離散最適化基礎論 (2025 年後学期)

高速指数時間アルゴリズム

第 6 回

動的計画法 (2)：例

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 11 月 18 日

最終更新：2025 年 11 月 19 日　08:56

スケジュール(前半)

1. 高速指数時間アルゴリズムの考え方 (10/7)
∗ 休み (体育祭) (10/14)
2. 分枝アルゴリズム：基礎 (10/21)
3. 分枝アルゴリズム：高速化 (10/28)
4. 分枝アルゴリズム：測度統治法 (11/4)
5. 動的計画法：基礎 (11/11)
6. **動的計画法：例** (11/18)

スケジュール (後半)

7.	包除原理：原理	(11/25)
＊	休み (秋ターム試験)	(12/2)
8.	包除原理：例	(12/9)
9.	部分集合たたみ込み：原理	(12/16)
＊	休み (出張)	(12/23)
＊	休み (冬季休業)	(12/30)
10.	部分集合たたみ込み：例	(1/6)
11.	指数時間仮説：原理	(1/13)
12.	指数時間仮説：証明	(1/20)
13.	最近の話題	(1/27)
＊	休み (修士論文発表会)	(2/3)

本日の内容

1. **彩色問題**
2. 最小シュタイナー木問題

- E.L. Lawler, A note on the complexity of the chromatic number problem. *Information Processing Letters* 5 (1976) pp. 66–67.

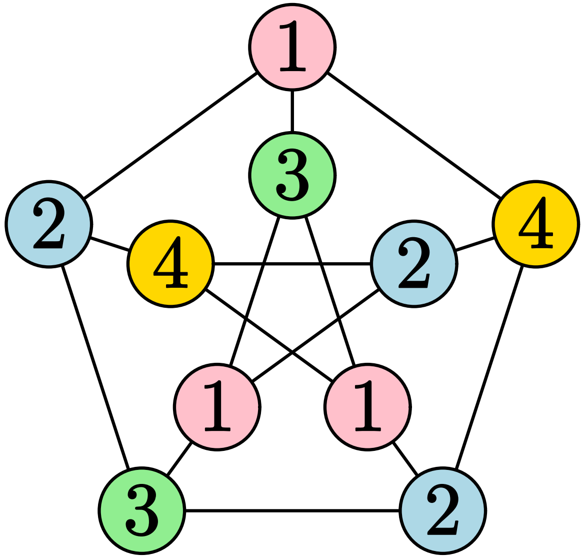
グラフの彩色

無向グラフ $G = (V, E)$

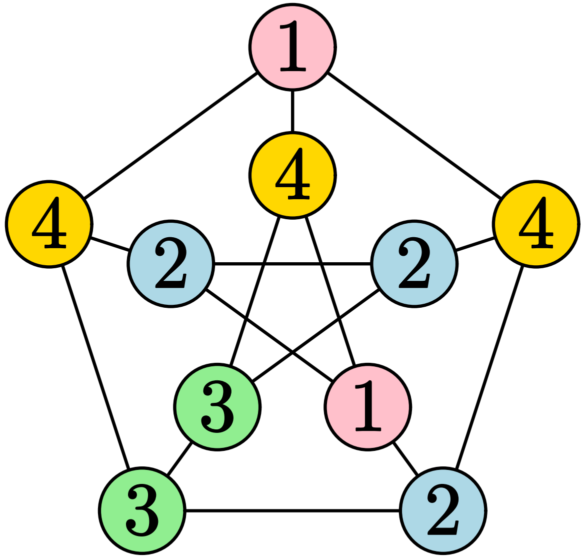
定義：彩色 (coloring)

G の **彩色** (さいしょく) とは,
写像 $c\colon V \to \{1, 2, \ldots\}$ で次を満たすもののこと

$$\{u, v\} \in E \quad \Rightarrow \quad c(u) \neq c(v)$$



彩色である



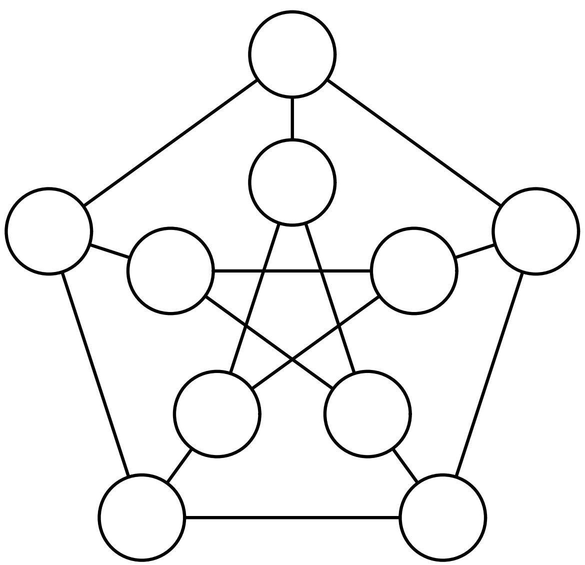
彩色ではない

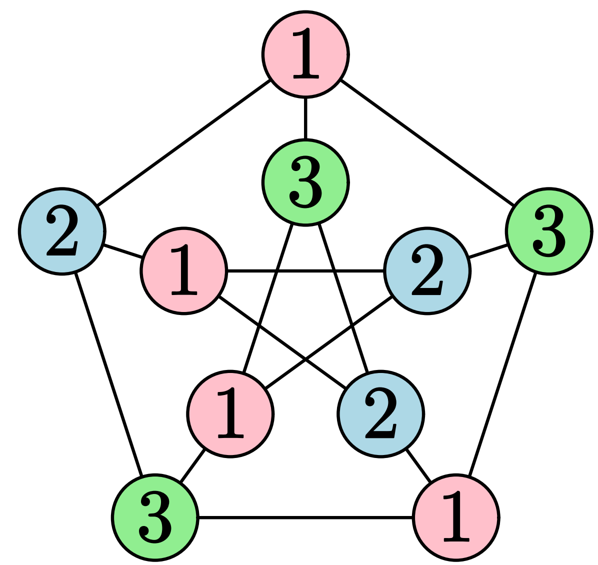
彩色問題

定義：彩色問題

入力： 無向グラフ $G = (V, E)$
出力： G の彩色 c で，$\max\{c(v) \mid v \in V\}$ が最小のもの

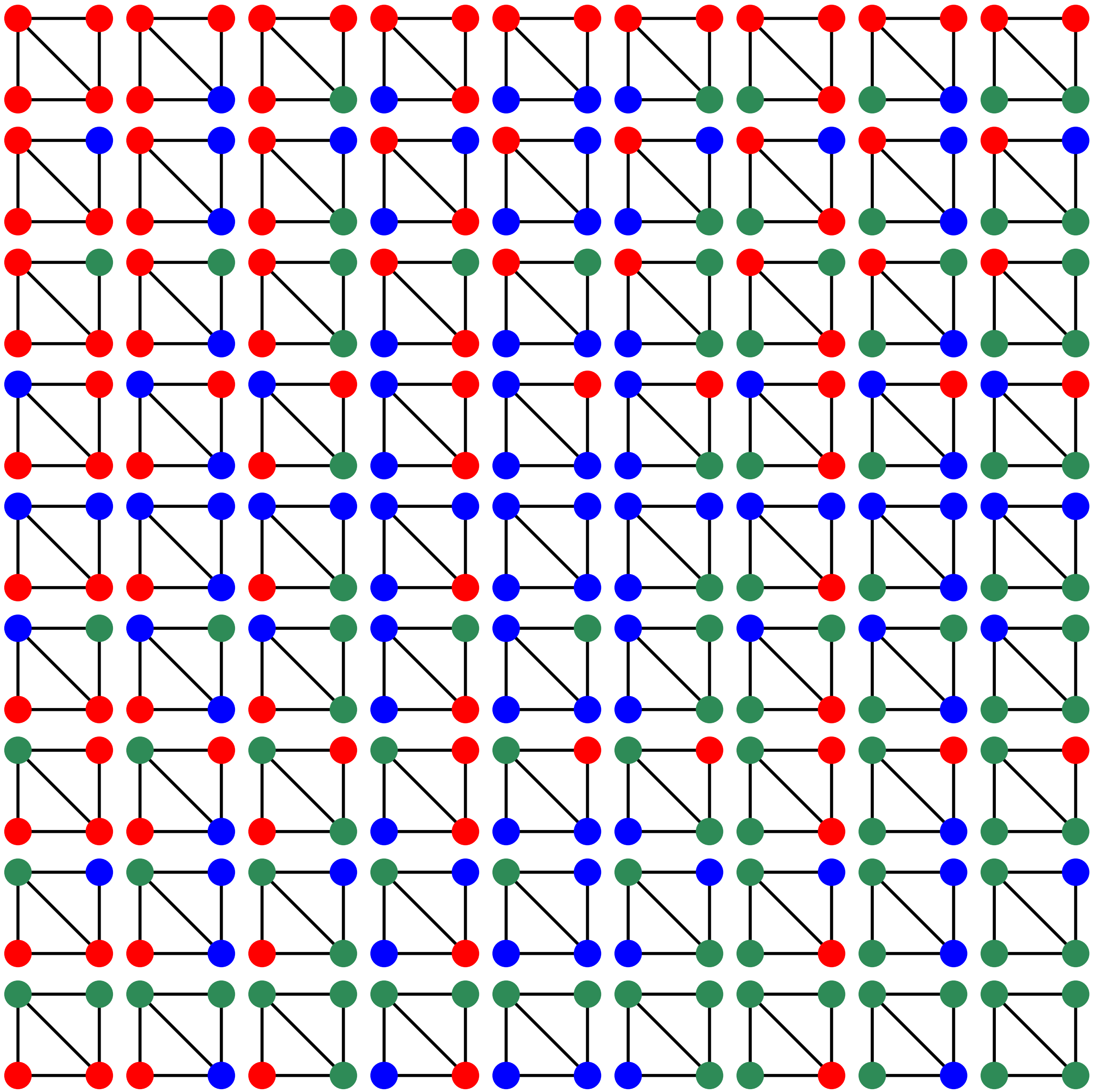
「最小彩色問題」「グラフ彩色問題」とも言う





事実：彩色問題は NP 困難 (Karp '72)

$\boxed{\text{Q}}$ グラフ G が k 色で塗れるか？

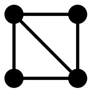


写像 $c\colon V \to \{1,\ldots,k\}$ の

総数 $= k^n$

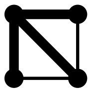
$\therefore$ 計算量 $= O^*(k^n)$

$\boxed{\text{Q}}$ グラフ G が k 色で塗れるか？



全域木の利用

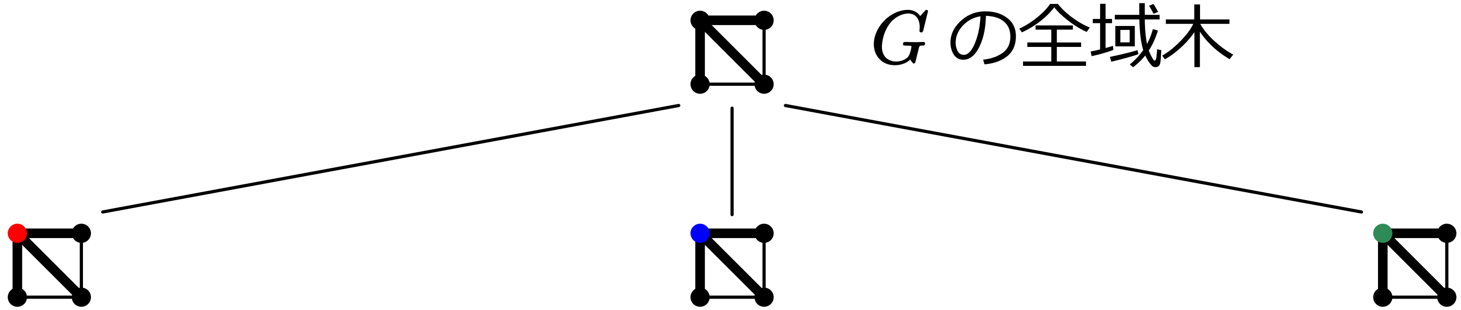
$\boxed{\text{Q}}$ グラフ G が k 色で塗れるか？



G の全域木

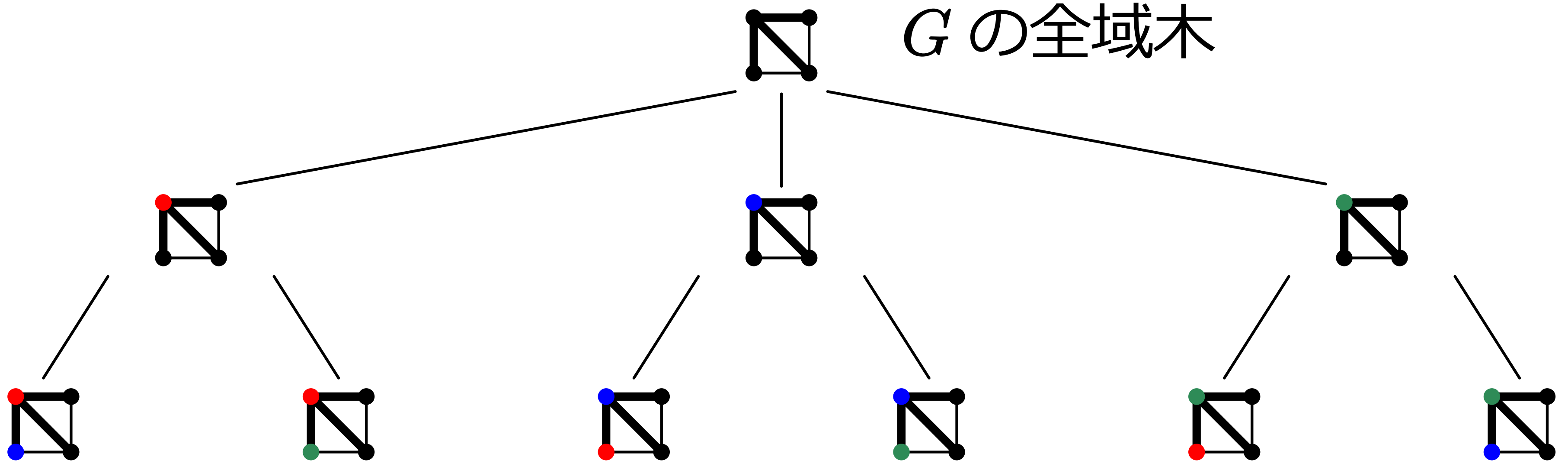
全域木の利用

$\boxed{\text{Q}}$ グラフ G が k 色で塗れるか？

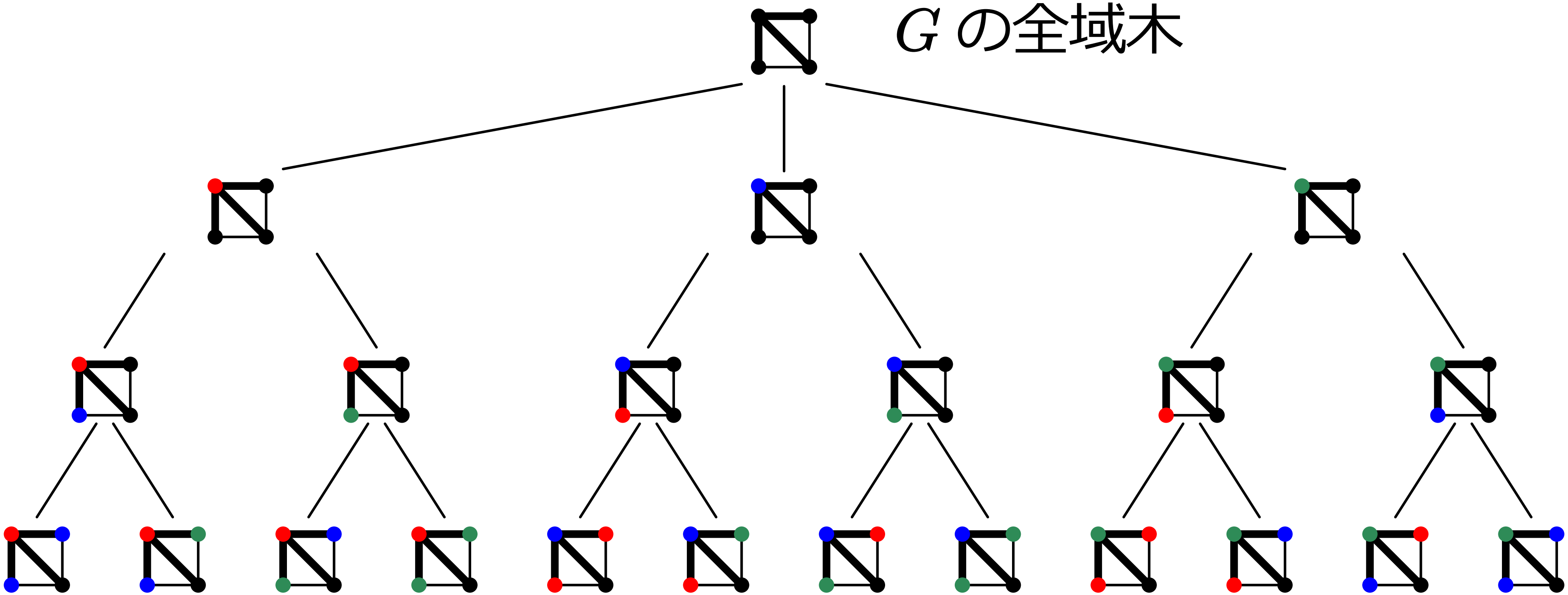


全域木の利用

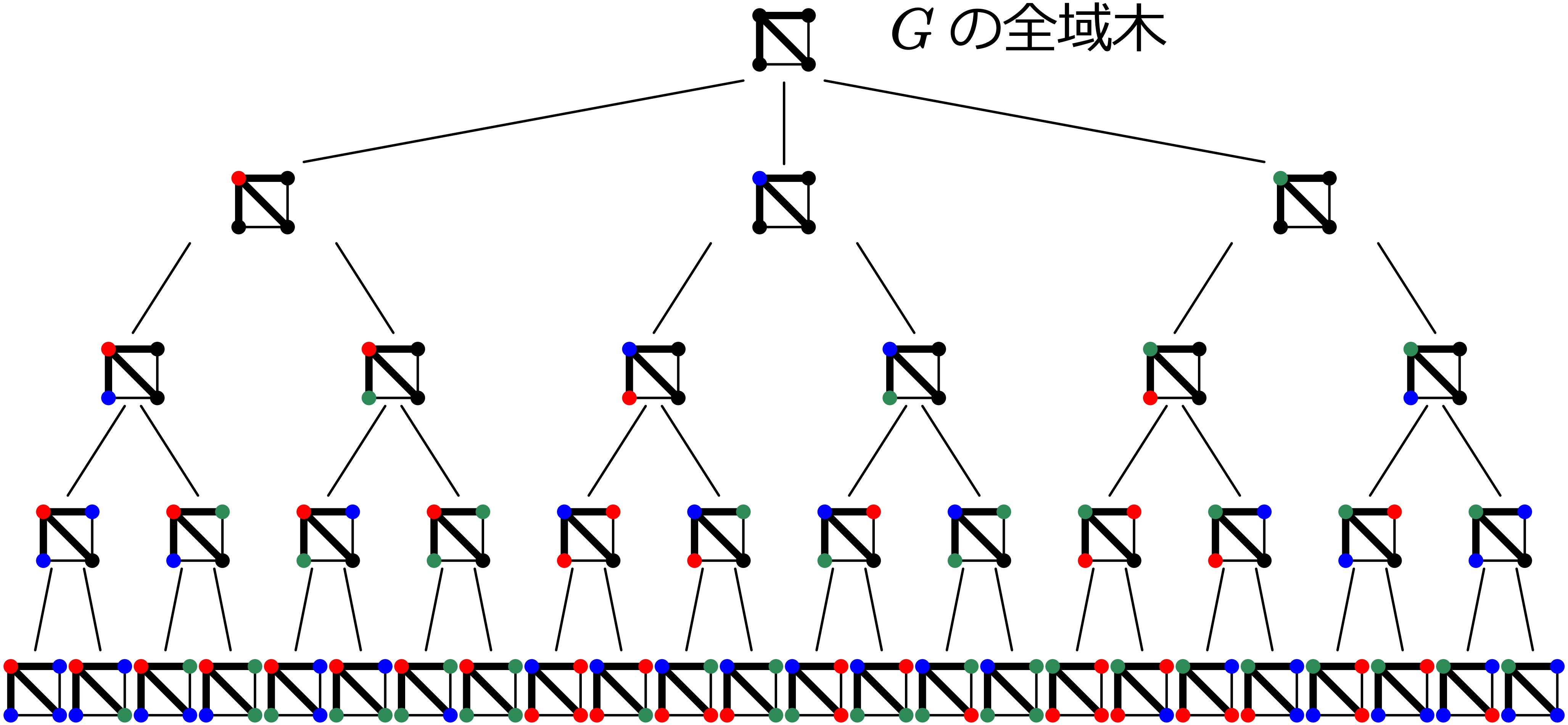
$\boxed{\text{Q}}$ グラフ G が k 色で塗れるか？



$\boxed{\text{Q}}$ グラフ G が k 色で塗れるか？

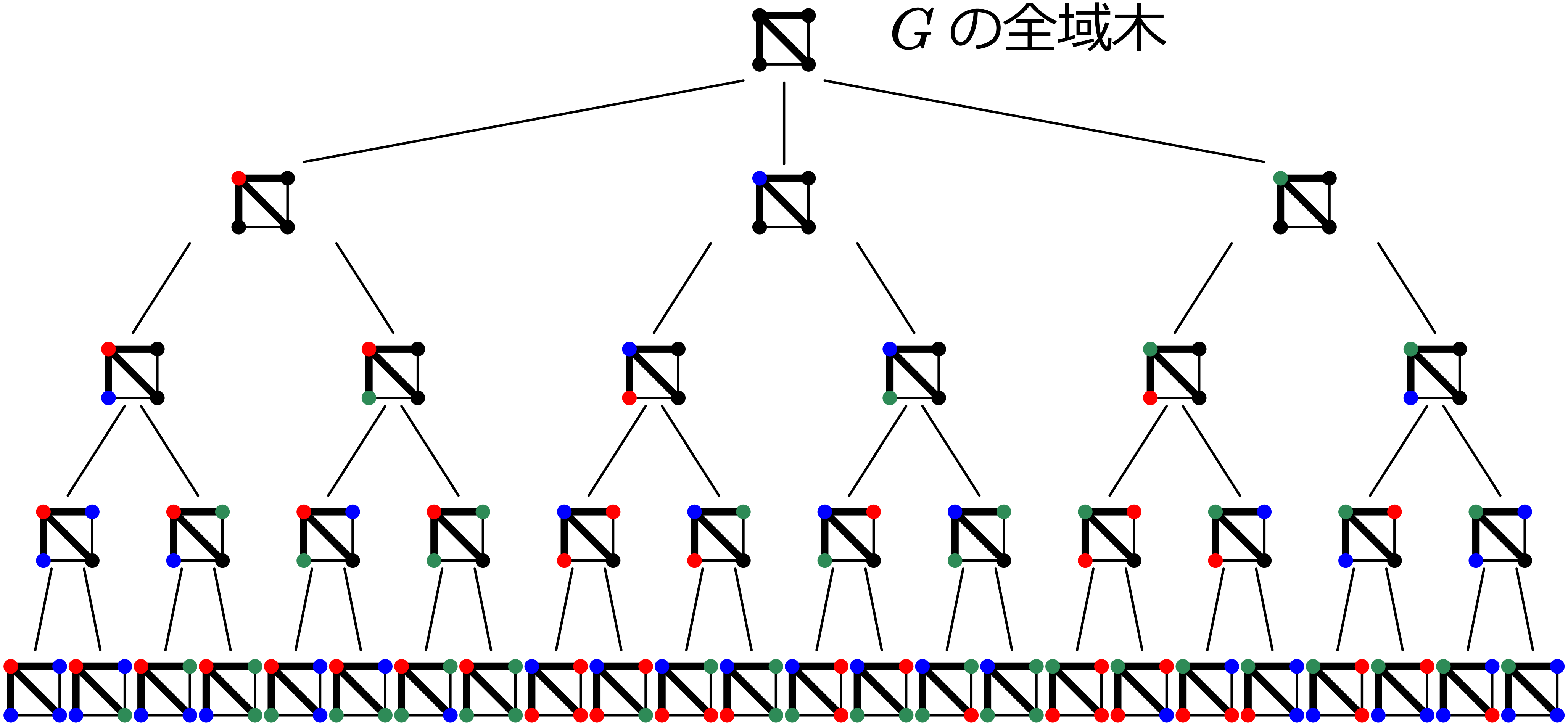


$\boxed{\text{Q}}$ グラフ G が k 色で塗れるか？



全域木の利用

$\boxed{\text{Q}}$ グラフ G が k 色で塗れるか？



葉の数 $= k(k-1)^{n-1} \quad \rightsquigarrow \quad$ 計算量 $= O^*((k-1)^n)$

目標：動的計画法を用いて，次を得る

定理 (Lawler ’76)

彩色問題は $O^*((1+\sqrt[3]{3})^n)$ 時間で 解ける
(n はグラフの頂点数)

$$1+\sqrt[3]{3} \approx 2.4423$$

動的計画法を考えるときの鍵

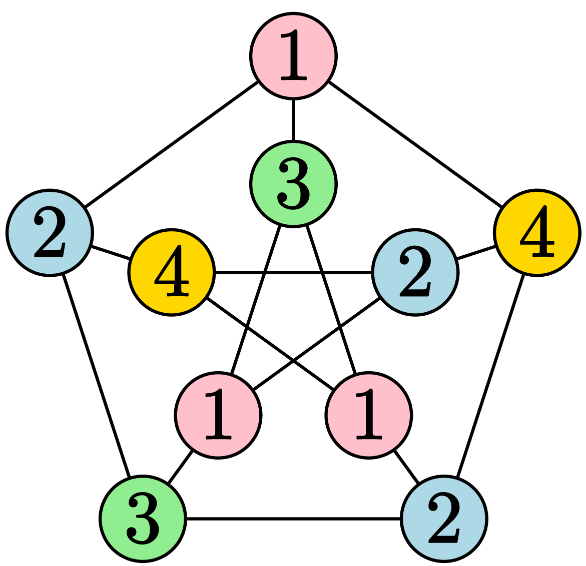
1. 最適解の持つ **再帰的な構造** を見出す
2. 上の構造から **状態** を適切に定義する
3. 状態の間の **再帰式** を立てる

彩色と独立集合

無向グラフ $G = (V, E)$，彩色 $c \colon V \to \{1, 2, \ldots\}$

観察

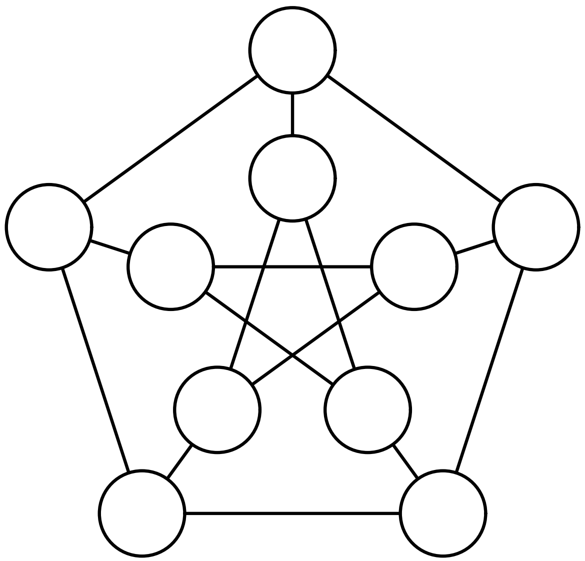
彩色 c によって同じ色で塗られた頂点の集合は
G の独立集合

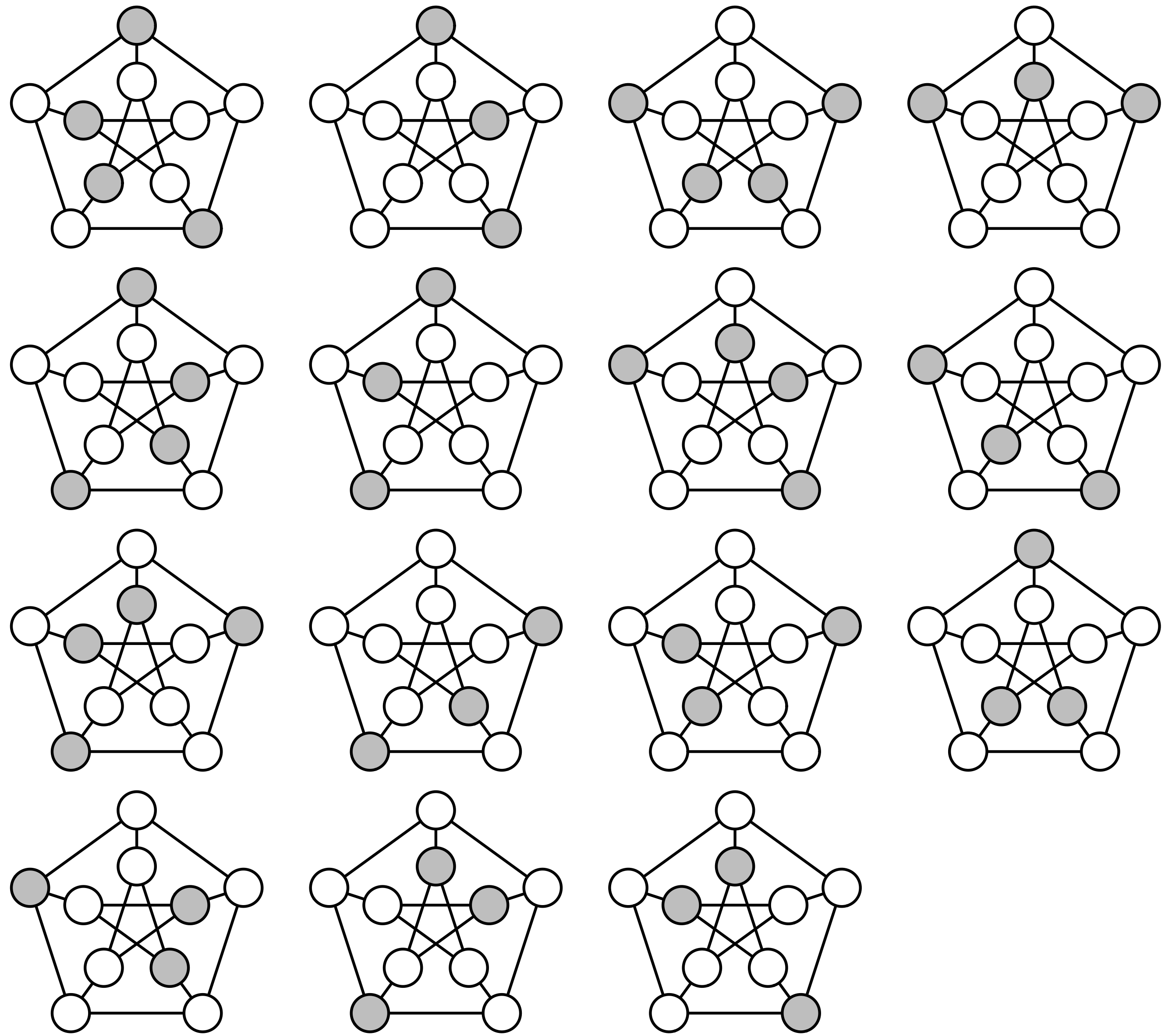


同じ色で塗られた頂点の集合
$= c^{-1}(\{i\})$ $(i \in \{1, 2, \ldots\})$

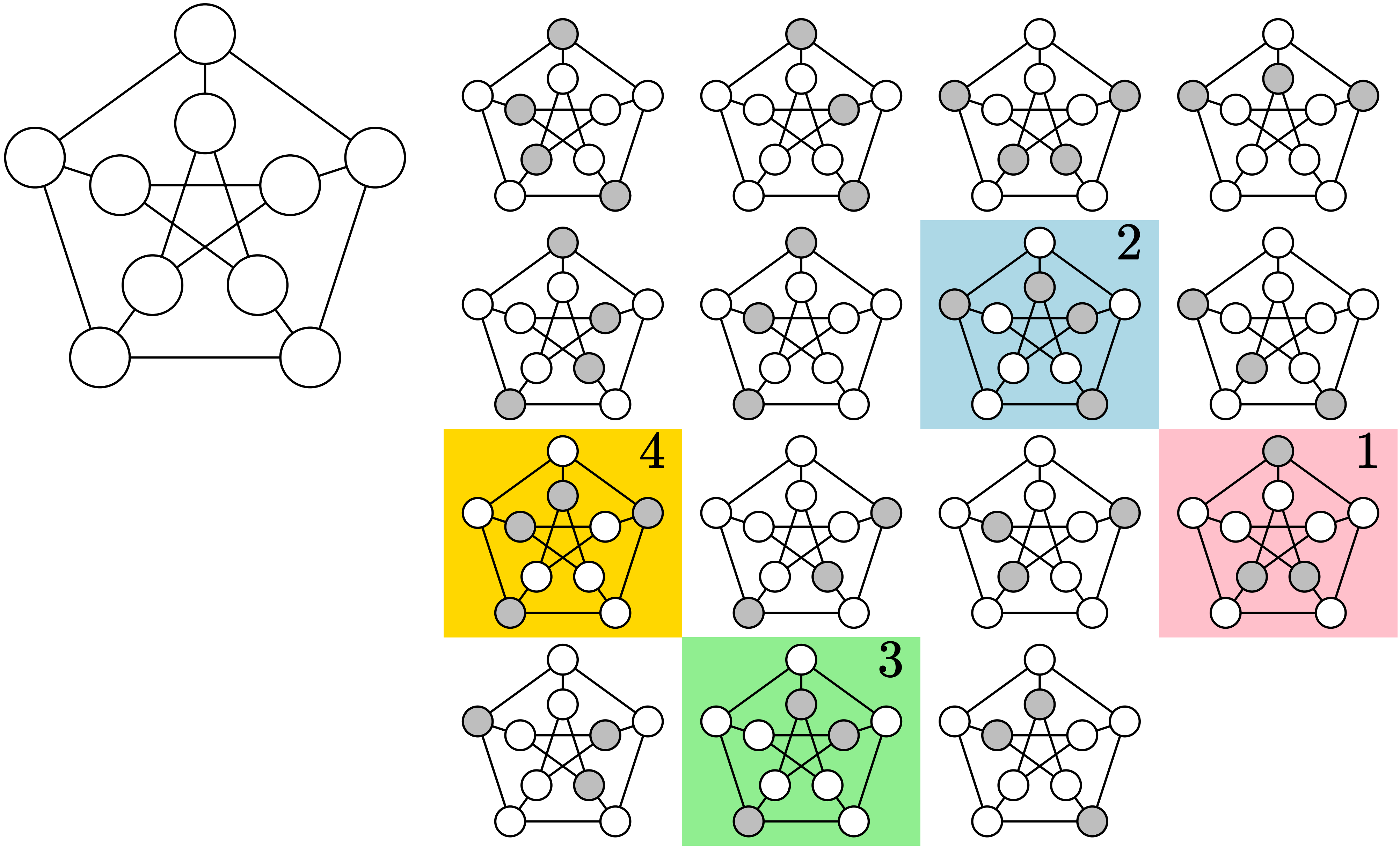
<u>復習</u>：G の **独立集合** とは
G で隣接しない頂点の集合

彩色は極大独立集合による被覆

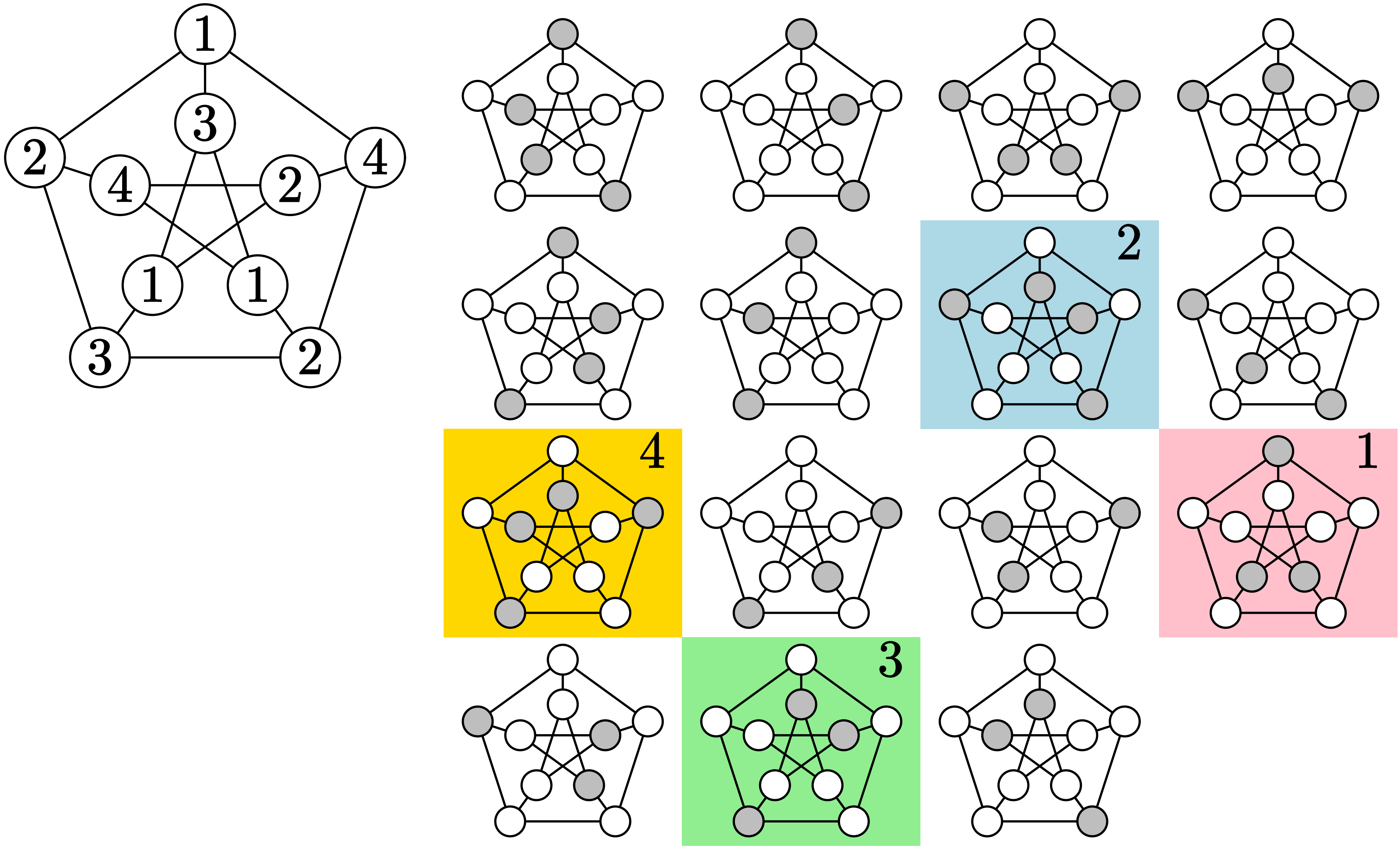




彩色は極大独立集合による被覆



彩色は極大独立集合による被覆

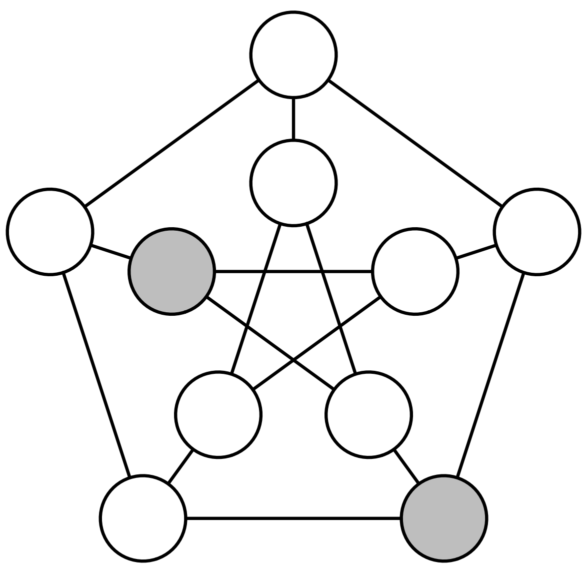


極大独立集合

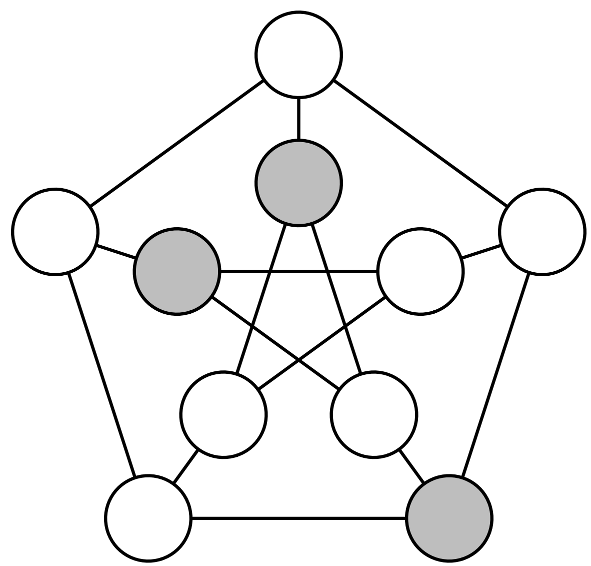
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：極大独立集合 (maximal independent set)

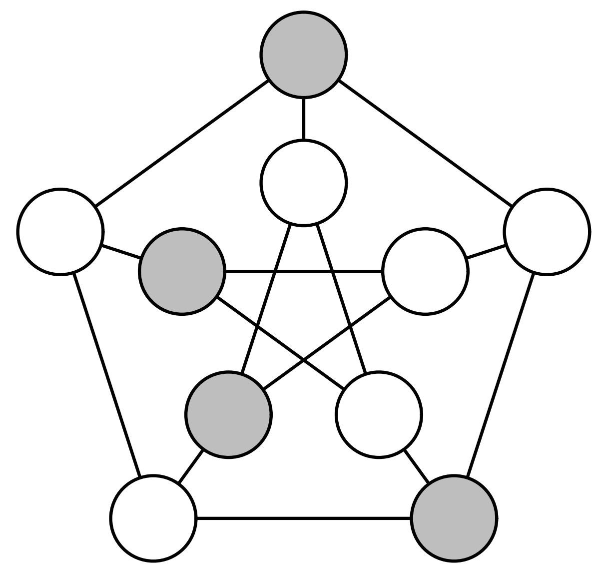
G の **極大独立集合** とは，G の独立集合で，
それを真部分集合として含む独立集合が存在しないこと



独立集合だが
極大独立集合ではない



極大独立集合だが
最大独立集合ではない



極大独立集合であり
最大独立集合でもある

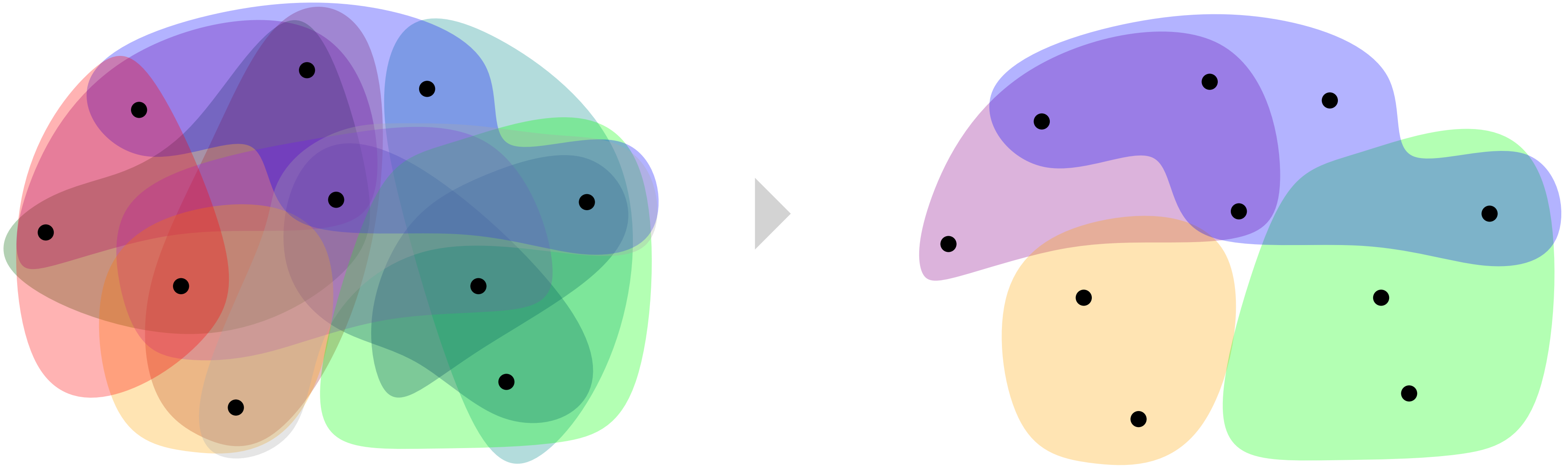
定義：最小被覆問題

入力： 有限集合 V，集合族 $\mathcal{S} \subseteq 2^V$

出力： V の最小被覆 $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$

要素数最小の被覆

ここから，$n = |V|, m = |\mathcal{S}|$ とする



復習：最小被覆問題のアルゴリズム

$\boxed{\text{前回}}$ 動的計画法に基づく最小被覆問題のアルゴリズム

- 状態数 $= m2^n$
- 各状態の値 は 他の 2 つの状態の値から定まる

$\therefore$ 計算量 $= O(m2^n) = O^*(2^n)$

復習：最小被覆問題のアルゴリズム

$\boxed{\text{前回}}$ 動的計画法に基づく最小被覆問題のアルゴリズム

- 状態数 $= m2^n$
- 各状態の値 は 他の 2 つの状態の値から定まる

$\therefore$ 計算量 $= O(m2^n) = O^*(2^n)$

彩色問題において

- $n =$ グラフ G の頂点数
- $m =$ グラフ G の極大独立集合の総数 $\leq 2^n$

$\therefore$ 彩色問題は $O(2^n \cdot 2^n) = \boxed{O^*(4^n)}$ で解ける

$\boxed{\text{前回}}$ 動的計画法に基づく最小被覆問題のアルゴリズム

- 状態数 $= m2^n$
- 各状態の値 は 他の 2 つの状態の値から定まる

$\therefore$ 計算量 $= O(m2^n) = O^*(2^n)$

彩色問題において

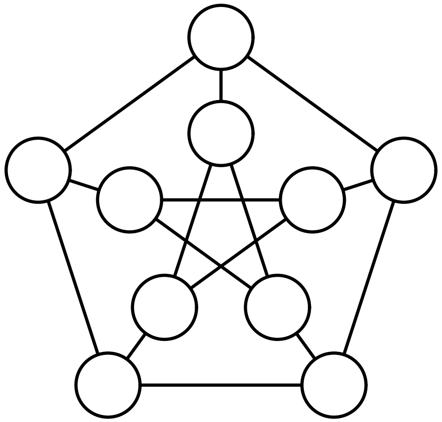
- $n =$ グラフ G の頂点数
- $m =$ グラフ G の極大独立集合の総数 $\leq \boxed{2^n}$

$\therefore$ 彩色問題は $O(2^n \cdot 2^n) = \boxed{O^*(4^n)}$ で解ける

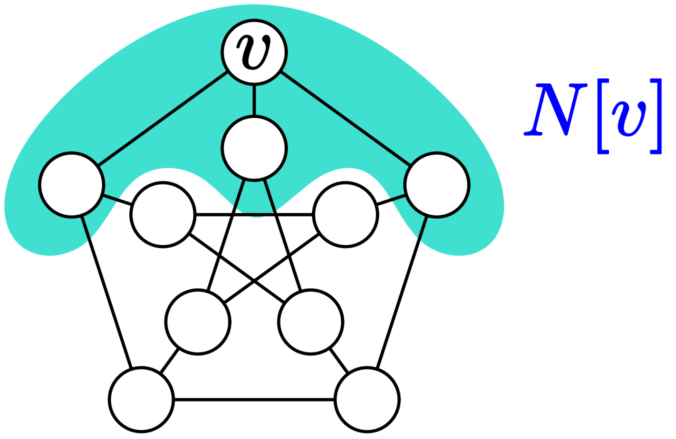
もっと小さい量で
抑えられるか？

極大独立集合の総数：考え方

極大独立集合をすべて生成するアルゴリズムを考える

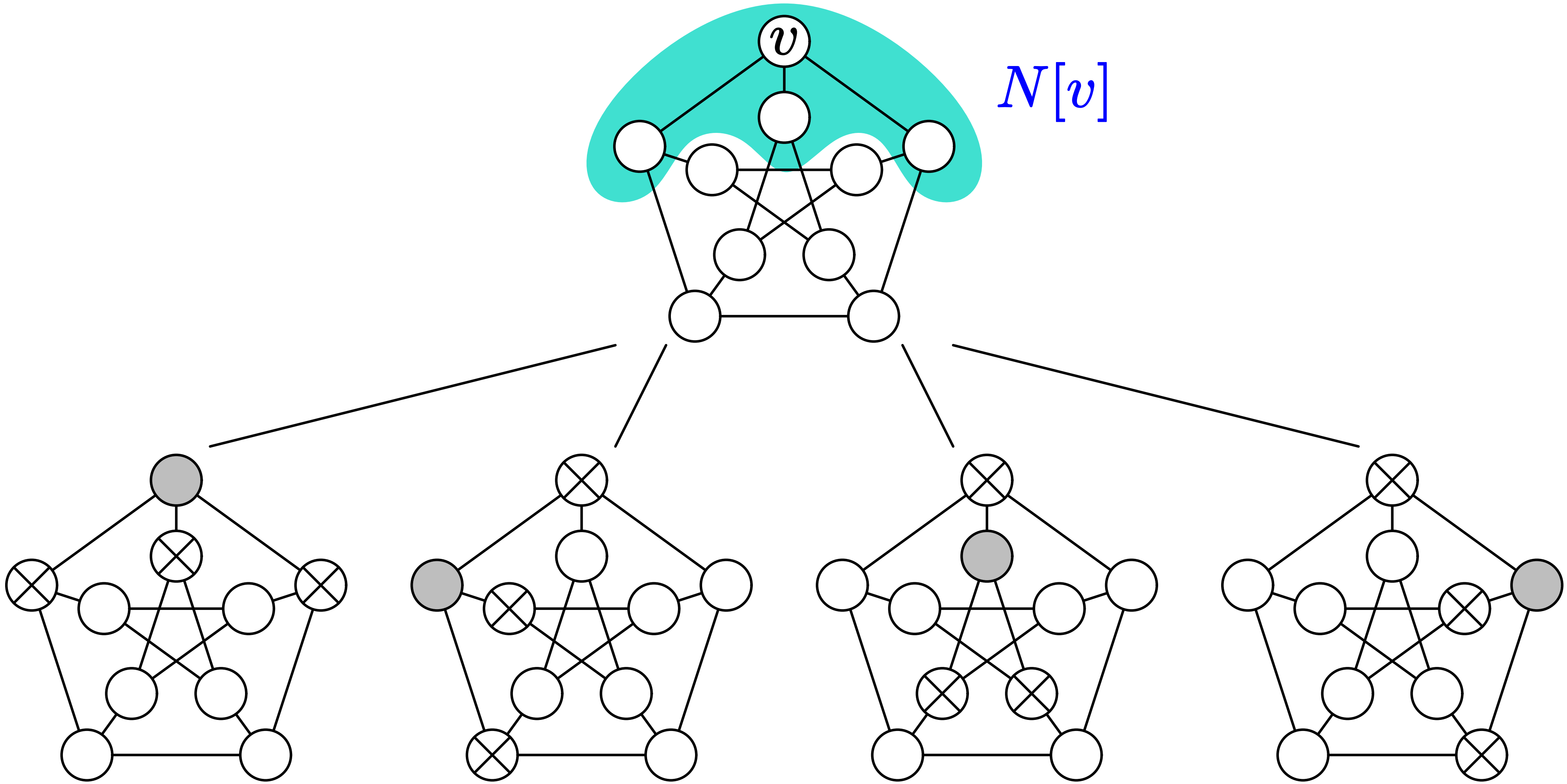


極大独立集合をすべて生成するアルゴリズムを考える



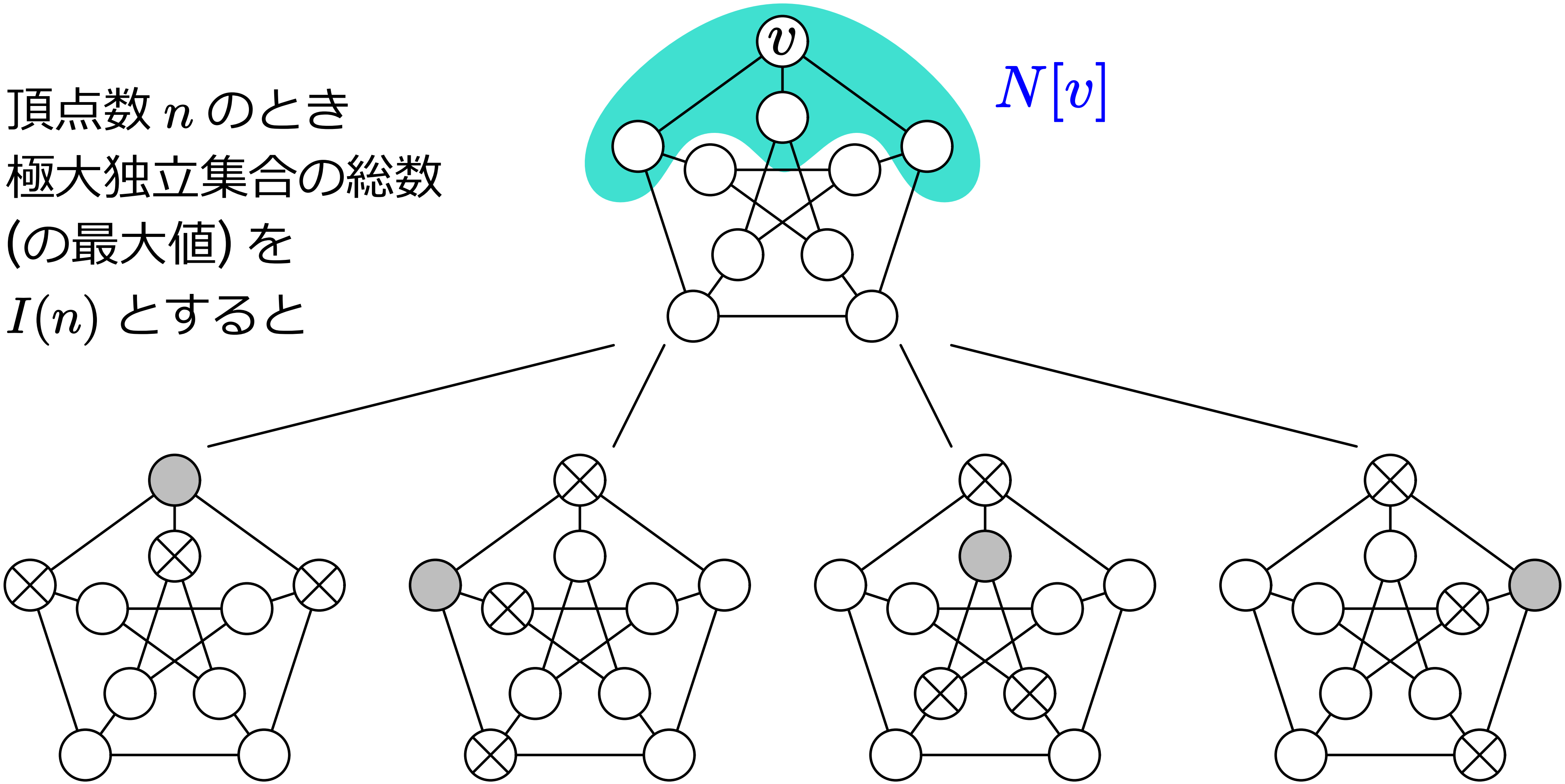
極大独立集合の総数：考え方

極大独立集合をすべて生成するアルゴリズムを考える



極大独立集合をすべて生成するアルゴリズムを考える

頂点数 n のとき
極大独立集合の総数
(の最大値) を
$I(n)$ とすると



$$I(n) \leq I(n-1-\deg(v)) + \sum_{u \in N(v)} I(n-1-\deg(u))$$

極大独立集合の総数：漸化式

$$I(n) \leq I(n-1-\deg(v)) + \sum_{u \in N(v)} I(n-1-\deg(u))$$

極大独立集合の総数：漸化式

$$I(n) \leq I(n-1-\deg(v)) + \sum_{u \in N(v)} I(n-1-\deg(u))$$

v を次数最小の頂点とすると $(\deg(v) \leq \deg(u))$

$$\leq (1+\deg(v)) I(n-1-\deg(v))$$

$s = 1 + \deg(v)$

$$= s\, I(n-s)$$

極大独立集合の総数：漸化式

$$I(n) \le I(n-1-\deg(v)) + \sum_{u \in N(v)} I(n-1-\deg(u))$$

v を次数最小の頂点とすると $(\deg(v) \le \deg(u))$

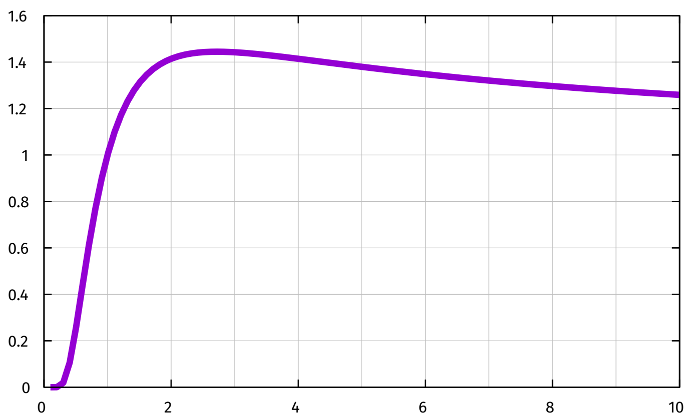
$$\le (1+\deg(v))I(n-1-\deg(v))$$

$s = 1 + \deg(v)$

$$= s\, I(n-s)$$

特性方程式　$x^s = s$　$\rightsquigarrow$ 解 $x = \sqrt[s]{s}$

$s = 3$ のときに最大



極大独立集合の総数：漸化式

$$I(n) \leq I(n-1-\deg(v)) + \sum_{u \in N(v)} I(n-1-\deg(u))$$

v を次数最小の頂点とすると $(\deg(v) \leq \deg(u))$

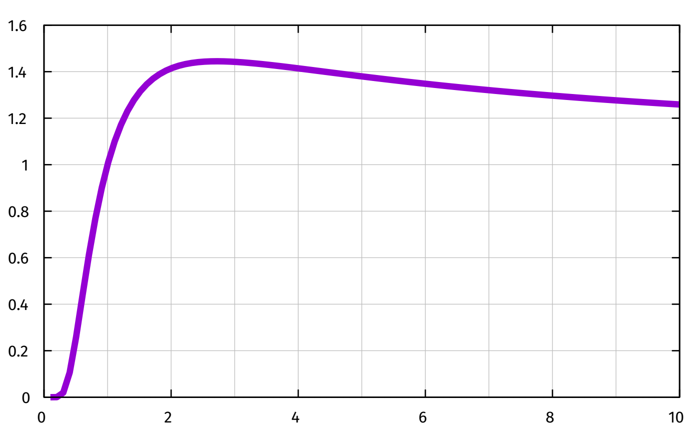
$$\leq (1+\deg(v)) I(n-1-\deg(v))$$

$s = 1 + \deg(v)$

$$= s\, I(n-s) \qquad \leq \sqrt[3]{3}^{\,n}$$

$\boxed{\text{特性方程式}}$ $\quad x^s = s \quad \rightsquigarrow$ 解 $x = \sqrt[s]{s}$

$s = 3$ のときに最大



極大独立集合の総数：漸化式

$$I(n) \le I(n-1-\deg(v)) + \sum_{u \in N(v)} I(n-1-\deg(u))$$

v を次数最小の頂点とすると $(\deg(v) \le \deg(u))$

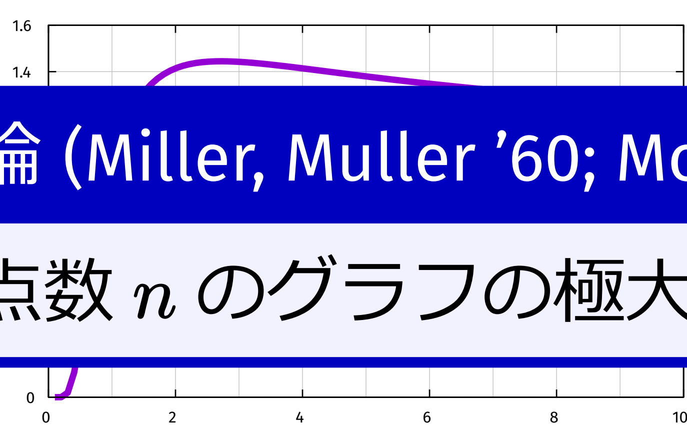
$$\le (1+\deg(v))I(n-1-\deg(v))$$

$s = 1 + \deg(v)$

$$= s\, I(n-s) \qquad \le \sqrt[3]{3}^{\,n}$$

$\boxed{\text{特性方程式}}$ $\quad x^s = s \qquad \rightsquigarrow$ 解 $x = \sqrt[s]{s}$

$s = 3$ のときに最大



結論 (Miller, Muller ’60; Moon, Moser ’65)

頂点数 n のグラフの極大独立集合の総数は $O^*(\sqrt[3]{3}^{\,n})$

彩色問題に戻ると…

$\boxed{\text{前回}}$ 動的計画法に基づく最小被覆問題のアルゴリズム

- 状態数 $= m2^n$
- 各状態の値 は 他の 2 つの状態の値から定まる

$\therefore$ 計算量 $= O(m2^n) = O^*(2^n)$

彩色問題において

- $n =$ グラフ G の頂点数
- $m =$ グラフ G の極大独立集合の総数 $\leq \sqrt[3]{3}^n$

$\therefore$ 彩色問題は $O(\sqrt[3]{3}^n \cdot 2^n) = \boxed{O^*(2.8845^n)}$ で解ける

彩色問題に戻ると…

前回 動的計画法に基づく最小被覆問題のアルゴリズム

- 状態数 $= m2^n$
- 各状態の値 は 他の 2 つの状態の値から定まる

$\therefore$ 計算量 $= O(m2^n) = O^*(2^n)$

彩色問題において

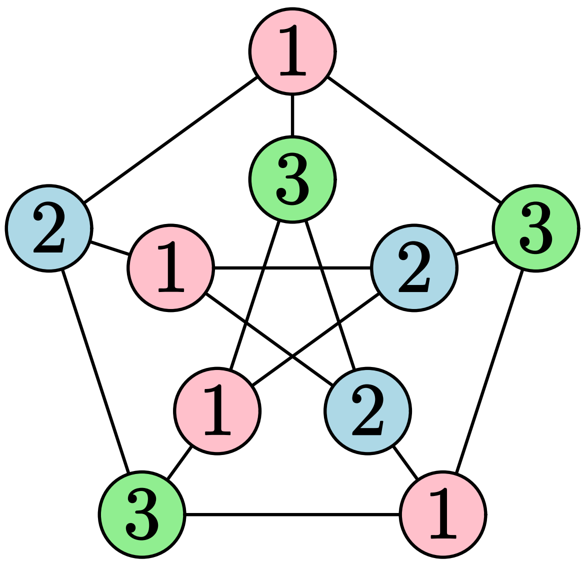
- $n =$ グラフ G の頂点数
- $m =$ グラフ G の極大独立集合の総数 $\leq \sqrt[3]{3}^n$

$\therefore$ 彩色問題は $O(\sqrt[3]{3}^n \cdot 2^n) = \boxed{O^*(2.8845^n)}$ で解ける

目標の計算量 $O^*(2.4423^n)$

動的計画法：再帰的構造

アイディア：動的計画法を直接適用する

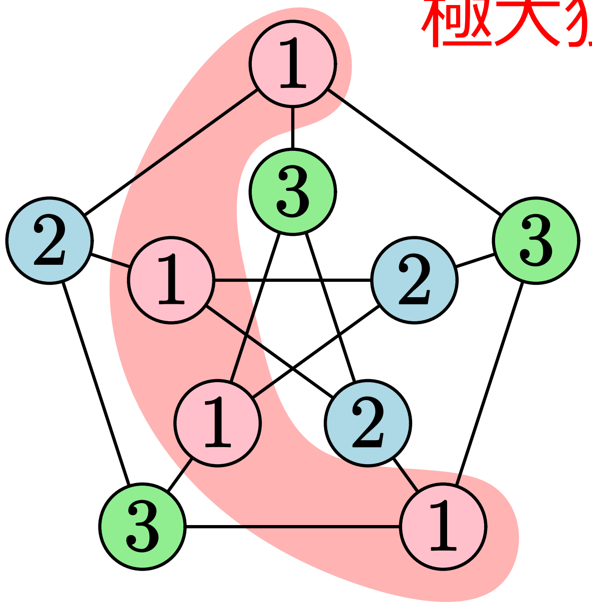


G に対する
色数最小の彩色

動的計画法：再帰的構造

アイディア：動的計画法を直接適用する

極大独立集合 M

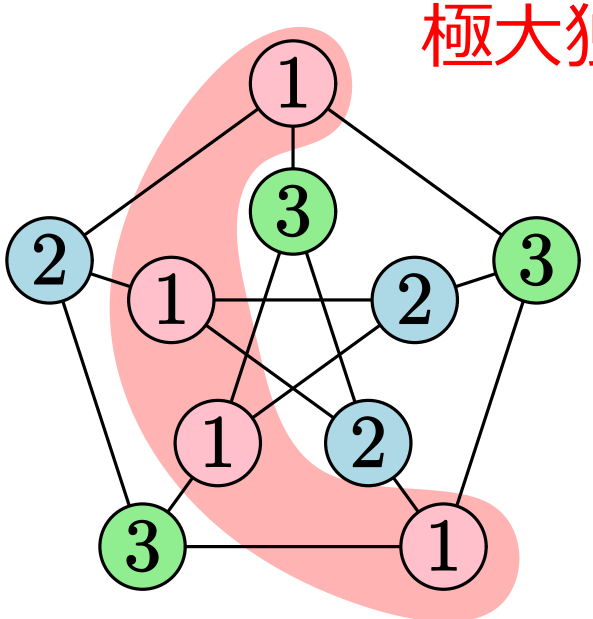


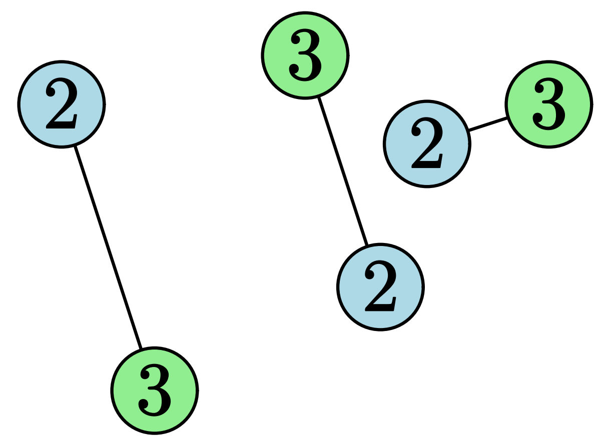
G に対する
色数最小の彩色

動的計画法：再帰的構造

アイディア：動的計画法を直接適用する

極大独立集合 M





G に対する
色数最小の彩色

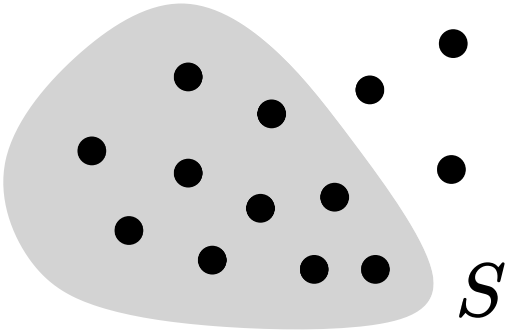
$G - M$ に対する
色数最小の彩色

動的計画法：状態と状態の値

$\boxed{\text{状態}}$ S　ただし，$S \subseteq V$

$\boxed{\text{状態の値}}$ $f(S) = G - (V - S)$ の彩色の最小色数

$\boxed{\text{最終的に出力する値}}$　$f(V)$



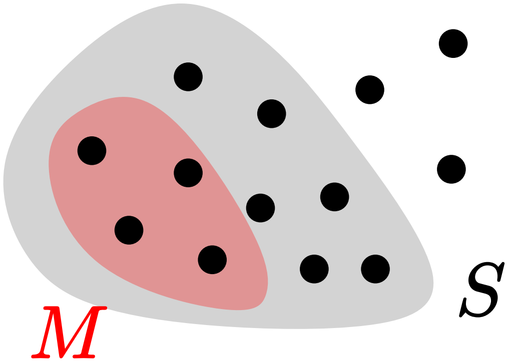
動的計画法を考えるときの鍵

1. 最適解の持つ **再帰的な構造** を見出す
2. 上の構造から **状態** を適切に定義する
3. 状態の間の **再帰式** を立てる

再帰式

$$f(\emptyset) = 0$$

$$f(S) = \min\left\{ 1 + f(S - M) \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ は } G - (V - S) \text{ の} \\ \text{極大独立集合} \end{array} \right\} \quad |S| \geq 1 \text{ のとき}$$



動的計画法を考えるときの鍵

1. 最適解の持つ **再帰的な構造** を見出す
2. 上の構造から **状態** を適切に定義する
3. 状態の間の **再帰式** を立てる

動的計画法：アルゴリズム

アルゴリズム col-dp(G)

1. $G-(V-S)$ の極大独立集合をすべて生成 $\forall\, S \subseteq V$
2. $f(\emptyset)=0$
3. $|S| \geq 1$ に対して，$|S|$ が小さい方から順に
$$f(S)=\min\left\{1+f(S-M) \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ は } G-(V-S) \text{ の} \\ \text{極大独立集合} \end{array}\right\}$$
4. $f(V)$ を出力

アルゴリズム col-dp(G)

1. $G-(V-S)$ の極大独立集合をすべて生成 $\forall\, S \subseteq V$
2. $f(\emptyset)=0$
3. $|S| \geq 1$ に対して，$|S|$ が小さい方から順に
   $$f(S)=\min\left\{1+f(S-M) \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ は } G-(V-S) \text{ の} \\ \text{極大独立集合} \end{array}\right\}$$
4. $f(V)$ を出力

$$\sum_{S\subseteq V} \sqrt[3]{3}^{|S|} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sqrt[3]{3}^{i} = (1+\sqrt[3]{3})^n$$

二項定理：$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k}$

動的計画法：計算量の導出

アルゴリズム col-dp(G)

$O^*((1+\sqrt[3]{3})^n)$

1. $G-(V-S)$ の極大独立集合をすべて生成 $\forall\, S \subseteq V$
2. $f(\emptyset) = 0$
3. $|S| \geq 1$ に対して，$|S|$ が小さい方から順に
$$f(S) = \min\left\{ 1 + f(S-M) \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ は } G-(V-S) \text{ の} \\ \text{極大独立集合} \end{array} \right\}$$
4. $f(V)$ を出力

$$\sum_{S \subseteq V} \sqrt[3]{3}^{|S|} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sqrt[3]{3}^{i} = (1+\sqrt[3]{3})^n$$

二項定理：$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$

動的計画法：計算量の導出

アルゴリズム col-dp(G)

$O^*((1+\sqrt[3]{3})^n)$

1. $G-(V-S)$ の極大独立集合をすべて生成 $\forall S \subseteq V$
2. $f(\emptyset)=0$
3. $|S| \geq 1$ に対して，$|S|$ が小さい方から順に
$$f(S)=\min\left\{1+f(S-M) \,\middle|\, \begin{array}{l} M \text{ は } G-(V-S) \text{ の} \\ \text{極大独立集合} \end{array}\right\}$$
4. $f(V)$ を出力

$O^*((1+\sqrt[3]{3})^n)$

$$\sum_{S\subseteq V} \sqrt[3]{3}^{|S|} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sqrt[3]{3}^{i} = (1+\sqrt[3]{3})^n$$

二項定理：$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$

彩色問題：まとめ

結論：彩色問題 (Lawler '76)

彩色問題は $O^*((1+\sqrt[3]{3})^n)$ 時間で解ける
(n はグラフの頂点数)

$$1+\sqrt[3]{3} \approx 2.4423$$

彩色問題：まとめ

結論：彩色問題 (Lawler '76)

彩色問題は $O^*((1+\sqrt[3]{3})^n)$ 時間で解ける
(n はグラフの頂点数)

$$1+\sqrt[3]{3} \approx 2.4423$$

$\boxed{\text{予告}}$：次回以降，$O^*(2^n)$ 時間アルゴリズムを紹介する

本日の内容

1. 彩色問題
2. **最小シュタイナー木問題**

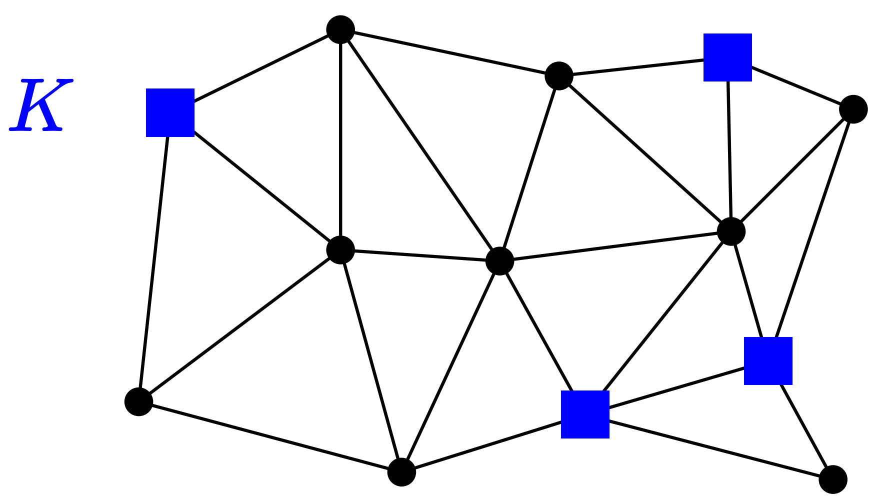
- S. Dreyfus, R. Wagner, The Steiner problem in graphs. *Networks* 1 (1972) pp. 195–207.
- A. Levin, Algorithm for the shortest connection of a group of graph vertices. *Soviet Mathematics Doklady* 12 (1971) pp. 1477–1481.

シュタイナー木

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $K \subseteq V$

定義：シュタイナー木 (Steiner tree)

K を **端末集合** とする G の **シュタイナー木** とは，
G の部分木 $T = (V_T, E_T)$ で，$K \subseteq V_T$ を満たすもの



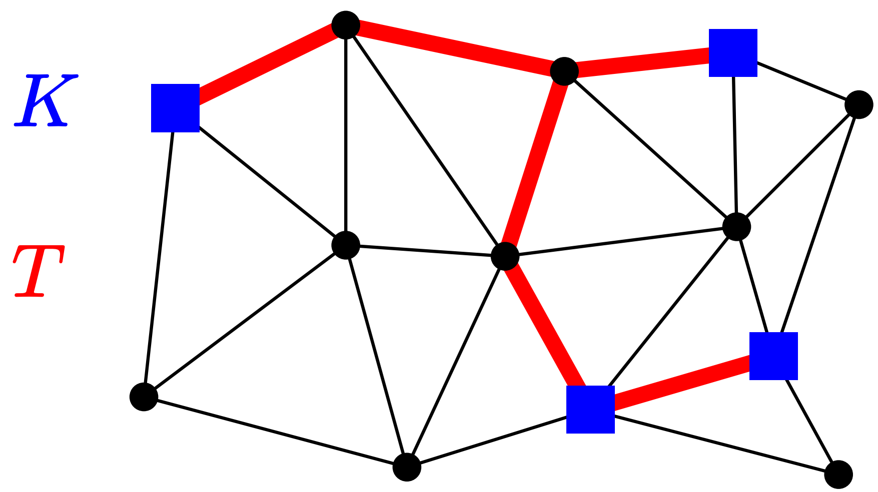
端末集合 = terminal set

シュタイナー木

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $K \subseteq V$

定義：シュタイナー木 (Steiner tree)

K を **端末集合** とする G の **シュタイナー木** とは，
G の部分木 $T = (V_T, E_T)$ で，$K \subseteq V_T$ を満たすもの



端末集合 = terminal set

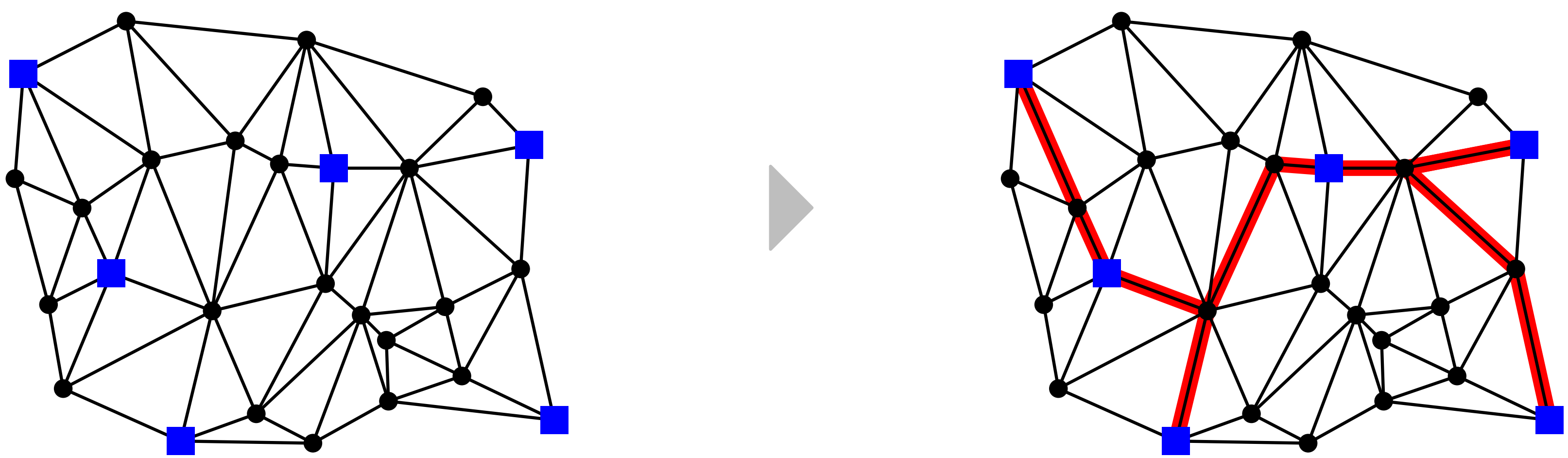
最小シュタイナー木問題

定義：最小シュタイナー木問題

入力： 無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $K \subseteq V$

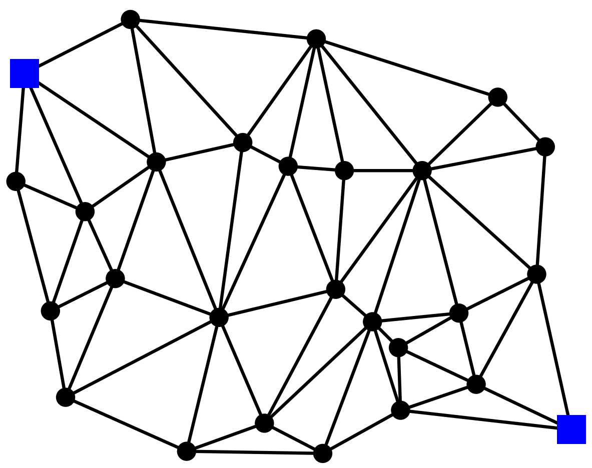
出力： K を端末集合とする G の最小シュタイナー木

辺の数が最小のもの

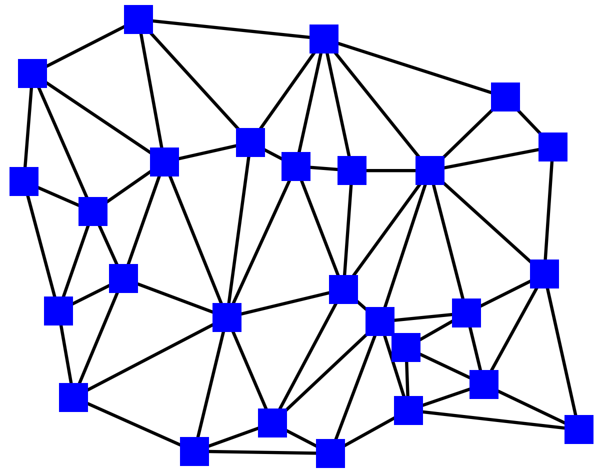


補足：グラフの辺に長さが与えられていて，
長さの和が最小のシュタイナー木を求める問題もある

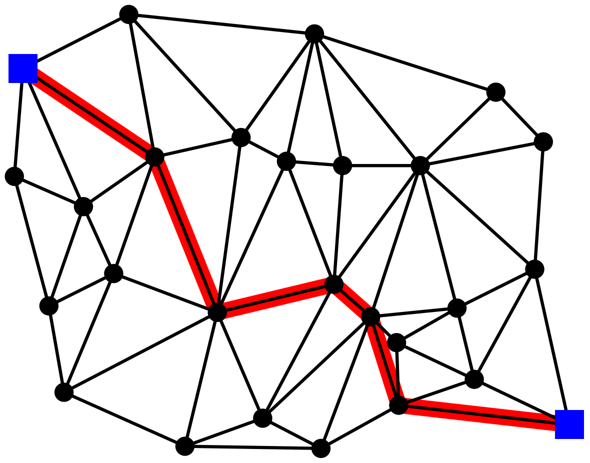
$|K| = 2$ のとき



$|K| = |V|$ のとき

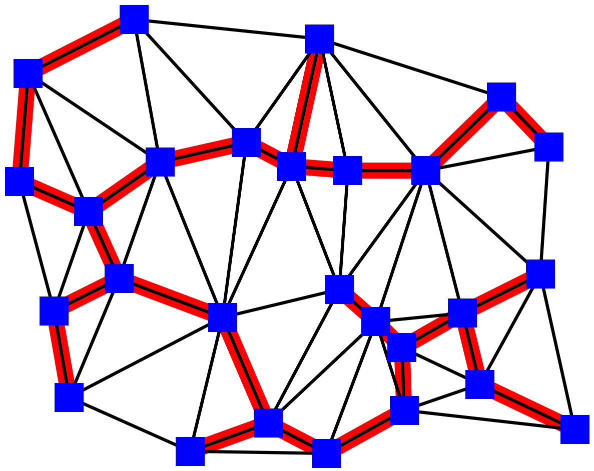


$|K| = 2$ のとき



$\rightsquigarrow$ 最短路

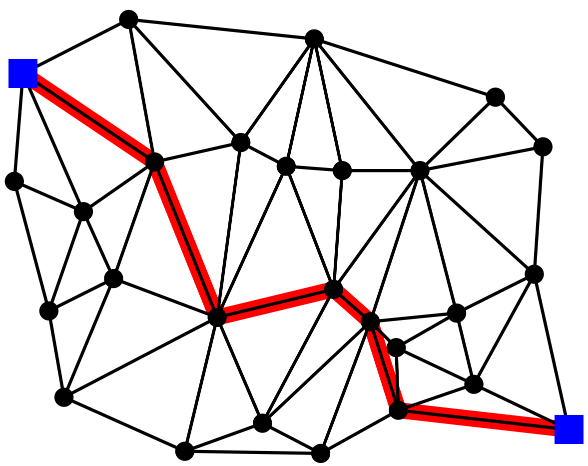
$|K| = |V|$ のとき



$\rightsquigarrow$ 全域木

シュタイナー木：最短路と全域木

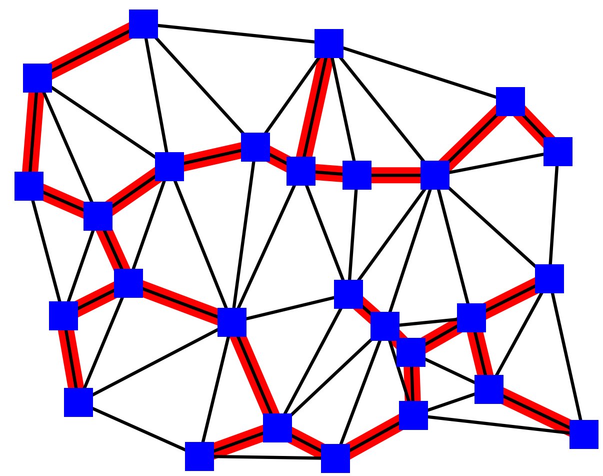
$|K| = 2$ のとき



$\rightsquigarrow$ 最短路

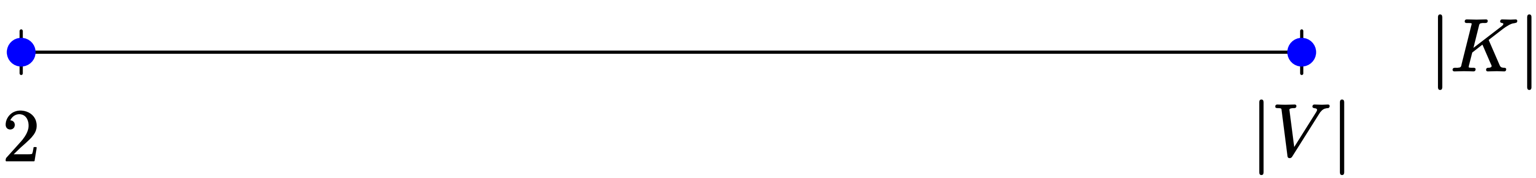
多項式時間で解ける

$|K| = |V|$ のとき



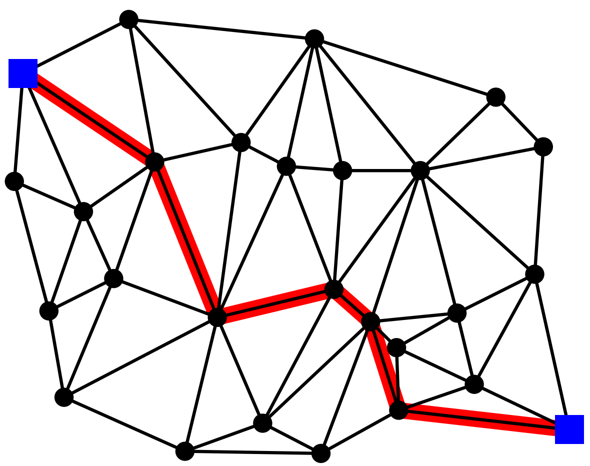
$\rightsquigarrow$ 全域木

多項式時間で解ける



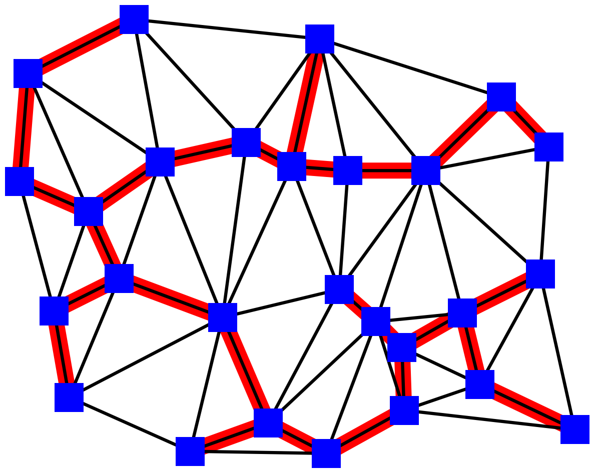
シュタイナー木：最短路と全域木

$|K| = 2$ のとき

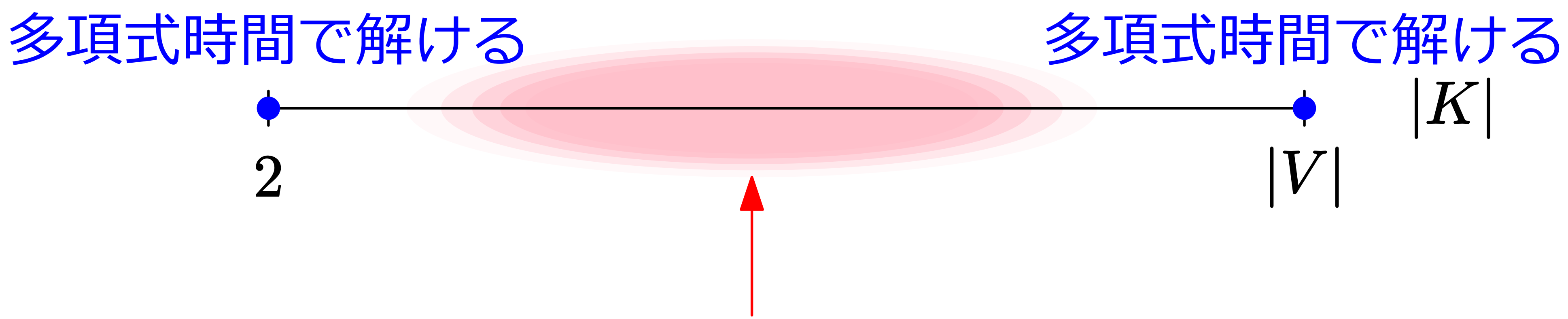


$\leadsto$ 最短路

$|K| = |V|$ のとき

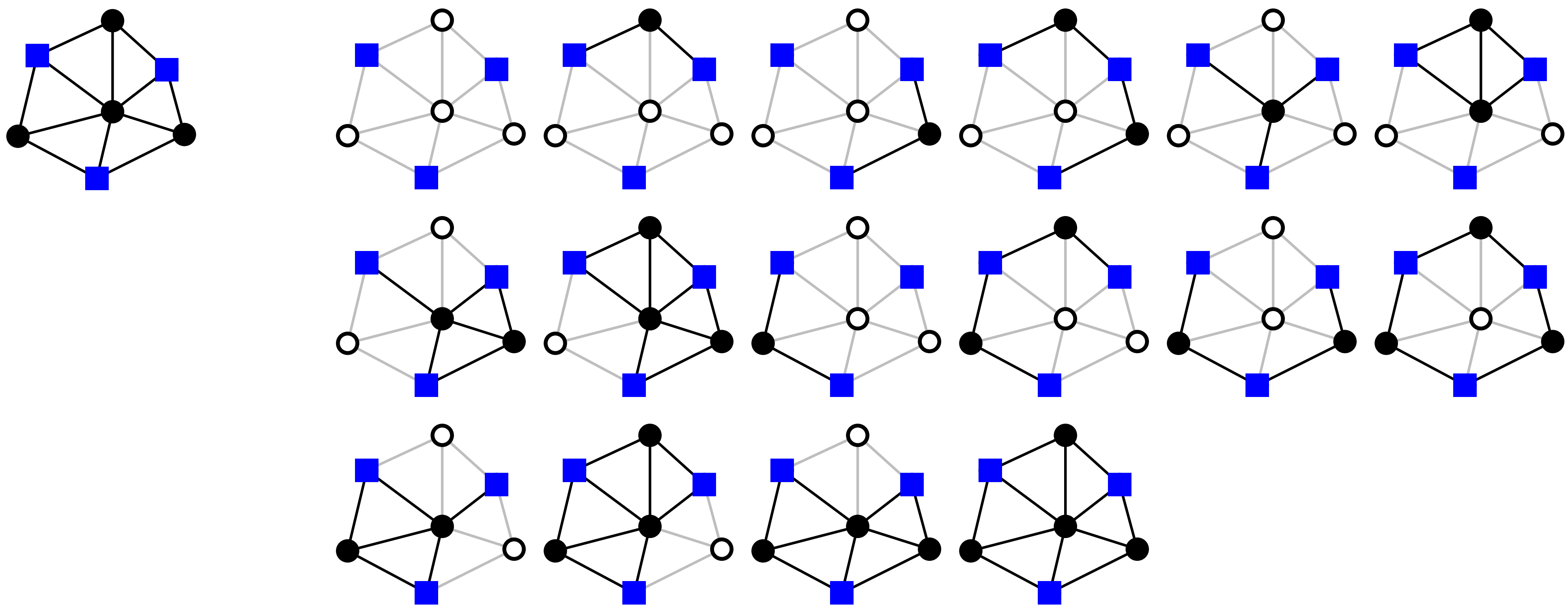


$\leadsto$ 全域木

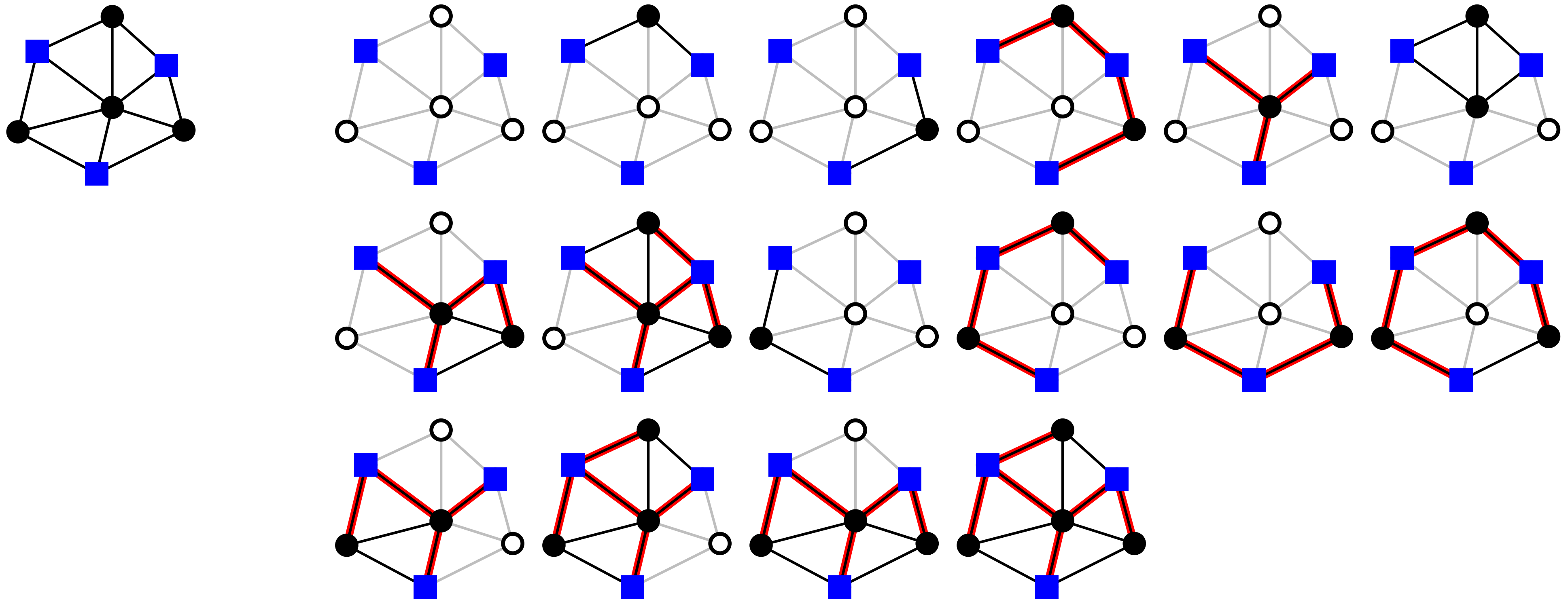


事実：最小シュタイナー木問題は NP 困難 (Karp '72)

$|K|$ が大きいとき

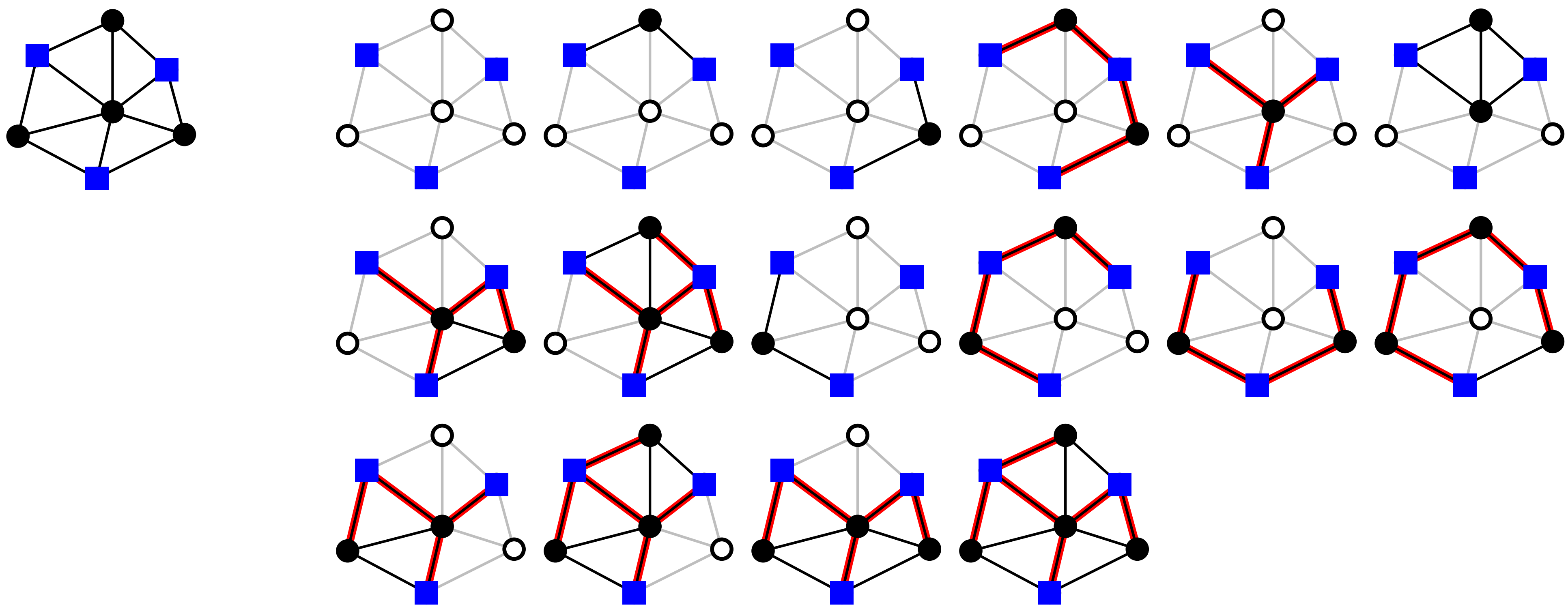


すべての $S \subseteq V - K$ に対して，$K \cup S$ だけを結ぶ全域木を見つけ，
その中で辺数最小のものを出力



すべての $S \subseteq V - K$ に対して，$K \cup S$ だけを結ぶ全域木を見つけ，
その中で辺数最小のものを出力

$|K|$ が大きいとき



すべての $S \subseteq V - K$ に対して，$K \cup S$ だけを結ぶ全域木を見つけ，その中で辺数最小のものを出力

結論：最小シュタイナー木問題のアルゴリズム

最小シュタイナー木問題は $O^*(2^{|V|-|K|})$ 時間で解ける

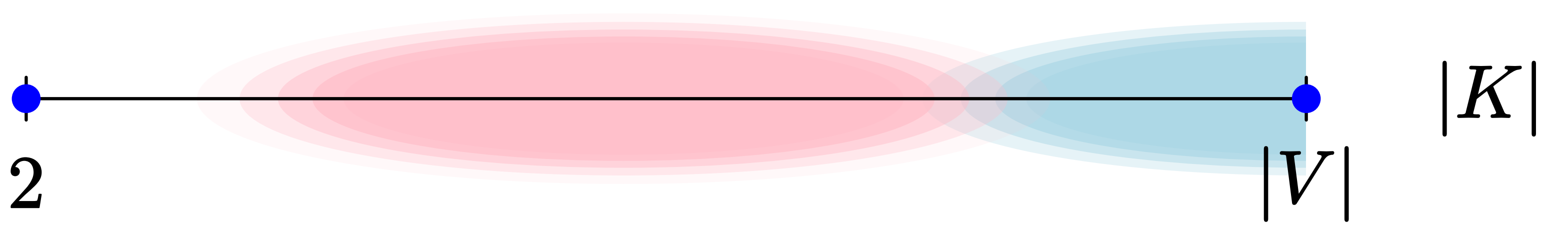
$|K|$ が小さいとき

動的計画法を用いて，次の定理を証明する

定理 (Dreyfus, Wagner ’72; Levin ’71)

最小シュタイナー木問題は $O^*(3^{|K|})$ 時間で解ける

よく Dreyfus-Wagner のアルゴリズム と呼ばれる



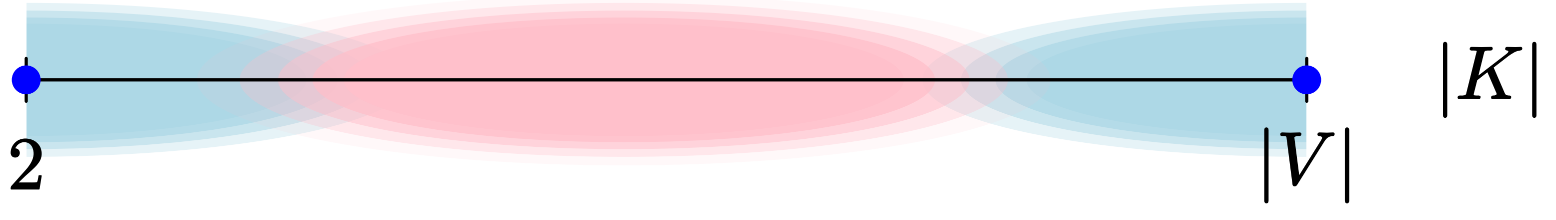
$|K|$ が小さいとき

動的計画法を用いて，次の定理を証明する

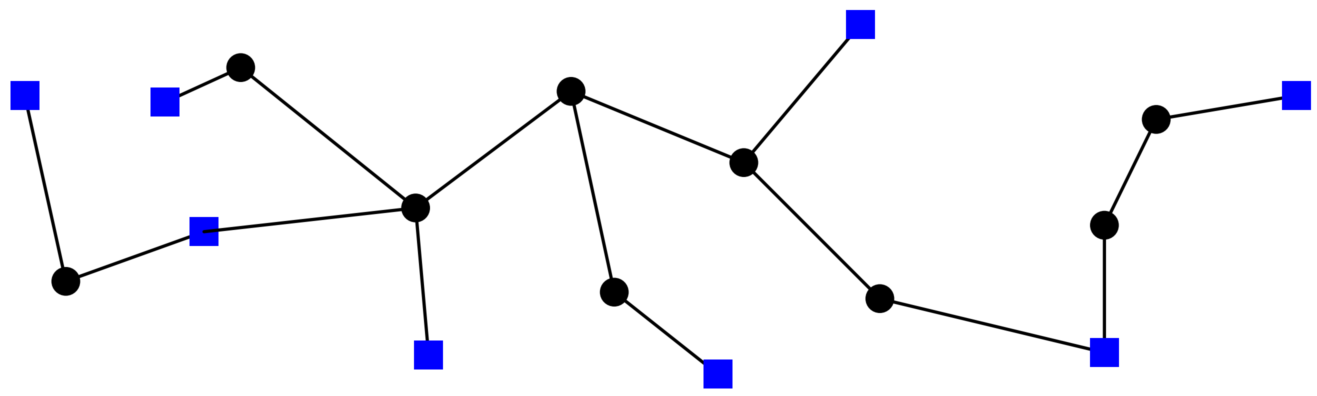
定理 (Dreyfus, Wagner '72; Levin '71)

最小シュタイナー木問題は $O^*(3^{|K|})$ 時間で解ける

よく Dreyfus-Wagner のアルゴリズム と呼ばれる



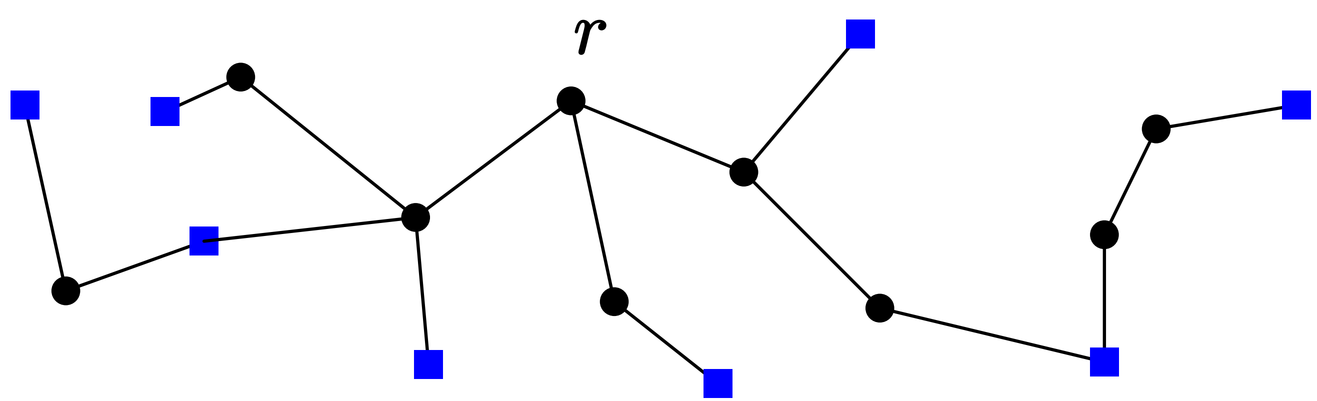
動的計画法：再帰的構造



動的計画法を考えるときの鍵

1. 最適解の持つ **再帰的な構造** を見出す
2. 上の構造から **状態** を適切に定義する
3. 状態の間の **再帰式** を立てる

頂点の 1 つを **根** (root) とする

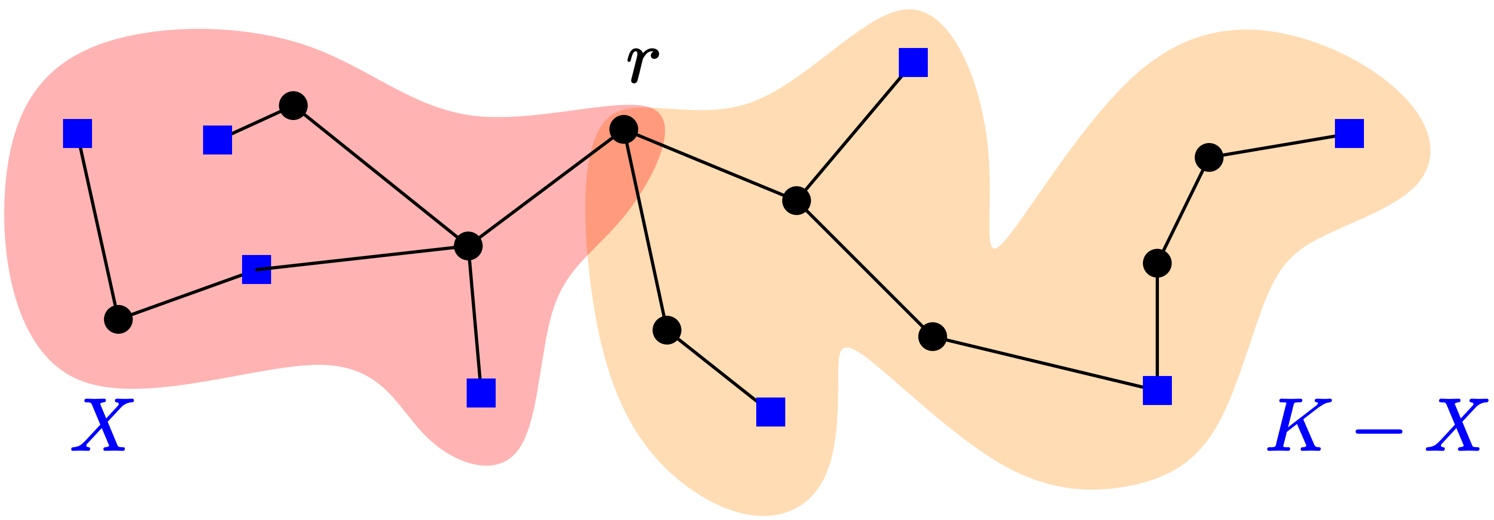


動的計画法を考えるときの鍵

1. 最適解の持つ **再帰的な構造** を見出す
2. 上の構造から **状態** を適切に定義する
3. 状態の間の **再帰式** を立てる

動的計画法：再帰的構造

頂点の 1 つを **根** (root) とする

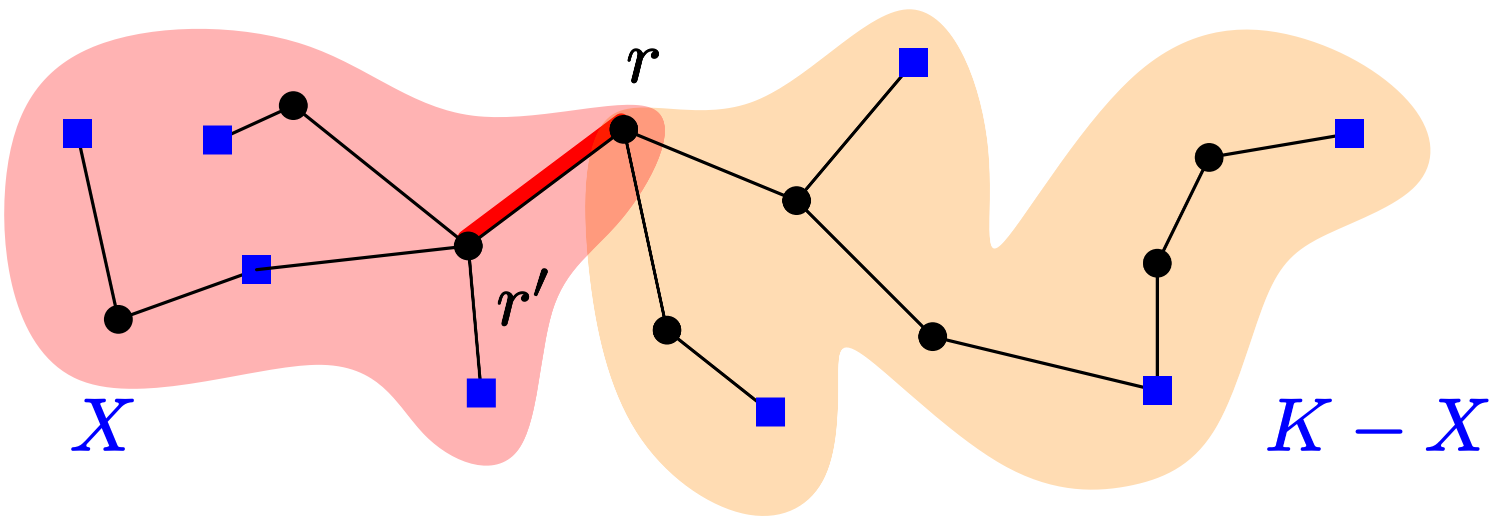


動的計画法を考えるときの鍵

1. 最適解の持つ **再帰的な構造** を見出す
2. 上の構造から **状態** を適切に定義する
3. 状態の間の **再帰式** を立てる

動的計画法：再帰的構造

頂点の 1 つを **根** (root) とする



動的計画法を考えるときの鍵

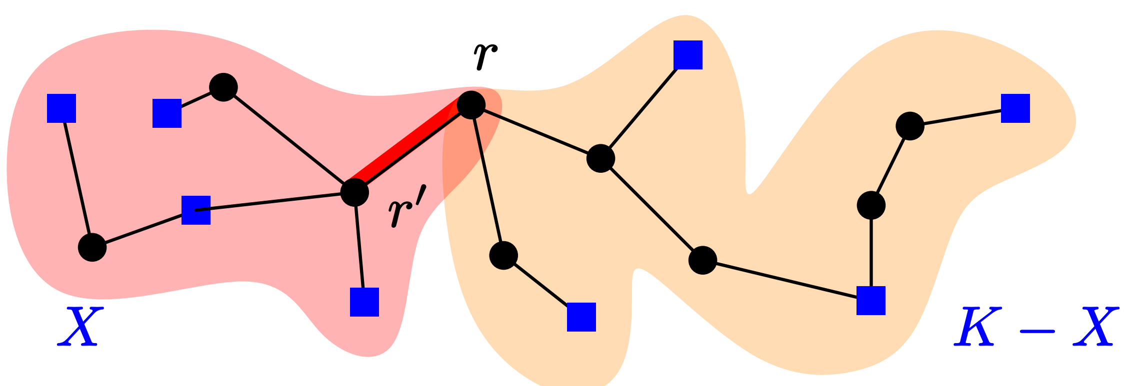
1. 最適解の持つ **再帰的な構造** を見出す
2. 上の構造から **状態** を適切に定義する
3. 状態の間の **再帰式** を立てる

動的計画法：状態と状態の値

$\boxed{\text{状態}}$ (X, r) ただし，$\emptyset \neq X \subseteq K, r \in V$

$\boxed{\text{状態の値}}$ $f(X, r) = X \cup \{r\}$ を端末集合とする
シュタイナー木の最小辺数

$\boxed{\text{最終的に出力する値}}$ $f(K, r)$ ($r \in K$ は任意)



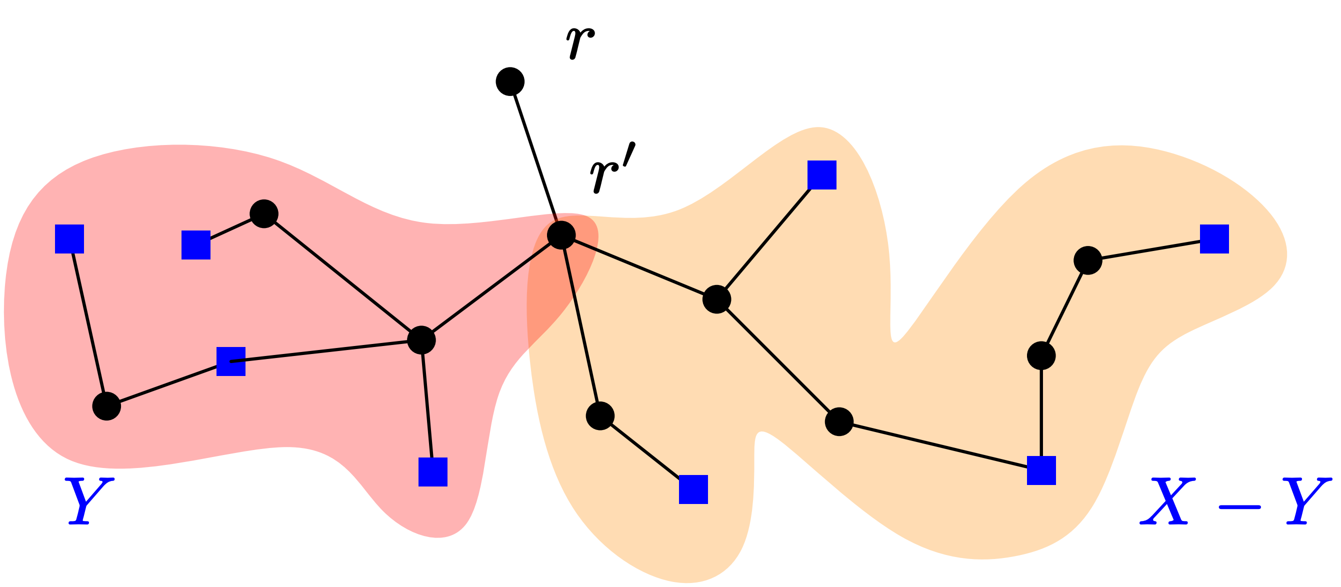
動的計画法：再帰式 (Bellman 方程式)

$$f(X,r) = \min \left\{ \underline{d(r,r')} + f(Y,r') + f(X-Y,r') \;\middle|\; \begin{array}{l} r' \in V, Y \subseteq X, \\ Y \neq \emptyset, X \end{array} \right\}$$

r から r' への最短路長

$|X| \geq 2$ のとき

$$f(\{x\},r) = d(x,r)$$



$\boxed{\text{状態の値}}$ $f(X,r) = X \cup \{r\}$ を端末集合とするシュタイナー木の最小辺数

動的計画法：アルゴリズム

アルゴリズム dreyfus-wagner($G = (V, E), K$)

1. $f(X, r) = \infty \; \forall \; X \subseteq K, X \neq \emptyset, r \in V$
2. $f(\{x\}, r) = d(x, r) \; \forall \; x \in K, r \in V$
3. $|X| \geq 2, r \in V$ に対して，$|X|$ が小さい方から順に $f(X, r)$ を再帰式に従って計算
4. 任意の $r \in K$ に対して，$f(K, r)$ を出力

状態の総数 $= (2^{|K|} - 1) \cdot n = O^*(2^{|K|})$

動的計画法：計算量の導出

アルゴリズム dreyfus-wagner($G = (V, E), K$)

1. $f(X, r) = \infty \; \forall \, X \subseteq K, X \neq \emptyset, r \in V$ $\quad O^*(2^{|K|})$
2. $f(\{x\}, r) = d(x, r) \; \forall \, x \in K, r \in V$ $\quad O^*(1)$
3. $|X| \geq 2, r \in V$ に対して，$|X|$ が小さい方から順に $f(X, r)$ を再帰式に従って計算
4. 任意の $r \in K$ に対して，$f(K, r)$ を出力

動的計画法：計算量の導出

アルゴリズム dreyfus-wagner$(G=(V,E),K)$

1. $f(X,r)=\infty\ \forall\ X\subseteq K, X\neq\emptyset, r\in V$ $O^*(2^{|K|})$
2. $f(\{x\},r)=d(x,r)\ \forall\ x\in K, r\in V$ $O^*(1)$
3. $|X|\geq 2, r\in V$ に対して，$|X|$ が小さい方から順に $f(X,r)$ を再帰式に従って計算
4. 任意の $r\in K$ に対して，$f(K,r)$ を出力

$$f(X,r)=\min\left\{d(r,r')+f(Y,r')+f(X-Y,r')\;\middle|\;\begin{array}{l} r'\in V, Y\subseteq X,\\ Y\neq\emptyset, X\end{array}\right\}$$

$$\sum_{\substack{X\subseteq K,|X|\geq 2\\ r\in V}}(2^{|X|}-2)\cdot|V|\leq|V|^2\sum_{X\subseteq K}2^{|X|}=|V|^2\sum_{i=0}^{|K|}\binom{|K|}{i}2^i=|V|^2 3^{|K|}$$

動的計画法：計算量の導出

アルゴリズム dreyfus-wagner($G=(V,E),K$)

1. $f(X,r)=\infty \; \forall\, X\subseteq K, X\neq\emptyset, r\in V$ $\quad O^*(2^{|K|})$
2. $f(\{x\},r)=d(x,r) \; \forall\, x\in K, r\in V$ $\quad O^*(1)$
3. $|X|\geq 2, r\in V$ に対して，$|X|$ が小さい方から順に $f(X,r)$ を再帰式に従って計算 $\quad O^*(3^{|K|})$
4. 任意の $r\in K$ に対して，$f(K,r)$ を出力

$$f(X,r)=\min\left\{ d(r,r')+f(Y,r')+f(X-Y,r') \;\middle|\; \begin{array}{l} r'\in V, Y\subseteq X,\\ Y\neq\emptyset, X \end{array} \right\}$$

$$\sum_{\substack{X\subseteq K,|X|\geq 2\\ r\in V}} (2^{|X|}-2)\cdot|V| \leq |V|^2\sum_{X\subseteq K} 2^{|X|} = |V|^2\sum_{i=0}^{|K|}\binom{|K|}{i}2^i = |V|^2 3^{|K|}$$

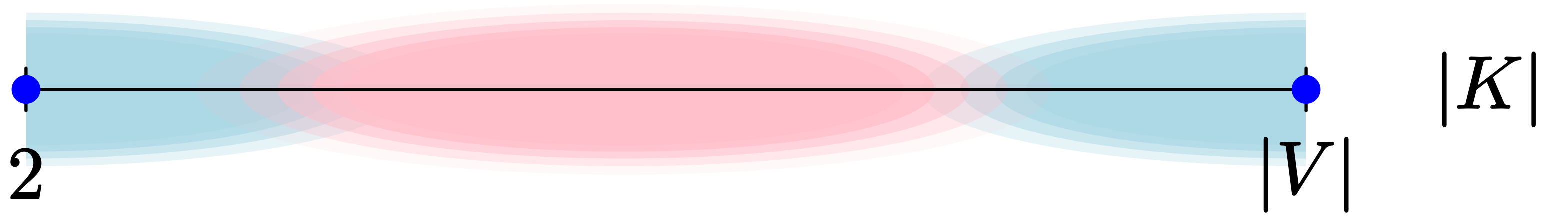
最小シュタイナー木問題：まとめ

定理：再掲 (Dreyfus, Wagner ’72; Levin ’71)

最小シュタイナー木問題は $O^*(3^{|K|})$ 時間で解ける

辺に長さがある場合も，同様のアルゴリズムによって

$O^*(3^{|K|})$ 時間で解ける



最小シュタイナー木問題：まとめ

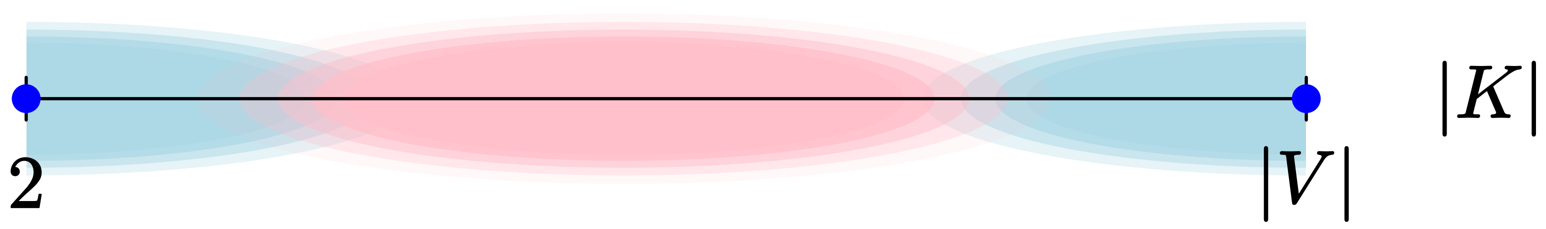
定理：再掲 (Dreyfus, Wagner ’72; Levin ’71)

最小シュタイナー木問題は $O^*(3^{|K|})$ 時間で解ける

辺に長さがある場合も，同様のアルゴリズムによって

$O^*(3^{|K|})$ 時間で解ける

予告：次回以降，$O^*(2^{|K|})$ 時間アルゴリズムを紹介する



まとめ

前回と今回

動的計画法 (dynamic programming) によるアルゴリズムの設計と解析

前回
- 巡回セールスマン問題
  $O^*(2^n)$ 時間
- 最小被覆問題
  $O^*(2^n)$ 時間

今回
- 彩色問題
  $O^*(2.4423^n)$ 時間
- 最小シュタイナー木問題
  $O^*(3^{|K|})$ 時間

動的計画法を考えるときの鍵

1. 最適解の持つ **再帰的な構造** を見出す
2. 上の構造から **状態** を適切に定義する
3. 状態の間の **再帰式** を立てる

次回の予告

次回と次々回

包除原理 (inclusion-exclusion principle) による
アルゴリズムの設計と解析

次回

- 包除原理の説明

次々回

- 包除原理による彩色問題の解法 ($O^*(2^n)$ 時間)