi(X)$ (X は変数集合)

X の k 分割 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ (X_i は空でもよい)

出力： k が奇数，$\exists X_1 \forall X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes

$\forall X_1 \exists X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

k が偶数，$\exists X_1 \forall X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes

$\forall X_1 \exists X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

多項式階層の崩壊 (1)：証明 (3)

Π_{i+1}-SAT のアルゴリズム (入力：$\varphi, X_1, X_2, \ldots, X_{i+1}$)

(仮定：Σ_i-SAT $\in$ P)

1. $\alpha_1 :=$ guess-$\forall(\{X_1$ に対する割当$\})$
2. $\varphi(\alpha_1, X_2, \ldots, X_{i+1})$ に対して，
   Σ_i-SAT の多項式時間アルゴリズムを適用

問題：Π_k-SAT

入力： 命題論理式 $\varphi(X)$ (X は変数集合)
X の k 分割 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ (X_i は空でもよい)

出力： k が奇数，$\forall X_1 \exists X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes
$\exists X_1 \forall X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No
k が偶数，$\forall X_1 \exists X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes
$\exists X_1 \forall X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

多項式階層の崩壊 (1)：証明 (3)

Π_{i+1}-SAT のアルゴリズム (入力：$\varphi, X_1, X_2, \ldots, X_{i+1}$)
(仮定：Σ_i-SAT $\in$ P)

1. $\alpha_1 :=$ guess-∀($\{X_1$ に対する割当$\}$)
2. $\varphi(\alpha_1, X_2, \ldots, X_{i+1})$ に対して,
   Σ_i-SAT の多項式時間アルゴリズムを適用

$\therefore$ Π_{i+1}-SAT $\in$ coNP $=$ P　　　$\therefore$ $\Pi^{\mathsf{p}}_{i+1} = \mathsf{P}$　　　□

$k = 1$ の場合の結論

問題：Π_k-SAT

入力： 命題論理式 $\varphi(X)$ 　(X は変数集合)
X の k 分割 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ 　(X_i は空でもよい)

出力： k が奇数，$\forall X_1 \exists X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes
$\exists X_1 \forall X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No
k が偶数，$\forall X_1 \exists X_2 \cdots \exists X_k : \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Yes
$\exists X_1 \forall X_2 \cdots \forall X_k : \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ No

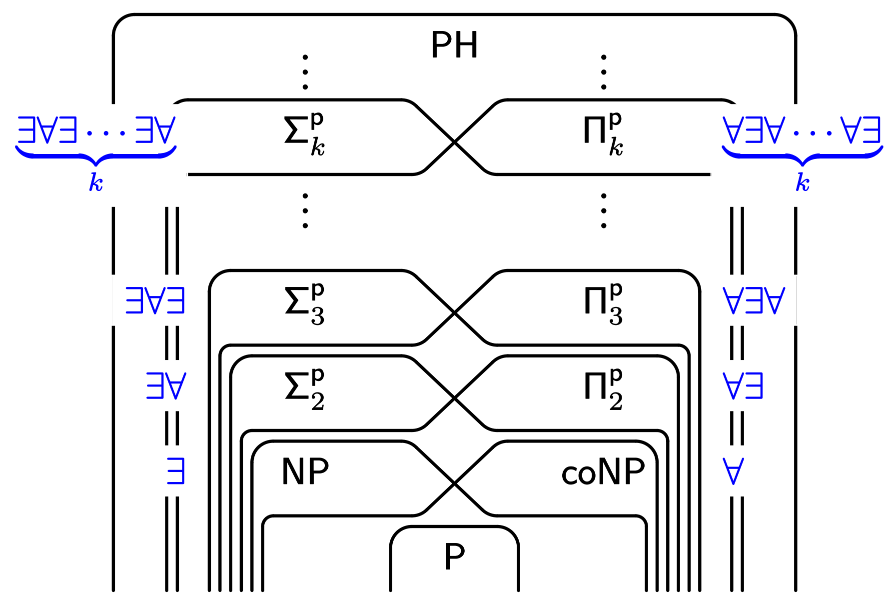
多項式階層の崩壊 (1)：まとめ

性質 (Stockmeyer '76)

$\mathsf{P} = \mathsf{NP} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P} = \mathsf{PH}$

同様の証明で，任意の k に対して，次が正しいことも分かる

- $\Sigma_k^{\mathsf{p}} = \Sigma_{k+1}^{\mathsf{p}} \Rightarrow$ 任意の $i \geq k$ に対して，$\Sigma_k^{\mathsf{p}} \cup \Pi_k^{\mathsf{p}} = \Sigma_i^{\mathsf{p}} \cap \Pi_i^{\mathsf{p}}$
- $\Pi_k^{\mathsf{p}} = \Pi_{k+1}^{\mathsf{p}} \Rightarrow$ 任意の $i \geq k$ に対して，$\Sigma_k^{\mathsf{p}} \cup \Pi_k^{\mathsf{p}} = \Sigma_i^{\mathsf{p}} \cap \Pi_i^{\mathsf{p}}$
- $\Sigma_k^{\mathsf{p}} = \Pi_k^{\mathsf{p}} \quad \Rightarrow$ 任意の $i \geq k$ に対して，$\Sigma_k^{\mathsf{p}} \cup \Pi_k^{\mathsf{p}} = \Sigma_i^{\mathsf{p}} \cap \Pi_i^{\mathsf{p}}$ (ただし，$k \geq 1$)



多項式階層の崩壊 (2)

性質 (Stockmeyer '76)

PH 完全問題が存在 $\Rightarrow$ ある k に対して，$\Sigma_k^{\mathrm{p}} = \mathrm{PH}$

多項式階層の崩壊 (2)

性質 (Stockmeyer '76)

PH 完全問題が存在 $\Rightarrow$ ある k に対して，$\Sigma_k^{\mathrm{p}} = \mathrm{PH}$

未解決問題

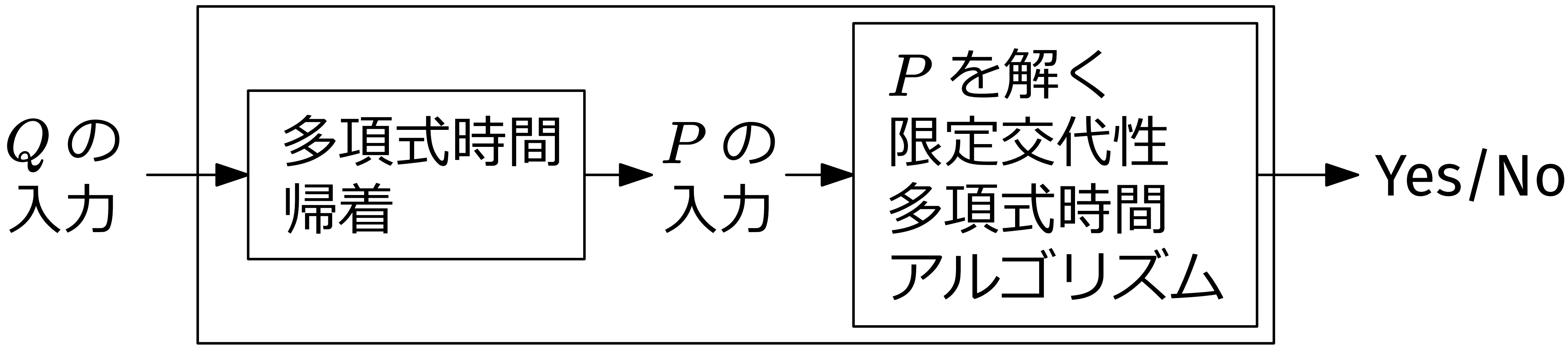
PH 完全問題が存在するか？

上の性質は
「PH 完全問題が存在しないと思われる理由」として
よく言及される

多項式階層の崩壊 (2)：証明

証明：P を PH 完全問題とする

- PH の定義より，ある k が存在して，$P \in \Sigma_k^{\mathsf{p}}$
- 任意の問題 $Q \in$ PH を考える



Q を解く限定交代性多項式時間アルゴリズム

- $\therefore Q \in \Sigma_k^{\mathsf{p}}$ $\square$

多項式階層の崩壊：まとめ

内容：次の 2 つを紹介する

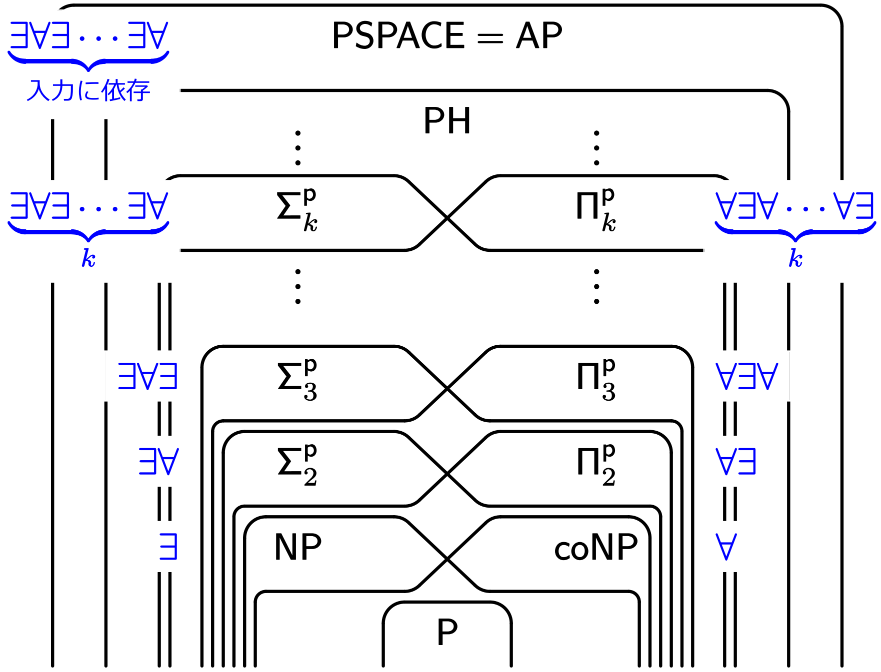
1. P = NP ⇒ P = PH

   多項式階層が崩壊する（つぶれる）

2. PH 完全問題が存在 ⇒ ある k に対して，$\Sigma_k^{\mathrm{p}} = \mathrm{PH}$

   多項式階層が第 k 段に崩壊する

崩壊する = collapse



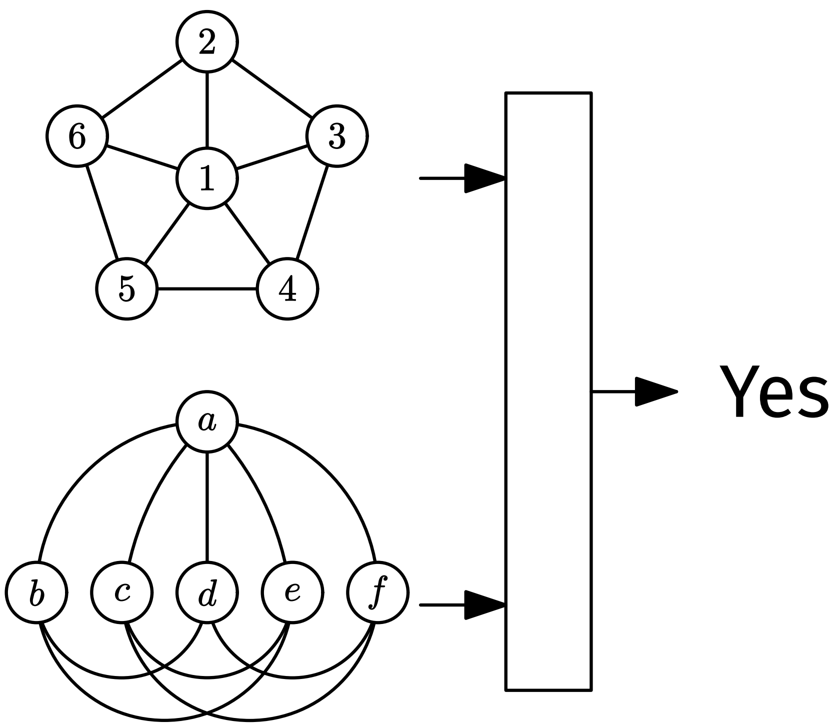
補足：グラフ同型性問題との関係 (1)

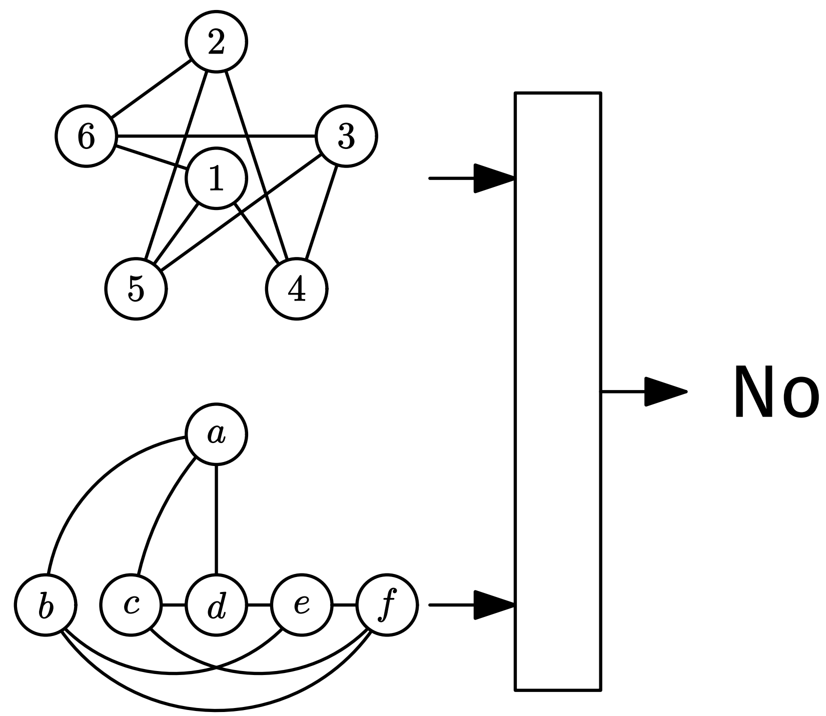
問題：グラフ同型性問題 (graph isomorphism problem)

入力： 無向グラフ G_1, G_2

出力： G_1 から G_2 への同型写像がある $\Rightarrow$ Yes

G_1 から G_2 への同型写像がない $\Rightarrow$ No





補足：グラフ同型性問題との関係 (2)

未解決問題

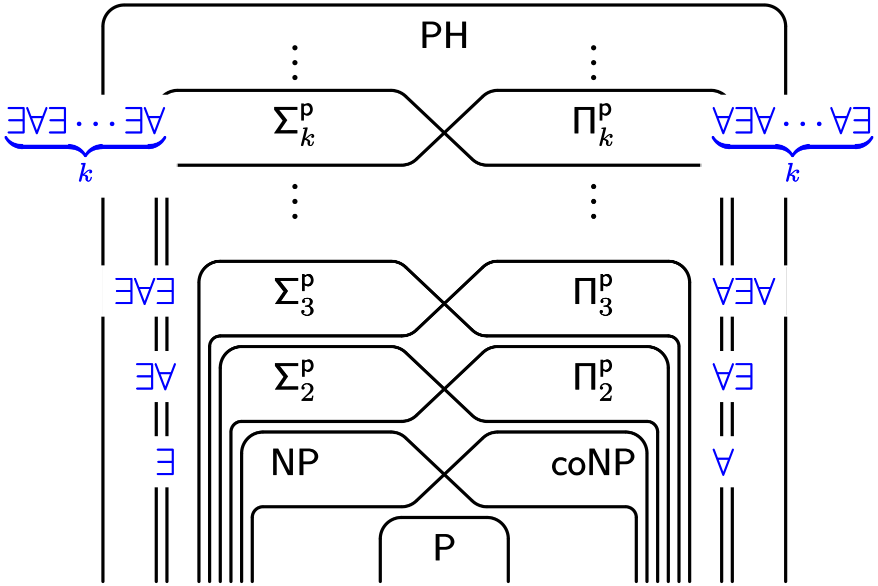
- グラフ同型性問題は NP 完全？
- グラフ同型性問題 $\overset{?}{\in}$ P

知られていること (Boppana, Hastad, Zachos ’87)

- グラフ同型性問題が NP 完全 $\Rightarrow$ $\Sigma_2^{\mathrm{p}} = \Pi_2^{\mathrm{p}}$

多項式階層は崩壊しないと思われている

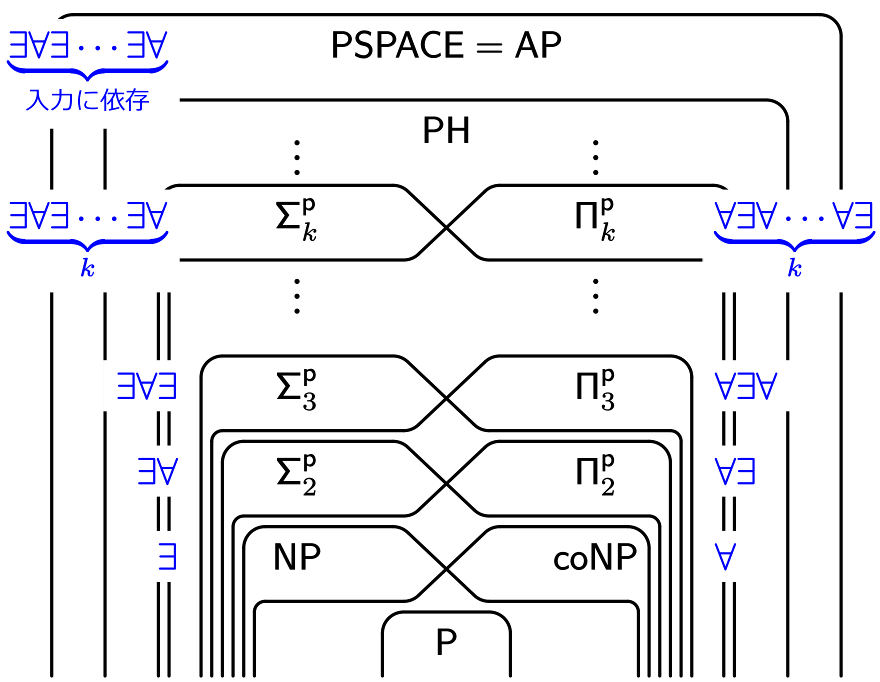
∴ グラフ同型性問題は NP 完全ではないと思われている



本日のまとめ

本日の内容

- 限定交代性を考えることで，
  複雑性クラス Σ_k^{p}，Π_k^{p}，PH を導入する
- 多項式階層が崩壊する条件を理解し，証明を行う



次回の予告

内容

- **確率的** な動作を行う計算モデルを導入する
- 複雑性クラス PP，RP，coRP，BPP，ZPP を導入する
- **再実行** と **確率増幅** という重要な技法を紹介する
- ($\mathrm{BPP} \subseteq \Sigma_2^{\mathrm{p}} \cap \Pi_2^{\mathrm{p}}$ を証明する)

クイズ

Q

1.

2.

3.

4.