離散最適化基礎論 (2025 年後学期)

高速指数時間アルゴリズム

第 10 回

部分集合たたみ込み (2)：例

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 1 月 6 日

最終更新：2026 年 1 月 6 日　13:30

スケジュール(前半)

1. 高速指数時間アルゴリズムの考え方 (10/7)
＊ 休み(体育祭) (10/14)
2. 分枝アルゴリズム：基礎 (10/21)
3. 分枝アルゴリズム：高速化 (10/28)
4. 分枝アルゴリズム：測度統治法 (11/4)
5. 動的計画法：基礎 (11/11)
6. 動的計画法：例 (11/18)

スケジュール (後半)

7.	包除原理：原理	(11/25)
∗	休み (秋ターム試験)	(12/2)
8.	包除原理：例	(12/9)
9.	部分集合たたみ込み：原理	(12/16)
∗	休み (出張)	(12/23)
∗	休み (冬季休業)	(12/30)
10.	**部分集合たたみ込み：例**	(1/6)
11.	指数時間仮説：原理	(1/13)
12.	指数時間仮説：証明	(1/20)
13.	最近の話題	(1/27)
∗	休み (修士論文発表会)	(2/3)

前回と今回

部分集合たたみ込み (subset convolution) による
アルゴリズムの設計と解析

前回
- 部分集合たたみ込みの説明
  - 最小シュタイナー木問題 ($O^*(2^{|K|})$ 時間)

今回
- 部分集合たたみ込みのアルゴリズム
  - k 彩色の数え上げ ($O^*(2^n)$ 時間)

有限集合 U，集合関数 $f, g\colon 2^U \to \mathbb{R}$

定義：部分集合たたみ込み (subset convolution)

f, g の **部分集合たたみ込み** とは，次の関数 $f * g\colon 2^U \to \mathbb{R}$

$$(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T) g(S - T) \qquad \forall\, S \subseteq U$$

例：$U = \{a, b\}$

$$(f * g)(\{a\})$$
$$= f(\emptyset) g(\{a\}) + f(\{a\}) g(\emptyset)$$
$$= 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = -2$$

S	$f(S)$	$g(S)$
$\emptyset$	0	2
$\{a\}$	-1	3
$\{b\}$	4	-3
$\{a, b\}$	2	5

注：以後，単に たたみ込み とも言う

問題：部分集合たたみ込み

入力　：有限集合 U，集合関数 $f, g\colon 2^U \to \mathbb{Z}$
出力　：部分集合たたみ込み $f * g\colon 2^U \to \mathbb{Z}$

S	$f(S)$	$g(S)$
$\emptyset$	0	2
$\{a\}$	-1	3
$\{b\}$	4	-3
$\{a, b\}$	2	5

S	$(f * g)(S)$
$\emptyset$	0
$\{a\}$	-2
$\{b\}$	8
$\{a, b\}$	19

以下，$n = |U|$ とする

[復習] 今日の目標 (の1つ)

定理 (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto ’07)

部分集合たたみ込みは $O^*(2^n)$ 回 の演算で解ける

↑ 改善

(素朴なアルゴリズム：$O(3^n)$)

より細かく (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto ’07)

部分集合たたみ込みは次の時間で解ける

$$O(2^n n^{O(1)} \log M)$$

ただし，$M = \max_{S \subseteq U} \max\{|f(S)|, |g(S)|\}$

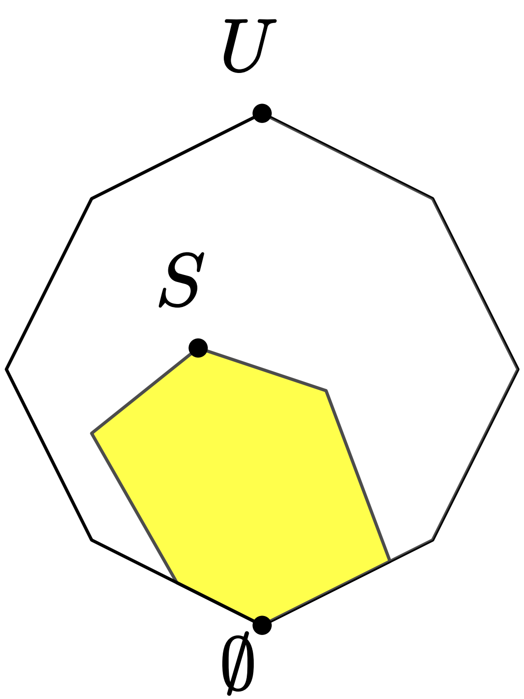
[復習] ゼータ変換

集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{R}$

定義：ゼータ変換 (zeta transform)

f の **ゼータ変換** は次の集合関数

$$\zeta[f](S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$$



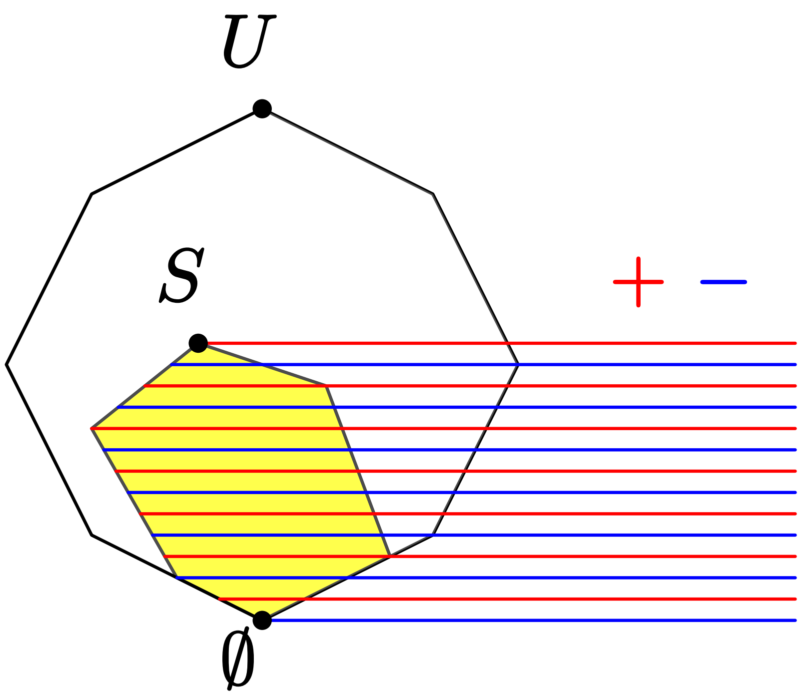
[復習] メビウス変換

集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{R}$

定義：メビウス変換 (Möbius transform)

f の **メビウス変換** は次の集合関数

$$\mu[f](S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} f(T)$$



[復習] ゼータ変換とメビウス変換の性質

性質：ゼータとメビウスは互いに逆変換

任意の集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{R}$ に対して,

- $\mu[\zeta[f]] = f$
- $\zeta[\mu[f]] = f$

S	$f(S)$	$\zeta[f](S)$	$\mu[\zeta[f]](S)$	$\mu[f](S)$	$\zeta[\mu[f]](S)$
$\emptyset$	3	3	3	3	3
$\{a\}$	5	8	5	2	5
$\{b\}$	4	7	4	1	4
$\{a,b\}$	2	14	2	-4	2

[復習] ゼータ変換とメビウス変換の計算

定理：ゼータ変換とメビウス変換の計算 (Yates '37)

集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{Z}$ に対して,

- ゼータ変換 $\zeta[f]$ は $O^*(2^n)$ 時間で計算できる
- メビウス変換 $\mu[f]$ は $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

本日の内容

1. **アルゴリズム：部分集合たたみ込み**
2. 利用法：染色多項式の計算

- A. Björklund, T. Husfeldt, P. Kaski, M. Koivisto, Fourier meets Möbius: fast subset convolution. *Proceedings of STOC 2007* (2007) pp. 67–74.
- P. Kaski, Fast subset convolution. *Encyclopedia of Algorithms* (2016) pp. 735–738.

たたみ込みの変種

有限集合 U，集合関数 $f, g\colon 2^U \to \mathbb{R}$

次のような たたみ込みの変種を考える

関数 $f \cup g, f \cdot g\colon 2^U \to \mathbb{R}$ を次で定義

$$(f \cup g)(S) = \sum_{X,Y \subseteq S\colon X \cup Y = S} f(X)g(Y) \qquad \forall\, S \subseteq U$$

$$(f \cdot g)(S) = f(S)g(S) \qquad \forall\, S \subseteq U$$

S	$f(S)$	$g(S)$	$(f \cup g)(S)$	$(f \cdot g)(S)$
$\emptyset$	0	2	0	0
$\{a\}$	-1	3	-5	-3
$\{b\}$	4	-3	-4	-12
$\{a, b\}$	2	5	44	10

たたみ込みの変種

有限集合 U，集合関数 $f, g\colon 2^U \to \mathbb{R}$

次のような たたみ込みの変種を考える

関数 $f \cup g, f \cdot g\colon 2^U \to \mathbb{R}$ を次で定義

$$(f \cup g)(S) = \sum_{X,Y \subseteq S\colon X \cup Y = S} f(X)g(Y) \qquad \forall\, S \subseteq U$$

$$(f \cdot g)(S) = f(S)g(S)$$

S	$f(S)$	$g(S)$		
$\emptyset$	0	2		
$\{a\}$	-1	3		
$\{b\}$	4	-3	$\boxed{-4}$	-12
$\{a,b\}$	2	5	44	10

$$\begin{aligned}&(f \cup g)(\{b\})\\ &= f(\emptyset)g(\{b\}) + f(\{b\})g(\emptyset)\\ &\qquad + f(\{b\})g(\{b\})\\ &= 0 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -4\end{aligned}$$

たたみ込みの変種

有限集合 U，集合関数 $f, g\colon 2^U \to \mathbb{R}$

次のような たたみ込みの変種を考える

関数 $f \cup g, f \cdot g\colon 2^U \to \mathbb{R}$ を次で定義

$$(f \cup g)(S) = \sum_{X,Y \subseteq S\colon X \cup Y = S} f(X)g(Y) \qquad \forall\, S \subseteq U$$

$$(f \cdot g)(S) = f(S)g(S) \qquad \forall\, S \subseteq U$$

$O^*(2^n)$ 時間で計算できる

S	$f(S)$	$g(S)$	$(f \cup g)(S)$	$(f \cdot g)(S)$
$\emptyset$	0	2	0	0
$\{a\}$	-1	3	-5	-3
$\{b\}$	4	-3	-4	-12
$\{a,b\}$	2	5	44	10

ゼータ・メビウス変換との関係

性質：$f \cup g$ の計算法

任意の集合関数 $f, g \colon 2^U \to \mathbb{R}$ に対して

$$f \cup g = \mu[\zeta[f] \cdot \zeta[g]]$$

帰結：$f \cup g$ は $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

ゼータ・メビウス変換との関係

性質：$f \cup g$ の計算法

任意の集合関数 $f, g\colon 2^U \to \mathbb{R}$ に対して

$$f \cup g = \mu[\zeta[f] \cdot \zeta[g]]$$

帰結：$f \cup g$ は $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

証明：$\zeta[f \cup g] = \zeta[f] \cdot \zeta[g]$ を示せばよい（$\because$ μ は ζ の逆変換）

$$\begin{aligned}
\zeta[f \cup g](S) &= \sum_{T \subseteq S} (f \cup g)(T) = \sum_{T \subseteq S} \sum_{X, Y\colon X \cup Y = T} f(X) g(Y) \\
&= \sum_{T, X, Y\colon T \subseteq S, X \cup Y = T} f(X) g(Y) \\
&= \sum_{X, Y \subseteq S} f(X) g(Y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\zeta[f \cup g](S) &= \sum_{X,Y \subseteq S} f(X)g(Y) \\
&= \sum_{X \subseteq S} f(X) \sum_{Y \subseteq S} g(Y) \\
&= \zeta[f](S) \cdot \zeta[g](S)
\end{aligned}
$$

□

$f \cup g$ から $f * g$ へ：準備

$B =$ 大きな整数 (あるいは記号) とする

記法

集合関数 $f, g \colon 2^U \to \mathbb{R}$ に対して，次の f_B, g_B を定義

$$f_B(S) = f(S) B^{|S|} \quad \forall\, S \subseteq U$$
$$g_B(S) = g(S) B^{|S|} \quad \forall\, S \subseteq U$$

S	$f(S)$	$g(S)$	$f_B(S)$	$g_B(S)$
$\emptyset$	0	2	0	2
$\{a\}$	-1	3	$-B$	$3B$
$\{b\}$	4	-3	$4B$	$-3B$
$\{a, b\}$	2	5	$2B^2$	$5B^2$

$B =$ 大きな整数 (あるいは記号) とする

記法

集合関数 $f, g \colon 2^U \to \mathbb{R}$ に対して，次の f_B, g_B を定義

$$f_B(S) = f(S)B^{|S|} \quad \forall\, S \subseteq U$$
$$g_B(S) = g(S)B^{|S|} \quad \forall\, S \subseteq U$$

このとき

$$\begin{aligned}(f_B \cup g_B)(S) &= \sum_{X \cup Y = S} f_B(X) g_B(Y) \\ &= \sum_{X \cup Y = S} f(X)B^{|X|} g(Y)B^{|Y|} \\ &= \sum_{X \cup Y = S} f(X)g(Y)B^{|X|+|Y|}\end{aligned}$$

このとき

$$(f_B \cup g_B)(S) = \sum_{X \cup Y = S} f(X)g(Y)B^{|X|+|Y|}$$

$$\Big\downarrow \quad B^{|S|} \text{ の係数}$$

$$\sum_{\substack{X \cup Y = S \\ |X|+|Y|=|S|}} f(X)g(Y)$$

$$= \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S-T) = (f * g)(S)$$

$f \cup g$ から $f * g$ へ (続)

このとき

$$(f_B \cup g_B)(S) = \sum_{X \cup Y = S} f(X)g(Y)B^{|X|+|Y|}$$

$$\Big\downarrow \ B^{|S|} \text{ の係数}$$

$$\sum_{\substack{X \cup Y = S \\ |X|+|Y|=|S|}} f(X)g(Y)$$

$$= \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S-T) = (f * g)(S)$$

つまり，$f * g$ を計算するには

1. $f_B \cup g_B$ を計算する ($\mu[\zeta[f_B] \cdot \zeta[g_B]]$ として)
2. 「$(f * g)(S) = (f \cup g)(S)$ における $B^{|S|}$ の係数」として $f * g$ を計算する

部分集合たたみ込み計算アルゴリズム

アルゴリズム：subset-convolution(f, g)

1. f_B, g_B を計算
2. $f_B \cup g_B$ を計算
3. 「$(f * g)(S) = (f_B \cup g_B)(S)$ における $B^{|S|}$ の係数」として $f * g$ を計算して，出力

部分集合たたみ込み計算アルゴリズム

アルゴリズム：subset-convolution(f, g)

1. f_B, g_B を計算 $O^*(2^n)$
2. $f_B \cup g_B$ を計算 $O^*(2^n)$
3. 「$(f * g)(S) = (f_B \cup g_B)(S)$ における $B^{|S|}$ の係数」として $f * g$ を計算して，出力 $O^*(2^n)$

計算量 $= O^*(2^n)$　　メモリ使用量 $= O^*(2^n)$

結論：定理 (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto ’07)

部分集合たたみ込みは $O^*(2^n)$ 回 の演算で解ける

本日の内容

1. アルゴリズム：部分集合たたみ込み
2. **利用法：染色多項式の計算**

- A. Björklund, T. Husfeldt, P. Kaski, M. Koivisto, Computing the Tutte polynomial in vertex-exponential time. *Proceedings of FOCS 2008* (2008) pp. 677–686.

[復習] グラフの k 彩色

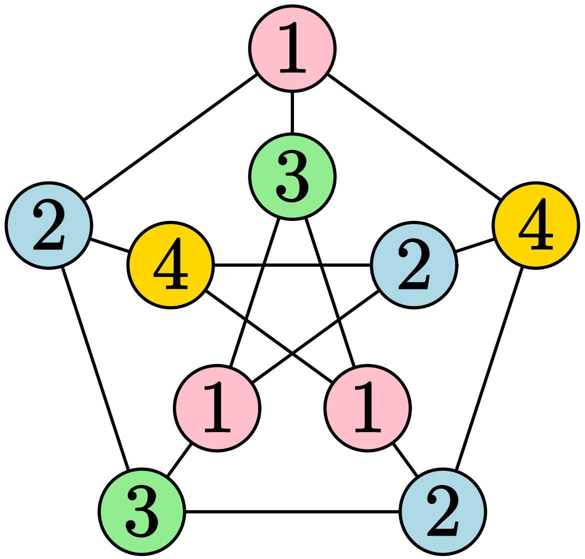
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：k 彩色 (k-coloring)

G の k **彩色** とは,
写像 $c\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ で次を満たすもののこと

$$\{u, v\} \in E \quad \Rightarrow \quad c(u) \neq c(v)$$

直感：k 色しか使わない彩色



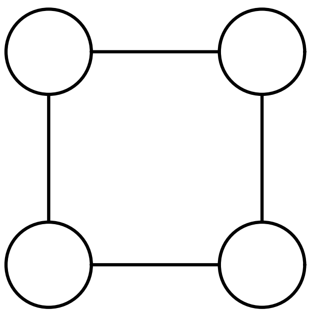
4 彩色であるが,

3 彩色ではない

定義：k 彩色の数え上げ問題

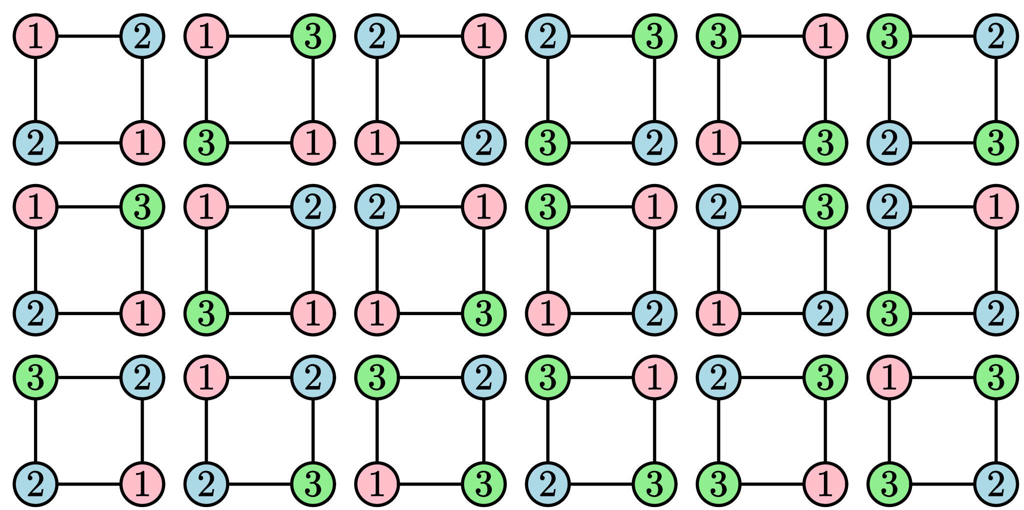
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$，非負整数 k

出力： G の k 彩色の <u>総数</u>



$k = 3$

18



k 彩色の数え上げアルゴリズム

部分集合たたみ込みを使って，次の定理を導出する

定理 (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto '08)

k 彩色の数え上げ問題は $O^*(2^n)$ 時間 で解ける
(n はグラフの頂点数)

↑ 計算量の改善

補足：第 8 回授業で，次の結果を導出した

定理 (Whitney の公式)

k 彩色の数え上げ問題は $O^*(2^m)$ 時間 で解ける
(m はグラフの辺数)

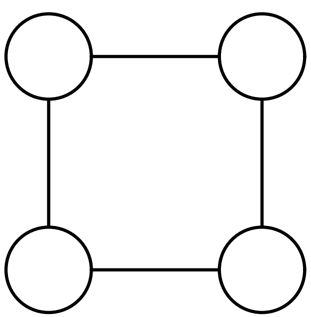
[復習] Whitney の公式

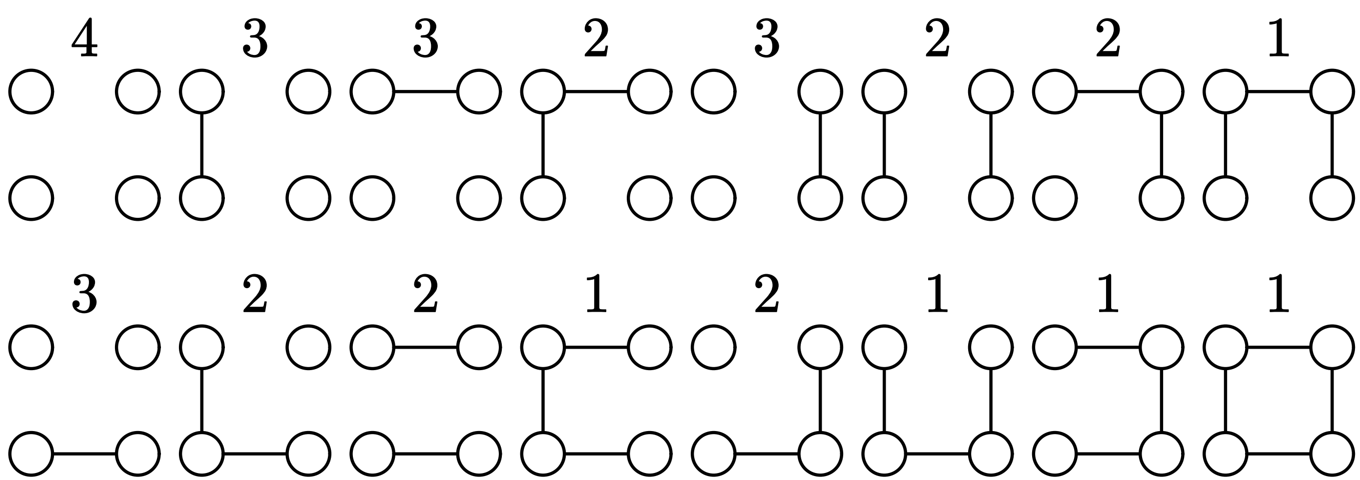
定理：Whitney の公式

無向グラフ $G = (V, E)$ の k 彩色の総数は次で計算できる

$$\sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} k^{c(F)}$$

ここで，$c(F)$ は無向グラフ (V, F) の連結成分の総数





$\therefore k$ 彩色の総数 $= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k$

Whitney の公式：再考

定理：Whitney の公式

無向グラフ $G = (V, E)$ の k 彩色の総数は次で計算できる

$$\sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} k^{c(F)}$$

ここで，$c(F)$ は無向グラフ (V, F) の連結成分の総数

$F_1, F_2 \subseteq E$ が次を満たすとする

- $|F_1| = |F_2|$
- $c(F_1) = c(F_2)$

このとき，$(-1)^{|F_1|} k^{c(F_1)} = (-1)^{|F_2|} k^{c(F_2)}$

Whitney の公式：再考

定理：Whitney の公式

無向グラフ $G = (V, E)$ の k 彩色の総数は次で計算できる

$$\sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} k^{c(F)}$$

ここで，$c(F)$ は無向グラフ (V, F) の連結成分の総数

つまり，

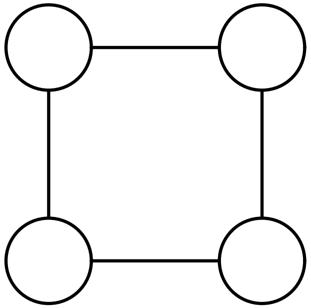
$$\sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} k^{c(F)} = \sum_{a=0}^{m} \sum_{b=1}^{n} (-1)^{a} k^{b} f_{a,b}(G)$$

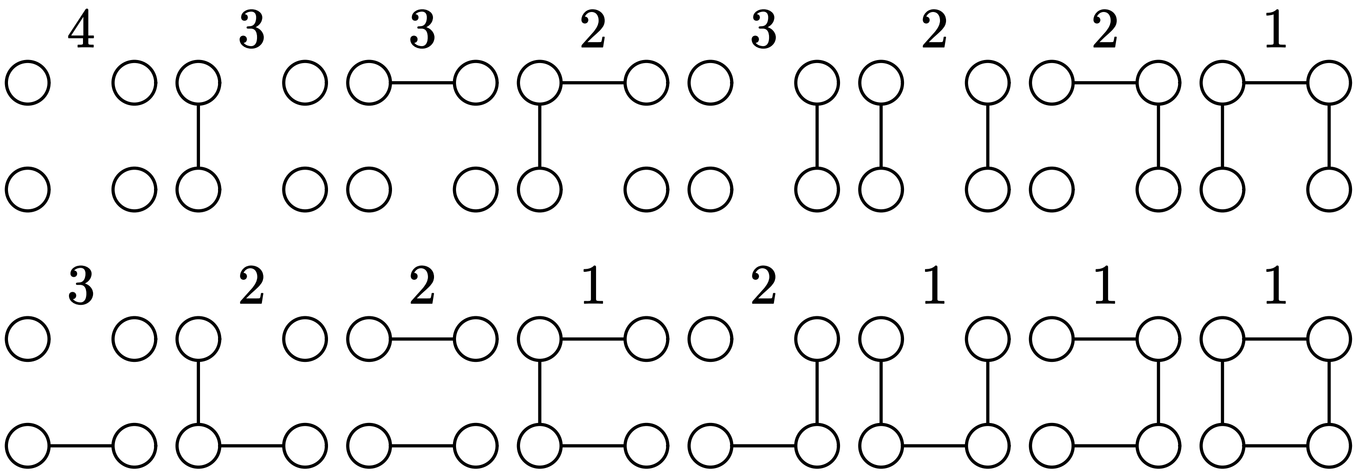
ただし，$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$

$(n = |V|, m = |E|)$

$f_{a,b}(G)$：例

$$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$$

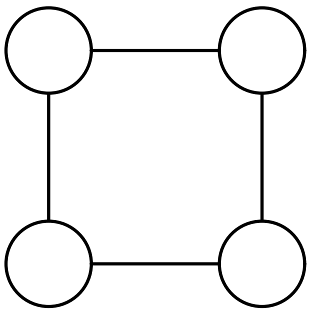


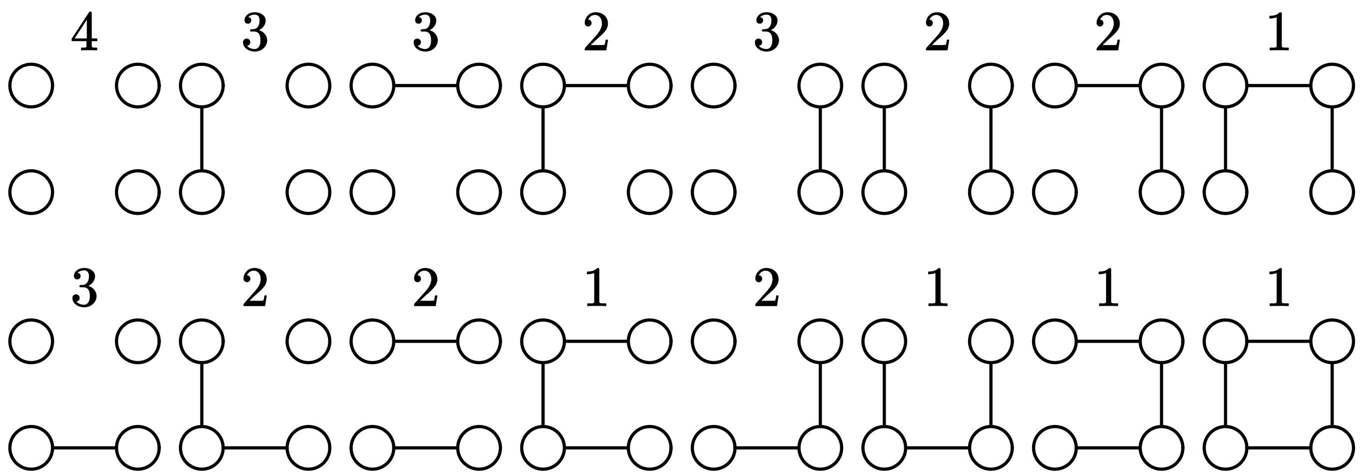


$a \setminus b$	1	2	3	4
0	0	0	0	1
1	0	0	4	0
2	0	6	0	0
3	4	0	0	0
4	1	0	0	0

$f_{a,b}(G)$：例

$$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$$





$a \setminus b$	1	2	3	4	
0	0	0	0	1	$+k^4$
1	0	0	4	0	$-4k^3$
2	0	6	0	0	$+6k^2$
3	4	0	0	0	$-4k$
4	1	0	0	0	$+k$

$$k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k$$

k 彩色の数え上げ：ここまでのまとめ

ここまでのまとめ

無向グラフ $G = (V, E)$ の k 彩色の総数は次で計算できる

$$\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=1}^{n}(-1)^a k^b f_{a,b}(G)$$

ここで，$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$

つまり，

$f_{a,b}(G)$ ($\forall\, a, b$) が $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

$\Rightarrow$ G の k 彩色の数え上げが $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

ここまでのまとめ

無向グラフ $G=(V,E)$ の k 彩色の総数は次で計算できる

$$\sum_{a=0}^{m}\sum_{b=1}^{n}(-1)^a k^b f_{a,b}(G)$$

ここで，$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$

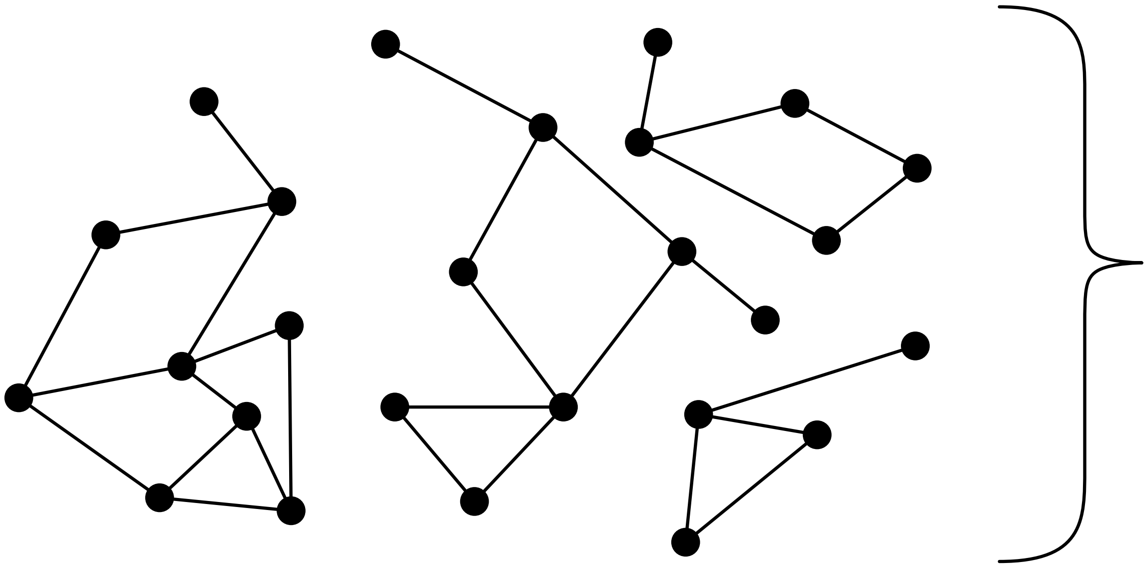
つまり，

新たな目標

$f_{a,b}(G)$ $(\forall\, a,b)$ が $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

$\Rightarrow$ G の k 彩色の数え上げが $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

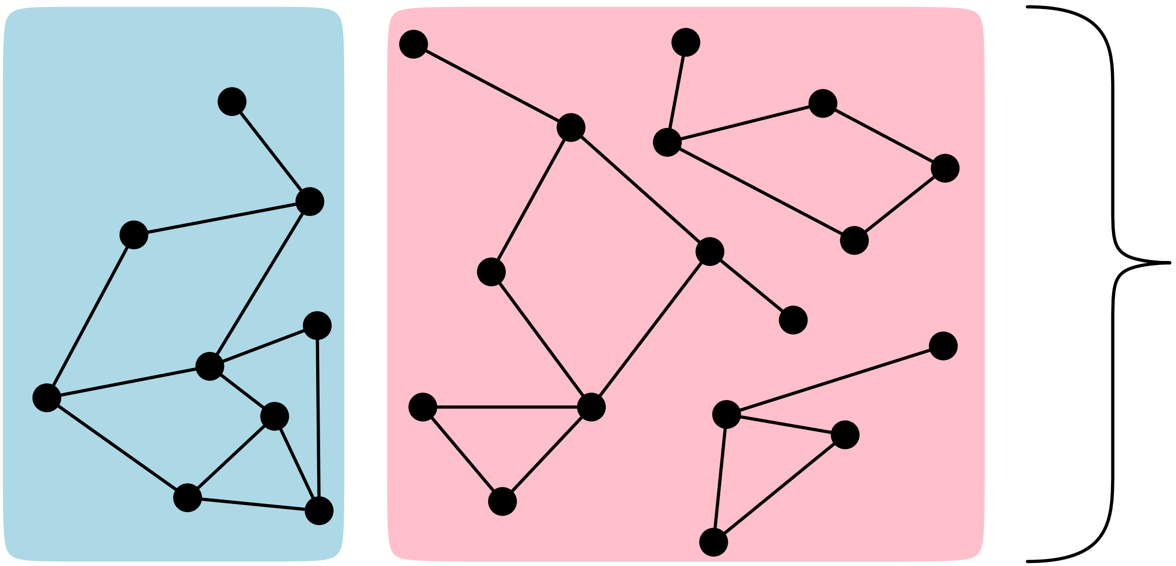
$$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$$



a：辺数

b：連結成分数

$$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$$



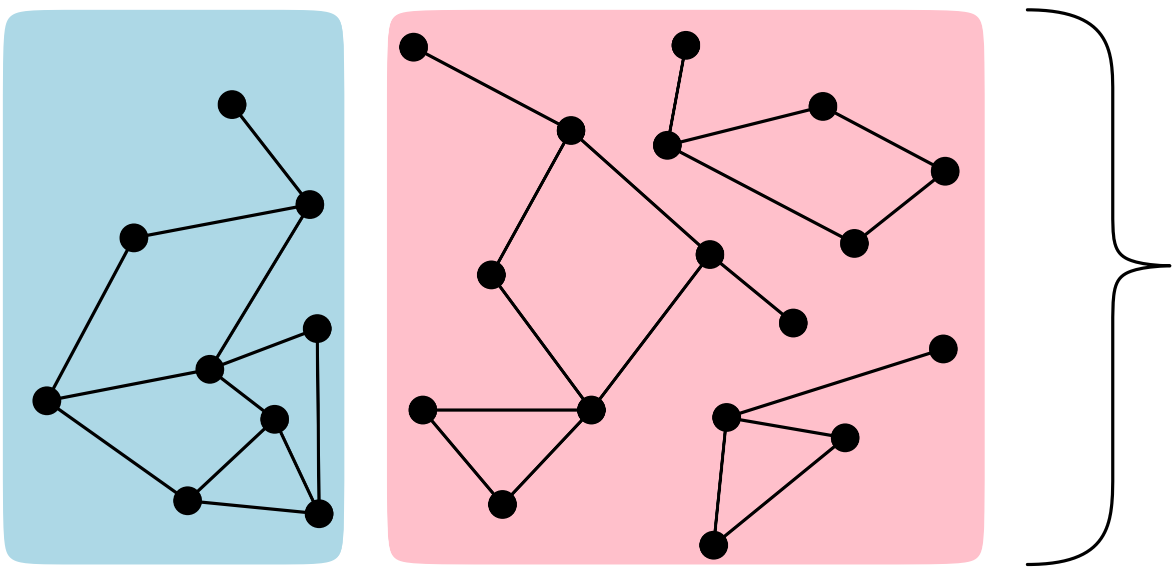
a：辺数

b：連結成分数

a'	$a - a'$	：辺数
1	$b - 1$	：連結成分数

$f_{a,b}(G)$ の計算：考え方

$$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$$



a：辺数

b：連結成分数

a'	$a - a'$	：辺数
1	$b - 1$	：連結成分数

再帰

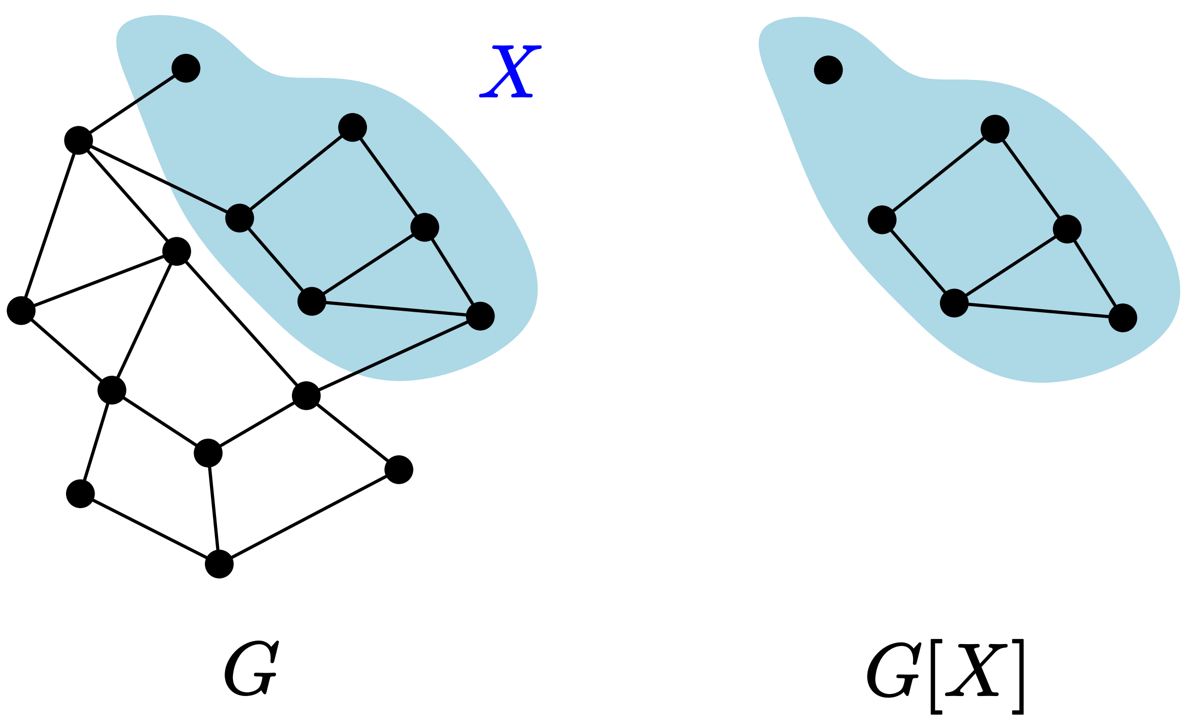
誘導部分グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $X \subseteq V$

定義：誘導部分グラフ (induced subgraph)

X が **誘導** する G の **部分グラフ** とは，次のグラフ $G[X]$

- $G[X]$ の頂点集合 $= X$
- $G[X]$ の辺集合 $= \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in X\}$

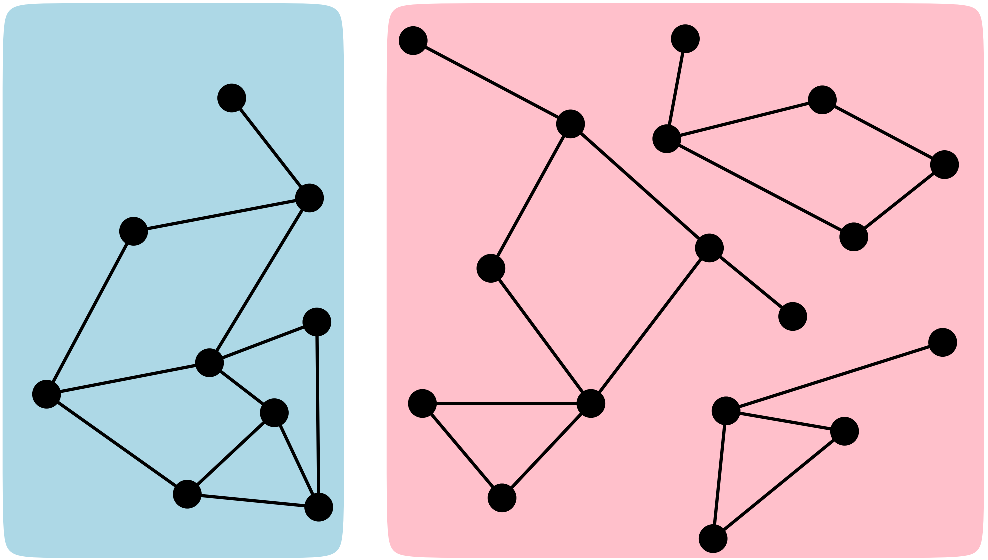


$$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$$

再帰式：

$|X| \geq 2$，$b \geq 2$ のとき

$$f_{a,b}(G[X]) = \frac{1}{b} \sum_{a'=0}^{a} \sum_{Y : \emptyset \subsetneq Y \subsetneq X} f_{a',1}(G[Y]) f_{a-a',b-1}(G[X-Y])$$



$f_{a,b}(G)$ の計算：再帰式

$$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$$

再帰式：

$|X| \geq 2$, $b \geq 2$ のとき

$$f_{a,b}(G[X]) = \frac{1}{b} \sum_{a'=0}^{a} \sum_{Y : \emptyset \subsetneq Y \subsetneq X} f_{a',1}(G[Y]) f_{a-a',b-1}(G[X-Y])$$

$b = 1$ のとき

$$f_{a,1}(G[X]) = \binom{G[X] \text{ の辺数}}{a} - \sum_{b=2}^{|X|} f_{a,b}(G[X])$$

$f_{a,b}(G)$ の計算：再帰式

$$f_{a,b}(G) = |\{F \subseteq E \mid |F| = a, c(F) = b\}|$$

再帰式：

$|X| \geq 2$， $b \geq 2$ のとき

$$f_{a,b}(G[X]) = \frac{1}{b} \sum_{a'=0}^{a} \sum_{Y : \emptyset \subsetneq Y \subsetneq X} f_{a',1}(G[Y]) f_{a-a',b-1}(G[X-Y])$$

$b = 1$ のとき

$$f_{a,1}(G[X]) = \binom{G[X] \text{ の辺数}}{a} - \sum_{b=2}^{|X|} f_{a,b}(G[X])$$

$|X| = 1$ のとき

$$f_{0,1}(G[X]) = 1, \quad f_{a,1}(G[X]) = 0 \ (\forall\, a \geq 1)$$

$f_{a,b}(G)$ の計算：アルゴリズムの考え方

$|X|$ が小さい方から順に $f_{a,b}(G[X])$ を計算する

$|X|$ に関する繰り返し ($|X| = 1, 2, \ldots, n$ の順に)

a に関する繰り返し ($a = 0, 1, \ldots, G[X]$ の辺数 の順に)

b に関する繰り返し ($b = 2, 3, \ldots, |X|, 1$ の順に)

再帰式に基づいて，$f_{a,b}(G[X])$ を計算

再帰式：

$|X| \geq 2$，$b \geq 2$ のとき

$$f_{a,b}(G[X]) = \frac{1}{b} \sum_{a'=0}^{a} \sum_{Y : \emptyset \subsetneq Y \subsetneq X} f_{a',1}(G[Y]) f_{a-a',b-1}(G[X-Y])$$

$b = 1$ のとき

$$f_{a,1}(G[X]) = \binom{G[X] \text{ の辺数}}{a} - \sum_{b=2}^{|X|} f_{a,b}(G[X])$$

$|X| = 1$ のとき

$$f_{0,1}(G[X]) = 1, \quad f_{a,1}(G[X]) = 0 \ (\forall\, a \geq 1)$$

$f_{a,b}(G)$ の計算：たたみ込みの利用

$|X| \leq \ell$ まで計算した後，$|X| = \ell + 1$ のときの計算を考える

- 関数 $f_{a'}, g_{a'} : 2^V \to \mathbb{R}$ を次のように定義
  - $f_{a'}(Z) = \begin{cases} f_{a',1}(G[Z]) & (0 < |Z| \leq \ell) \\ 0 & (|Z| = 0 \text{ または } \ell < |Z|) \end{cases}$
  - $g_{a'}(Z) = \begin{cases} f_{a-a',b-1}(G[Z]) & (0 < |Z| \leq \ell) \\ 0 & (|Z| = 0 \text{ または } \ell < |Z|) \end{cases}$

ポイント：↑ X に依存しない ($a, b, |X|$ には依存する)

再帰式：

$|X| \geq 2$，$b \geq 2$ のとき

$$f_{a,b}(G[X]) = \frac{1}{b} \sum_{a'=0}^{a} \sum_{Y : \emptyset \subsetneq Y \subsetneq X} f_{a',1}(G[Y]) f_{a-a',b-1}(G[X-Y])$$

$f_{a,b}(G)$ の計算：たたみ込みの利用

$|X| \le \ell$ まで計算した後，$|X| = \ell + 1$ のときの計算を考える

- 関数 $f_{a'}, g_{a'} : 2^V \to \mathbb{R}$ を次のように定義
  - $f_{a'}(Z) = \begin{cases} f_{a',1}(G[Z]) & (0 < |Z| \le \ell) \\ 0 & (|Z| = 0 \text{ または } \ell < |Z|) \end{cases}$
  - $g_{a'}(Z) = \begin{cases} f_{a-a',b-1}(G[Z]) & (0 < |Z| \le \ell) \\ 0 & (|Z| = 0 \text{ または } \ell < |Z|) \end{cases}$
- $b \ge 2$ のとき，次が成り立つ
  - $f_{a,b}(G[X]) = \dfrac{1}{b} \displaystyle\sum_{a'=0}^{a} (f_{a'} * g_{a'})(X)$

再帰式：

$|X| \ge 2$，$b \ge 2$ のとき

$$f_{a,b}(G[X]) = \frac{1}{b} \sum_{a'=0}^{a} \sum_{Y : \emptyset \subsetneq Y \subsetneq X} f_{a',1}(G[Y]) f_{a-a',b-1}(G[X-Y])$$

アルゴリズム：coeff_chrpoly$(G = (V, E))$

1. $|X| = 1$ の場合に，$f_{a,b}(G[X])$ を計算
2. $|X| = 2, 3, \ldots, |V|$ で次を繰り返す
    2.1. $a = 0, 1, \ldots, |E|$ で次を繰り返す
        2.1.1. $b = 2, 3, \ldots, |X|$ で次を繰り返す
            2.1.1.1. $f_{a'} * g_{a'}$ を $a' = 0, 1, \ldots, a$ に対して計算
            2.1.1.2. $f_{a,b}(G[X]) = \frac{1}{b} \sum_{a'=0}^{a} (f_{a'} * g_{a'})(X)$ を計算
        2.1.2. $b = 1$ の場合に，再帰式に従って $f_{a,1}(G[X])$ を計算
3. $f_{a,b}(G[V])$ をすべての a, b に対して出力

$f_{a,b}(G)$ の計算：計算量

アルゴリズム：coeff_chrpoly($G = (V, E)$)

1. $|X| = 1$ の場合に，$f_{a,b}(G[X])$ を計算 $O^*(1)$
2. $|X| = 2, 3, \ldots, |V|$ で次を繰り返す $O^*(1)$ 回
   2.1. $a = 0, 1, \ldots, |E|$ で次を繰り返す $O^*(1)$ 回
      2.1.1. $b = 2, 3, \ldots, |X|$ で次を繰り返す $O^*(1)$ 回
         2.1.1.1. $f_{a'} * g_{a'}$ を $a' = 0, 1, \ldots, a$ に対して計算 $O^*(2^n)$
         2.1.1.2. $f_{a,b}(G[X]) = \dfrac{1}{b} \displaystyle\sum_{a'=0}^{a} (f_{a'} * g_{a'})(X)$ を計算 $O^*(2^n)$
      2.1.2. $b = 1$ の場合に，再帰式に従って $f_{a,1}(G[X])$ を計算 $O^*(2^n)$
3. $f_{a,b}(G[V])$ をすべての a, b に対して出力 $O^*(1)$

$f_{a,b}(G)$ の計算：計算量

アルゴリズム：coeff_chrpoly($G = (V, E)$)

計算量 $= O^*(2^n)$　　メモリ使用量 $= O^*(2^n)$

2.1. $a = 0, 1, \ldots, |E|$ で次を繰り返す　$O^*(1)$ 回

2.1.1. $b = 2, 3, \ldots, |X|$ で次を繰り返す　$O^*(1)$ 回

2.1.1.1. $f_{a'} * g_{a'}$ を $a' = 0, 1, \ldots, a$ に対して計算　$O^*(2^n)$

2.1.1.2. $f_{a,b}(G[X]) = \dfrac{1}{b}\displaystyle\sum_{a'=0}^{a}(f_{a'} * g_{a'})(X)$ を計算　$O^*(2^n)$

2.1.2. $b = 1$ の場合に，再帰式に従って $f_{a,1}(G[X])$ を計算　$O^*(2^n)$

3. $f_{a,b}(G[V])$ をすべての a, b に対して出力　$O^*(1)$

k 彩色の数え上げ：アルゴリズム

アルゴリズム：chrpoly$(G = (V, E), k)$

1. すべての a, b に対して $f_{a,b}(G)$ を計算
2. $\displaystyle\sum_{a=0}^{|E|}\sum_{b=1}^{|V|}(-1)^a k^b f_{a,b}(G)$ を出力

これで，次の定理の証明ができた

定理 (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto '08)

k 彩色の数え上げ問題は $O^*(2^n)$ 時間 で解ける
(n はグラフの頂点数)

本日のまとめ

前回と今回

部分集合たたみ込み (subset convolution) による
アルゴリズムの設計と解析

前回

- 部分集合たたみ込みの説明
  - 最小シュタイナー木問題 ($O^*(2^{|K|})$ 時間)

今回

- 部分集合たたみ込みのアルゴリズム
  - k 彩色の数え上げ ($O^*(2^n)$ 時間)

次回の予告

次回と次々回

$O^*(c^{\sqrt{n}})$ 時間の計算量を達成できるか？

次回
- 指数時間仮説
- 準指数時間帰着
- 疎化補題

次々回
- 準指数時間帰着の例
- 疎化補題の証明のアイディア