# 離散最適化基礎論 (2025 年後学期)

## 高速指数時間アルゴリズム

## 第 9 回

# 部分集合たたみ込み (1)：原理

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 12 月 16 日

最終更新：2025 年 12 月 17 日　14:04

# スケジュール (前半)



1. 高速指数時間アルゴリズムの考え方 (10/7)

＊ 休み (体育祭) (10/14)

2. 分枝アルゴリズム：基礎 (10/21)
3. 分枝アルゴリズム：高速化 (10/28)
4. 分枝アルゴリズム：測度統治法 (11/4)
5. 動的計画法：基礎 (11/11)
6. 動的計画法：例 (11/18)

# スケジュール (後半)



| | | |
|---|---|---|
| 7. | 包除原理：原理 | (11/25) |
| ∗ | 休み (秋ターム試験) | (12/2) |
| 8. | 包除原理：例 | (12/9) |
| 9. | **部分集合たたみ込み：原理** | (12/16) |
| ∗ | 休み (出張) | (12/23) |
| ∗ | 休み (冬季休業) | (12/30) |
| 10. | 部分集合たたみ込み：例 | (1/6) |
| 11. | 指数時間仮説：原理 | (1/13) |
| 12. | 指数時間仮説：証明 | (1/20) |
| 13. | 最近の話題 | (1/27) |
| ∗ | 休み (修士論文発表会) | (2/3) |

# 本日の内容

## 今回と次回

部分集合たたみ込み (subset convolution) による
アルゴリズムの設計と解析

今回
- 部分集合たたみ込みの説明
  - 最小シュタイナー木問題 ($O^*(2^{|K|})$ 時間)

次回
- 部分集合たたみ込みのアルゴリズム
  - $k$ 彩色の数え上げ ($O^*(2^n)$ 時間)

# 本日の内容



1. **定義：部分集合たたみ込み**
2. 利用法：最小シュタイナー木問題
3. アルゴリズム：部分集合たたみ込み ― 準備

---

- A. Björklund, T. Husfeldt, P. Kaski, M. Koivisto, Fourier meets Möbius: fast subset convolution. *Proceedings of STOC 2007* (2007) pp. 67–74.

# 集合関数



**定義：集合関数 (set function)**

有限集合 $U$ の上の **集合関数** とは，次のこと

$$f\colon 2^U \to \mathbb{R}$$

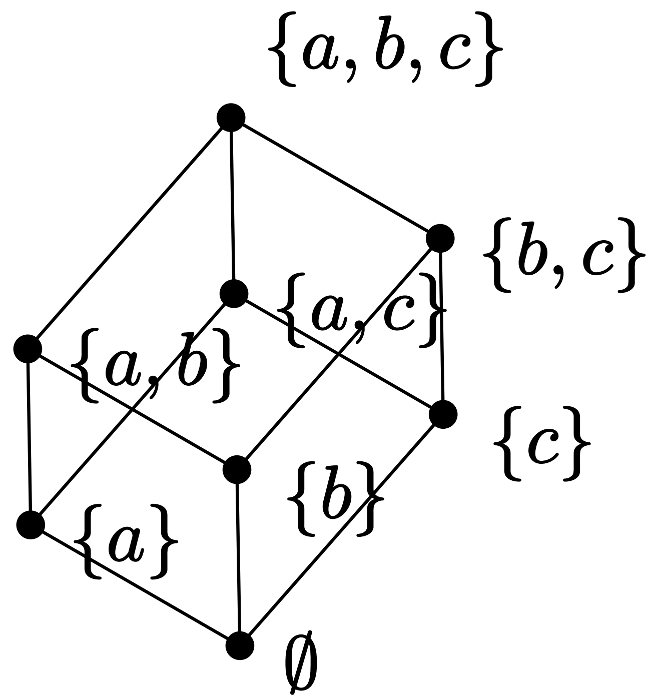
ここで，$2^U$ は $U$ の冪集合 (べき集合，power set)

例：$U = \{a, b, c\}$

| $S$ | $f(S)$ |
|---|---|
| $\emptyset$ | $0$ |
| $\{a\}$ | $-1$ |
| $\{b\}$ | $4$ |
| $\{a, b\}$ | $2$ |

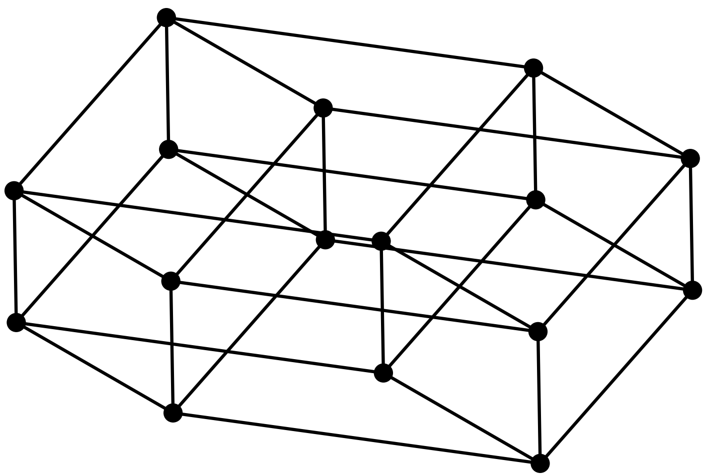
| $S$ | $f(S)$ |
|---|---|
| $\{c\}$ | $5$ |
| $\{a, c\}$ | $3$ |
| $\{b, c\}$ | $-2$ |
| $\{a, b, c\}$ | $1$ |

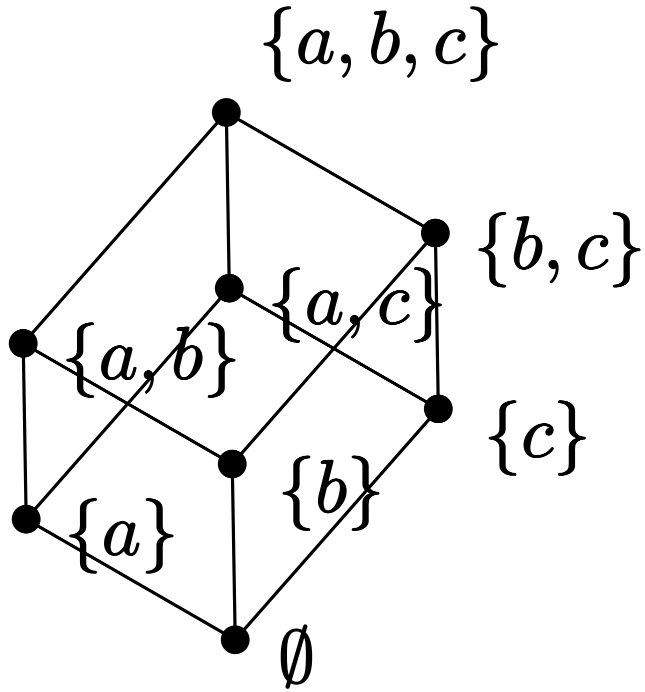
用語：$U$ は $f$ の **台集合** (ground set)




| $S$ | $f(S)$ |
|---:|---:|
| $\emptyset$ | $0$ |
| $\{a\}$ | $-1$ |
| $\{b\}$ | $4$ |
| $\{a,b\}$ | $2$ |
| $\{c\}$ | $5$ |
| $\{a,c\}$ | $3$ |
| $\{b,c\}$ | $-2$ |
| $\{a,b,c\}$ | $1$ |

# 立方体，超立方体

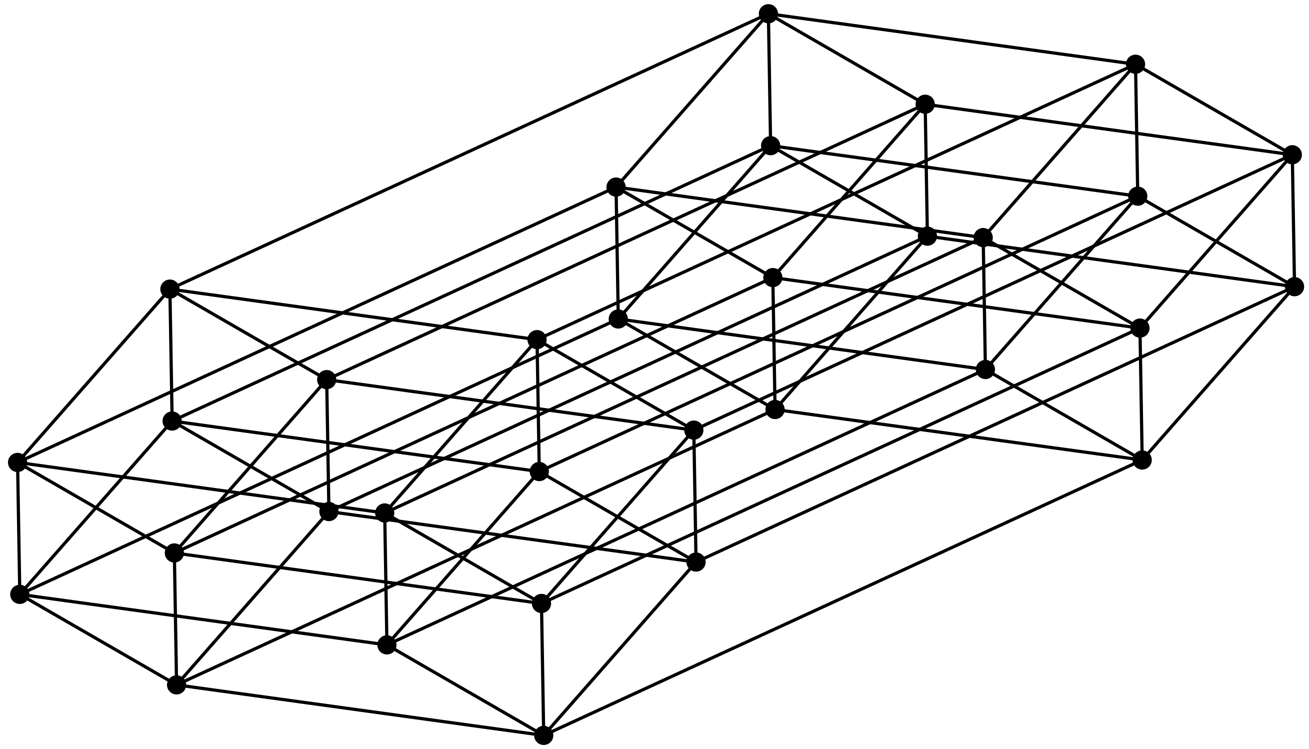





| $S$ | $f(S)$ |
|---:|---:|
| $\emptyset$ | $0$ |
| $\{a\}$ | $-1$ |
| $\{b\}$ | $4$ |
| $\{a,b\}$ | $2$ |
| $\{c\}$ | $5$ |
| $\{a,c\}$ | $3$ |
| $\{b,c\}$ | $-2$ |
| $\{a,b,c\}$ | $1$ |

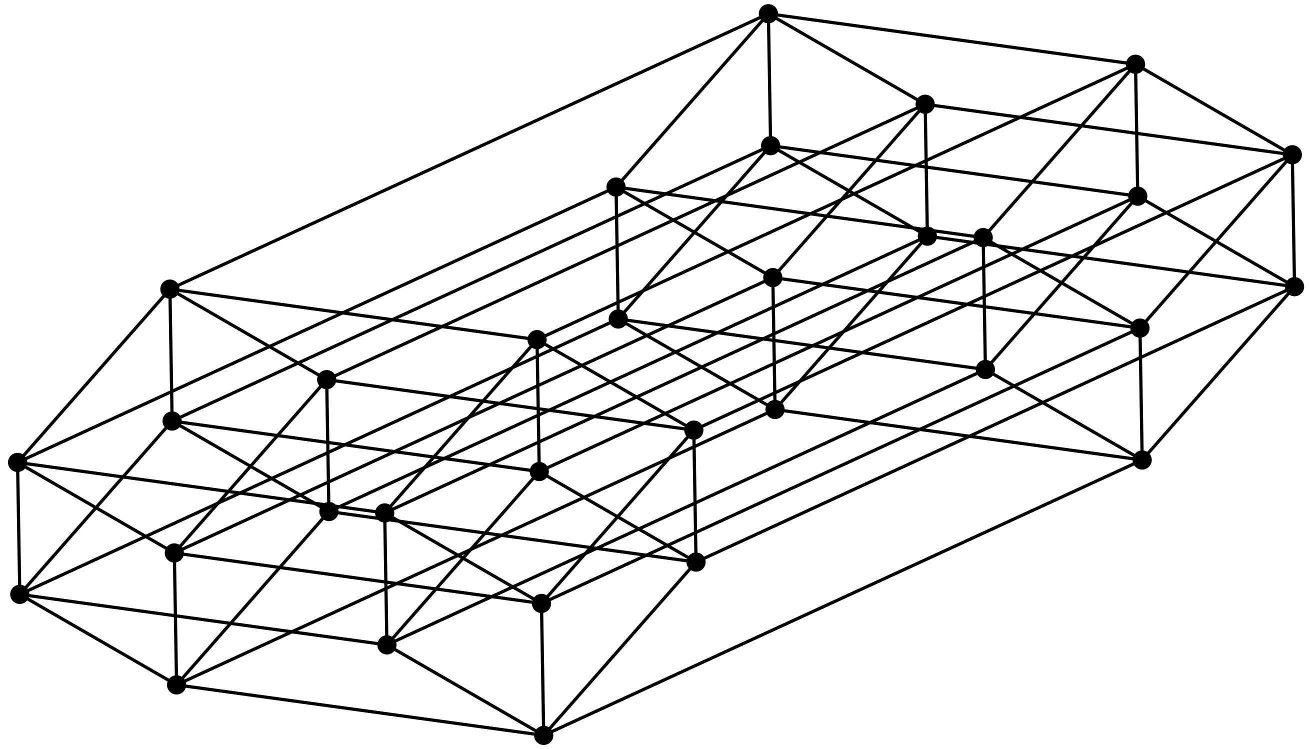
# 超立方体 (続)

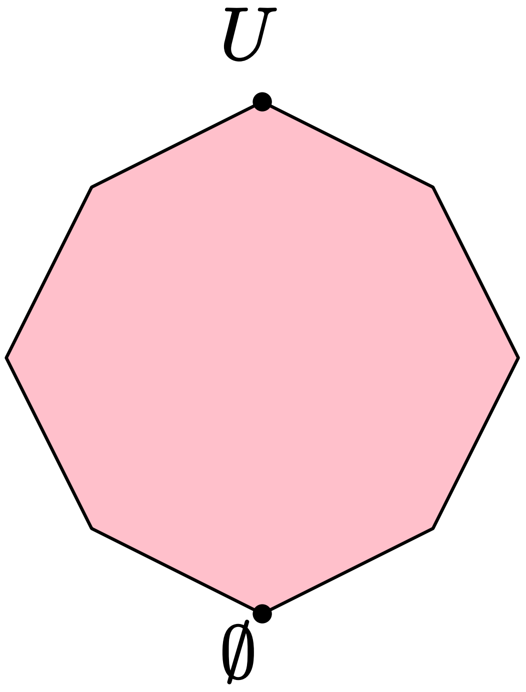


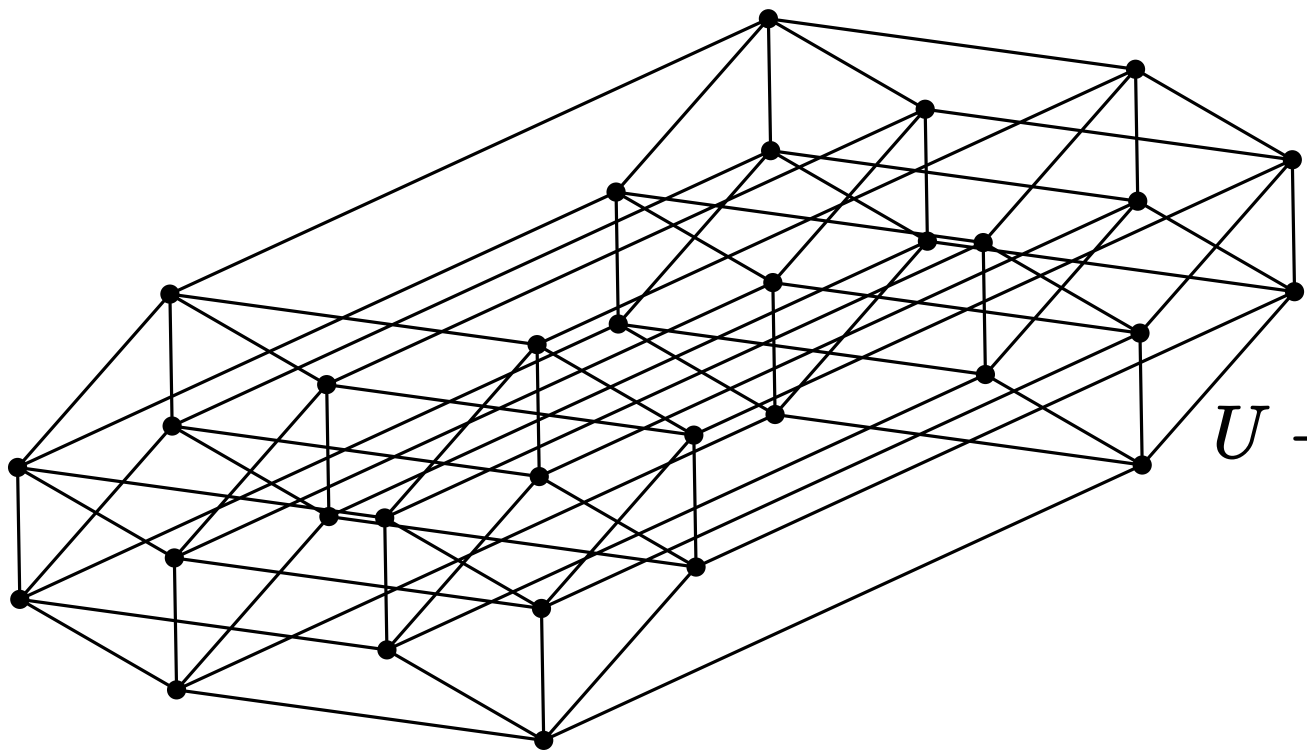


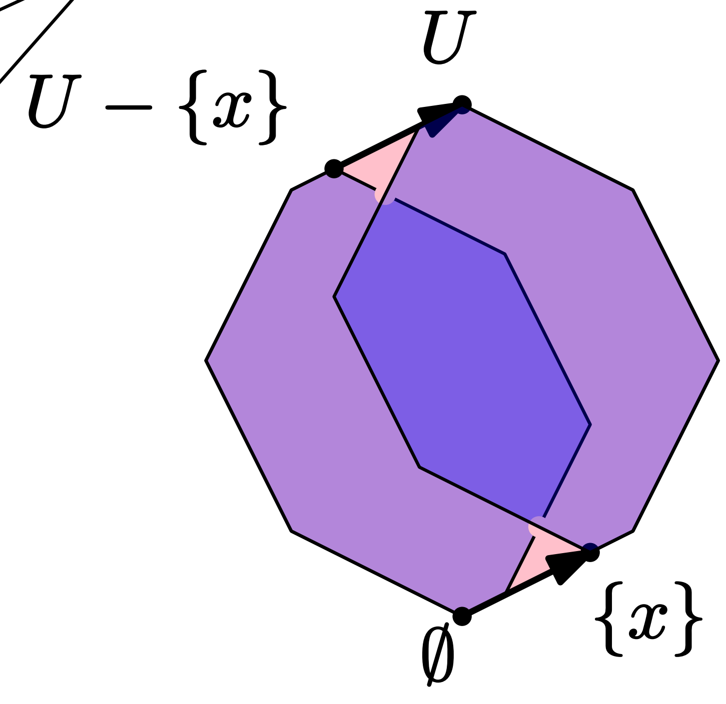
# 超立方体 (続)











$U$
$U - \{x\}$
$\{x\}$
$\emptyset$

有限集合 $U$，集合関数 $f, g\colon 2^U \to \mathbb{R}$

**定義：部分集合たたみ込み (subset convolution)**

$f, g$ の **部分集合たたみ込み** とは, 次の関数 $f * g\colon 2^U \to \mathbb{R}$

$$(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S - T) \qquad \forall\, S \subseteq U$$

例：$U = \{a, b\}$

$$\begin{aligned}
&(f * g)(\{a\}) \\
&\quad = f(\emptyset)g(\{a\}) + f(\{a\})g(\emptyset) \\
&\quad = 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = -2
\end{aligned}$$

| $S$ | $f(S)$ | $g(S)$ |
|---:|---:|---:|
| $\emptyset$ | $0$ | $2$ |
| $\{a\}$ | $-1$ | $3$ |
| $\{b\}$ | $4$ | $-3$ |
| $\{a, b\}$ | $2$ | $5$ |

有限集合 $U$，集合関数 $f, g \colon 2^U \to \mathbb{R}$

**定義：部分集合たたみ込み (subset convolution)**

$f, g$ の **部分集合たたみ込み** とは，次の関数 $f * g \colon 2^U \to \mathbb{R}$

$$(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T) g(S - T) \qquad \forall\, S \subseteq U$$

例：$U = \{a, b\}$

$$\begin{aligned}(f * g)(\{a\}) &\\ = f(\emptyset)g(\{a\}) + f(\{a\})g(\emptyset) &\\ = 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = -2 &\end{aligned}$$

| $S$ | $f(S)$ | $g(S)$ |
| ---: | ---: | ---: |
| $\emptyset$ | $0$ | $2$ |
| $\{a\}$ | $-1$ | $3$ |
| $\{b\}$ | $4$ | $-3$ |
| $\{a, b\}$ | $2$ | $5$ |

注：以後，単に たたみ込み とも言う

# 部分集合たたみ込み：例



定義：$(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S - T)$

| $S$ | $f(S)$ | $g(S)$ | $(f * g)(S)$ |
|---:|---:|---:|---:|
| $\emptyset$ | $0$ | $2$ | |
| $\{a\}$ | $-1$ | $3$ | $-2$ |
| $\{b\}$ | $4$ | $-3$ | |
| $\{a, b\}$ | $2$ | $5$ | |

# 部分集合たたみ込み：例



$\boxed{\text{定義}}$：$(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S-T)$

| $S$ | $f(S)$ | $g(S)$ | $(f*g)(S)$ |
|---:|---:|---:|---:|
| $\emptyset$ | $0$ | $2$ | $0$ |
| $\{a\}$ | $-1$ | $3$ | $-2$ |
| $\{b\}$ | $4$ | $-3$ | |
| $\{a,b\}$ | $2$ | $5$ | |

$$
\begin{aligned}
(f * g)(\emptyset) &= f(\emptyset)g(\emptyset) \\
&= 0 \cdot 2 = 0
\end{aligned}
$$

# 部分集合たたみ込み：例



$\boxed{\text{定義}}$ : $(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S - T)$

| $S$ | $f(S)$ | $g(S)$ | $(f * g)(S)$ |
|---:|---:|---:|---:|
| $\emptyset$ | $0$ | $2$ | $0$ |
| $\{a\}$ | $-1$ | $3$ | $-2$ |
| $\{b\}$ | $4$ | $-3$ | $8$ |
| $\{a, b\}$ | $2$ | $5$ | |

$$\begin{aligned}(f * g)(\{b\}) &= f(\emptyset)g(\{b\}) + f(\{b\})g(\emptyset) \\ &= 0 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 = 8\end{aligned}$$

# 部分集合たたみ込み：例



$\boxed{\text{定義}}$：$(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S - T)$

| $S$ | $f(S)$ | $g(S)$ | $(f * g)(S)$ |
|---:|---:|---:|---:|
| $\emptyset$ | $0$ | $2$ | $0$ |
| $\{a\}$ | $-1$ | $3$ | $-2$ |
| $\{b\}$ | $4$ | $-3$ | $8$ |
| $\{a, b\}$ | $2$ | $5$ | $19$ |

$$
\begin{aligned}
(f * g)(\{a, b\}) &= f(\emptyset)g(\{a, b\}) + f(\{a\})g(\{b\}) \\
&\quad + f(\{b\})g(\{a\}) + f(\{a, b\})g(\emptyset) \\
&= 0 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 19
\end{aligned}
$$

# 部分集合たたみ込み問題



**問題：部分集合たたみ込み**

**入力**　：有限集合 $U$，集合関数 $f, g\colon 2^U \to \mathbb{Z}$
**出力**　：部分集合たたみ込み $f * g\colon 2^U \to \mathbb{Z}$

| $S$ | $f(S)$ | $g(S)$ |
|---|---|---|
| $\emptyset$ | $0$ | $2$ |
| $\{a\}$ | $-1$ | $3$ |
| $\{b\}$ | $4$ | $-3$ |
| $\{a, b\}$ | $2$ | $5$ |

| $S$ | $(f * g)(S)$ |
|---|---|
| $\emptyset$ | $0$ |
| $\{a\}$ | $-2$ |
| $\{b\}$ | $8$ |
| $\{a, b\}$ | $19$ |

以下，$n = |U|$ とする

# 素朴なアルゴリズム



$\boxed{\text{定義}}$ : $(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S - T)$

各 $S \subseteq U$ に対して，$(f * g)(S)$ を定義どおりに計算

- 項の数 $= 2^{|S|}$
- $\therefore (f * g)(S)$ の計算にかかる演算回数 $= O(2^{|S|})$

# 素朴なアルゴリズム

$\boxed{\text{定義}}$ : $(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T) g(S - T)$

各 $S \subseteq U$ に対して，$(f * g)(S)$ を定義どおりに計算

- 項の数 $= 2^{|S|}$
- $\therefore (f * g)(S)$ の計算にかかる演算回数 $= O(2^{|S|})$

$\therefore$ すべての $S \subseteq U$ に対して $(f * g)(S)$ を計算するために

かかる演算回数 $= \sum_{S \subseteq U} O(2^{|S|}) = O(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i) = O(3^n)$

二項定理 : $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

# 素朴なアルゴリズム



$\boxed{\text{定義}}$ : $(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S - T)$

各 $S \subseteq U$ に対して，$(f * g)(S)$ を定義どおりに計算

- 項の数 $= 2^{|S|}$
- $\therefore (f * g)(S)$ の計算にかかる演算回数 $= O(2^{|S|})$

$\therefore$ すべての $S \subseteq U$ に対して $(f * g)(S)$ を計算するために

$$\text{かかる演算回数} = \sum_{S \subseteq U} O(2^{|S|}) = O\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i\right) = O(3^n)$$

**結論**

部分集合たたみ込みは $O(3^n)$ 回 の演算で解ける

**定理 (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto '07)**

部分集合たたみ込みは $O^*(2^n)$ 回 の演算で解ける

↑ 改善

(素朴なアルゴリズム：$O(3^n)$)

# 今日の目標 (の１つ)



**定理 (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto ’07)**

部分集合たたみ込みは $O^*(2^n)$ 回 の演算で解ける

↑ 改善

(素朴なアルゴリズム：$O(3^n)$)

**より細かく (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto ’07)**

部分集合たたみ込みは次の時間で解ける

$$O(2^n n^{O(1)} \log M)$$

ただし，$M = \max_{S \subseteq U} \max\{|f(S)|, |g(S)|\}$

# 本日の内容



1. 定義：部分集合たたみ込み
2. **利用法：最小シュタイナー木問題**
3. アルゴリズム：部分集合たたみ込み — 準備

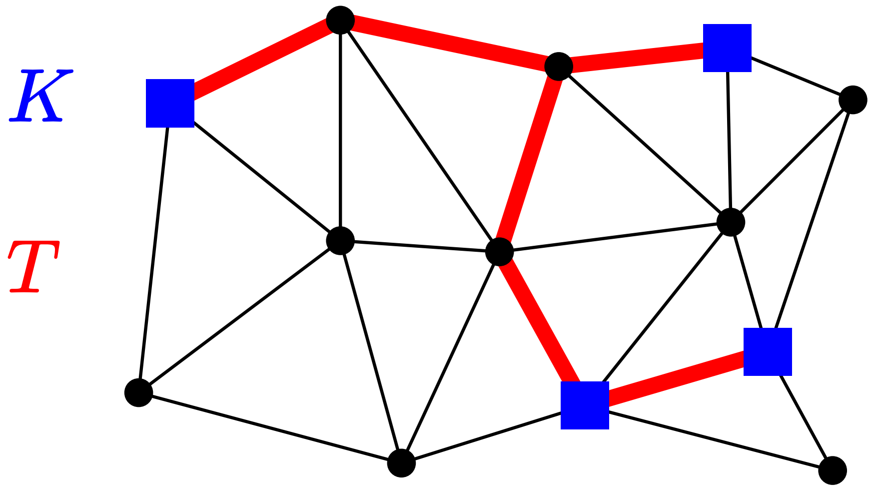
---

- A. Björklund, T. Husfeldt, P. Kaski, M. Koivisto, Fourier meets Möbius: fast subset convolution. *Proceedings of STOC 2007* (2007) pp. 67–74.

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $K \subseteq V$

**定義：シュタイナー木 (Steiner tree)**

$K$ を **端末集合** とする $G$ の **シュタイナー木** とは，
$G$ の部分木 $T = (V_T, E_T)$ で，$K \subseteq V_T$ を満たすもの



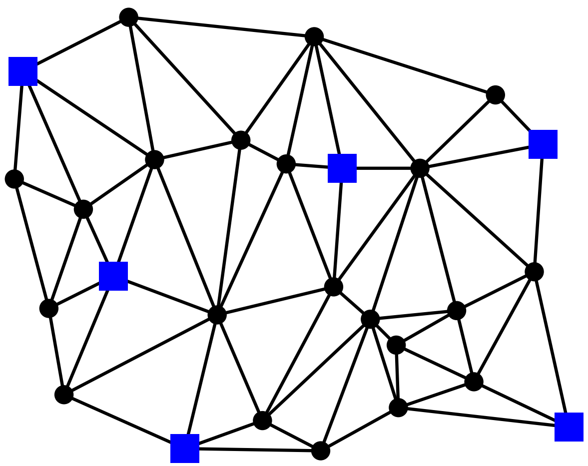

端末集合 = terminal set

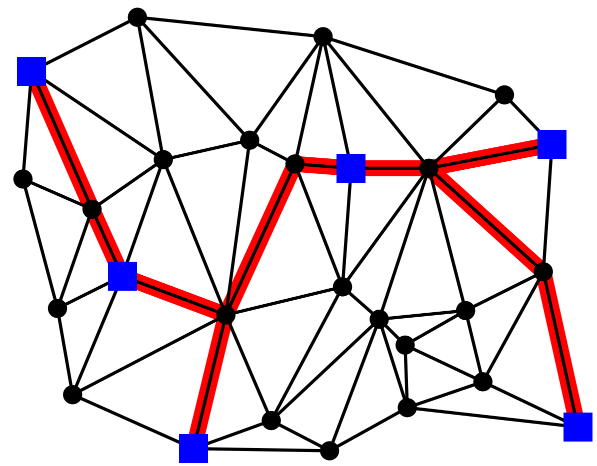
# 復習：最小シュタイナー木問題

**定義：最小シュタイナー木問題**

**入力：** 無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $K \subseteq V$
**出力：** $K$ を端末集合とする $G$ の最小シュタイナー木

辺の数が最小のもの





補足：グラフの辺に長さが与えられていて，
長さの和が最小のシュタイナー木を求める問題もある

# 復習：Dreyfus-Wagner のアルゴリズム 

動的計画法を用いて，次の定理を証明した

**定理 (Dreyfus, Wagner ’72; Levin ’71)**

最小シュタイナー木問題は $O^*(3^{|K|})$ 時間で解ける

よく Dreyfus-Wagner のアルゴリズム と呼ばれる

# 部分集合たたみ込みで解く



部分集合たたみ込みを用いて，次の定理を証明する

**定理 (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto '07)**

最小シュタイナー木問題は $O^*(2^{|K|})$ 時間で解ける

改善

動的計画法：$O^*(3^{|K|})$

部分集合たたみ込み でも 動的計画法のアイディア を使う

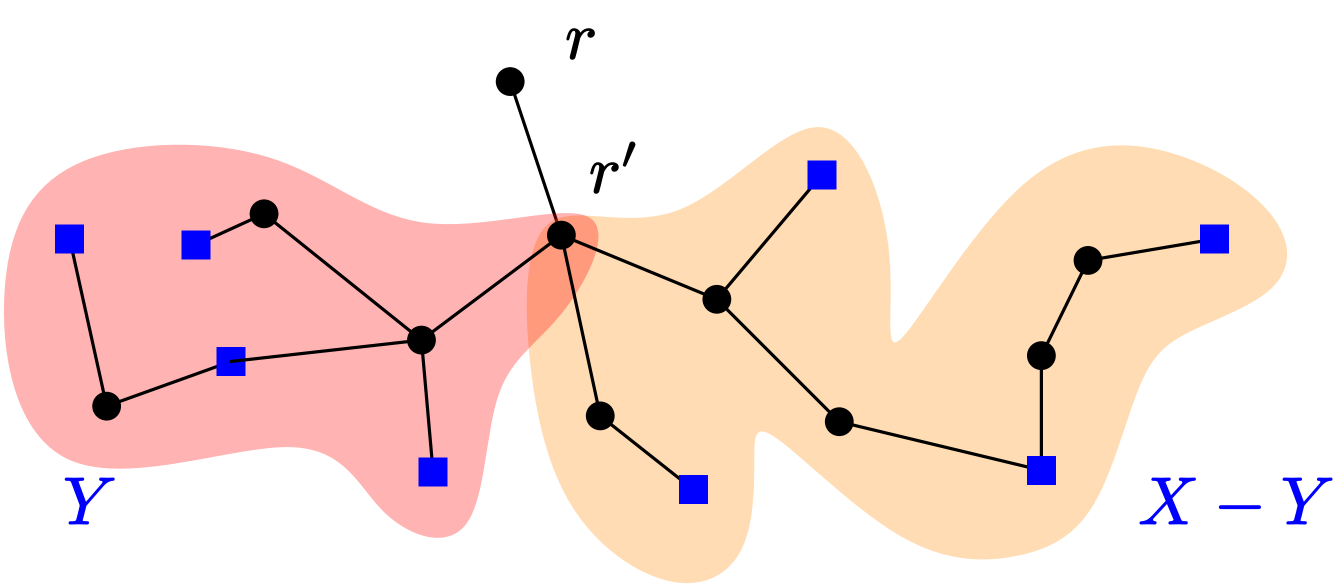
# 復習：動的計画法

$$\varphi(X,r) = \min\left\{\underline{d(r,r')} + \varphi(Y,r') + \varphi(X-Y,r') \;\middle|\; \begin{array}{l} r' \in V, Y \subseteq X, \\ Y \neq \emptyset, X \end{array}\right\}$$

$r$ から $r'$ への
最短路長

$|X| \geq 2$ のとき

$$\varphi(\{x\},r) = d(x,r)$$




状態の値 $\varphi(X,r) = X \cup \{r\}$ を端末集合とするシュタイナー木の最小辺数

# アルゴリズム (1)：準備



$$\varphi(X,r) = \min \left\{ d(r,r') + \varphi(Y,r') + \varphi(X-Y,r') \;\middle|\; \begin{array}{l} r' \in V, Y \subseteq X, \\ Y \neq \emptyset, X \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(X,r) = \min \{ d(r,r') + \gamma(X,r') \mid r' \in V \}$$

$$\gamma(X,r) = \min \{ \varphi(Y,r) + \varphi(X-Y,r) \mid Y \subseteq X, Y \neq \emptyset, X \}$$

# アルゴリズム (1)：準備 

$$\varphi(X, r) = \min \left\{ d(r, r') + \varphi(Y, r') + \varphi(X - Y, r') \;\middle|\; \begin{array}{l} r' \in V, Y \subseteq X, \\ Y \neq \emptyset, X \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(X, r) = \min \{ d(r, r') + \gamma(X, r') \mid r' \in V \}$$

$$\gamma(X, r) = \min \{ \varphi(Y, r) + \varphi(X - Y, r) \mid Y \subseteq X, Y \neq \emptyset, X \}$$

**アルゴリズムの考え方**

$|X|$ が小さい方から順に
$\gamma(X, r)$ を部分集合たたみ込みで計算する

$\boxed{\text{定義}}$ : $(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S - T)$

↓

$\boxed{\text{定義}}$ : $(f \star g)(S) = \min_{T \subseteq S} \{f(T) + g(S - T)\}$

定義：$(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T) g(S - T)$

定義：$(f \star g)(S) = \min_{T \subseteq S} \{ f(T) + g(S - T) \}$

$\bar{f}(S) = B^{f(S)}, \bar{g}(S) = B^{g(S)}$ とする ($B$ は大きな整数)

$$(\bar{f} * \bar{g})(S) = \sum_{T \subseteq S} \bar{f}(T) \bar{g}(S - T) = \sum_{T \subseteq S} B^{f(T)} B^{g(S-T)}$$

$$= \sum_{T \subseteq S} B^{f(T) + g(S-T)}$$

# アルゴリズム (2)：最小和の計算

$\boxed{\text{定義}}$ : $(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T) g(S - T)$

$\boxed{\text{定義}}$ : $(f \star g)(S) = \min_{T \subseteq S} \{ f(T) + g(S - T) \}$

$\bar{f}(S) = B^{f(S)}, \bar{g}(S) = B^{g(S)}$ とする ($B$ は大きな整数)

$$(\bar{f} * \bar{g})(S) = \sum_{T \subseteq S} \bar{f}(T) \bar{g}(S - T) = \sum_{T \subseteq S} B^{f(T)} B^{g(S-T)}$$

$$= \sum_{T \subseteq S} B^{f(T) + g(S-T)}$$

$B$ に関する最小次数の項の指数部 $= (f \star g)(S)$

# アルゴリズム (2)：最小和の計算 (続)

$\boxed{\text{定義}}$：$(f * g)(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)g(S-T)$

$\boxed{\text{定義}}$：$(f \star g)(S) = \min_{T \subseteq S}\{f(T) + g(S-T)\}$

$\bar{f}(S) = B^{f(S)}, \bar{g}(S) = B^{g(S)}$ として ($B = 2^n + 1$)

$\bar{f} * \bar{g}$ を計算すれば，そこから $f \star g$ が得られる

計算量 $= O(2^n n^{O(1)} \log B^M) = O(2^n n^{O(1)} M)$

# アルゴリズム (3)：関数の定義



$$\varphi(X, r) = \min\{d(r, r') + \gamma(X, r') \mid r' \in V\}$$

$$\gamma(X, r) = \min\{\varphi(Y, r) + \varphi(X - Y, r) \mid Y \subseteq X, Y \neq \emptyset, X\}$$

---

次の関数 $\varphi_1 : 2^K \times V \to \mathbb{Z}$ を定義

- $\varphi_1(X, r) = \begin{cases} d(x, r) & (|X| = 1, X = \{x\} \text{ のとき}) \\ L & (\text{その他のとき}) \end{cases}$

$$L = |E| + 1$$

性質：$0 < |X| \leq 1 \Rightarrow \varphi_1(X, r) = \varphi(X, r)$

# アルゴリズム (3)：関数の定義 (2)



$$\varphi(X, r) = \min\{d(r, r') + \gamma(X, r') \mid r' \in V\}$$

$$\gamma(X, r) = \min\{\varphi(Y, r) + \varphi(X - Y, r) \mid Y \subseteq X, Y \neq \emptyset, X\}$$

---

次の関数 $\varphi_2, \gamma_2 \colon 2^K \times V \to \mathbb{Z}$ を定義

- $\gamma_2(\cdot, r) = \varphi_1(\cdot, r) \star \varphi_1(\cdot, r)$
- $\varphi_2(X, r) = \min\{d(r, r') + \gamma_2(X, r') \mid r' \in V\}$

性質：$0 < |X| \leq 2 \Rightarrow \varphi_2(X, r) = \varphi(X, r)$

定義：$(f \star g)(S) = \min_{T \subseteq S}\{f(T) + g(S - T)\}$

# アルゴリズム (3)：関数の定義 (3)



$$\varphi(X,r) = \min\{d(r,r') + \gamma(X,r') \mid r' \in V\}$$

$$\gamma(X,r) = \min\{\varphi(Y,r) + \varphi(X-Y,r) \mid Y \subseteq X, Y \neq \emptyset, X\}$$

---

次の関数 $\varphi_i, \gamma_i \colon 2^K \times V \to \mathbb{Z}$ を定義　　　$i \geq 2$

- $\gamma_i(\cdot,r) = \varphi_{i-1}(\cdot,r) \star \varphi_{i-1}(\cdot,r)$
- $\varphi_i(X,r) = \min\{d(r,r') + \gamma_i(X,r') \mid r' \in V\}$

性質：$0 < |X| \leq i \Rightarrow \varphi_i(X,r) = \varphi(X,r)$

$\boxed{\text{定義}}$：$(f \star g)(S) = \min_{T \subseteq S}\{f(T) + g(S-T)\}$

# アルゴリズム：全体像



アルゴリズム：steiner-convolution$(G, K)$

1. $\varphi_1$ を計算
2. $i \in \{2, \ldots, |K|\}$ の小さい順に次を実行
   (a) $\gamma_i(\cdot, r) = \varphi_{i-1}(\cdot, r) \star \varphi_{i-1}(\cdot, r)$ ($\forall\, r \in V$) を計算
   (b) $\varphi_i(\cdot, r)$ ($\forall\, r \in V$) を計算
3. 任意の $r \in K$ に対して，$\varphi_{|K|}(K, r)$ を出力

# アルゴリズム：全体像

アルゴリズム：steiner-convolution$(G, K)$

1. $\varphi_1$ を計算 $O^*(1)$
2. $i \in \{2, \ldots, |K|\}$ の小さい順に次を実行 $O(|K|)$ 回の反復
   (a) $\gamma_i(\cdot, r) = \varphi_{i-1}(\cdot, r) \star \varphi_{i-1}(\cdot, r)$ ($\forall\, r \in V$) を計算
   (b) $\varphi_i(\cdot, r)$ ($\forall\, r \in V$) を計算 $O^*(2^{|K|}L) = O^*(2^{|K|})$
3. 任意の $r \in K$ に対して，$\varphi_{|K|}(K, r)$ を出力

計算量 $= O^*(2^{|K|})$　　メモリ使用量 $= O^*(2^{|K|})$

# 最小シュタイナー木問題：まとめ



部分集合たたみ込みを用いて，次の定理を証明した

**定理 (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto ’07)**

最小シュタイナー木問題は $O^*(2^{|K|})$ 時間で解ける

改善

動的計画法：$O^*(3^{|K|})$

**未解決問題**

次を満たす定数 $c < 2$ は存在するか？

最小シュタイナー木問題は $O^*(c^{|K|})$ 時間で解ける

# 本日の内容



1. 定義：部分集合たたみ込み
2. 利用法：最小シュタイナー木問題
3. **アルゴリズム：部分集合たたみ込み – 準備**

---


- A. Björklund, T. Husfeldt, P. Kaski, M. Koivisto, Fourier meets Möbius: fast subset convolution. *Proceedings of STOC 2007* (2007) pp. 67–74.
- P. Kaski, Fast subset convolution. *Encyclopedia of Algorithms* (2016) pp. 735–738.

# 今日の目標 (の 1 つ)：再掲



**定理 (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto '07)**

部分集合たたみ込みは $O^*(2^n)$ 回 の演算で解ける

↑ 改善

(素朴なアルゴリズム：$O(3^n)$)

ここでの説明は Kaski ('16) を参考にした

# ゼータ変換



集合関数 $f \colon 2^U \to \mathbb{R}$

**定義：ゼータ変換 (zeta transform)**

$f$ の **ゼータ変換** は次の集合関数

$$\zeta[f](S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$$

例：$U = \{a, b\}$

$$\begin{aligned}
&\zeta[f](\{a, b\}) \\
&\quad = f(\emptyset) + f(\{a\}) + f(\{b\}) \\
&\qquad + f(\{a, b\}) \\
&\quad = 3 + 5 + 4 + 2 = 14
\end{aligned}$$

| $S$ | $f(S)$ | $\zeta[f](S)$ |
|---:|---:|---:|
| $\emptyset$ | 3 | 3 |
| $\{a\}$ | 5 | 8 |
| $\{b\}$ | 4 | 7 |
| $\{a, b\}$ | 2 | 14 |

# ゼータ変換

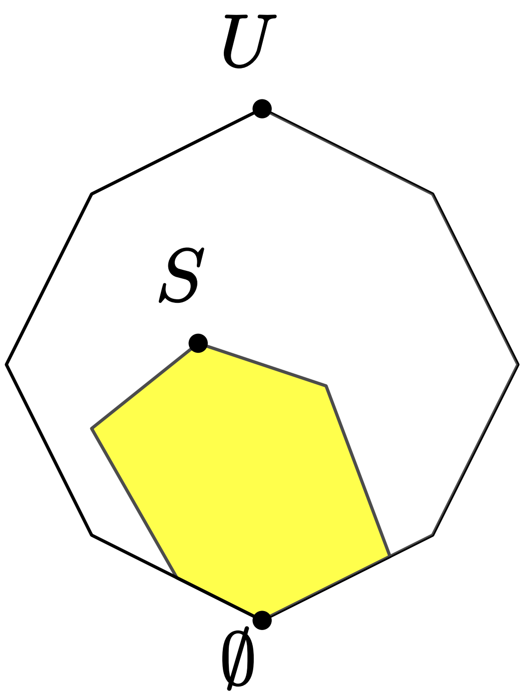


集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{R}$

**定義：ゼータ変換 (zeta transform)**

$f$ の **ゼータ変換** は次の集合関数

$$\zeta[f](S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$$



集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{R}$

**定義：メビウス変換 (Möbius transform)**

$f$ の **メビウス変換** は次の集合関数

$$\mu[f](S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} f(T)$$

例：$U = \{a, b\}$

$$\begin{aligned}
&\mu[f](\{a,b\}) \\
&\quad = f(\emptyset) - f(\{a\}) - f(\{b\}) \\
&\qquad + f(\{a,b\}) \\
&\quad = 3 - 5 - 4 + 2 = -4
\end{aligned}$$

| $S$ | $f(S)$ | $\mu[f](S)$ |
|---:|---:|---:|
| $\emptyset$ | 3 | 3 |
| $\{a\}$ | 5 | 2 |
| $\{b\}$ | 4 | 1 |
| $\{a,b\}$ | 2 | $-4$ |

# メビウス変換

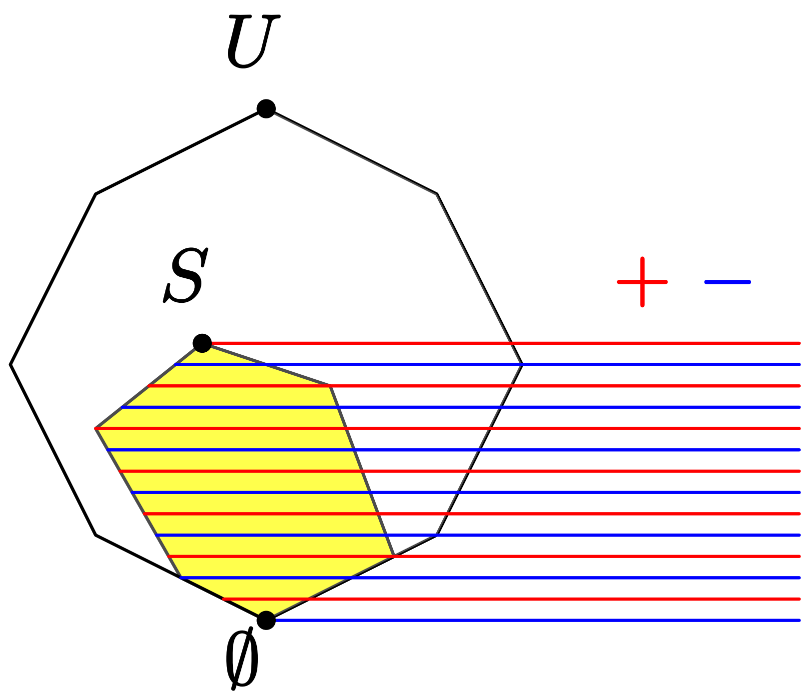


集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{R}$

## 定義：メビウス変換 (Möbius transform)

$f$ の **メビウス変換** は次の集合関数

$$\mu[f](S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} f(T)$$



# ゼータ変換とメビウス変換の性質



**性質：ゼータとメビウスは互いに逆変換**

任意の集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{R}$ に対して，

- $\mu[\zeta[f]] = f$
- $\zeta[\mu[f]] = f$

<u>証明</u>：付録にて

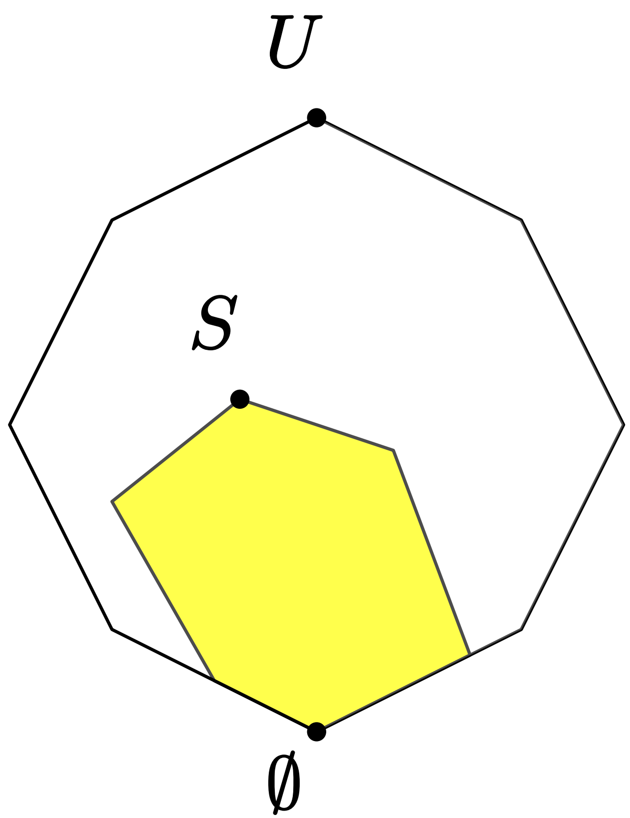
| $S$ | $f(S)$ | $\zeta[f](S)$ | $\mu[\zeta[f]](S)$ | $\mu[f](S)$ | $\zeta[\mu[f]](S)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | $3$ | $3$ | $3$ | $3$ | $3$ |
| $\{a\}$ | $5$ | $8$ | $5$ | $2$ | $5$ |
| $\{b\}$ | $4$ | $7$ | $4$ | $1$ | $4$ |
| $\{a,b\}$ | $2$ | $14$ | $2$ | $-4$ | $2$ |

# ゼータ変換の計算

**定理：ゼータ変換の計算** (Yates '37)

集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{Z}$ に対して,
ゼータ変換 $\zeta[f]$ は $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

考え方：任意の $x \in U$ に対して



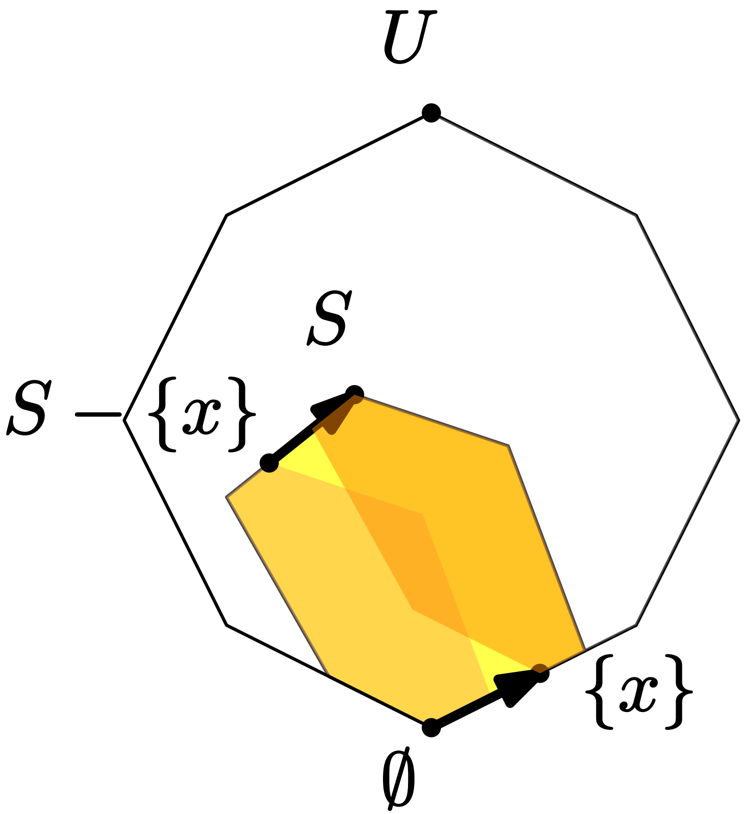
# ゼータ変換の計算



**定理：ゼータ変換の計算** (Yates '37)

集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{Z}$ に対して，
ゼータ変換 $\zeta[f]$ は $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

考え方：任意の $x \in U$ に対して



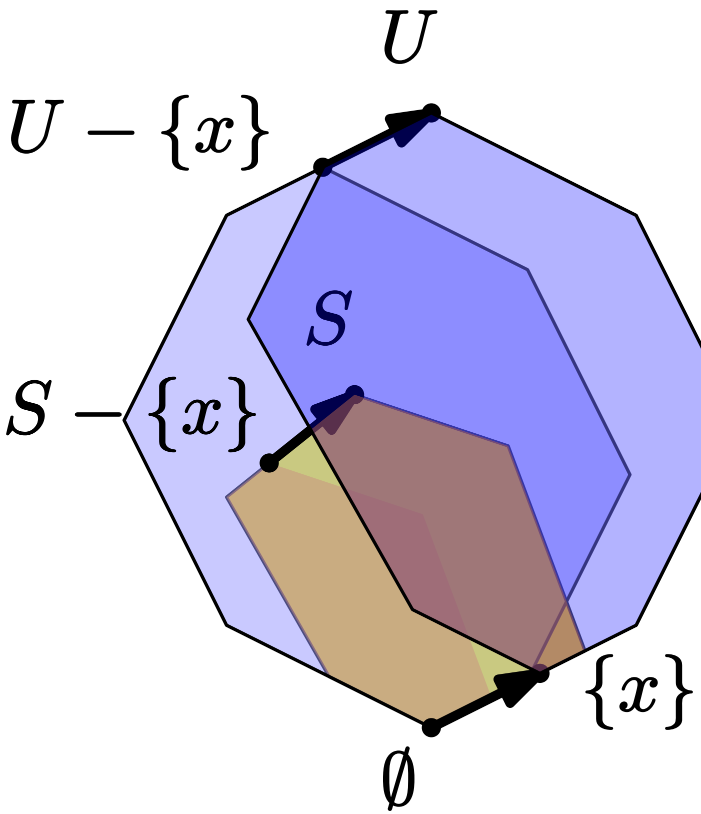
# ゼータ変換の計算



**定理：ゼータ変換の計算** (Yates ’37)

集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{Z}$ に対して，
ゼータ変換 $\zeta[f]$ は $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

考え方：任意の $x \in U$ に対して




任意の $X \subseteq U - \{x\}$ に対して

$$f_0(X) = f(X)$$

$$f_1(X) = f(X \cup \{x\})$$ とすると

$$\zeta[f](S) = \begin{cases} \zeta[f_0](S) \\ \quad (x \notin S \text{ のとき}) \\ (\zeta[f_0] + \zeta[f_1])(S - \{x\}) \\ \quad (x \in S \text{ のとき}) \end{cases}$$

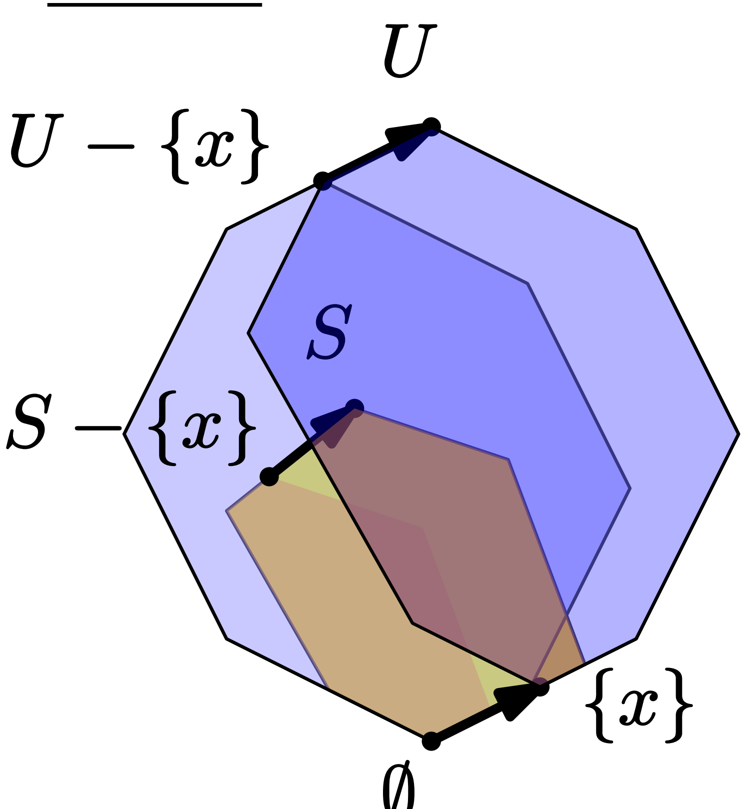
# メビウス変換の計算



**定理：メビウス変換の計算** (Yates '37)

集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{Z}$ に対して,
メビウス変換 $\mu[f]$ は $O^*(2^n)$ 時間で計算できる

<u>考え方</u>：任意の $x \in U$ に対して




任意の $X \subseteq U - \{x\}$ に対して

$$f_0(X) = f(X)$$

$$f_1(X) = f(X \cup \{x\})$$ とすると

$$\mu[f](S) = \begin{cases} \mu[f_0](S) & (x \notin S \text{ のとき}) \\ (-\mu[f_0] + \mu[f_1])(S - \{x\}) & (x \in S \text{ のとき}) \end{cases}$$

# 次回の予告



**今回と次回**

部分集合たたみ込み (subset convolution) による
アルゴリズムの設計と解析

今回
- 部分集合たたみ込みの説明
  - 最小シュタイナー木問題 ($O^*(2^{|K|})$ 時間)

次回
- 部分集合たたみ込みのアルゴリズム
  - $k$ 彩色の数え上げ ($O^*(2^n)$ 時間)

# 本日の内容



1. **定義：部分集合たたみ込み**
2. 利用法：最小シュタイナー木問題
3. アルゴリズム：部分集合たたみ込み — 準備
4. 付録

# ゼータ変換とメビウス変換



集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{R}$

## 定義：ゼータ変換とメビウス変換 (再掲)

$$\begin{aligned}
\zeta[f](S) &= \sum_{T \subseteq S} f(T) \\
\mu[f](S) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} f(T)
\end{aligned}$$

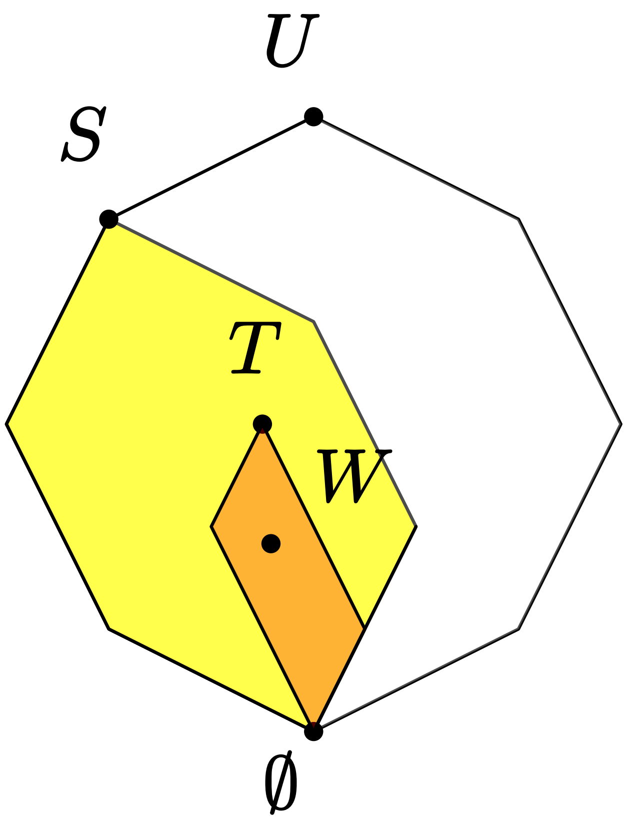
## 性質：ゼータとメビウスは互いに逆変換

任意の集合関数 $f\colon 2^U \to \mathbb{R}$ に対して,

- $\mu[\zeta[f]] = f$
- $\zeta[\mu[f]] = f$

$$\zeta[\mu[f]](S) = \sum_{T \subseteq S} \mu[f](T) = \sum_{T \subseteq S} \sum_{W \subseteq T} (-1)^{|T-W|} f(W)$$

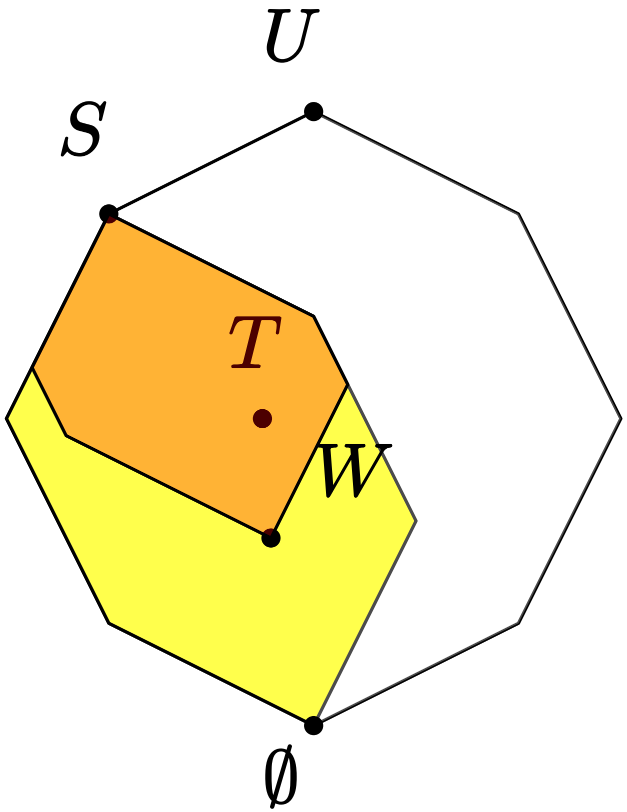
$$= \sum_{W \subseteq S} \sum_{W \subseteq T \subseteq S} (-1)^{|T-W|} f(W)$$



# $\zeta[\mu[f]] = f$ : 証明

$$\zeta[\mu[f]](S) = \sum_{T \subseteq S} \mu[f](T) = \sum_{T \subseteq S} \sum_{W \subseteq T} (-1)^{|T-W|} f(W)$$

$$= \sum_{W \subseteq S} \sum_{W \subseteq T \subseteq S} (-1)^{|T-W|} f(W)$$



# $\zeta[\mu[f]] = f$：証明



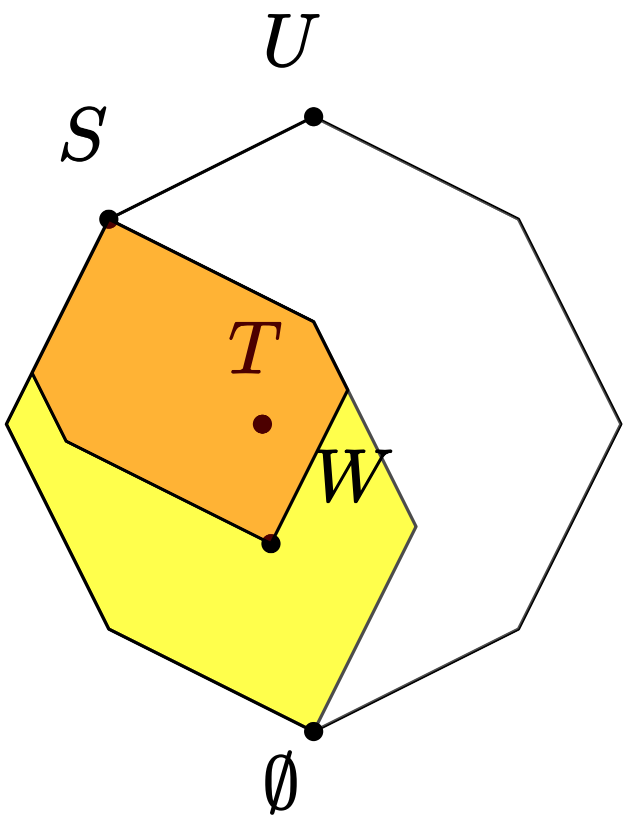
$$\zeta[\mu[f]](S) = \sum_{T \subseteq S} \mu[f](T) = \sum_{T \subseteq S} \sum_{W \subseteq T} (-1)^{|T-W|} f(W)$$

$$= \sum_{W \subseteq S} \underline{\sum_{W \subseteq T \subseteq S} (-1)^{|T-W|}} f(W)$$

$$= \sum_{i=0}^{|S-W|} \binom{|S-W|}{i} (-1)^i$$

$$= 0^{|S-W|}$$

$$= \begin{cases} 1 & (S = W \text{ のとき}) \\ 0 & (S \neq W \text{ のとき}) \end{cases}$$



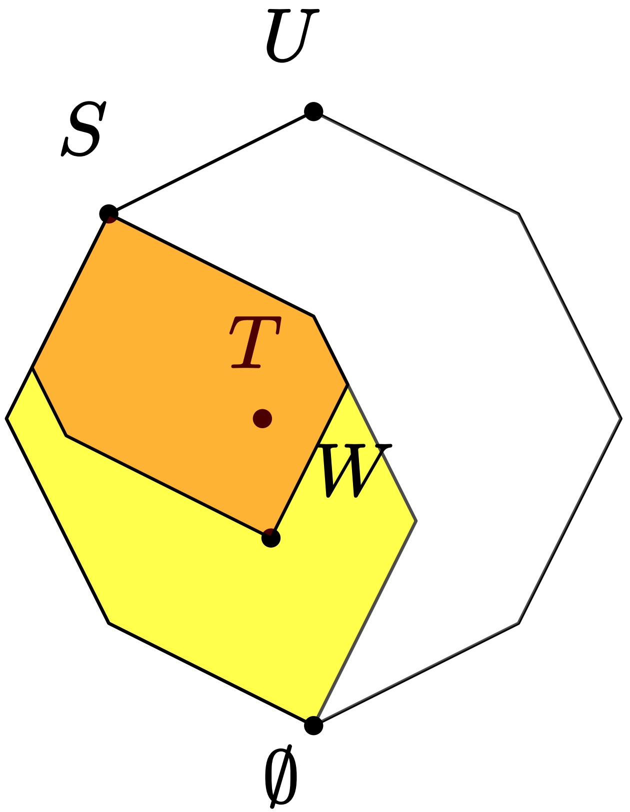
# $\zeta[\mu[f]] = f$ : 証明



$$\zeta[\mu[f]](S) = \sum_{T \subseteq S} \mu[f](T) = \sum_{T \subseteq S} \sum_{W \subseteq T} (-1)^{|T-W|} f(W)$$

$$= \sum_{W \subseteq S} \sum_{W \subseteq T \subseteq S} (-1)^{|T-W|} f(W)$$

$$= f(S)$$



# $\mu[\zeta[f]] = f$ : 証明



$$\mu[\zeta[f]](S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} \zeta[f](T)$$

$$= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} \sum_{W \subseteq T} f(W)$$

$$= \sum_{W \subseteq S} \underline{\sum_{W \subseteq T \subseteq S} (-1)^{|S-T|}} f(W)$$

$$= \sum_{i=0}^{|S-W|} \binom{|S-W|}{i} (-1)^{|S-W|-i}$$

$$= 0^{|S-W|}$$

$$= \begin{cases} 1 & (S = W \text{ のとき}) \\ 0 & (S \neq W \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$= f(S)$$