

1 レポート課題

次の 2 問にすべて答えよ (問 2 には小問が 2 つあることに注意する)。なお、用語の定義、記法は本講義で用いるものに基づいて。

問 1

有限集合 U と 3 つの集合関数 $f, g, h: 2^U \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

が成り立つことを証明せよ。ただし、「 $*$ 」は部分集合たたみ込みを表す。

問 2

この問の主旨は、次の命題 A を証明することである。

[命題 A] 指数時間仮説が正しいならば、最小シュタイナー木問題は $2^{o(k)}$ 時間アルゴリズムで解けない。ただし、 k は最小シュタイナー木問題の入力における端末の総数である。

そのために、最小被覆問題の入力を最小シュタイナー問題の入力に変換することを考える。最小被覆問題の入力は、有限集合 U と集合族 $S \subseteq 2^U$ である。これらを用いて、次の無向グラフ $G = (V, E)$ と端末の集合 $K \subseteq V$ を構成する。

$$\begin{aligned} V &= U \cup S \cup \{r\}, \\ E &= \{\{u, X\} \mid u \in U, X \in S, u \in X\} \cup \{\{X, r\} \mid X \in S\}, \\ K &= U \cup \{r\}. \end{aligned}$$

ただし、 $r \notin U \cup S$ とする。

1. 最小被覆問題の入力 U, S が要素数 t 以下の被覆を持つとき、そのときに限り、構成した最小シュタイナー木問題の入力 G, K が辺数 $t + |U|$ 以下のシュタイナー木を持つことを証明せよ。
2. 上の命題 A を証明せよ。このとき、授業で証明した事実「指数時間仮説が正しいならば、最小被覆問題を $2^{o(n)}$ 時間で解けない (ただし、 $n = |U|$)」を用いてよい。

2 提出法，形式，採点基準 など

- 提出締切は 2 月 13 日 (金) 23:59 JST.
- 使用言語は日本語か英語に限る.
- 提出法は Google Classroom にて，課題「レポート 1 提出」より PDF ファイル をアップロードする．提出後に，ステータスが「提出済み」となっていることを確認すること．
- レポートの冒頭に，学籍番号と氏名を必ず記載すること．
- 採点基準は，(1) 記述の正確さと厳密さ，(2) 表現の適切さ，(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である．期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない．50 点満点．
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は，証明や説明が過不足なく記述されているか，そして，それが数学的・論理的に正しいか，ということの意味する．「(2) 表現の適切さ」は，証明や説明の記述における言語表現が注意深く用いられているか，ということの意味する．「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は，証明や説明が分かりやすい構造を成しているか，ということの意味し，これには文書作成ソフトウェア，図表作成ソフトウェアの適切な使用法も含まれる．書かれた文字を採点者が判別できない場合，採点できない (つまり，点がつけられない) ことがあるので，注意すること．
- 用語と記法は授業におけるものに従う．また，提出される答案において，授業中に紹介した事項は，(それが授業内で証明されていなかったとしても) レポート内では証明せずに用いてもよい．しかし，その場合は，どの性質を用いているのか明示しなければならない．
- 不正行為については，学修要覧を参照すること．一方で，他の履修登録生 (受講生) と相談したり，文献を調べることは大いに推奨する．その際は，レポート内で (例えば，末尾や冒頭で)，相談者や参考文献を必ず記載し，どの部分の相談を行ったのか，あるいは，どの部分で参考にしたのか，本文中に記述すること．その記述が無い場合は，不正行為を疑われる可能性がある．
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合，教員が学生に問い合わせを行うことがありうる．その場合，学生は (口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある．その一方で，そのような問い合わせがない場合に，レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない．

以上