

## 1 レポート課題

次の 2 間にすべて答えよ (問 1 には小問が 2 つあることに注意する). なお, 用語の定義, 記法は本講義で用いるものに準拠する.

### 問 1

この問では, 3-SAT を解くアルゴリズムを以下の方針に沿って設計する. つまり, 入力は連言標準形で表された命題論理式  $\varphi$  で, その節はどれもリテラルを 3 個以下しか含まないものである.

まず, 前処理を考える.

- リテラルを 1 つしか含まない節  $C = \ell$  が存在するならば,  $\ell$  に 1 を割り当てる. (つまり, ある変数  $x$  に対して  $\ell = x$  ならば,  $x$  に 1 を割り当てる,  $\ell = \bar{x}$  ならば,  $x$  に 0 を割り当てる. )
- 変数  $x$  が  $\varphi$  において正リテラルとしてしか現れない (つまり, 負リテラル  $\bar{x}$  が  $\varphi$  に現れない) ならば,  $x$  に 1 を割り当てる.
- 変数  $x$  が  $\varphi$  において負リテラル  $\bar{x}$  としてしか現れない (つまり, 正リテラル  $x$  が  $\varphi$  に現れない) ならば,  $x$  に 0 を割り当てる.

この前処理について, 以下の問い合わせよ.

- この 3 つの前処理が正しいこと, つまり, 前処理を行っても充足可能性が変わらないことを証明せよ.

この前処理によって, あるリテラルが 1 となった節は  $\varphi$  から取り除く. また, 節  $C$  においてリテラル  $\ell$  に 0 が割り当たされたとき, そのリテラル  $\ell$  を  $C$  から取り除く. これによって, 前処理がさらに適用できる場合は, 適用を繰り返す.

前処理の適用ができなくなったとき, どの節を見ても, そこに含まれるリテラルの数は 2 か 3 である. また, すべての変数  $x$  は正リテラルとしても負リテラルとしても命題論理式に現れている.

前処理の適用ができなくなったとき, 次の方針に従って分枝 (場合分け) を行う.

- ある節  $C$  に含まれるリテラルの数が 2 であるとき,  $C = \ell_1 \vee \ell_2$  であるとすると, 次の 2 つの場合に分ける.
  - $\ell_1$  に 1 を割り当てる場合.
  - $\ell_1$  に 0 を割り当てる場合, かつ,  $\ell_2$  に 1 を割り当てる場合.
- どの節においても含まれるリテラルの数が 3 であるとき, 任意の節を選んで  $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$  とする. 次の 3 つの場合に分ける.
  - $\ell_1$  に 1 を割り当てる場合. (この場合を「\*」で表す. )
  - $\ell_1$  に 0 を割り当てる場合, かつ,  $\ell_2$  に 1 を割り当てる場合.
  - $\ell_1$  に 0 を割り当てる場合, かつ,  $\ell_2$  に 0 を割り当てる場合, かつ,  $\ell_3$  に 1 を割り当てる場合.

上の場合分けで, 「\*」とした場合に着目する. 前処理によって,  $\bar{\ell}_1$  が命題論理式に現れることが保証される. それを含む節を  $C' = \bar{\ell}_1 \vee \ell_4 \vee \ell_5$  とする. この場合「\*」においては,  $\ell_1$  に 1 を割り当たるので,  $\bar{\ell}_1$  には 0 が割り当たっている. それを考慮して, 「\*」の場合を次のものにさらに分ける.

- $\ell_1$  に 1 を割り当てる場合, かつ,  $\ell_4$  に 1 を割り当てる場合.
- $\ell_1$  に 1 を割り当てる場合, かつ,  $\ell_4$  に 0 を割り当てる場合, かつ,  $\ell_5$  に 1 を割り当てる場合.

分枝処理によって, あるリテラルが 1 となった節は  $\varphi$  から取り除く. また, 節  $C$  においてリテラル  $\ell$  に 0 が割り当たされたとき, そのリテラル  $\ell$  を  $C$  から取り除く. これによって, 前処理が適用できるようになったら, 適用を繰り返す. 適用

できなくなったら、再帰的に分枝を繰り返す。ある場合で、すべての節が取り除かれれば、 $\varphi$  を 1 にする割当の存在が分かる。すべての場合において空節（リテラルを含まない節）ができれば、 $\varphi$  を 1 にする割当の非存在が分かる。このようにして、3-SAT を正しく解くアルゴリズムが作れる。

以下の問い合わせよ。

2. この分枝アルゴリズムの計算量を  $O^*(c^n)$  の形で答えよ。ここで、 $n$  は入力として与えられた命題論理式に現れる変数の数であり、 $c < 2$  は定数である。定数  $c$  が小さくなるように工夫し、導出過程も記述せよ（コンピュータ等を援用してもよい）。

## 問 2

次の最適化問題を考える。入力は有限有向グラフ  $G = (V, A)$  である。ここで、 $V$  は有限集合で、 $A$  は  $V \times V$  の部分集合である。 $V$  の要素は頂点と呼ばれ、 $A$  の要素は弧（または辺）と呼ばれる。 $(x, y)$  と  $(y, x)$  は弧として異なるものであるので注意する。以後、 $n = |V|$  とする。

求めるべきものは、 $V$  の順列、つまり、全単射  $\pi: V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  である。最小化すべき量は

$$|\{(u, v) \in A \mid \pi(v) < \pi(u)\}|$$

である。ここで考える問題では、その最小値を出力することを要求する。

この問題を  $O^*(2^n)$  時間で解くアルゴリズムを、動的計画法に基づいて設計せよ。その際、次の事項を明確にせよ。

- 状態。
- 状態の値。
- 出力すべき値。
- 計算量の導出。

## 2 提出法, 形式, 採点基準 など

- 提出締切は 12 月 5 日 (金) 23:59 JST.
- 使用言語は日本語か英語に限る.
- 提出法は Google Classroom にて, 課題「レポート 1 提出」より PDF ファイル をアップロードする. 提出後に, ステータスが「提出済み」となっていることを確認すること.
- レポートの冒頭に, 学籍番号と氏名を必ず記載すること.
- 採点基準は, (1) 記述の正確さと厳密さ, (2) 表現の適切さ, (3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である. 期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない. 50 点満点.
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は, 証明や説明が過不足なく記述されているか, そして, それが数学的・論理的に正しいか, ということを意味する. 「(2) 表現の適切さ」は, 証明や説明の記述における言語表現が注意深く用いられているか, ということを意味する. 「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は, 証明や説明が分かりやすい構造を成しているか, ということを意味し, これには文書作成ソフトウェア, 図表作成ソフトウェアの適切な使用法も含まれる. 書かれた文字を採点者が判別できない場合, 採点できない (つまり, 点がつけられない) ことがあるので, 注意すること.
- 用語と記法は授業におけるものに従う. また, 提出される答案において, 授業中に紹介した事項は, (それが授業内で証明されていなかったとしても) レポート内では証明せずに用いてもよい. しかし, その場合は, どの性質を用いているのか明示しなければならない.
- 不正行為については, 学修要覧を参考すること. 一方で, 他の履修登録生 (受講生) と相談したり, 文献を調べることは大いに推奨する. その際は, レポート内で (例えば, 末尾や冒頭で), 相談者や参考文献を必ず記載し, どの部分の相談を行ったのか, あるいは, どの部分で参考にしたのか, 本文中に記述すること. その記述が無い場合は, 不正行為を疑われる可能性がある.
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合, 教員が学生に問い合わせを行うことがありうる. その場合, 学生は (口頭で) 教員の質問に回答する必要がある. その一方で, そのような問い合わせがない場合に, レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない.

以上