離散最適化基礎論 (2025 年後学期)

高速指数時間アルゴリズム

第 12 回

指数時間仮説 (2)：例

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 1 月 20 日

最終更新：2026 年 1 月 20 日　13:11

スケジュール (前半)

1. 高速指数時間アルゴリズムの考え方 (10/7)
＊ 休み (体育祭) (10/14)
2. 分枝アルゴリズム：基礎 (10/21)
3. 分枝アルゴリズム：高速化 (10/28)
4. 分枝アルゴリズム：測度統治法 (11/4)
5. 動的計画法：基礎 (11/11)
6. 動的計画法：例 (11/18)

スケジュール (後半)

7.	包除原理：原理	(11/25)
∗	休み (秋ターム試験)	(12/2)
8.	包除原理：例	(12/9)
9.	部分集合たたみ込み：原理	(12/16)
∗	休み (出張)	(12/23)
∗	休み (冬季休業)	(12/30)
10.	部分集合たたみ込み：例	(1/6)
11.	指数時間仮説：原理	(1/13)
12.	**指数時間仮説：例**	(1/20)
13.	強指数時間仮説と細粒度計算複雑性	(1/27)
∗	休み (修士論文発表会)	(2/3)

本日の内容

前回と今回

指数時間よりも小さい計算量を達成できるか？

前回

- 指数時間仮説
- 準指数時間帰着
- 疎化補題

今回

- 準指数時間帰着の例

本日の内容

1. **前回の復習**
2. 最大独立集合問題と最大クリーク問題
3. 最小被覆問題

非減少関数 $f, g \colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

定義：リトル o 記法

次が成り立つとき，$f(n) = o(g(n))$ と書く

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

例 1：$n = o(n^2)$ である

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

例 2：$1.5^n = o(2^n)$ である

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1.5^n}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

直感：f のオーダーが g のオーダーよりも真に小さい

準指数関数

非減少関数 $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

定義：準指数関数 (subexponential function)

f が **準指数関数** であるとは，次を満たすこと

$$f(n) = 2^{o(n)}$$

つまり，$\log_2 f(n) = o(n)$ ($\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 f(n)}{n} = 0$)

例：

- $4^{\sqrt{n}}$ は準指数関数　　$4^{\sqrt{n}} = 2^{2\sqrt{n}}$
- n^2 は準指数関数　　$n^2 = 2^{2\log_2 n}$
- $n^{\log_2 n}$ は準指数関数　　$n^{\log_2 n} = 2^{(\log_2 n)^2}$

注意：「$f(n) = o(2^n)$」ではない

準指数時間計算量

定義：準指数関数時間計算量

サイズ・パラメータ p に関する準指数時間計算量 とは
ある非減少準指数関数 $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して

$$O^*(f(p))$$

と表される計算量のこと

<u>サイズ・パラメータの例</u>

- グラフの頂点数 n，辺数 m
- CNF 論理式の変数数 n，節数 m

最大クリーク問題と準指数時間

前回紹介したこと

性質：最大クリーク・アルゴリズム (Stearns, Hunt III '90)

最大クリーク問題は $O^*(2^{\sqrt{2m}})$ 時間で解ける
(m はグラフの辺数)

つまり，最大クリーク問題は
サイズ・パラメータ m に関して，準指数時間で解ける

最大クリーク問題と準指数時間

前回紹介したこと

性質：最大クリーク・アルゴリズム (Stearns, Hunt III ’90)

最大クリーク問題は $O^*(2^{\sqrt{2m}})$ 時間で解ける
(m はグラフの辺数)

つまり，最大クリーク問題は
サイズ・パラメータ m に関して，準指数時間で解ける

一方で，次は未解決

未解決問題

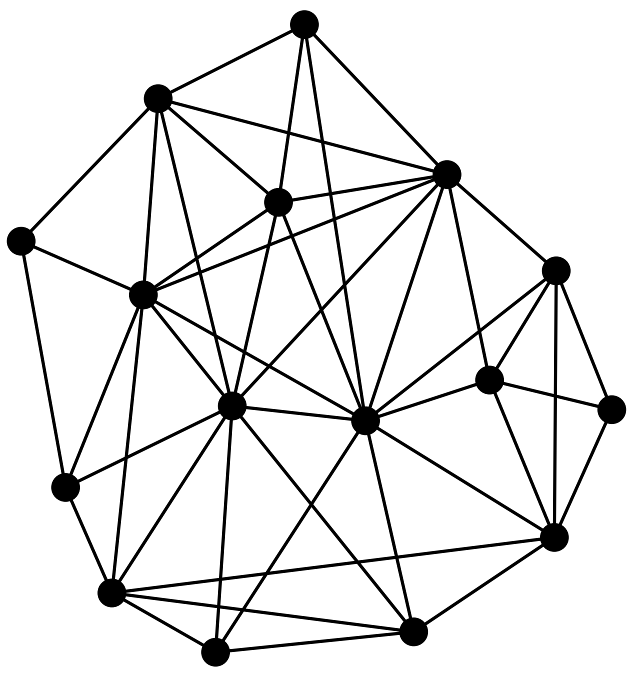
最大クリーク問題は 頂点数をサイズ・パラメータとして
準指数時間で解けるか？

$\therefore$ 準指数時間で解けることは，サイズ・パラメータに依存

最大クリーク問題

定義：最大クリーク問題

入力： 無向グラフ $G = (V, E)$
出力： G のクリークで，頂点数最大のもの



G の **クリーク** とは

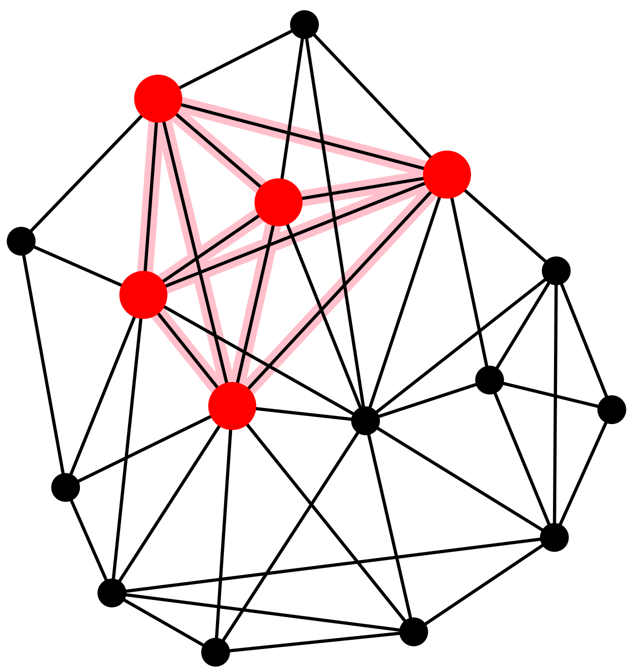
互いに隣接する頂点の集合

事実：最大クリーク問題は NP 困難

最大クリーク問題

定義：最大クリーク問題

入力： 無向グラフ $G = (V, E)$
出力： G のクリークで，頂点数最大のもの



G の **クリーク** とは

互いに隣接する頂点の集合

事実：最大クリーク問題は NP 困難

準指数時間計算量の非存在を言うには？

未解決問題

最大クリーク問題は 頂点数をサイズ・パラメータとして準指数時間で解けるか？

準指数時間計算量の非存在を言うには？

未解決問題

最大クリーク問題は 頂点数をサイズ・パラメータとして準指数時間で解けるか？

これから行いたいこと

次が「ありえそう」であることを示す

- 最大クリーク問題が $2^{o(n)}$ 時間で解けない

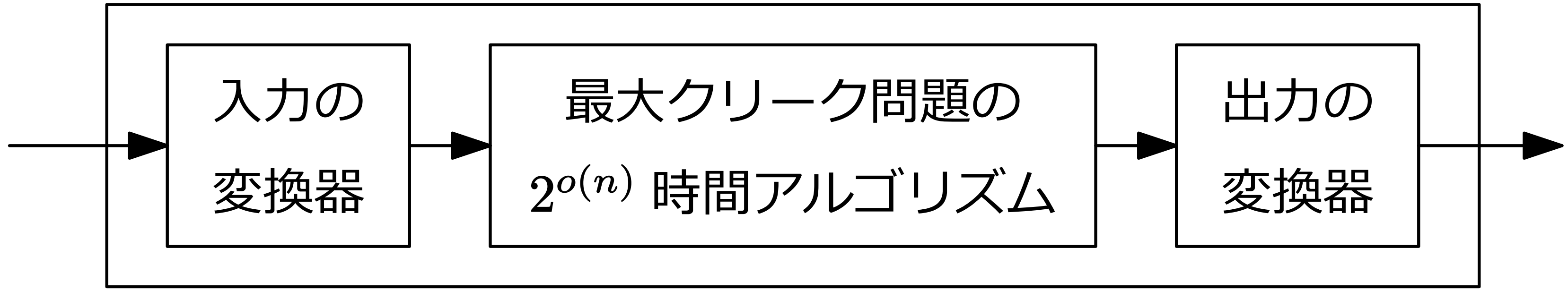
準指数時間帰着の考え方

これから行いたいこと

次が「ありえそう」であることを示す
- 最大クリーク問題が $2^{o(n)}$ 時間で解けない

証明の考え方
- 仮説：3-SAT は $2^{o(n)}$ 時間で解けない
- 証明：最大クリーク問題が $2^{o(n)}$ 時間で解ける
  $\Rightarrow$ 3-SAT が $2^{o(n)}$ 時間で解ける

3-SAT の $2^{o(n)}$ 時間アルゴリズム



指数時間仮説

定義：指数時間仮説 (exponential-time hypothesis)

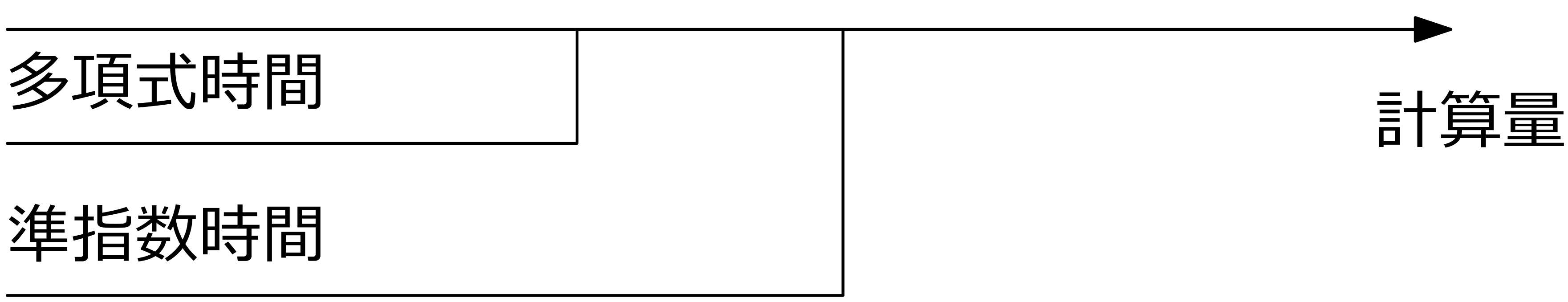
指数時間仮説 とは次の命題　(真偽は未解決)

$\boxed{\text{3-SAT は } 2^{o(n)} \text{ 時間で解けない}}$

(n は入力論理式の変数の数)

注：3-SAT が $2^{o(n)}$ 時間で解けない (指数時間仮説が正しい)

$\Rightarrow$ 3-SAT が多項式時間で解けない (P $\neq$ NP)



節数に関する準指数時間？

実は，次が正しい

性質：3-SAT に対する計算量下界 (改善)

指数時間仮説が正しい $\Rightarrow$ 3-SAT は $2^{o(m)}$ 時間で解けない
(m は論理式の節数)

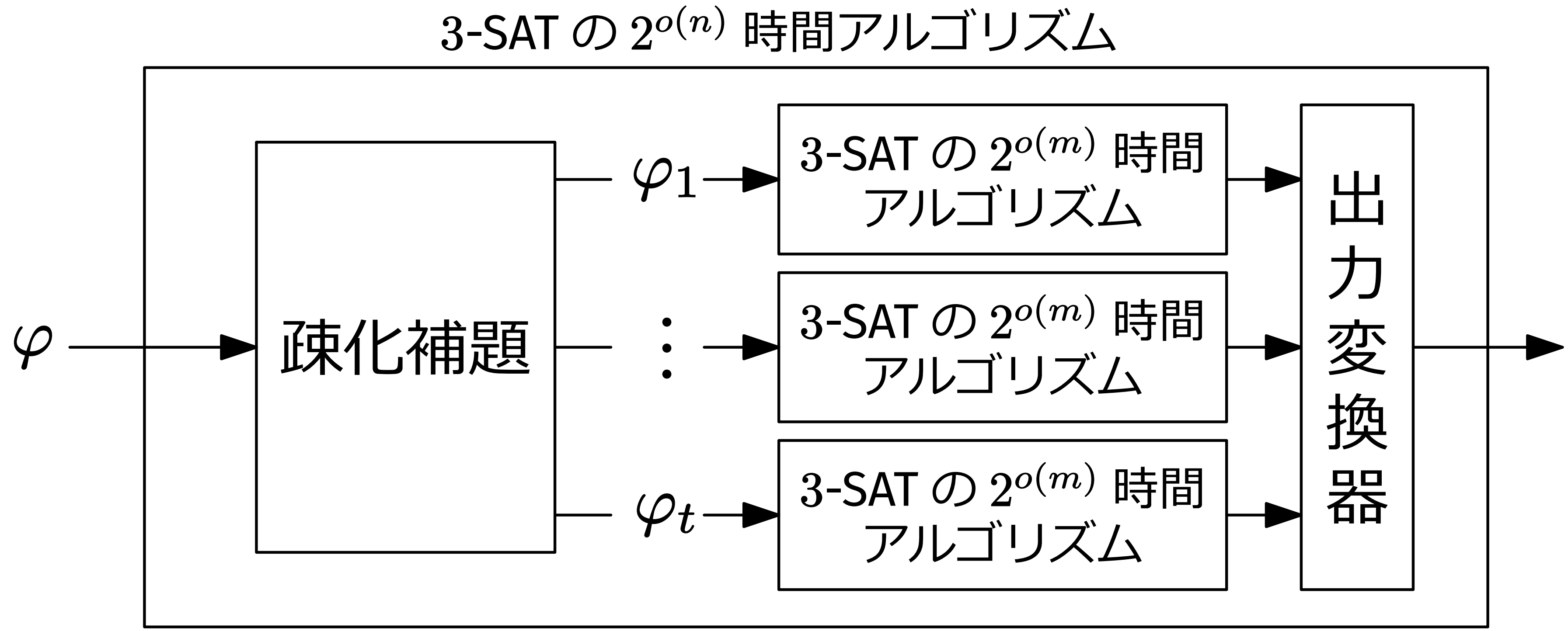
疎化補題 $=$ これを証明するためのアルゴリズム

気分：3-SAT の入力 φ を $2^{o(n)}$ 時間で次に変換できる

- $2^{o(n)}$ 個の論理式 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ (3-SAT の入力)
- ただし，次を満たす
  - φ が充足可能 $\Leftrightarrow$ ある φ_i が充足可能
  - φ_i の節の数は $O(n)$

ここで，n は φ の変数数

3-SAT アルゴリズムの全貌：簡素な姿

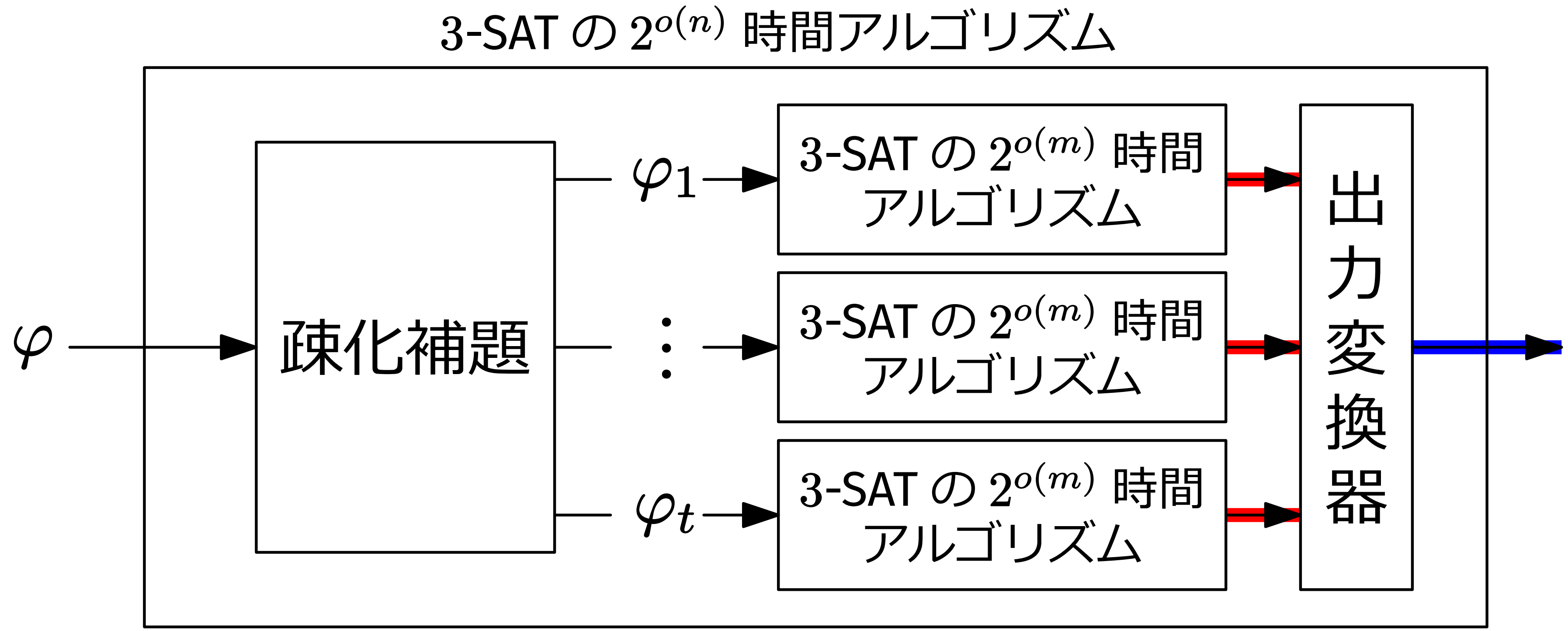


気分：3-SAT の入力 φ を $2^{o(n)}$ 時間で次に変換できる

- $2^{o(n)}$ 個の論理式 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ (3-SAT の入力)
- ただし，次を満たす
  - φ が充足可能 $\Leftrightarrow$ ある φ_i が充足可能
  - φ_i の節の数は $O(n)$

ここで，n は φ の変数数

3-SAT アルゴリズムの全貌：簡素な姿



1 つ以上 Yes $\Leftrightarrow$ Yes

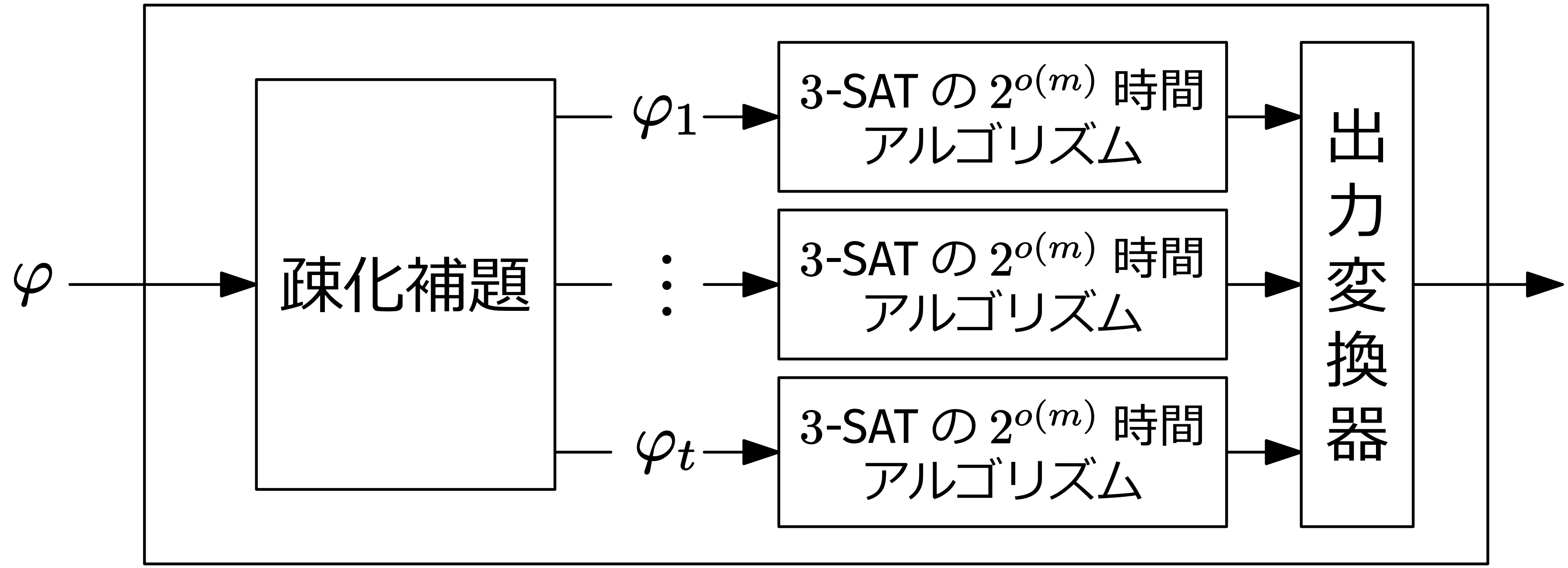
気分：3-SAT の入力 φ を $2^{o(n)}$ 時間で次に変換できる

- $2^{o(n)}$ 個の論理式 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ (3-SAT の入力)
- ただし，次を満たす
  - φ が充足可能 $\Leftrightarrow$ ある φ_i が充足可能
  - φ_i の節の数は $O(n)$

ここで，n は φ の変数数

3-SAT アルゴリズムの全貌：簡素な姿

3-SAT の $2^{o(n)}$ 時間アルゴリズム



$2^{o(n)}$ 時間　　$2^{o(n)}$ 時間 ($\because m = O(n)$)

気分：3-SAT の入力 φ を $2^{o(n)}$ 時間で次に変換できる

- $2^{o(n)}$ 個の論理式 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ (3-SAT の入力)
- ただし，次を満たす
  - φ が充足可能 $\Leftrightarrow$ ある φ_i が充足可能
  - φ_i の節の数は $O(n)$

ここで，n は φ の変数数

定理：疎化補題 (sparsification lemma)

ある関数 g が存在し，次を行うアルゴリズムが存在する

入力： 3-SAT の入力 φ (変数数 $= n$)，正整数 ℓ

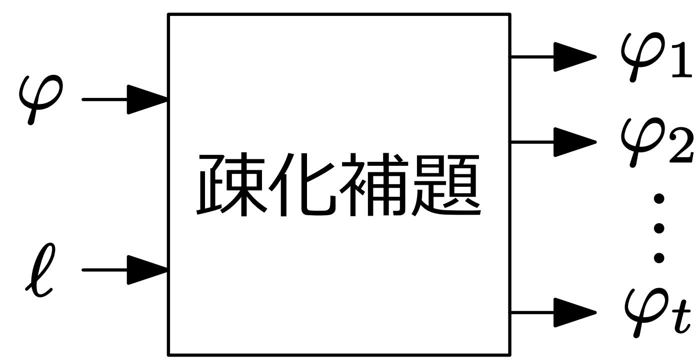
出力： t 個の 3-SAT 入力 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$

要請：
1. $t \leq 2^{n/\ell}$
2. φ が充足可能 $\Leftrightarrow$ ある φ_i が充足可能
3. φ_i の節は必ず φ の節
4. φ_i の中には各変数が $g(\ell)$ 回しか現れない

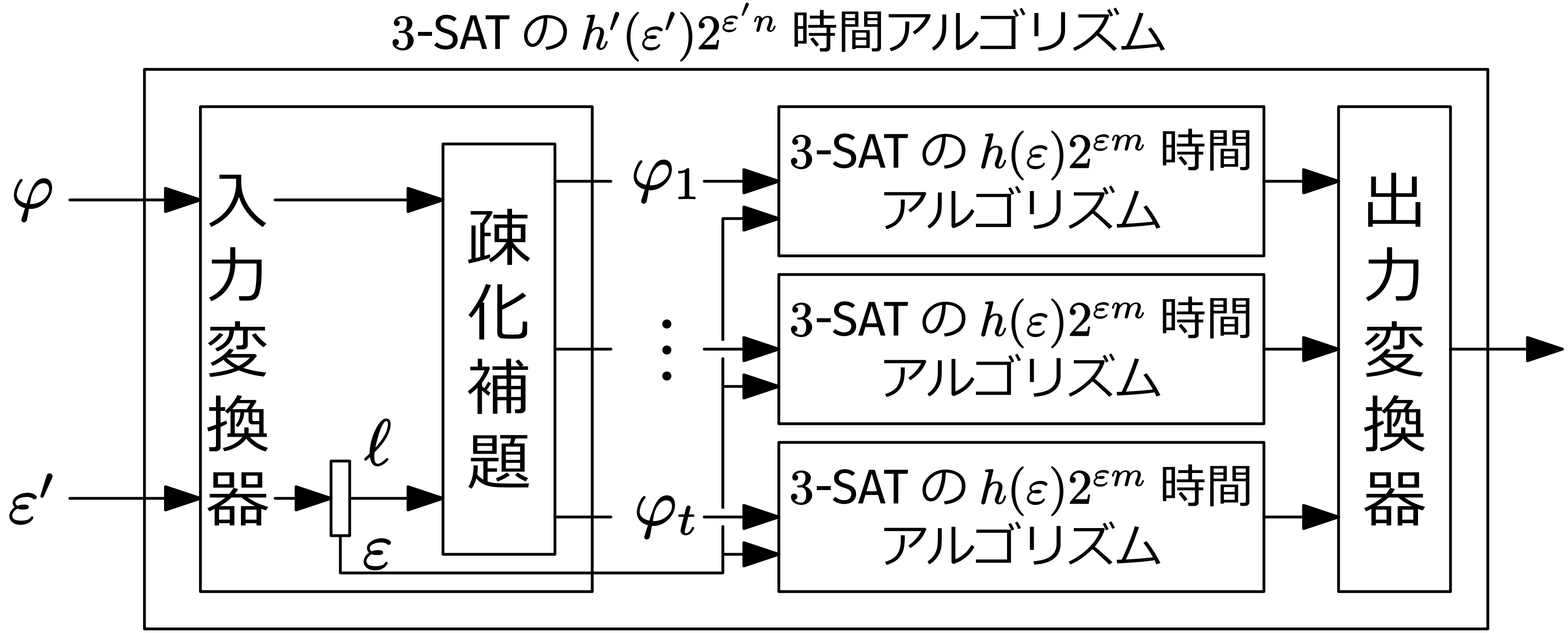
ここで，アルゴリズムの計算量は $O^*(2^{n/\ell})$ である

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{t} \varphi_i$$

節数 $\quad m \quad \leq g(\ell)n$



3-SAT アルゴリズムの全貌：本来の姿



$$\ell = \frac{2}{\varepsilon'} \qquad t \leq 2^{n/\ell} \qquad m \leq g(\ell)n$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2g(2/\varepsilon')}$$

この「本来の姿」を考えていくのは面倒なので，
以後は，「簡素な姿」で考えていく

本日の内容

1. 前回の復習
2. **最大独立集合問題と最大クリーク問題**
3. 最小被覆問題

[復習] 最大独立集合問題

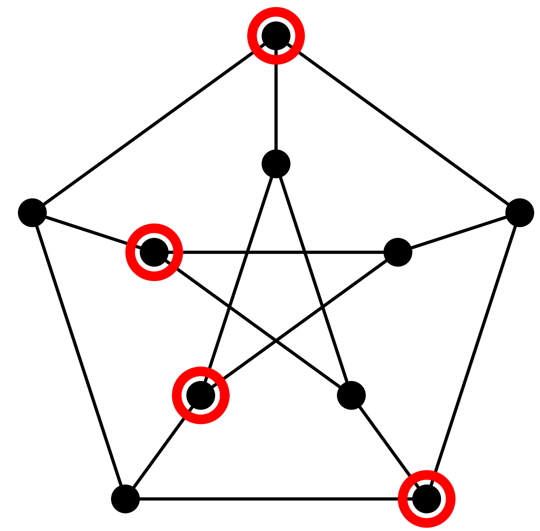
問題：最大独立集合問題

入力： 無向グラフ $G = (V, E)$

出力： G の最大独立集合

G の **独立集合** とは,

G の頂点部分集合 $S \subseteq V$ で
S のどの 2 頂点も隣接しないもの



注：最大独立集合問題は NP 困難 (Karp '72)

最大独立集合と準指数時間計算量

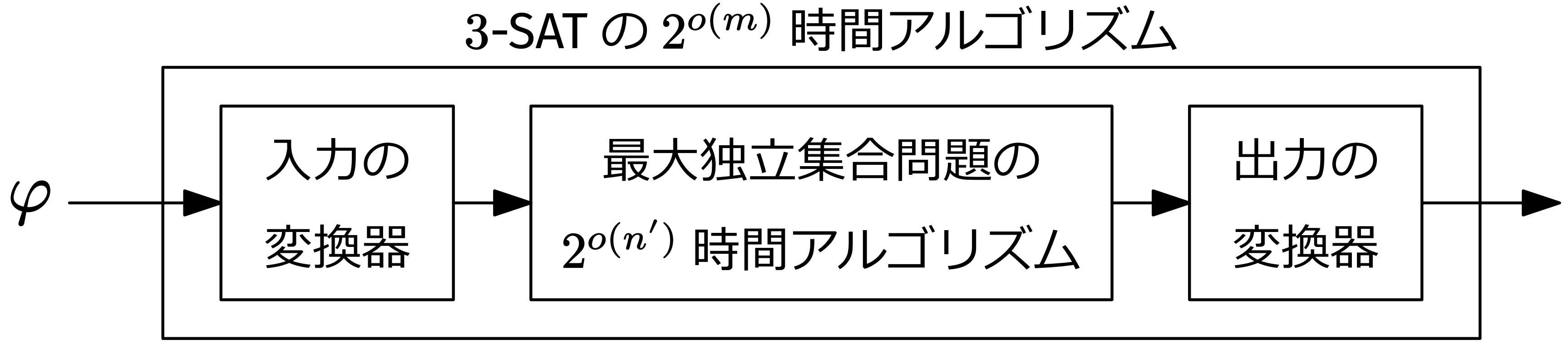
定理：最大独立集合問題の準指数時間計算量

指数時間仮説が正しい $\Rightarrow$ 次のどちらも正しい

- 最大独立集合問題は $2^{o(n')}$ 時間で解けない
- 最大独立集合問題は $2^{o(m')}$ 時間で解けない

ここで，n' は頂点数，m' は辺数

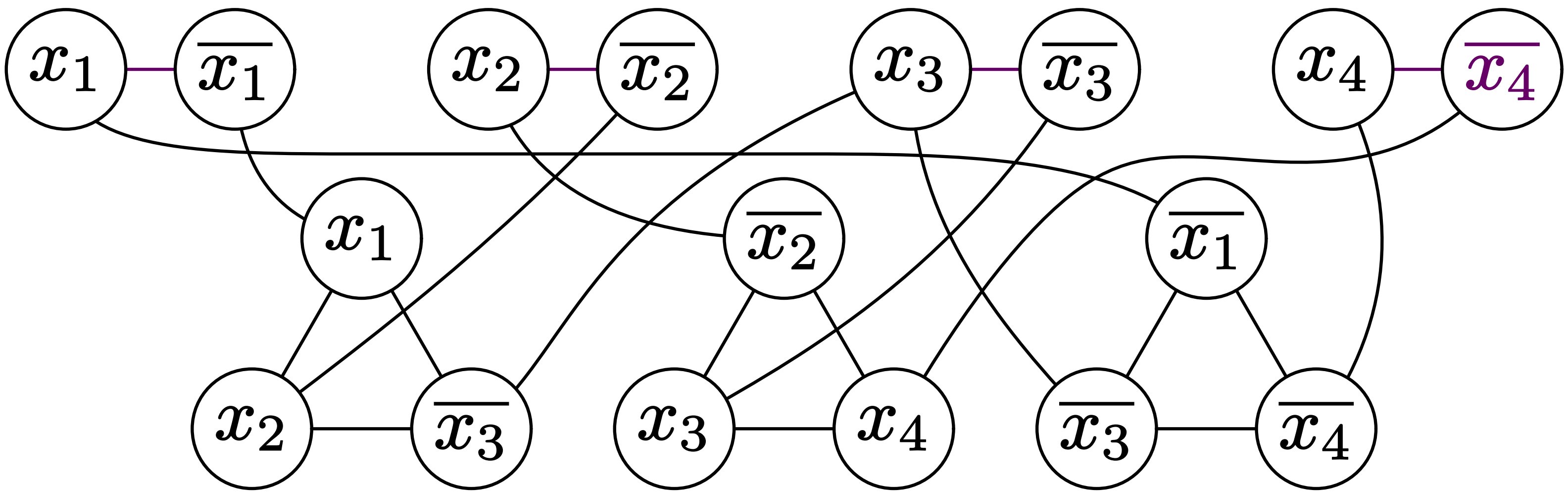
「指数時間仮説が正しい $\Rightarrow$ 3-SAT が $2^{o(m)}$ 時間で解けない」を使う



入力の変換

$$\varphi = \underbrace{(x_1 \lor x_2 \lor \overline{x_3})}_{C_1} \land \underbrace{(\overline{x_2} \lor x_3 \lor x_4)}_{C_2} \land \underbrace{(\overline{x_1} \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4})}_{C_3}$$

G_φ



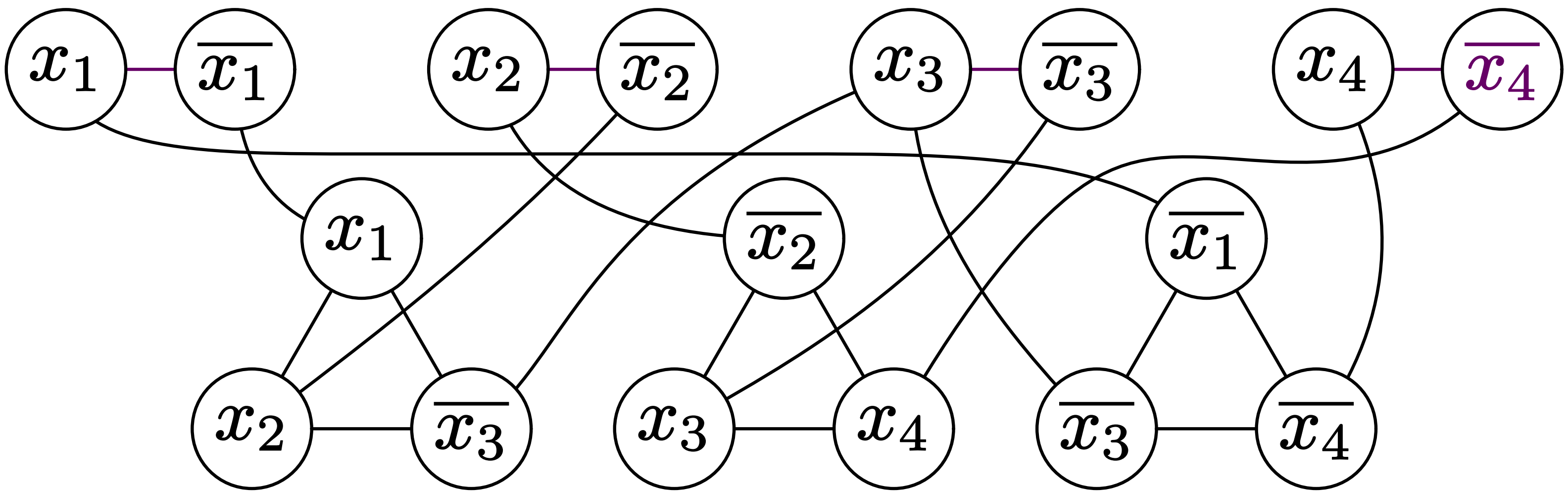
頂点：各リテラルに対して，各節の各リテラルに対して 1 つ
辺：各リテラルとその否定の間，各節のリテラルの間

入力の変換

$$\varphi = \underbrace{(x_1 \lor x_2 \lor \overline{x_3})}_{C_1} \land \underbrace{(\overline{x_2} \lor x_3 \lor x_4)}_{C_2} \land \underbrace{(\overline{x_1} \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4})}_{C_3}$$

変数数 $= n$，節数 $= m \quad (n \leq 3m)$

G_φ



頂点数 $\leq 2n + 3m$，辺数 $\leq n + 6m$

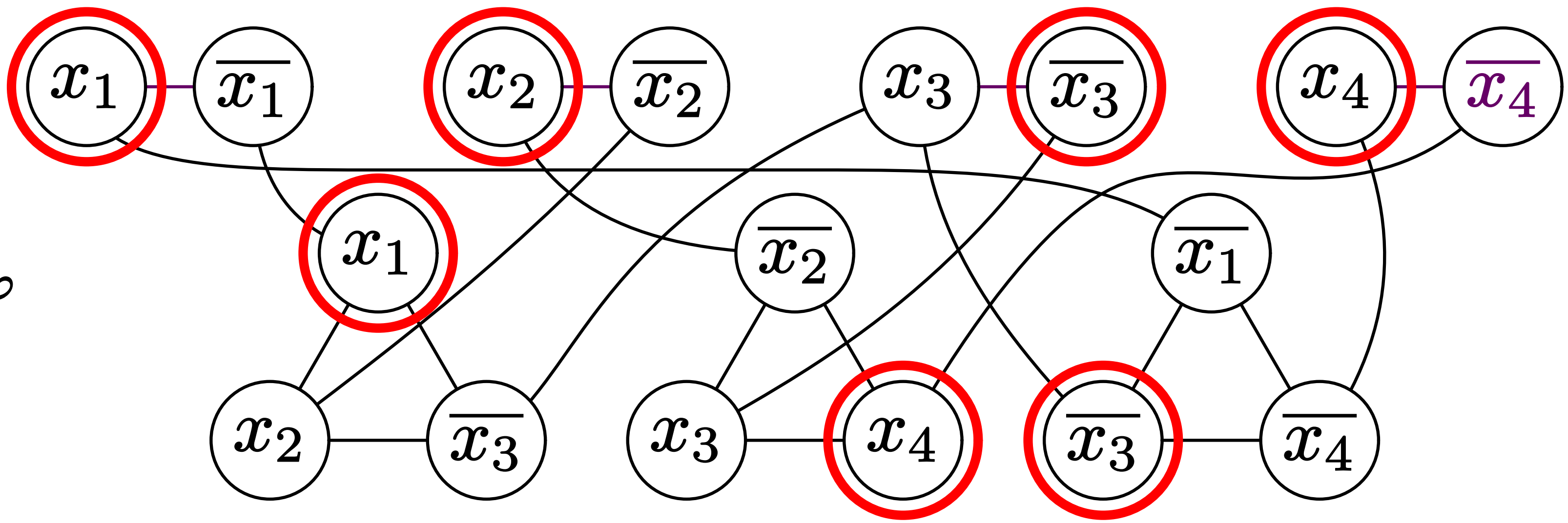
頂点：各リテラルに対して，各節の各リテラルに対して 1 つ
辺：各リテラルとその否定の間，各節のリテラルの間

入力の変換

$$\varphi = \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})}_{C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)}_{C_2} \wedge \underbrace{(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})}_{C_3}$$

変数数 $= n$，節数 $= m$　$(n \leq 3m)$

G_φ

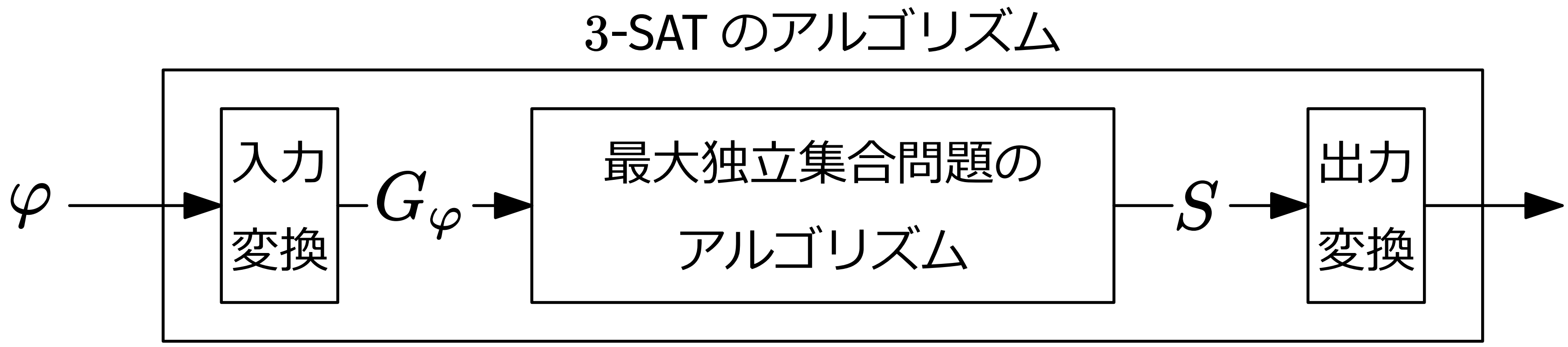


頂点数 $\leq 2n + 3m$，辺数 $\leq n + 6m$

$\leq 9m$　　$\leq 9m$

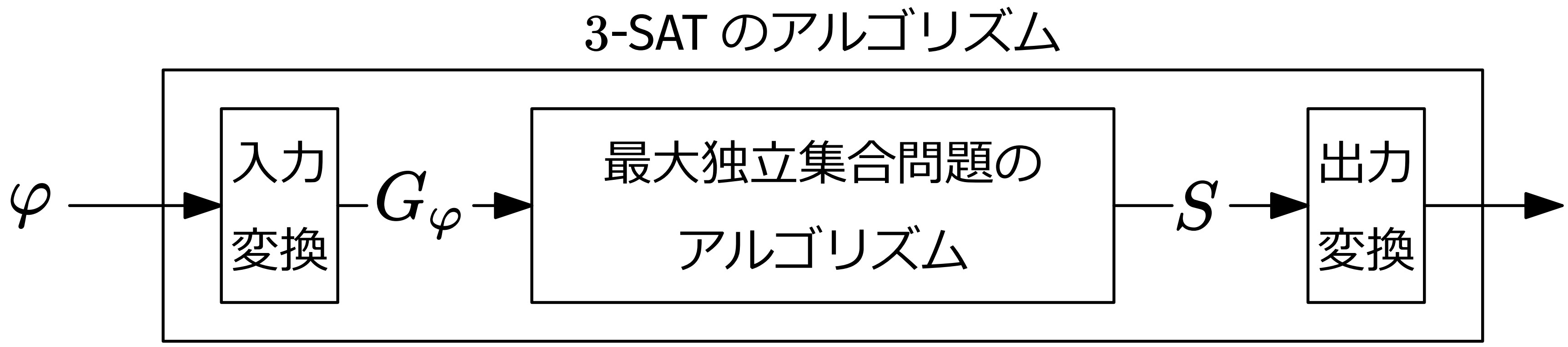
φ が充足可能 $\Leftrightarrow G_\varphi$ の最大独立集合の頂点数 $\geq n + m$

帰着



$|S| \geq n + m \Leftrightarrow \varphi$ は充足可能

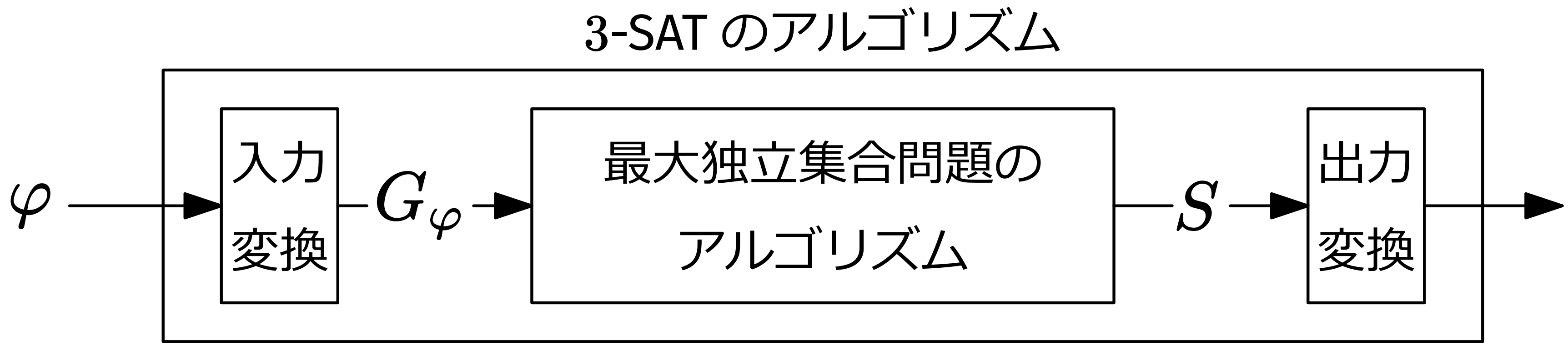
帰着



頂点数 $n' \leq 9m$

辺数 $m' \leq 9m$

帰着



頂点数 $n' \leq 9m$

辺数 $m' \leq 9m$

多項式時間　$2^{o(n')}$ 時間 $= 2^{o(m)}$ 時間　多項式時間

$2^{o(m')}$ 時間 $= 2^{o(m)}$ 時間

$\therefore$ このアルゴリズムの計算量は $2^{o(m)}$ $\square$

最大クリークと準指数時間計算量

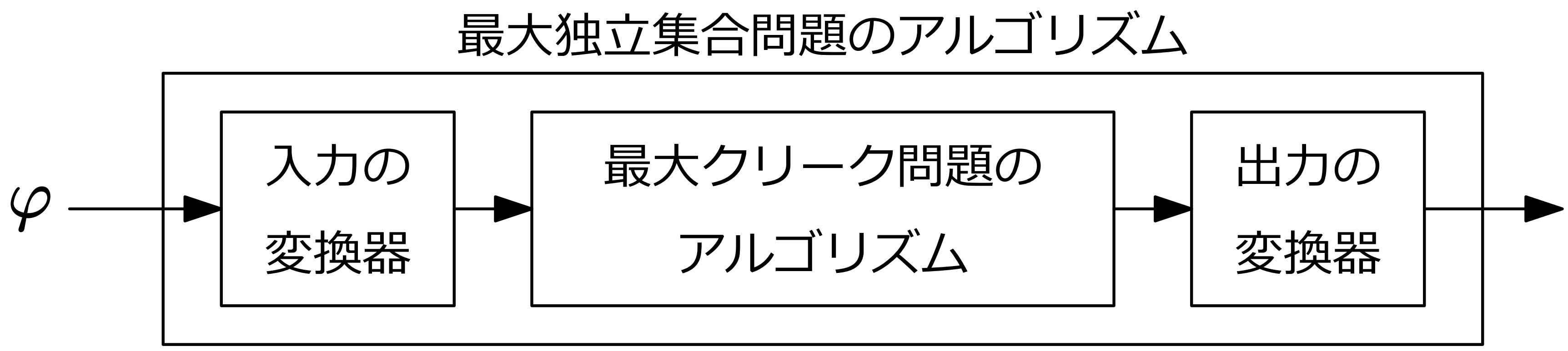
定理：最大クリーク問題の準指数時間計算量

指数時間仮説が正しい $\Rightarrow$ 次のどちらも正しい

- 最大クリーク問題は $2^{o(n')}$ 時間で解けない
- 最大クリーク問題は $2^{o(\sqrt{m'})}$ 時間で解けない

ここで，n' は頂点数，m' は辺数

「指数時間仮説が正しい $\Rightarrow$
最大独立集合問題が $2^{o(n)}$ 時間，$2^{o(m)}$ 時間で解けない」
を使う



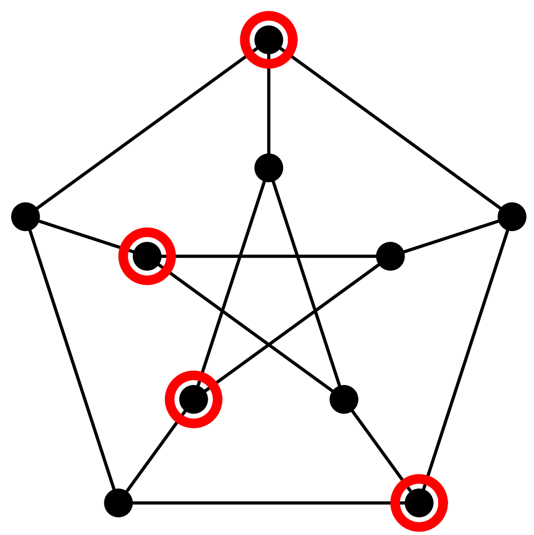
独立集合とクリーク

性質：独立集合とクリーク

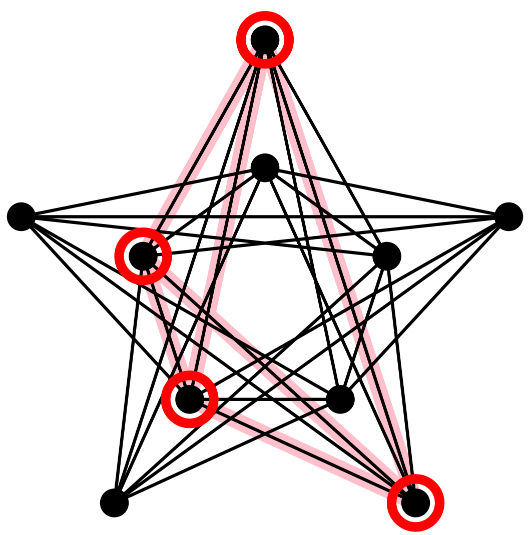
無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次の 2 つは同値

- $S \subseteq V$ は G の独立集合
- $S \subseteq V$ は $\overline{G} = (V, \overline{E})$ のクリーク

G の **補グラフ** (complement) と呼ばれる

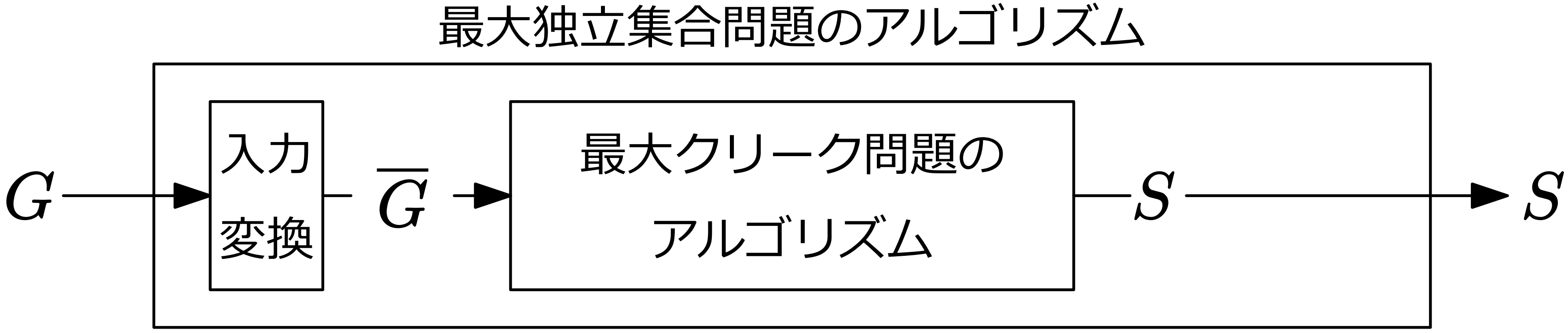


G



$\overline{G}$

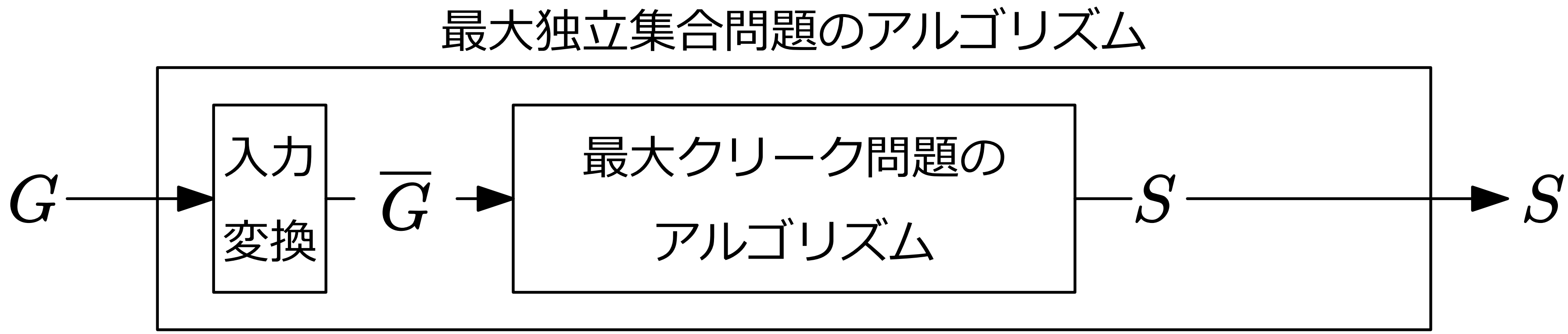
帰着



頂点数 n $\longrightarrow$ $n' = n$

辺数 m $\longrightarrow$ $m' = \binom{n}{2} - m = O(n^2)$

帰着



頂点数 $n \longrightarrow n' = n$

辺数 $m \longrightarrow m' = \binom{n}{2} - m = O(n^2)$

多項式時間

$2^{o(n')}$ 時間

$= 2^{o(n)}$ 時間

$2^{o(\sqrt{m'})}$ 時間

$= 2^{o(n)}$ 時間

$\therefore$ このアルゴリズムの計算量は $2^{o(n)}$ $\square$

最大独立集合と最大クリーク：まとめ

	サイズ・パラメータ	
	頂点数 n	辺数 m
問題		
最大独立集合	$2^{O(n)}$ 時間で解ける	$2^{O(m)}$ 時間で解ける
	$2^{o(n)}$ 時間で解けない	$2^{o(m)}$ 時間で解けない
最大クリーク	$2^{O(n)}$ 時間で解ける	$2^{O(\sqrt{m})}$ 時間で解ける
	$2^{o(n)}$ 時間で解けない	$2^{o(\sqrt{m})}$ 時間で解けない

解けない方は，指数時間仮説の成立を仮定

本日の内容

1. 前回の復習
2. 最大独立集合問題と最大クリーク問題
3. **最小被覆問題**

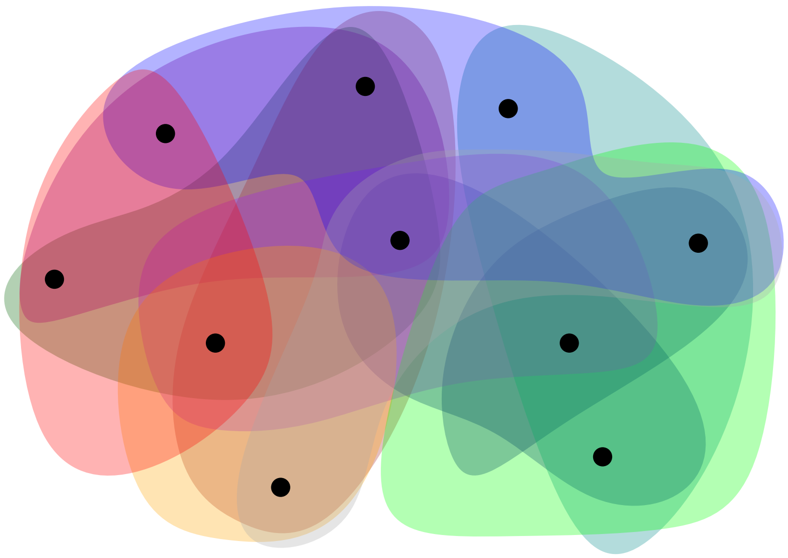
[復習] 最小被覆問題：設定

設定

- 有限集合 V
- 集合族 $\mathcal{S} \subseteq 2^V$

定義：被覆 (cover)

V の **被覆** とは，次を満たす $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$
- $\forall\, v \in V, \exists\, X \in \mathcal{C} : v \in X$



$\mathcal{C}$ は V を **被覆する** ともいう（**覆う**）

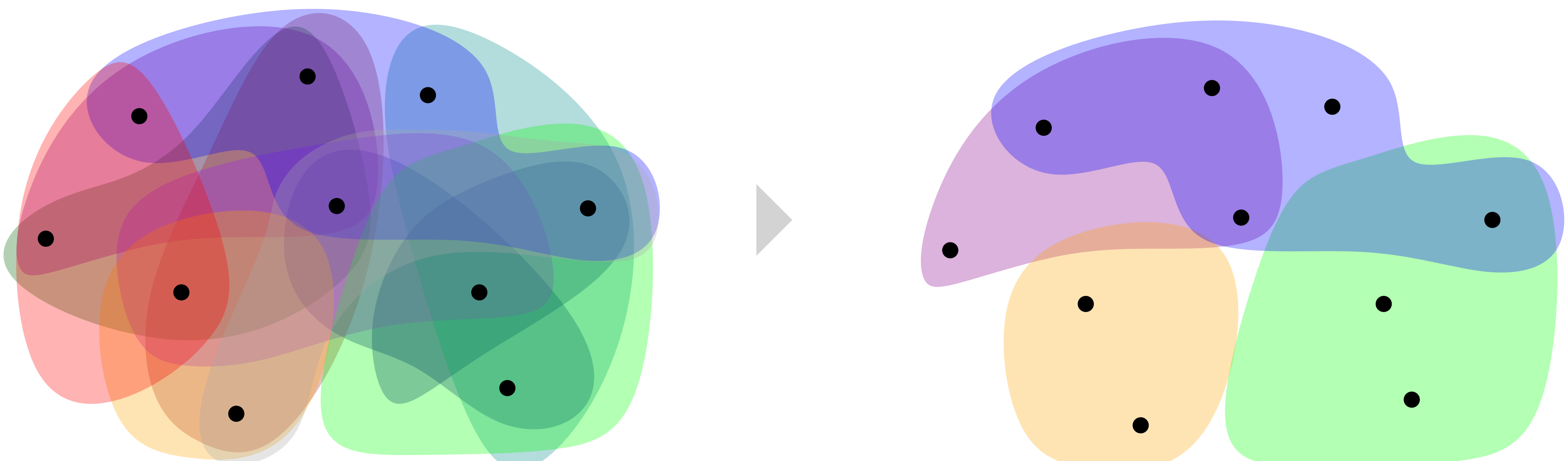
定義：最小被覆問題

入力： 有限集合 V，集合族 $\mathcal{S} \subseteq 2^V$

出力： V の最小被覆 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$

要素数最小の被覆

ここから，$n = |V|, m = |\mathcal{S}|$ とする



[復習] 最小被覆問題：定義

定義：最小被覆問題

入力： 有限集合 V，集合族 $\mathcal{S} \subseteq 2^V$

出力： V の最小被覆 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$

要素数最小の被覆

ここから，$n = |V|, m = |\mathcal{S}|$ とする

性質：最小被覆問題に対するアルゴリズム (復習)

最小被覆問題は次の計算量で解ける

- $O^*(2^n)$ 時間 (しらみつぶし)
- $O^*(2^m)$ 時間 (動的計画法)

最小被覆問題：準指数時間計算量

定理：最小被覆問題の準指数時間計算量

指数時間仮説が正しい $\Rightarrow$ 次のどちらも正しい

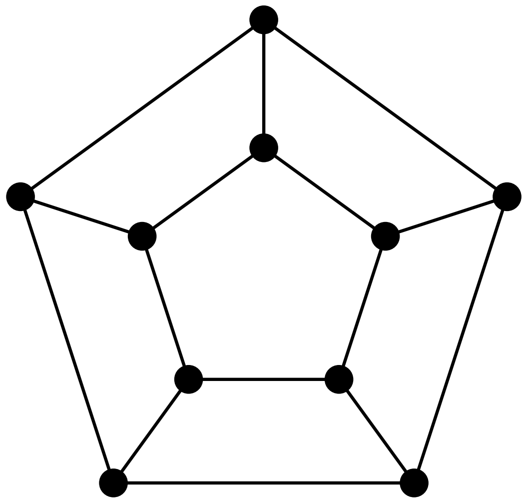
- 最小被覆問題は $2^{o(n')}$ 時間で解けない
- 最小被覆問題は $2^{o(m')}$ 時間で解けない

ここで，入力 $(V', \mathcal{S}')$ に対して $n' = |V'|, m' = |\mathcal{S}'|$

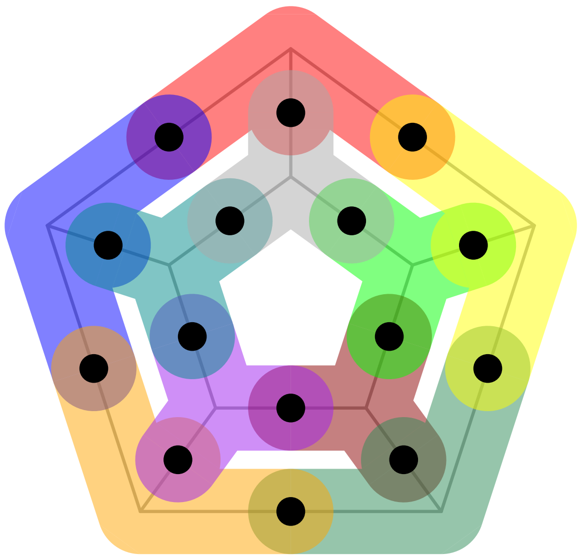
「指数時間仮説が正しい $\Rightarrow$
　最大独立集合問題が $2^{o(n)}$ 時間，$2^{o(m)}$ 時間で解けない」
を使う

最大独立集合問題のアルゴリズム

入力の変換



$G = (V, E)$



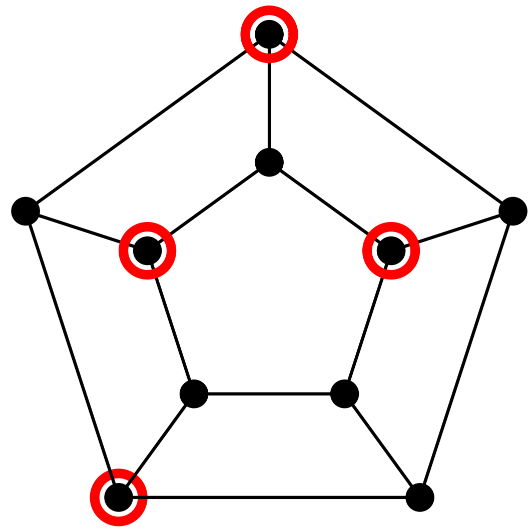
$(V', \mathcal{S}')$

$V' = E$

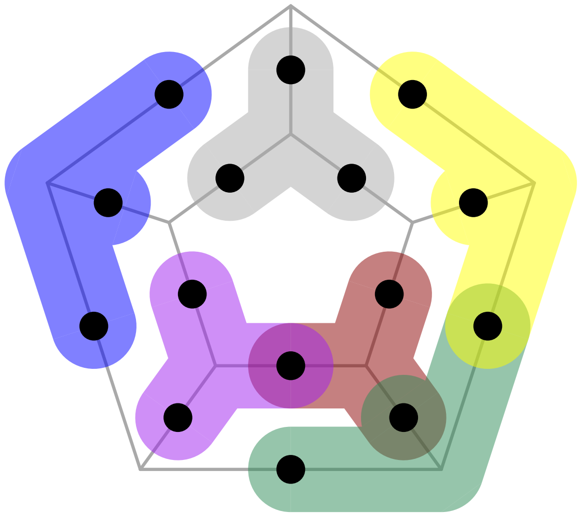
$\mathcal{S}' = \{\underbrace{\delta(v)}_{} \mid v \in V\}$

v に接続する辺全体

入力の変換



$G = (V, E)$



$(V', \mathcal{S}')$

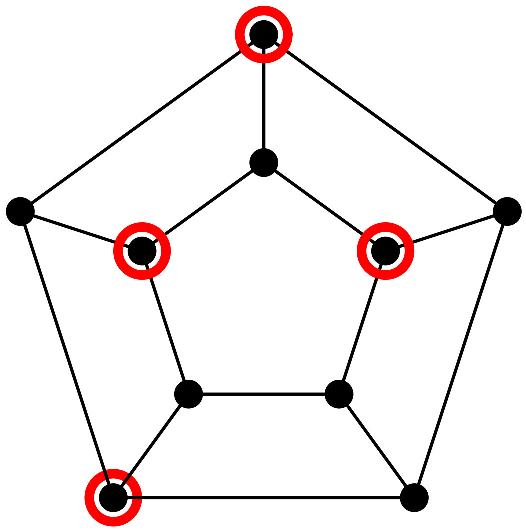
$V' = E$

$\mathcal{S}' = \{\underline{\delta(v)} \mid v \in V\}$

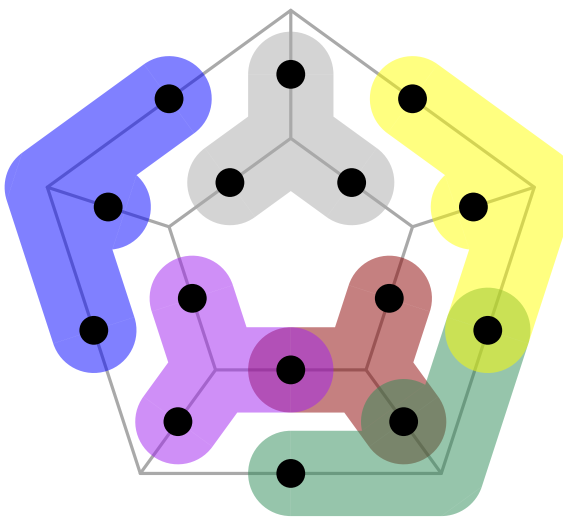
v に接続する辺全体

$X \subseteq V$ が G の独立集合 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}' = \{\delta(v) \mid v \in V - X\}$ が V' の被覆

入力の変換



$G = (V, E)$



$(V', \mathcal{S}')$

$n = |V|$ $\quad n' = m \quad V' = E$

$m = |E|$ $\quad m' = n \quad \mathcal{S}' = \{\underline{\delta(v)} \mid v \in V\}$

v に接続する辺全体

$X \subseteq V$ が G の独立集合 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}' = \{\delta(v) \mid v \in V - X\}$ が V' の被覆

入力の変換：証明 (1)

$G = (V, E)$ に対して，$V' = E, \mathcal{S}' = \{\delta(v) \mid v \in V\}$

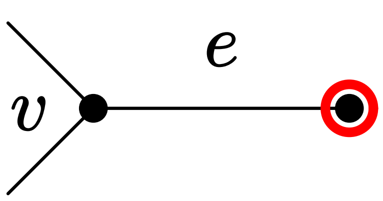
補題：独立集合と被覆の変換

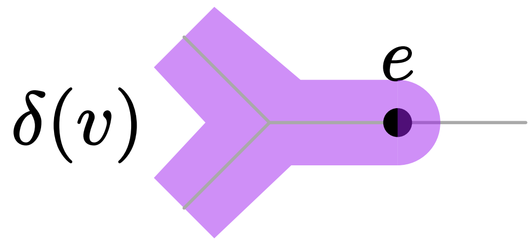
$X \subseteq V$ について，次は同値

1. X は G の独立集合
2. $\mathcal{C}' = \{\delta(v) \mid v \in V - X\}$ は V' の被覆

証明 $(1 \Rightarrow 2)$：X が G の独立集合だと仮定

- $e \in V'$ とする
- e の端点のどちらかは X に含まれない ($\because$ X は独立)
- e の端点 v が $v \notin X$ を満たすとする
- このとき，$e \in \delta(v) \in \mathcal{C}'$





入力の変換：証明 (2)

$G = (V, E)$ に対して，$V' = E, \mathcal{S}' = \{\delta(v) \mid v \in V\}$

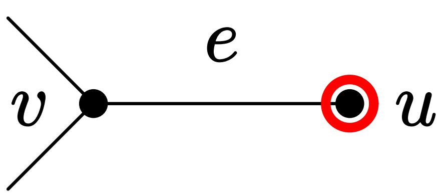
補題：独立集合と被覆の変換

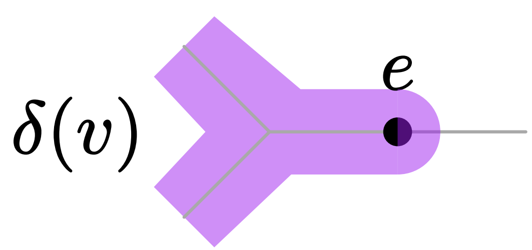
$X \subseteq V$ について，次は同値

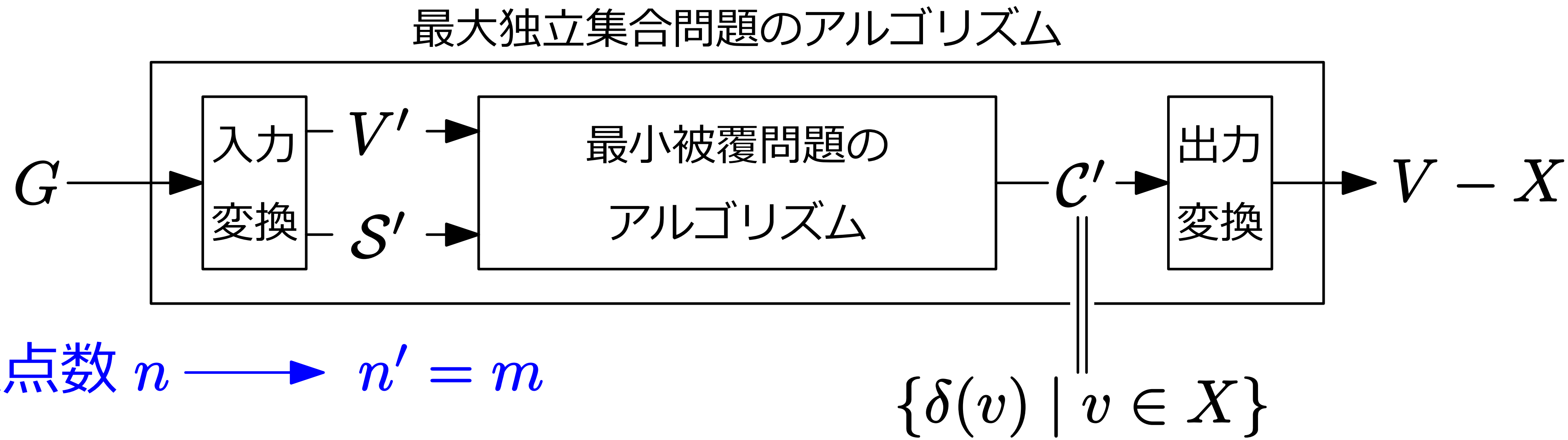
1. X は G の独立集合
2. $\mathcal{C}' = \{\delta(v) \mid v \in V - X\}$ は V' の被覆

<u>証明 (2 $\Rightarrow$ 1)</u>：$\mathcal{C}'$ が V' の被覆だと仮定

- $e = \{u, v\} \in E = V'$ とする
- $e \in \delta(w)$ を満たす $w \in V$ は u, v のみ
- $\therefore e \in \delta(u)$ または $e \in \delta(v)$ ($\because \mathcal{C}'$ は V' の被覆)
- $\therefore u \notin X$ または $v \notin X$ $\square$







頂点数 $n \longrightarrow n' = m$

辺数 $m \longrightarrow m' = n$

多項式時間　　$2^{o(n')}$ 時間 $= 2^{o(m)}$ 時間　　多項式時間

$2^{o(m')}$ 時間 $= 2^{o(n)}$ 時間

$\therefore$ このアルゴリズムの計算量は $2^{o(n)}$ または $2^{o(m)}$ $\square$

本日のまとめ

前回と今回

指数時間よりも小さい計算量を達成できるか？

前回

- 指数時間仮説
- 準指数時間帰着
- 疎化補題

今回

- 準指数時間帰着の例