

離散最適化基礎論 (2025 年後学期)

高速指数時間アルゴリズム

第 4 回

分枝アルゴリズム (3) : 測度統治法

岡本 吉央 (電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 11 月 4 日

最終更新 : 2025 年 11 月 5 日 12:26

- | | |
|----------------------------|---------|
| 1. 高速指数時間アルゴリズムの考え方 | (10/7) |
| * 休み (体育祭) | (10/14) |
| 2. 分枝アルゴリズム : 基礎 | (10/21) |
| 3. 分枝アルゴリズム : 高速化 | (10/28) |
| 4. 分枝アルゴリズム : 測度統治法 | (11/4) |
| 5. 動的計画法 : 基礎 | (11/11) |
| 6. 動的計画法 : 例 | (11/18) |

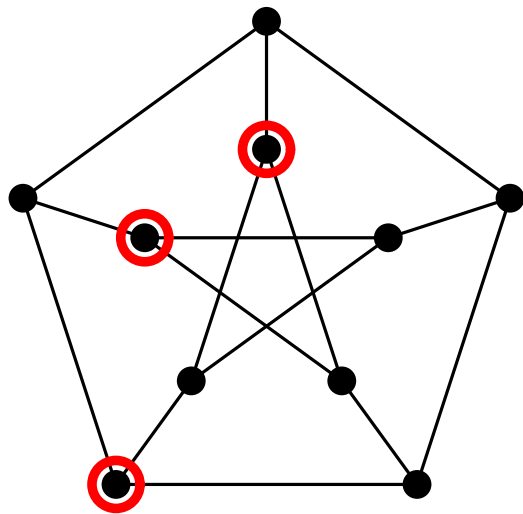
- | | |
|-----------------|---------|
| 7. 包除原理：原理 | (11/25) |
| * 休み (秋ターム試験) | (12/2) |
| 8. 包除原理：例 | (12/9) |
| 9. 部分集合たたみ込み：原理 | (12/16) |
| * 休み (出張) | (12/23) |
| * 休み (冬季休業) | (12/30) |
| 10. 部分集合たたみ込み：例 | (1/6) |
| 11. 指数時間仮説：原理 | (1/13) |
| 12. 指数時間仮説：証明 | (1/20) |
| 13. 最近の話題 | (1/27) |
| * 休み (修士論文発表会) | (2/3) |

1. **基本的なアイデア**
 2. 測度統治法：測度の変化と計算量の解析
 3. 測度統治法：パラメータの調整
-
- F.V. Fomin, F. Grandoni, D. Kratsch, A measure & conquer approach for the analysis of exact algorithms. J. ACM 56, Article No. 25, pp. 1–32, 2009.

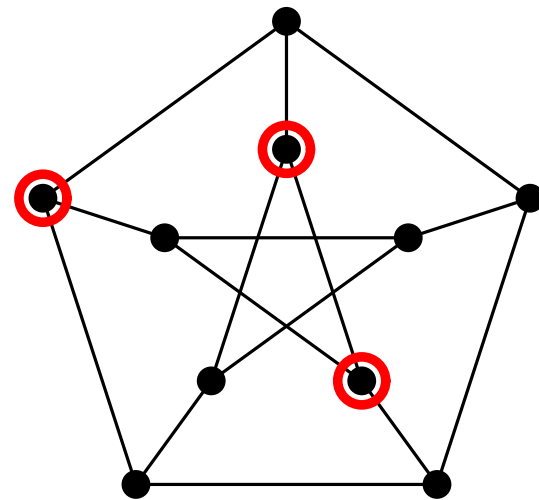
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：独立集合 (independent set)

G の **独立集合** とは, 頂点部分集合 $S \subseteq V$ で,
どの2頂点 $u, v \in S$ も隣接していないもの



独立集合である



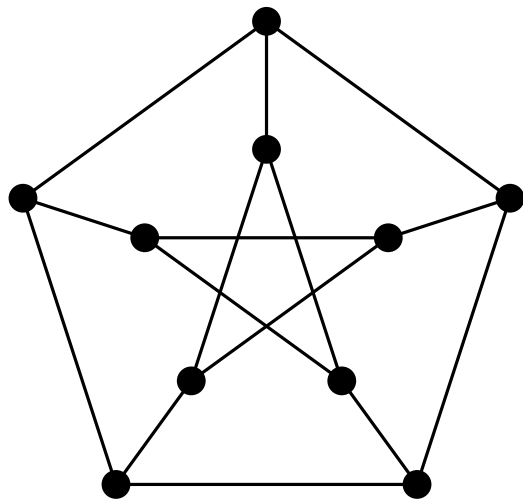
独立集合ではない

問題：最大独立集合問題

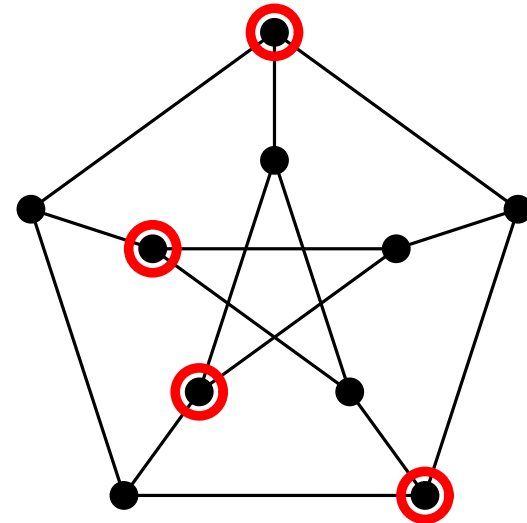
入力：無向グラフ $G = (V, E)$

出力： G の最大独立集合

要素数最大の独立集合



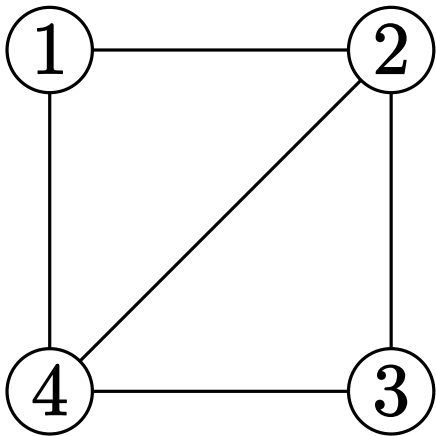
入力



出力

注：最大独立集合問題は NP 困難 (Karp '72)

定義 : 頂点 v の **次数** (degree) とは, v に隣接する頂点の数 $\deg(v)$ で表すことがある



- $\deg(1) = 2$
- $\deg(2) = 3$
- $\deg(3) = 2$
- $\deg(4) = 3$

このグラフにおける

- 最大次数 = 3
- 最小次数 = 2

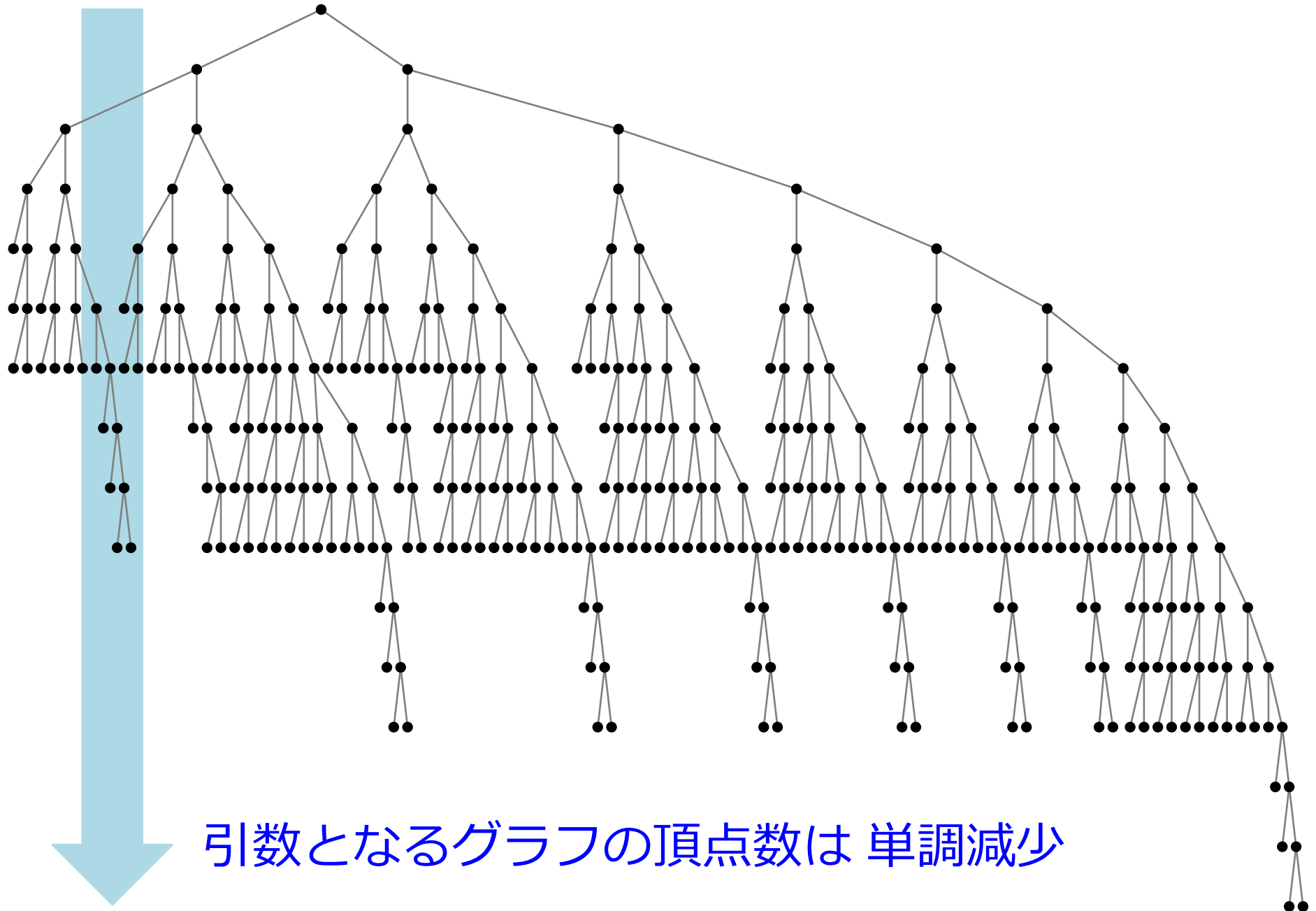
定義 : 頂点 v の **開近傍** $N(v)$ = 頂点 v の隣接頂点全体の集合
頂点 v の **閉近傍** $N[v] = N(v) \cup \{v\}$

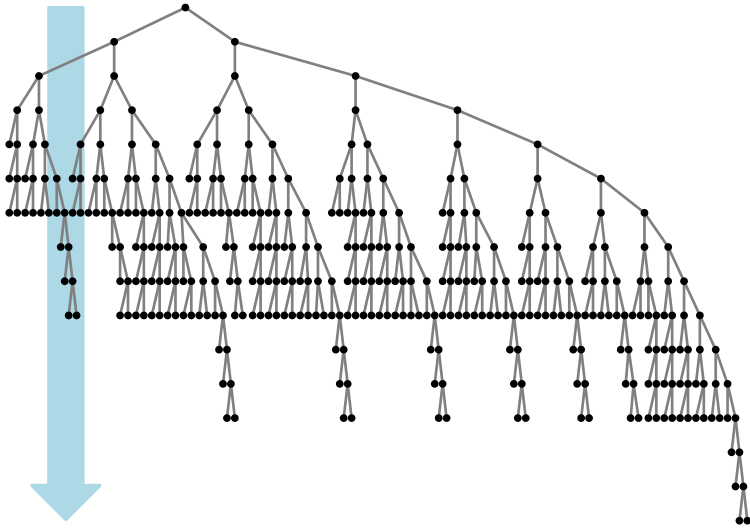
- $N(3) = \{2, 4\}, N[3] = \{2, 3, 4\}$

アルゴリズム $A''(G)$

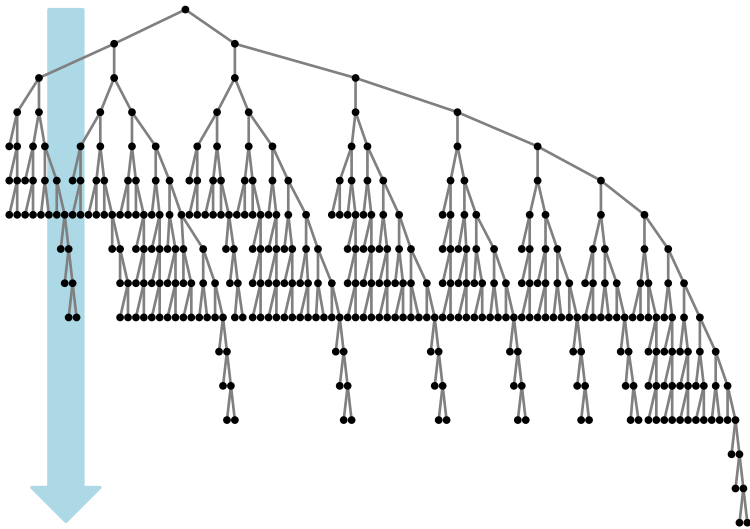
1. 優越規則と折畳規則を可能な限り G に適用
2. $v = G$ の次数最大の頂点
3. 次の2つの大きいほうを出力
 - $A''(G - N[v])$ の出力を復元したもの $\cup \{v\}$
 - $A''(G - M(v) - \{v\})$ の出力を復元したもの

計算量 : $O^*(1.3247^n)$ ($n = G$ の頂点数)





- 頂点数が減らなくても,「何か」が減ればよい
- 例えば,「次数 3 以上の頂点数」が減れば十分
(次数 0, 1, 2 の頂点は前処理で消えるので)
- $\leadsto$ 「減り方」をもっと細かく測ることはできないか？



- 頂点数が減らなくても, 「何か」が減ればよい
- 例えば, 「次数 3 以上の頂点数」が減れば十分
(次数 0, 1, 2 の頂点は前処理で消えるので)
- $\leadsto$ 「減り方」をもっと細かく測ることはできないか？

「何か」に求められる性質

- 「何か」 $\leq$ 頂点数
- 「何か」は必ず減る
- 「何か」 $= 0 \Rightarrow$ 問題が簡単に解ける

「何か」を次のように定義する

記法：測度

無向グラフ G に対して、次の量を導入する

$$\mu(G) = \sum_{i \geq 0} \mu_i n_i(G)$$

ここで、

- $n_i(G)$ は G における次数 i の頂点の総数
- $\mu_i \in [0, 1]$ は定数

観察： $\mu(G) \leq \sum_{i \geq 0} n_i(G) = G$ の頂点数

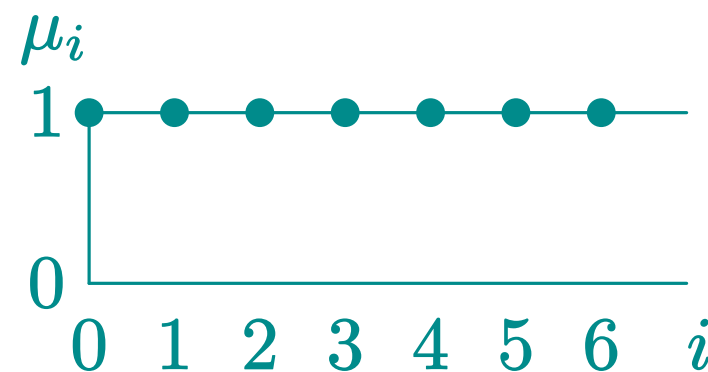
注意：測度論で扱う「測度」とは異なる (と思った方がよい)

記法 (復習) : $\mu(G) = \sum_{i \geq 0} \mu_i n_i(G)$

具体例 1 : $\mu_i = 1 \ \forall i \geq 0$

- このとき,

$$\mu(G) = \sum_{i \geq 0} n_i(G) = G \text{ の頂点数}$$

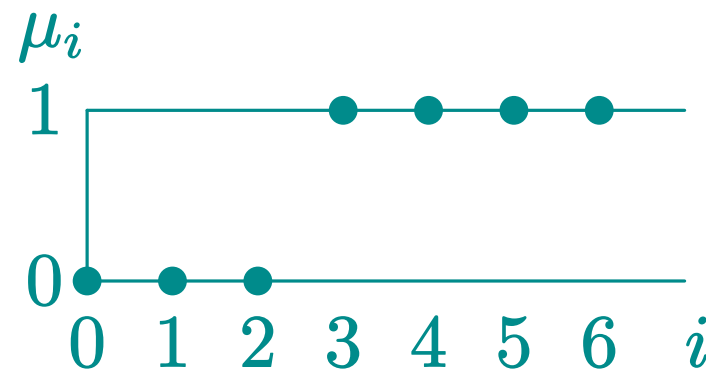
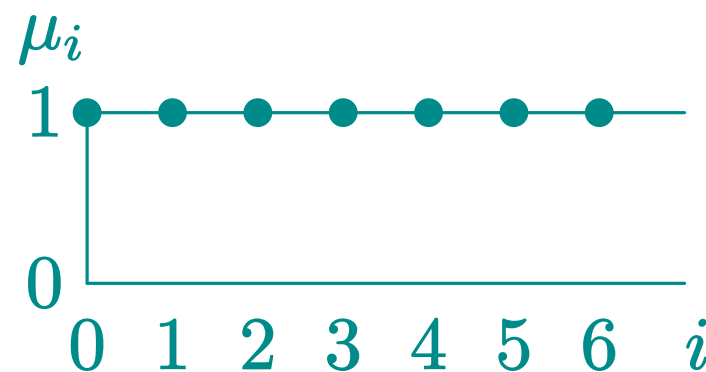


記法 (復習) : $\mu(G) = \sum_{i \geq 0} \mu_i n_i(G)$

具体例 1 : $\mu_i = 1 \ \forall i \geq 0$

- このとき,

$$\mu(G) = \sum_{i \geq 0} n_i(G) = G \text{ の頂点数}$$



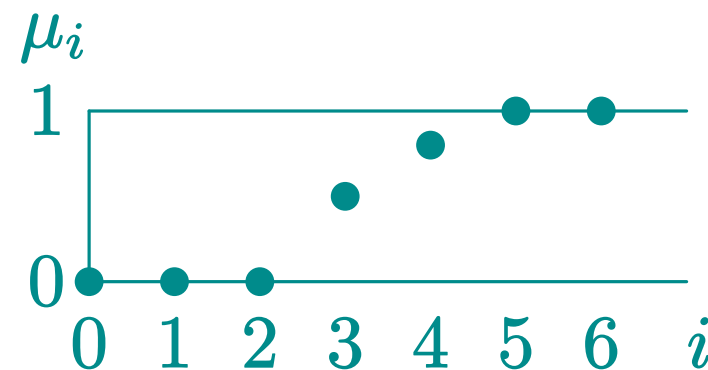
具体例 2 : $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0, \ \mu_i = 1 \ \forall i \geq 3$

- このとき,

$$\mu(G) = \sum_{i \geq 3} n_i(G) = G \text{ における次数 } 3 \text{ 以上の頂点数}$$

記法 (復習) : $\mu(G) = \sum_{i \geq 0} \mu_i n_i(G)$

具体例 3 : $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 = 1/2, \mu_4 = 4/5,$
 $\mu_5 = \mu_6 = \dots = 1$



- これを使って解析をすると, 計算量が改善する(!)

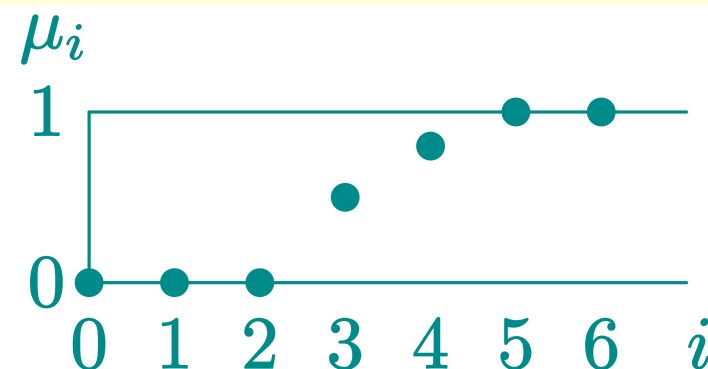
ポイント : 頂点数が減らなくても, μ は減るかもしれない

1. 基本的なアイデア
 2. **測度統治法：測度の変化と計算量の解析**
 3. 測度統治法：パラメータの調整
-

アルゴリズム $A''(G)$

← 次数が小さい頂点から

1. 優越規則と折畳規則を可能な限り G に適用
2. $v = G$ の次数最大の頂点
3. 次の2つの大きいほうを出力
 - $A''(G - N[v])$ の出力を復元したもの $\cup \{v\}$
 - $A''(G - M(v) - \{v\})$ の出力を復元したもの



証明すべきこと

- $\mu(G) \geq \mu(\text{優越規則}(G))$
- $\mu(G) \geq \mu(G - N[v])$
- $\mu(G) \geq \mu(\text{折畳規則}(G))$
- $\mu(G) \geq \mu(G - M(v) - \{v\})$

計算量の解析

- $T(\mu(G)) \leq T(\mu(G - N[v])) + T(\mu(G - M(v) - \{v\}))$

アルゴリズム $A''(G)$

← 次数が小さい頂点から

1. 優越規則と折畳規則を可能な限り G に適用
2. $v = G$ の次数最大の頂点
3. 次の2つの大きいほうを出力
 - $A''(G - N[v])$ の出力を復元したもの $\cup \{v\}$
 - $A''(G - M(v) - \{v\})$ の出力を復元したもの

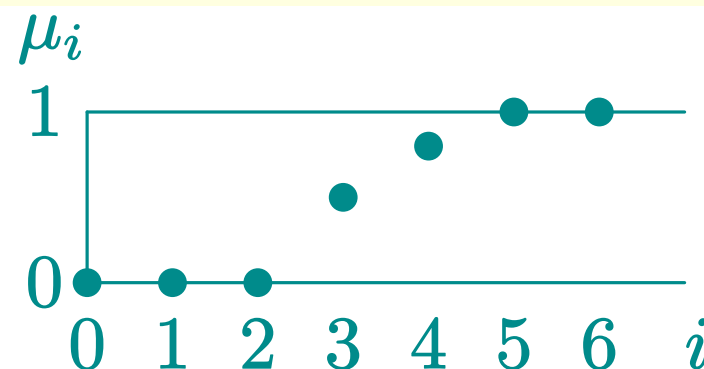
簡単

証明すべきこと

- $\mu(G) \geq \mu(\text{優越規則}(G))$
- $\mu(G) \geq \mu(G - N[v])$
- $\mu(G) \geq \mu(\text{折畳規則}(G))$
- $\mu(G) \geq \mu(G - M(v) - \{v\})$

計算量の解析

- $T(\mu(G)) \leq T(\mu(G - N[v])) + T(\mu(G - M(v) - \{v\}))$



アルゴリズム 折畳(G, v)

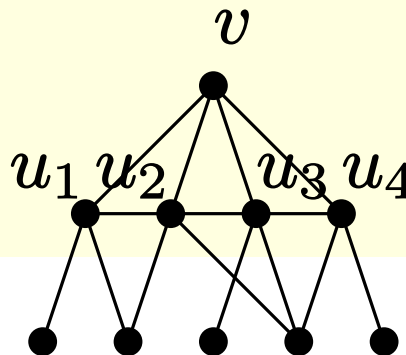
assert $N(v)$ の異なる 3 頂点の間に辺が 1 つはある
 $\deg(v) \leq 4$

1. $\{u_1, u_2, \dots, u_d\} = N(v)$
2. すべての非辺 $\{u_i, u_j\} \subseteq N(v)$ に対して
 - 頂点 $u_i u_j$ を追加
 - 頂点 $u_i u_j$ と $N(u_i) \cup N(u_j)$ の各頂点の間に辺を追加
3. 追加したすべての頂点間に辺を追加
4. $N[v]$ の頂点をすべて削除
5. できあがったグラフを出力

アルゴリズム 折畳(G, v)

assert $N(v)$ の異なる 3 頂点の間に辺が 1 つはある
 $\deg(v) \leq 4$

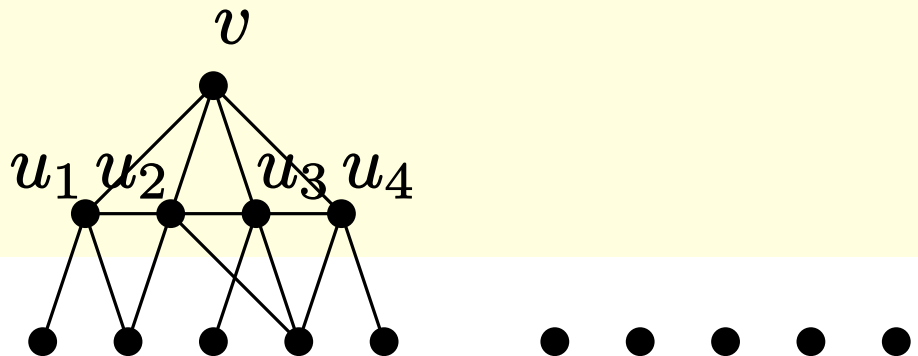
1. $\{u_1, u_2, \dots, u_d\} = N(v)$
2. すべての非辺 $\{u_i, u_j\} \subseteq N(v)$ に対して
 - 頂点 $u_i u_j$ を追加
 - 頂点 $u_i u_j$ と $N(u_i) \cup N(u_j)$ の各頂点の間に辺を追加
3. 追加したすべての頂点間に辺を追加
4. $N[v]$ の頂点をすべて削除
5. できあがったグラフを出力



アルゴリズム 折畳(G, v)

assert $N(v)$ の異なる 3 頂点の間に辺が 1 つはある
 $\deg(v) \leq 4$

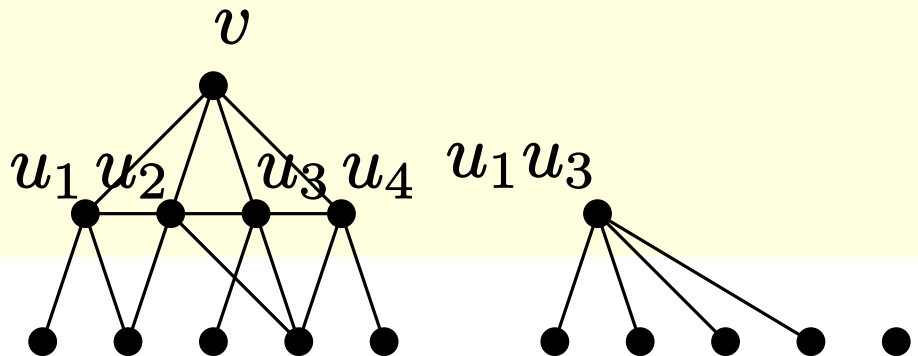
1. $\{u_1, u_2, \dots, u_d\} = N(v)$
2. すべての非辺 $\{u_i, u_j\} \subseteq N(v)$ に対して
 - 頂点 $u_i u_j$ を追加
 - 頂点 $u_i u_j$ と $N(u_i) \cup N(u_j)$ の各頂点の間に辺を追加
3. 追加したすべての頂点間に辺を追加
4. $N[v]$ の頂点をすべて削除
5. できあがったグラフを出力



アルゴリズム 折畳(G, v)

assert $N(v)$ の異なる 3 頂点の間に辺が 1 つはある
 $\deg(v) \leq 4$

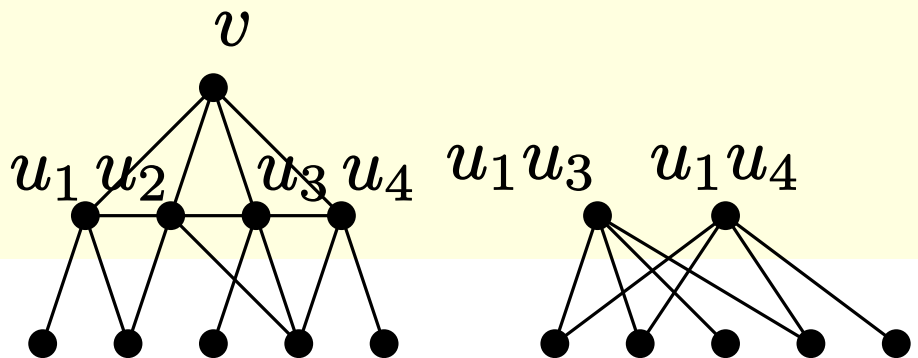
1. $\{u_1, u_2, \dots, u_d\} = N(v)$
2. すべての非辺 $\{u_i, u_j\} \subseteq N(v)$ に対して
 - 頂点 $u_i u_j$ を追加
 - 頂点 $u_i u_j$ と $N(u_i) \cup N(u_j)$ の各頂点の間に辺を追加
3. 追加したすべての頂点間に辺を追加
4. $N[v]$ の頂点をすべて削除
5. できあがったグラフを出力



アルゴリズム 折畳(G, v)

assert $N(v)$ の異なる 3 頂点の間に辺が 1 つはある
 $\deg(v) \leq 4$

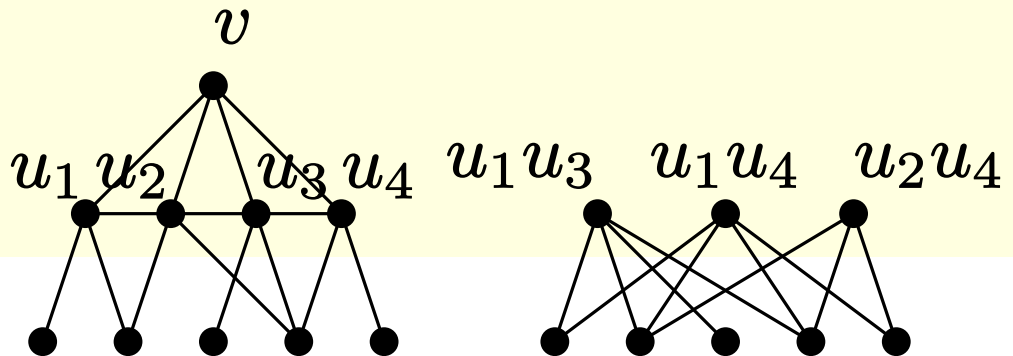
1. $\{u_1, u_2, \dots, u_d\} = N(v)$
2. すべての非辺 $\{u_i, u_j\} \subseteq N(v)$ に対して
 - 頂点 $u_i u_j$ を追加
 - 頂点 $u_i u_j$ と $N(u_i) \cup N(u_j)$ の各頂点の間に辺を追加
3. 追加したすべての頂点間に辺を追加
4. $N[v]$ の頂点をすべて削除
5. できあがったグラフを出力



アルゴリズム 折畳(G, v)

assert $N(v)$ の異なる 3 頂点の間に辺が 1 つはある
 $\deg(v) \leq 4$

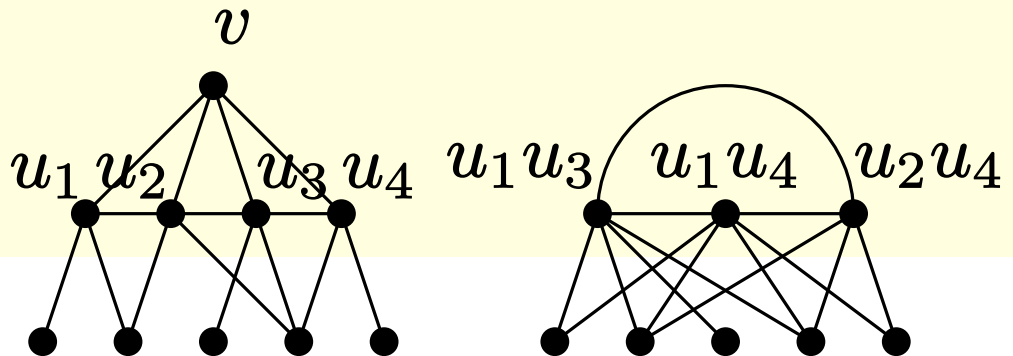
1. $\{u_1, u_2, \dots, u_d\} = N(v)$
2. すべての非辺 $\{u_i, u_j\} \subseteq N(v)$ に対して
 - 頂点 $u_i u_j$ を追加
 - 頂点 $u_i u_j$ と $N(u_i) \cup N(u_j)$ の各頂点の間に辺を追加
3. 追加したすべての頂点間に辺を追加
4. $N[v]$ の頂点をすべて削除
5. できあがったグラフを出力



アルゴリズム 折畳(G, v)

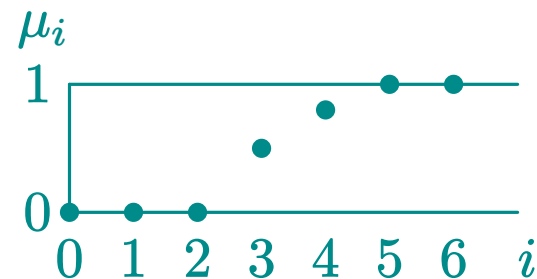
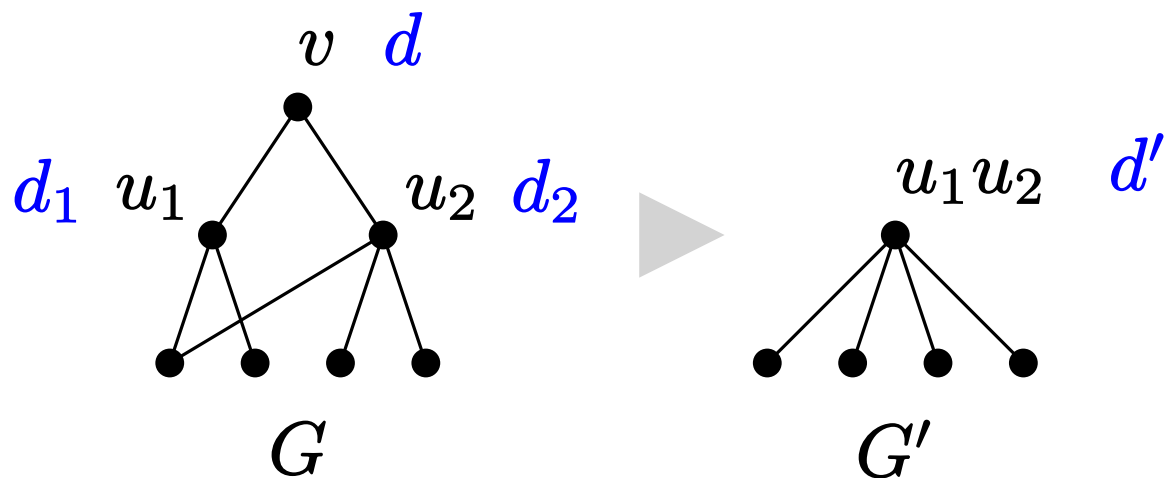
assert $N(v)$ の異なる 3 頂点の間に辺が 1 つはある
 $\deg(v) \leq 4$

1. $\{u_1, u_2, \dots, u_d\} = N(v)$
2. すべての非辺 $\{u_i, u_j\} \subseteq N(v)$ に対して
 - 頂点 $u_i u_j$ を追加
 - 頂点 $u_i u_j$ と $N(u_i) \cup N(u_j)$ の各頂点の間に辺を追加
3. 追加したすべての頂点間に辺を追加
4. $N[v]$ の頂点をすべて削除
5. できあがったグラフを出力



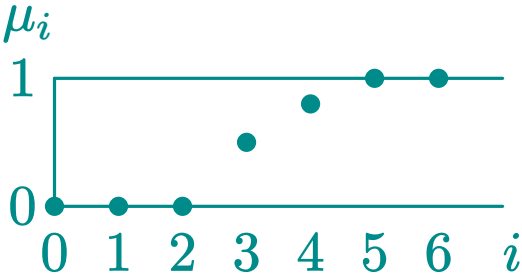
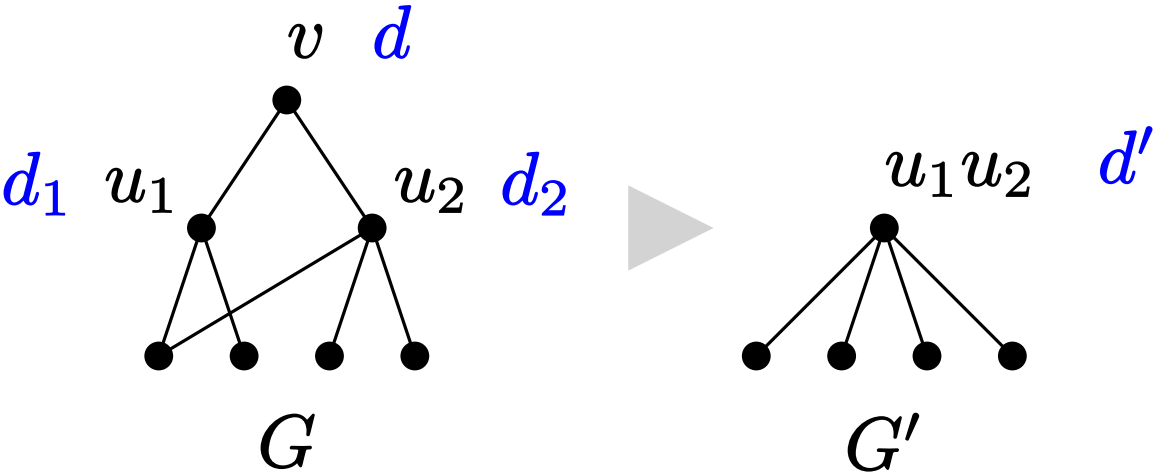
折畳操作 : $\deg(v) = 2$ のとき

17/45



$$\begin{aligned} \mu(G) - \mu(G') &\geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} - \mu_{d'} \\ &\geq \mu_2 + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} - \mu_{d_1+d_2-2} \end{aligned}$$

折畳操作 : $\deg(v) = 2$ のとき

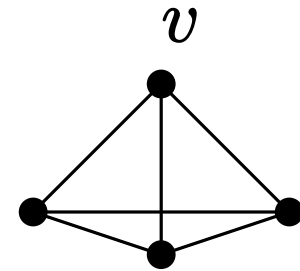
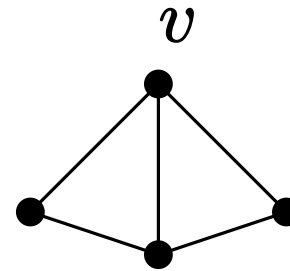
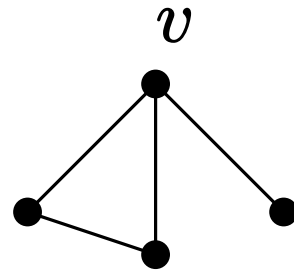
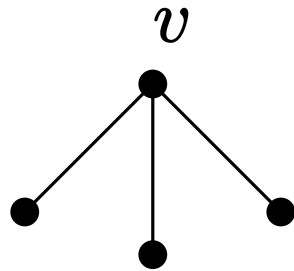


$$\begin{aligned}\mu(G) - \mu(G') &\geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} - \mu_{d'} \\ &\geq \mu_2 + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} - \mu_{d_1+d_2-2}\end{aligned}$$

d_1	d_2					
2	$k \geq 2$	μ_2	μ_2	μ_k	μ_k	≥ 0
3	3	μ_2	μ_3	μ_3	μ_4	≥ 0
3	4	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	≥ 0
4	4	μ_2	μ_4	μ_4	μ_6	≥ 0
ℓ	$k \geq 5$	μ_2	μ_ℓ	μ_k	$\mu_{\ell+k-2}$	≥ 0

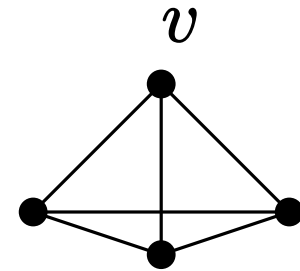
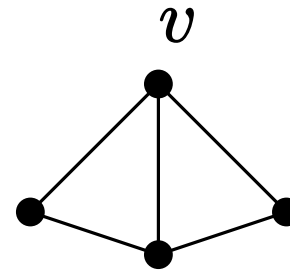
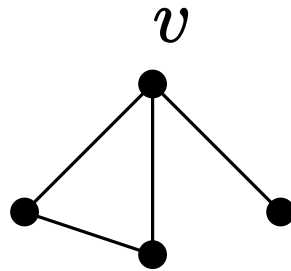
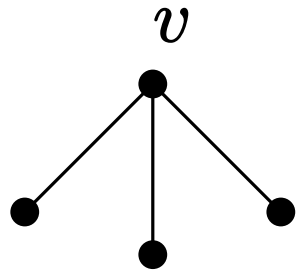
折畳操作 : $\deg(v) = 3$ のとき (準備)

18/45

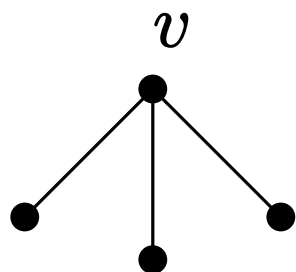


折畳操作 : $\deg(v) = 3$ のとき (準備)

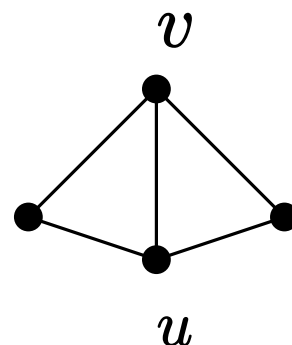
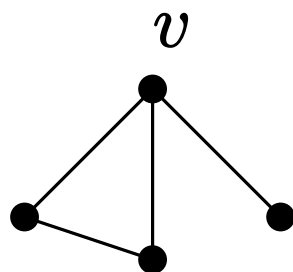
18/45



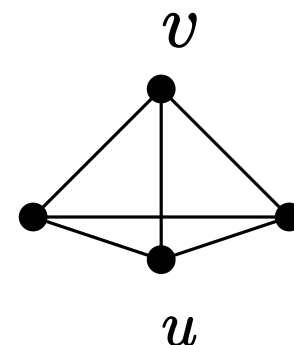
折畳 不可



折畳 不可



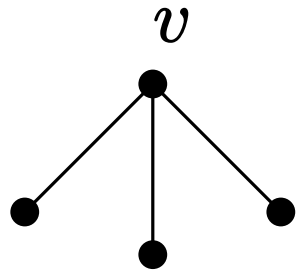
優越規則を
適用可能



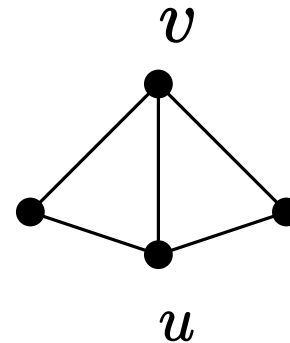
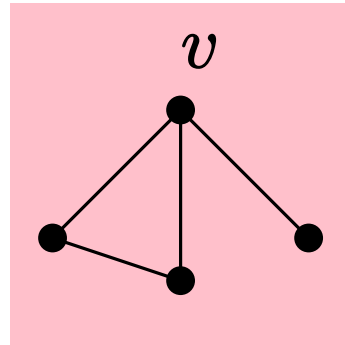
優越規則を
適用可能

アルゴリズム 優越規則(G)

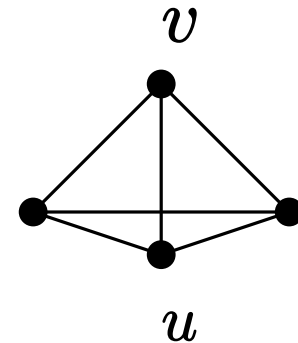
1. ある異なる頂点 u, v が $N[v] \subseteq N[u]$ を満たす限り反復
 - $G = G - \{u\}$
2. G を出力



折畳 不可



優越規則を
適用可能



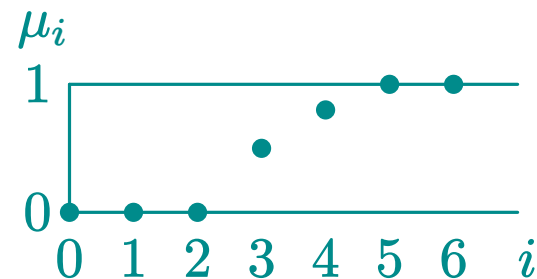
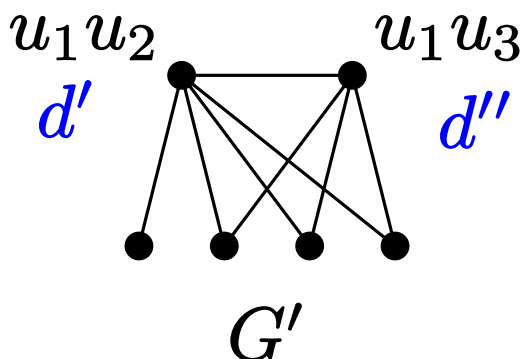
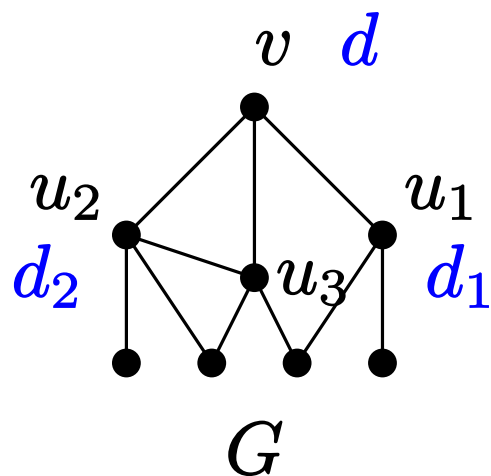
優越規則を
適用可能

アルゴリズム 優越規則(G)

1. ある異なる頂点 u, v が $N[v] \subseteq N[u]$ を満たす限り反復
 - $G = G - \{u\}$
2. G を出力

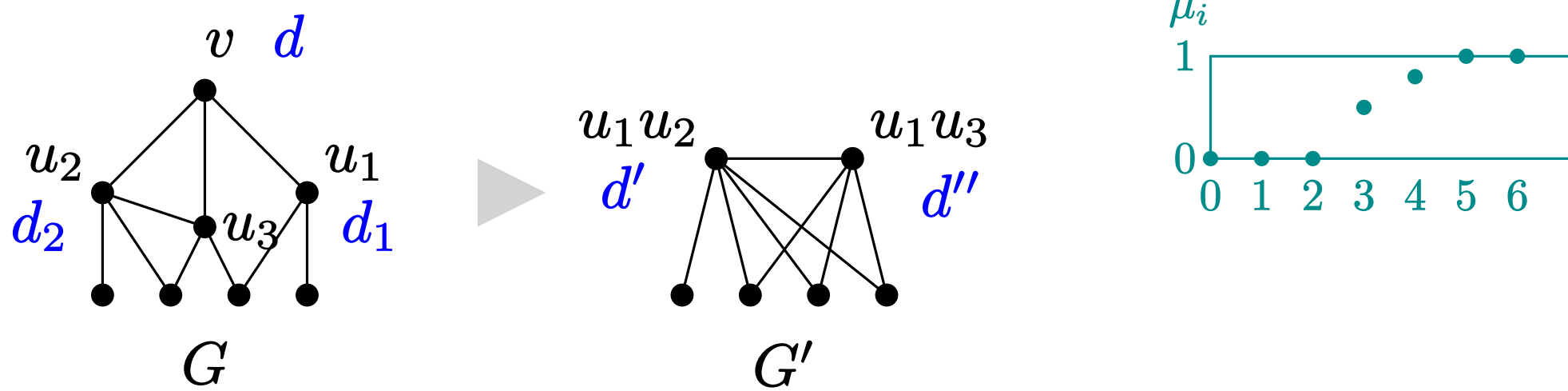
折畳操作 : $\deg(v) = 3$ のとき

19/45



$$\begin{aligned} \mu(G) - \mu(G') &\geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} - \mu_{d'} - \mu_{d''} \\ &\geq \mu_3 + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} - \mu_{d_1+d_2-2} - \mu_{d_1+d_3-2} \end{aligned}$$

折畳操作 : $\deg(v) = 3$ のとき

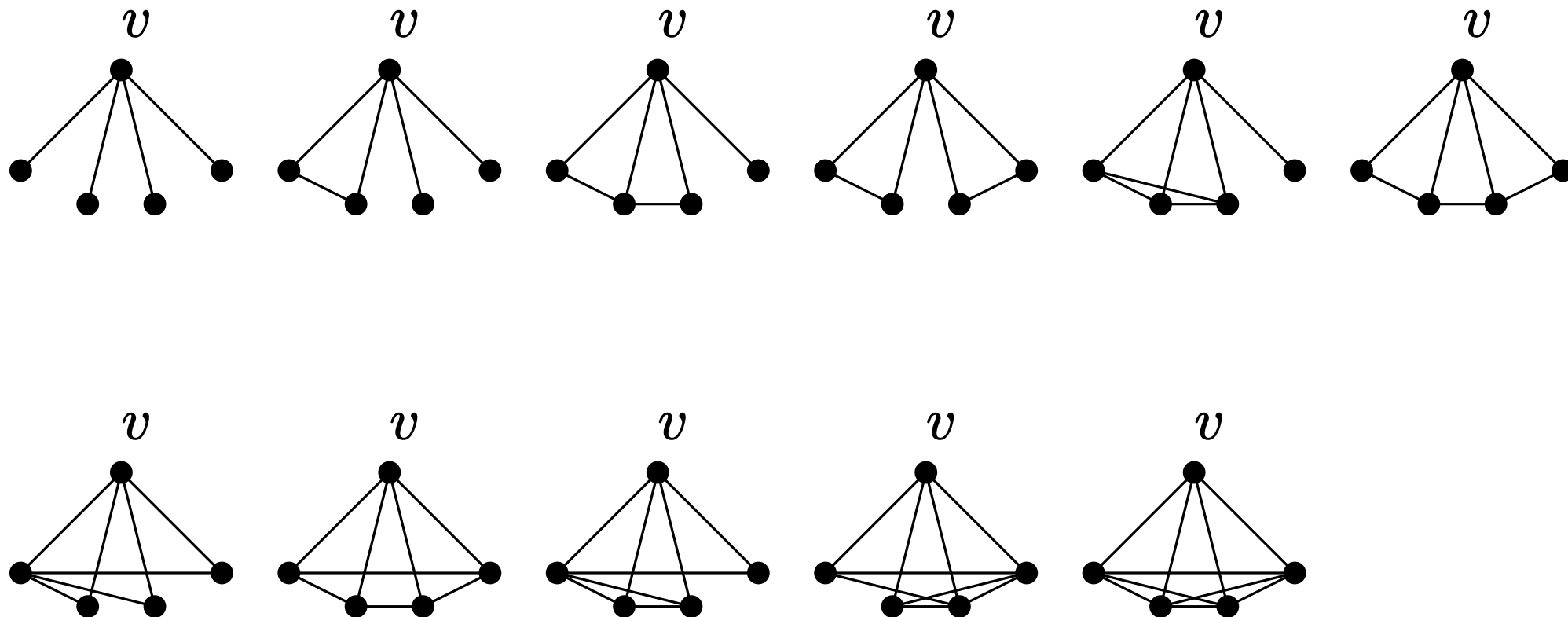


$$\begin{aligned} \mu(G) - \mu(G') &\geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} - \mu_{d'} - \mu_{d''} \\ &\geq \mu_3 + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} - \mu_{d_1+d_2-2} - \mu_{d_1+d_3-2} \end{aligned}$$

d_1	d_2	d_3	μ_3	μ_3	μ_3	μ_3	μ_4	μ_4	≥ 0
3	3	3	μ_3	μ_3	μ_3	μ_4	μ_4	≥ 0	
3	3	4	μ_3	μ_3	μ_3	μ_4	μ_4	μ_5	≥ 0
3	3	≥ 5	μ_3	μ_3	μ_3	$\mu_{\geq 5}$	μ_4	$\mu_{\geq 6}$	≥ 0
3	4	≥ 5	μ_3	μ_3	μ_4	$\mu_{\geq 5}$	μ_5	$\mu_{\geq 6}$	≥ 0
3	≥ 5	≥ 5	μ_3	μ_3	$\mu_{\geq 5}$	$\mu_{\geq 5}$	$\mu_{\geq 6}$	$\mu_{\geq 6}$	≥ 0
≥ 4	≥ 3	≥ 3	μ_3	$\mu_{\geq 4}$	$\mu_{\geq 3}$	$\mu_{\geq 3}$	$\mu_{\geq 5}$	$\mu_{\geq 5}$	≥ 0

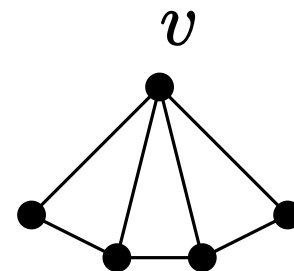
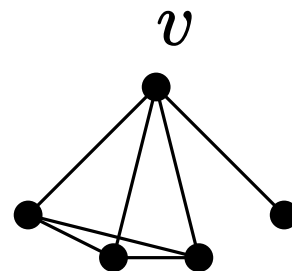
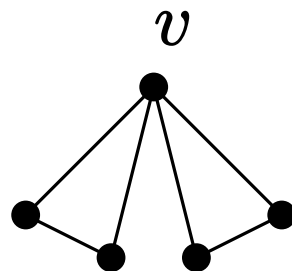
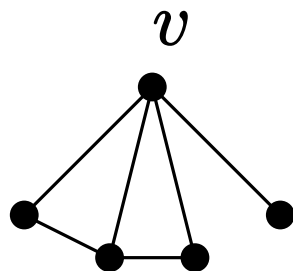
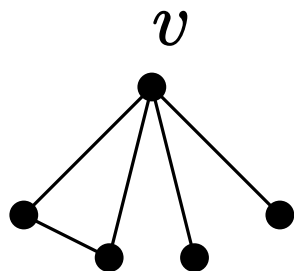
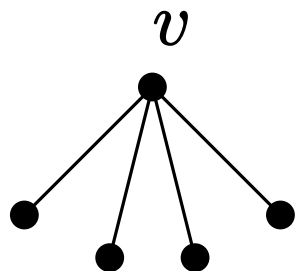
折畳操作： $\deg(v) = 4$ (準備)

20/45

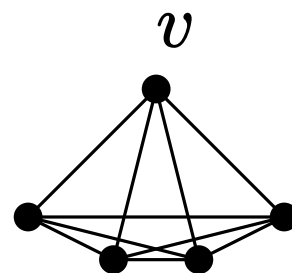
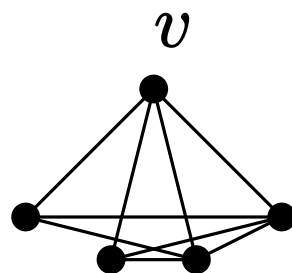
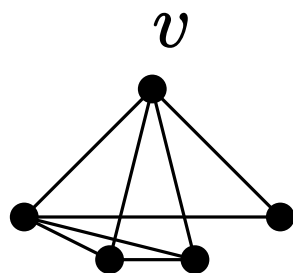
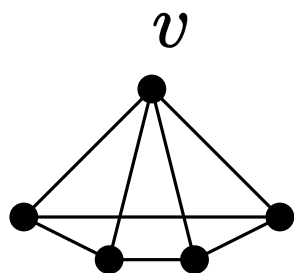
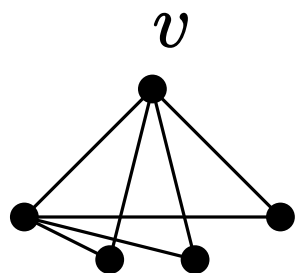


折疊操作： $\deg(v) = 4$ (準備)

20/45



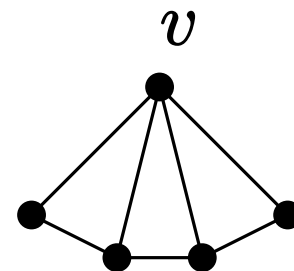
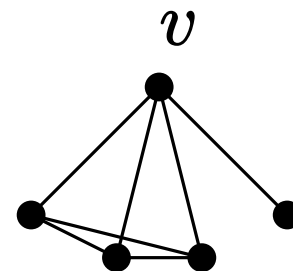
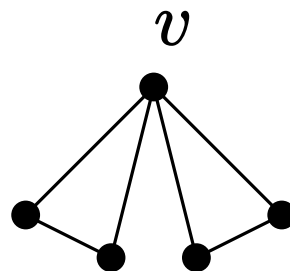
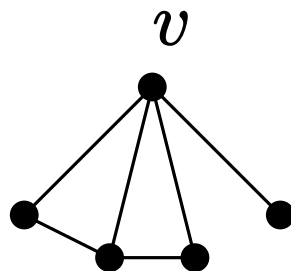
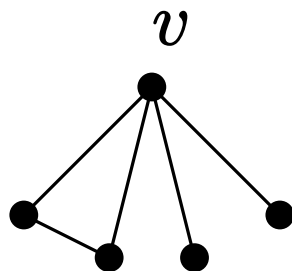
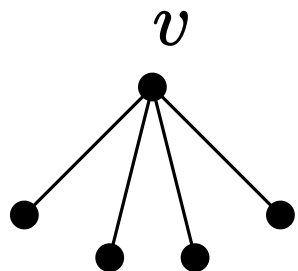
折疊 不可 折疊 不可 折疊 不可



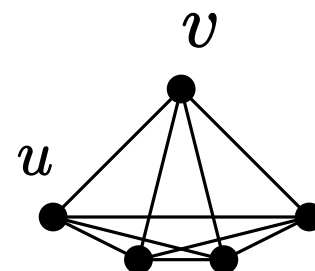
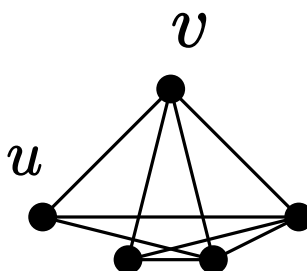
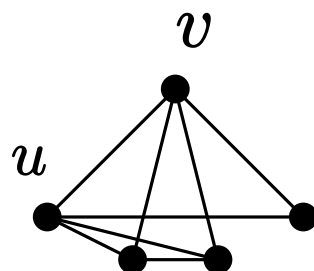
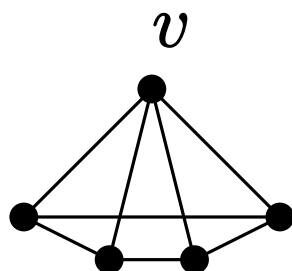
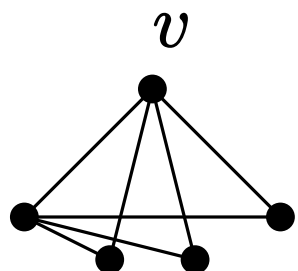
折疊 不可

折畳操作 : $\deg(v) = 4$ (準備)

20/45



折畳 不可 折畳 不可 折畳 不可



折畳 不可

優越規則

優越規則

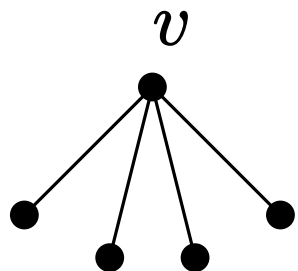
優越規則

アルゴリズム 優越規則(G)

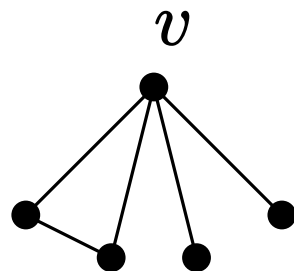
1. ある異なる頂点 u, v が $N[v] \subseteq N[u]$ を満たす限り反復
 - $G = G - \{u\}$
2. G を出力

折畳操作 : $\deg(v) = 4$ (準備)

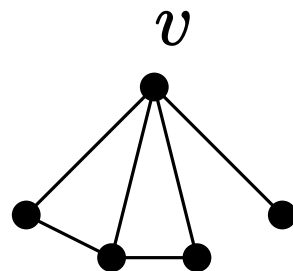
20/45



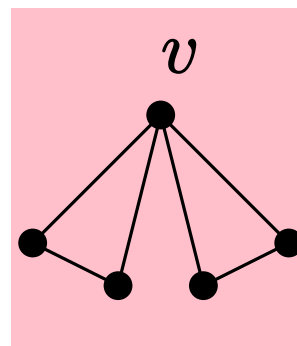
折畳 不可



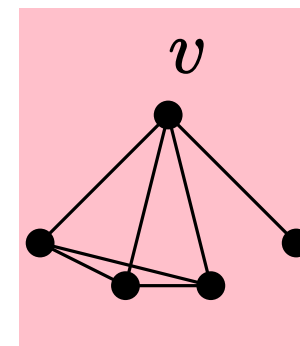
折畳 不可



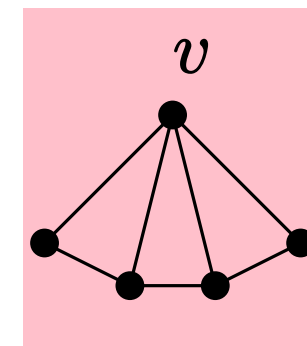
折畳 不可



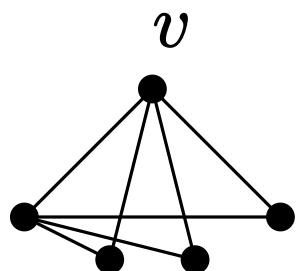
(1)



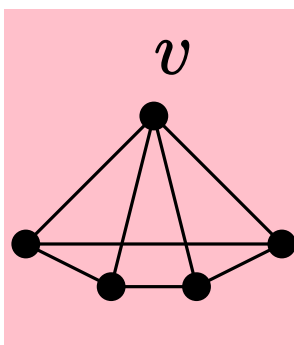
(2)



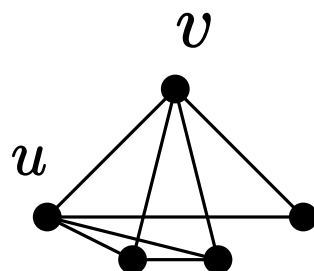
(3)



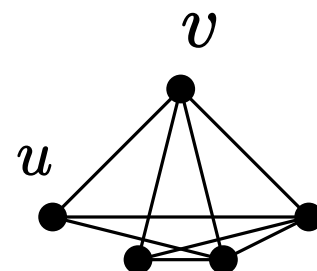
折畳 不可



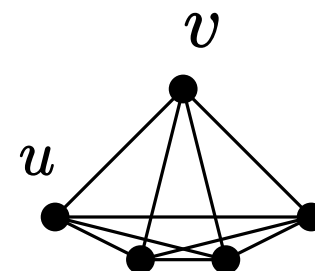
(4)



優越規則



優越規則



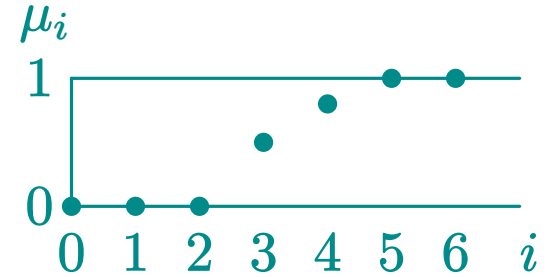
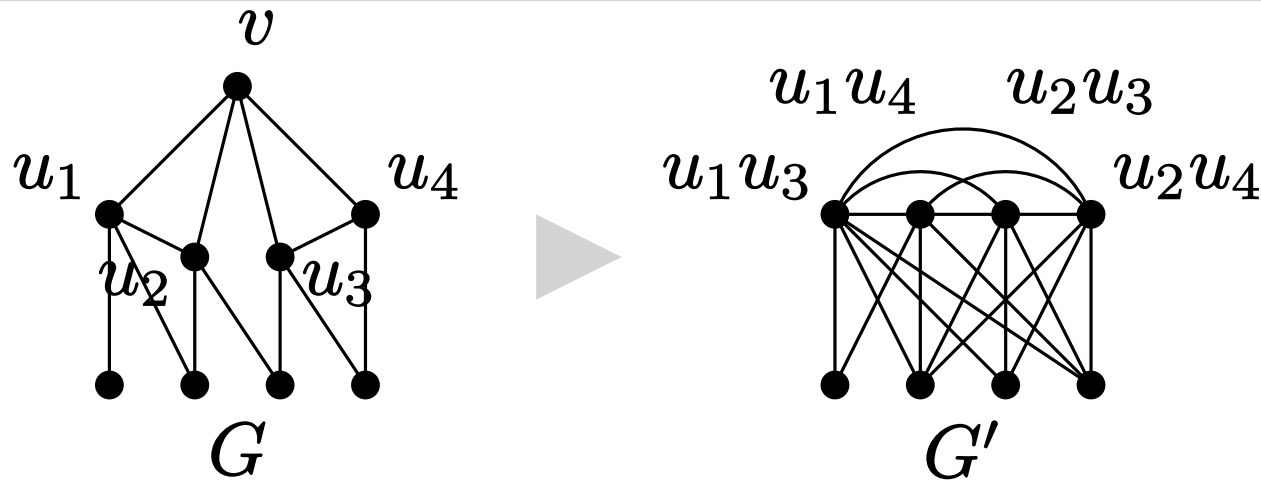
優越規則

アルゴリズム 優越規則(G)

1. ある異なる頂点 u, v が $N[v] \subseteq N[u]$ を満たす限り反復
 - $G = G - \{u\}$
2. G を出力

折置操作： $\deg(v) = 4$ (1)

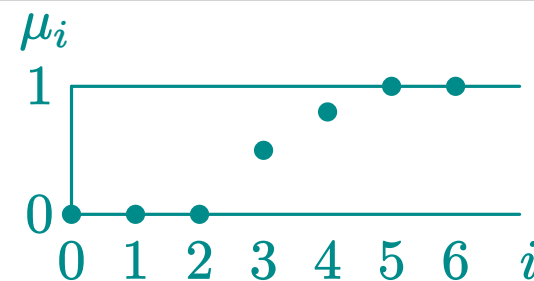
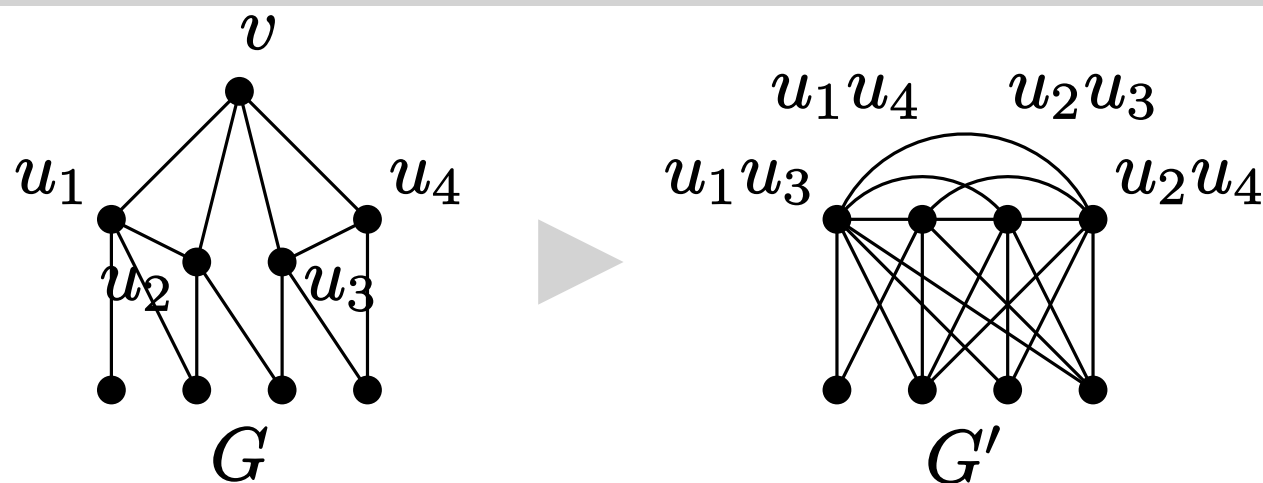
21/45



$$\begin{aligned} \mu(G) - \mu(G') &\geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} + \mu_{d_4} \\ &\quad - \mu_{d_1+d_3-1} - \mu_{d_1+d_4-1} - \mu_{d_2+d_3-1} - \mu_{d_2+d_4-1} \end{aligned}$$

折疊操作： $\deg(v) = 4$ (1)

21/45



$$\mu(G) - \mu(G')$$

$$\geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} + \mu_{d_4}$$

$$- \mu_{d_1+d_3-1} - \mu_{d_1+d_4-1} - \mu_{d_2+d_3-1} - \mu_{d_2+d_4-1}$$

$$\begin{matrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{matrix}$$

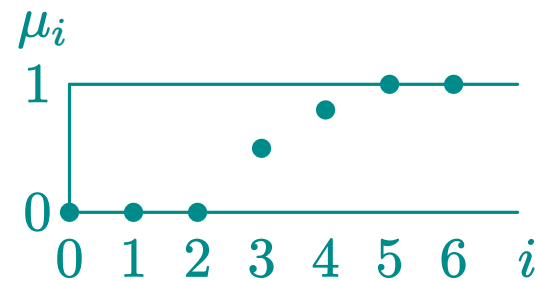
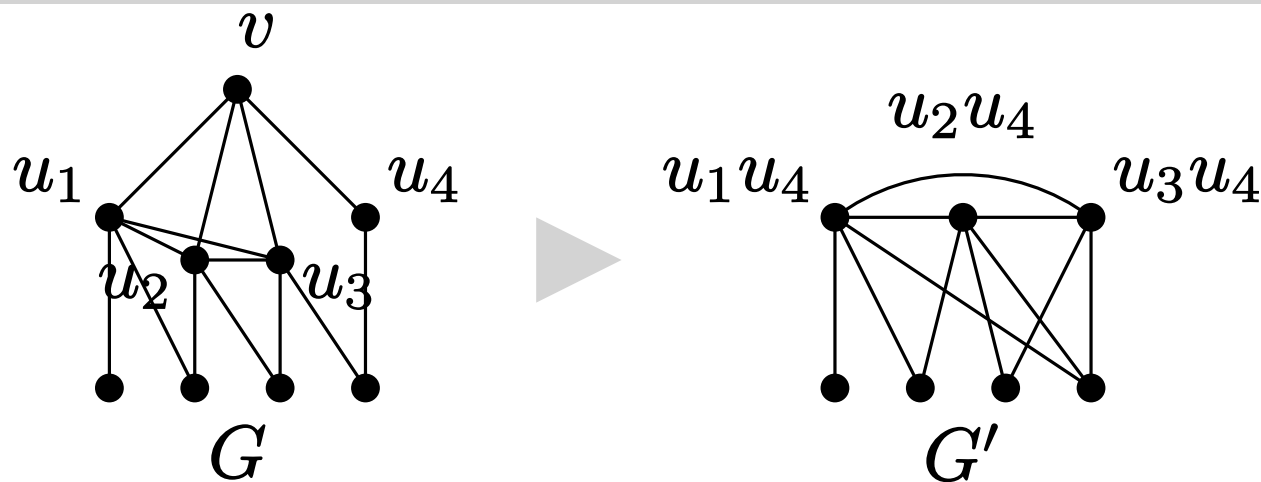
$$\begin{matrix} \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \mu_7 & \mu_7 & \mu_7 & \mu_7 \end{matrix}$$

$$\geq 0$$

折置操作：deg(v) = 4 (2)

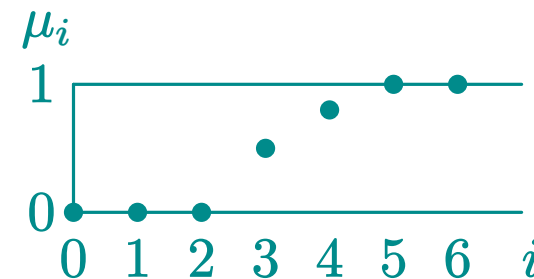
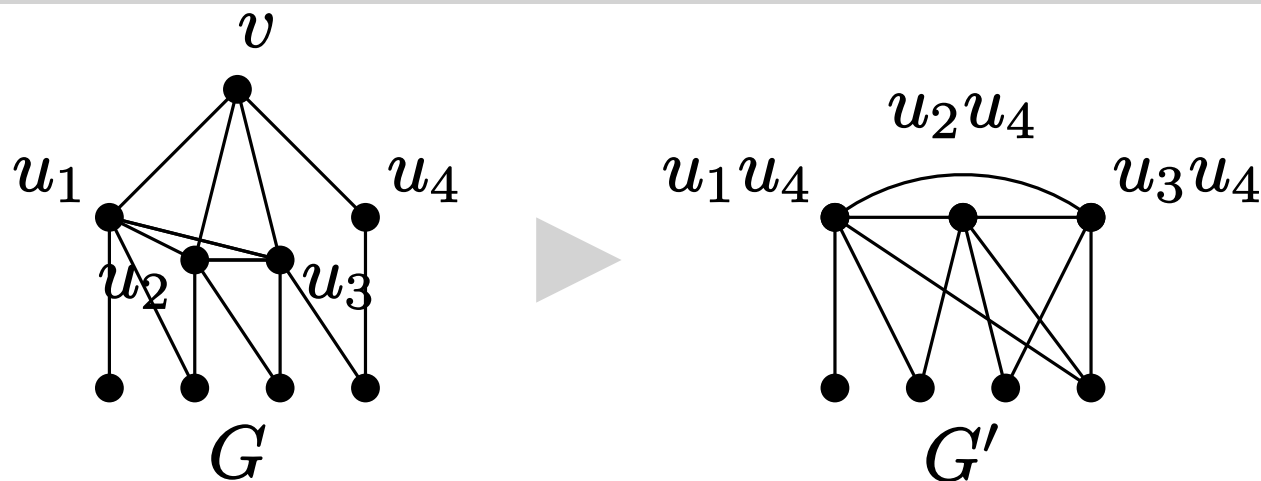
22/45



$$\begin{aligned} \mu(G) - \mu(G') \\ &\geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} + \mu_{d_4} \\ &\quad - \mu_{d_1+d_4-2} - \mu_{d_2+d_4-2} - \mu_{d_3+d_4-2} \end{aligned}$$

折疊操作：deg(v) = 4 (2)

22/45



$$\mu(G) - \mu(G')$$

$$\geq \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} + \mu_{d_4}$$

$$- \mu_{d_1+d_4-2} - \mu_{d_2+d_4-2} - \mu_{d_3+d_4-2}$$

$$\begin{matrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{matrix}$$

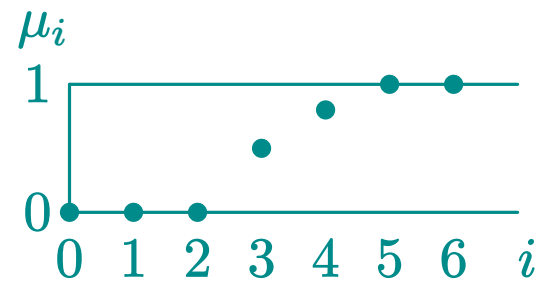
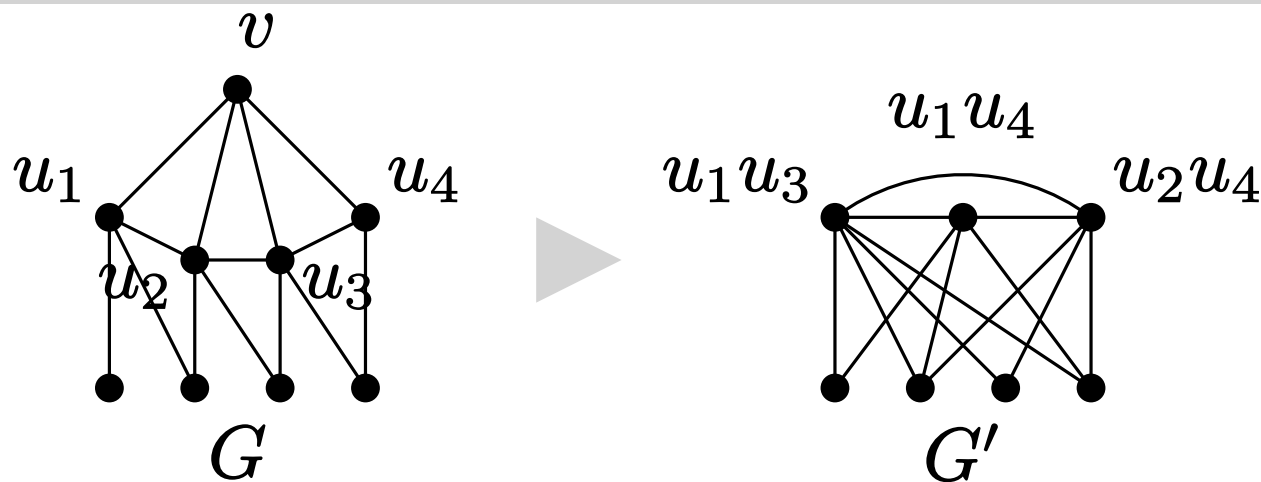
$$\begin{matrix} \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \mu_6 & \mu_6 & \mu_6 \end{matrix}$$

$$\geq 0$$

折置操作：deg(v) = 4 (3)

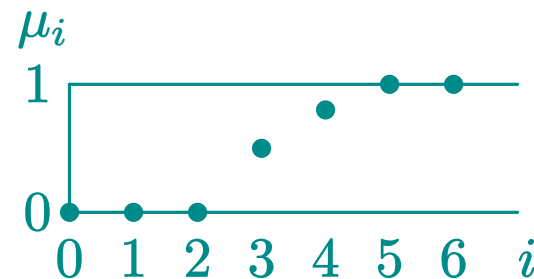
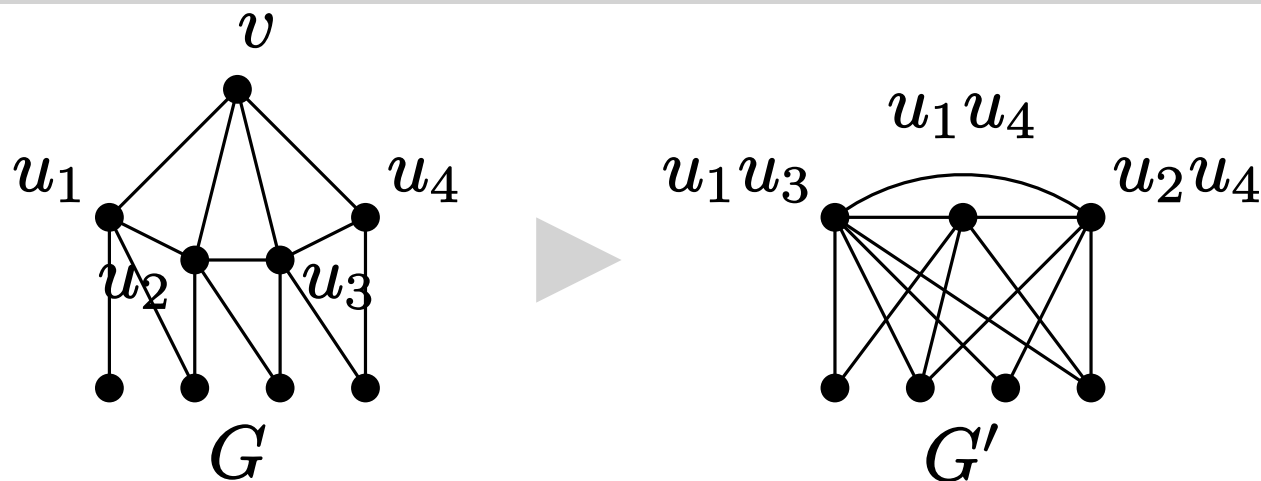
23/45



$$\begin{aligned}
 & \mu(G) - \mu(G') \\
 & \geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} + \mu_{d_4} \\
 & \quad - \mu_{d_1+d_3-3} - \mu_{d_1+d_4-2} - \mu_{d_2+d_4-3}
 \end{aligned}$$

折畳操作 : $\deg(v) = 4$ (3)

23/45



$$\begin{aligned} \mu(G) - \mu(G') \\ &\geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} + \mu_{d_4} \\ &\quad - \mu_{d_1+d_3-3} - \mu_{d_1+d_4-2} - \mu_{d_2+d_4-3} \end{aligned}$$

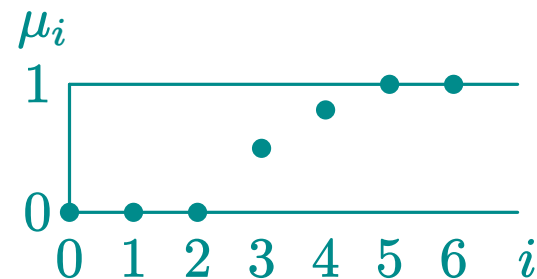
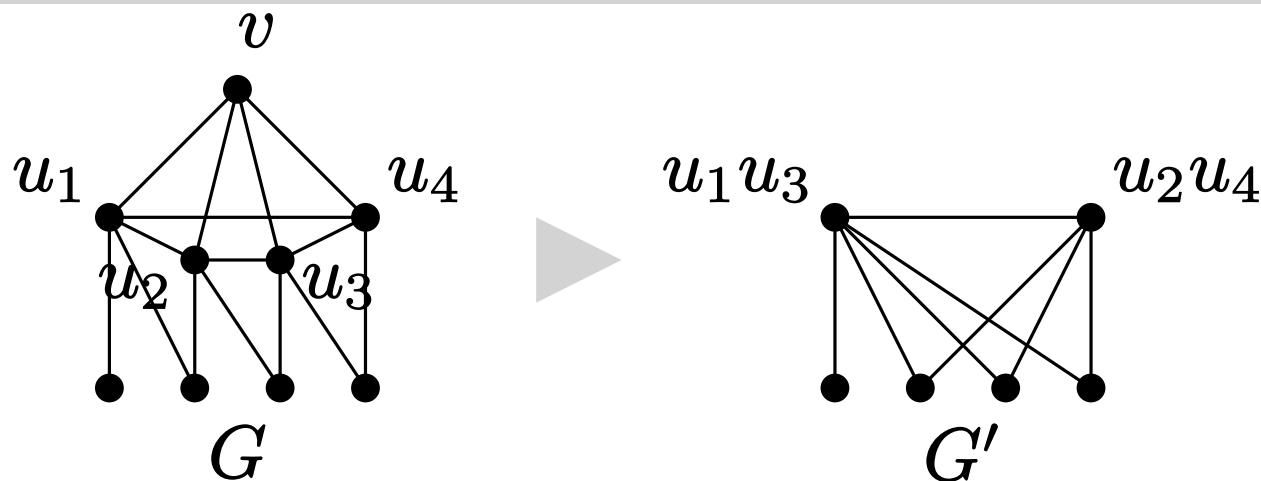
$$\begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 \\ \mu_5 & & \mu_6 & & \mu_5 \end{array}$$

$$\geq 0$$

折疊操作：deg(v) = 4 (4)

24/45

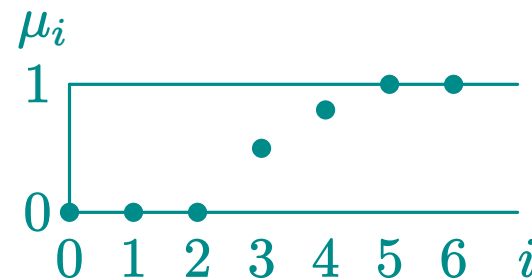
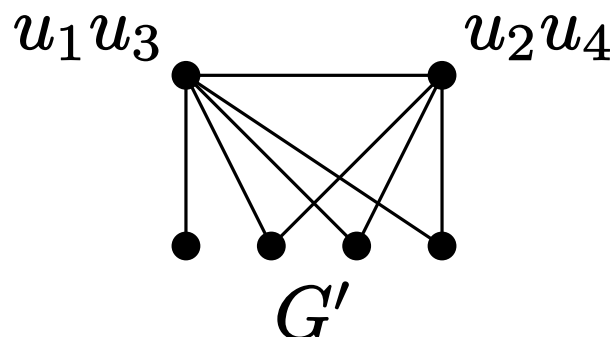
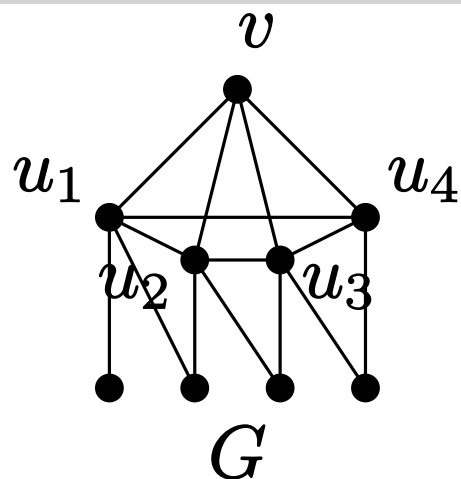


$$\mu(G) - \mu(G')$$

$$\geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} + \mu_{d_4} - \mu_{d_1+d_3-5} - \mu_{d_2+d_4-5}$$

折疊操作：deg(v) = 4 (4)

24/45



$$\mu(G) - \mu(G')$$

$$\geq \mu_d + \mu_{d_1} + \mu_{d_2} + \mu_{d_3} + \mu_{d_4} - \mu_{d_1+d_3-5} - \mu_{d_2+d_4-5}$$

$$\begin{matrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{matrix}$$

$$\mu_4$$

$$\mu_4$$

$$\mu_4$$

$$\mu_4$$

$$\mu_4$$

$$\mu_3$$

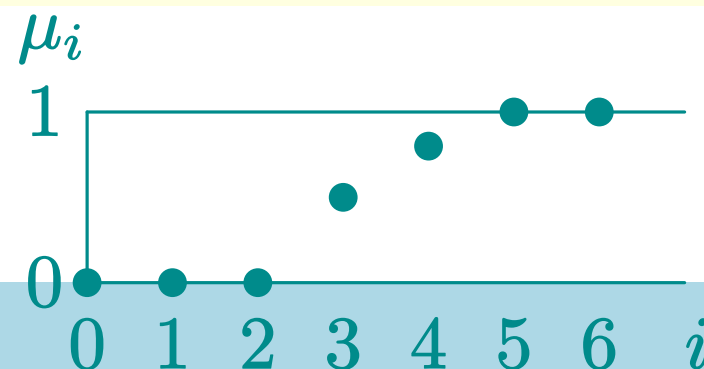
$$\mu_3$$

$$\geq 0$$

アルゴリズム $A''(G)$

← 次数が小さい頂点から

1. 優越規則と折畳規則を可能な限り G に適用
2. $v = G$ の次数最大の頂点
3. 次の2つの大きいほうを出力
 - $A''(G - N[v])$ の出力を復元したもの $\cup \{v\}$
 - $A''(G - M(v) - \{v\})$ の出力を復元したもの



証明すべきこと

- $\mu(G) \geq \mu(\text{優越規則}(G))$
- $\mu(G) \geq \mu(G - N[v])$
- $\mu(G) \geq \mu(\text{折畳規則}(G))$
- $\mu(G) \geq \mu(G - M(v) - \{v\})$

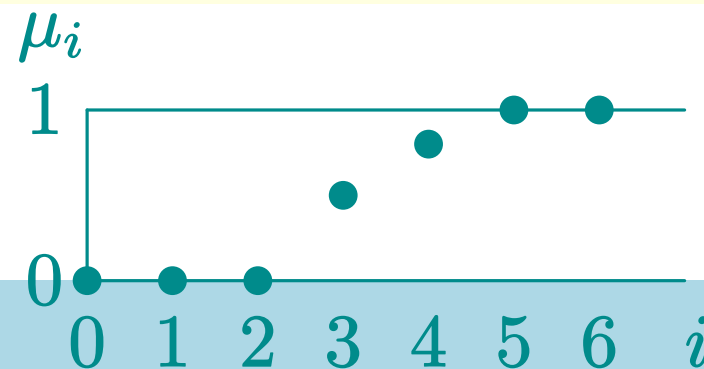
計算量の解析

- $T(\mu(G)) \leq T(\mu(G - N[v])) + T(\mu(G - M(v) - \{v\}))$

アルゴリズム $A''(G)$

← 次数が小さい頂点から

1. 優越規則と折畳規則を可能な限り G に適用
2. $v = G$ の次数最大の頂点
3. 次の2つの大きいほうを出力
 - $A''(G - N[v])$ の出力を復元したもの $\cup \{v\}$
 - $A''(G - M(v) - \{v\})$ の出力を復元したもの



証明すべきこと

- $\mu(G) \geq \mu(\text{優越規則}(G))$
- $\mu(G) \geq \mu(G - N[v])$
- $\mu(G) \geq \mu(\text{折畳規則}(G))$
- $\mu(G) \geq \mu(G - M(v) - \{v\})$

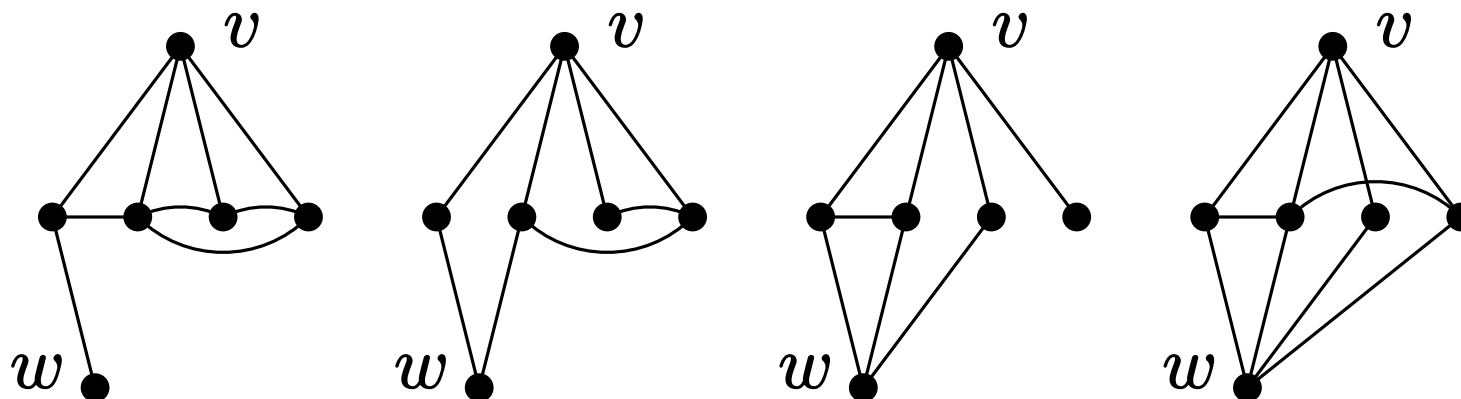
計算量の解析

- $T(\mu(G)) \leq T(\mu(G - N[v])) + T(\mu(G - M(v) - \{v\}))$

無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $v, w \in V$, $\{v, w\} \notin E$

定義：鏡像 (mirror)

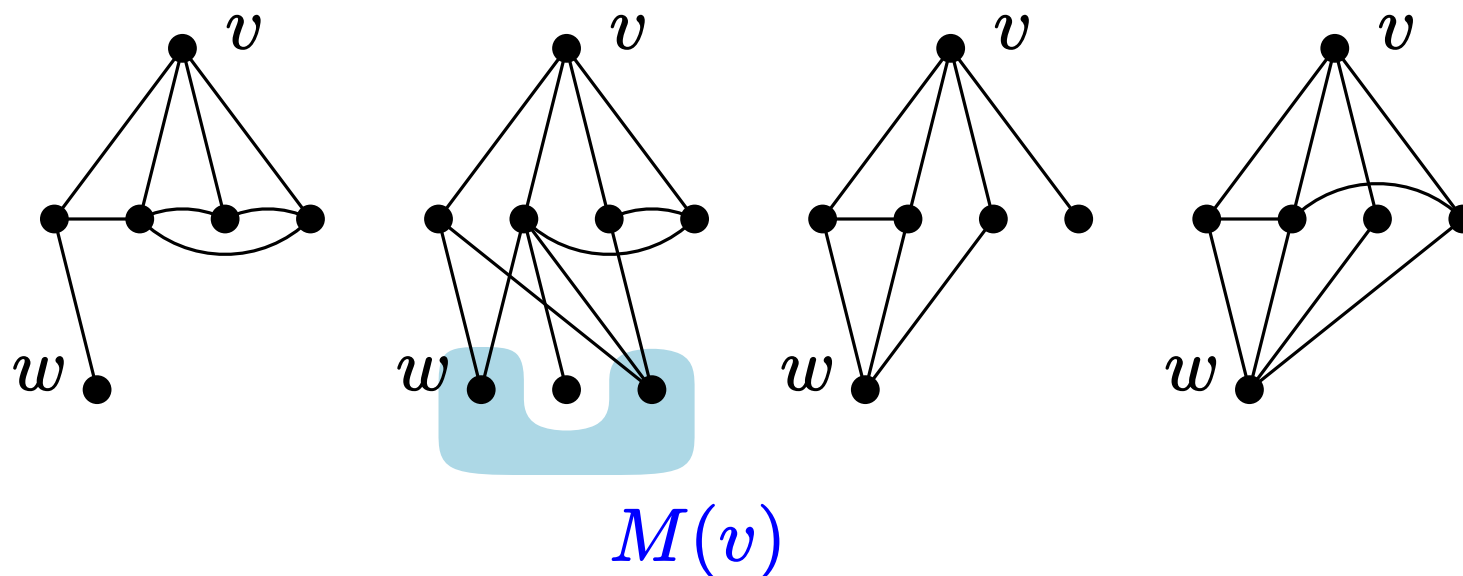
w が v の **鏡像** であるとは, $N(v) \cap N(w) \neq \emptyset$ で $N(v) - N(w)$ の任意の 2 頂点が隣接していること



無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $v, w \in V$, $\{v, w\} \notin E$

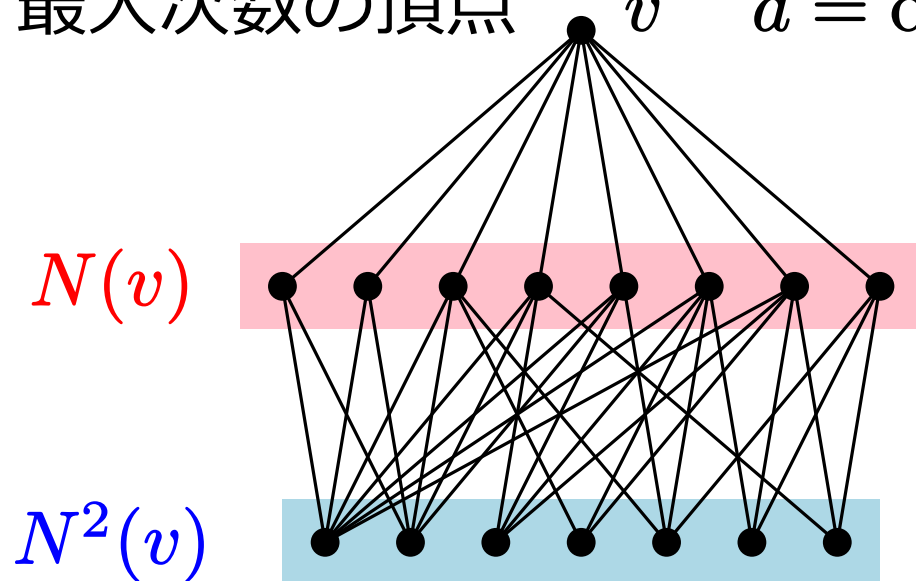
定義：鏡像 (mirror)

w が v の **鏡像** であるとは, $N(v) \cap N(w) \neq \emptyset$ で
 $N(v) - N(w)$ の任意の 2 頂点が隣接していること



記法： $M(v) = v$ の鏡像全体の集合

最大次数の頂点 v $d = \deg(v)$ $d = 8$



$m_i = N(v)$ における
次数 i の頂点数
($i = 3, 4, \dots, d$)

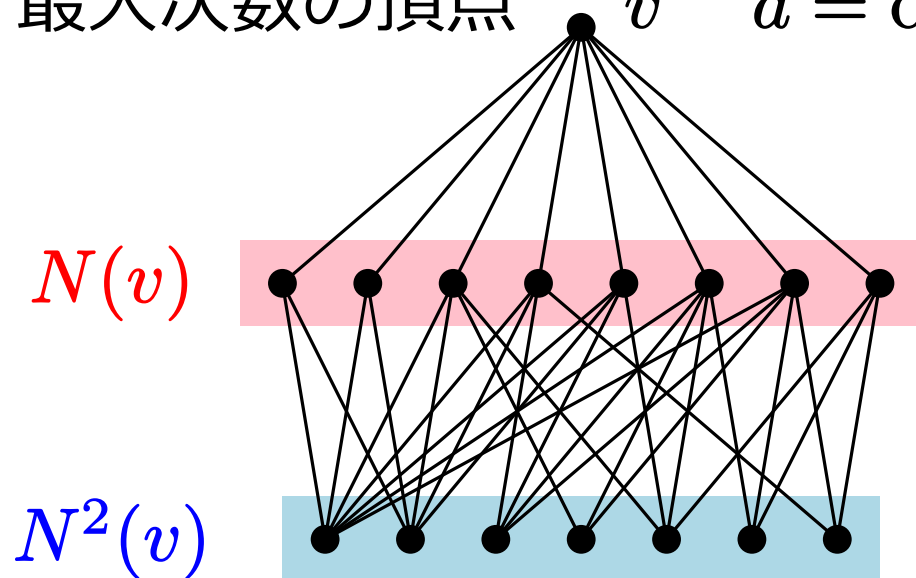
$$m_3 = 2, m_4 = 1, m_5 = 3, m_6 = 2 \\ m_7 = 0, m_8 = 0$$

v と隣接頂点を共有する頂点全体

$p_h = N^2(v)$ の頂点 w で
 $|N(v) \cap N(w)| = h$ を
満たすものの総数
($h = 1, 2, \dots, d$)

$$p_1 = p_2 = 0, p_3 = 3, p_4 = 2, \\ p_5 = 1, p_6 = 0, p_7 = 1, p_8 = 0$$

最大次数の頂点 v $d = \deg(v)$ $d = 8$



$m_i = N(v)$ における
次数 i の頂点数
($i = 3, 4, \dots, d$)

$$m_3 = 2, m_4 = 1, m_5 = 3, m_6 = 2 \\ m_7 = 0, m_8 = 0$$

v と隣接頂点を共有する頂点全体

性質：

$$v \text{ の鏡像の総数 } \geq p_d + p_{d-1}$$

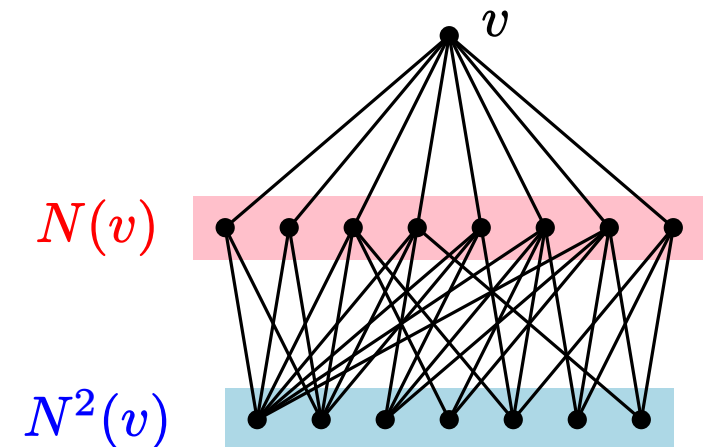
$p_h = N^2(v)$ の頂点 w で
 $|N(v) \cap N(w)| = h$ を
満たすものの総数
($h = 1, 2, \dots, d$)

$$p_1 = p_2 = 0, p_3 = 3, p_4 = 2, \\ p_5 = 1, p_6 = 0, p_7 = 1, p_8 = 0$$

$$\mu(G) - \mu(G - M(v) - \{v\})$$

$$\geq \mu_d + \sum_{w \in M(v)} \mu_{\deg(w)} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1})$$

$$\geq \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \quad \cdots [1]$$



分枝操作： v を含む場合

29/45

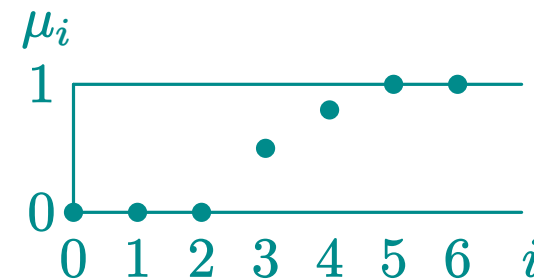
$$\mu(G) - \mu(G - N[v])$$

$$\geq \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + \sum_{h=1}^d p_h (\mu_d - \mu_{d-h})$$

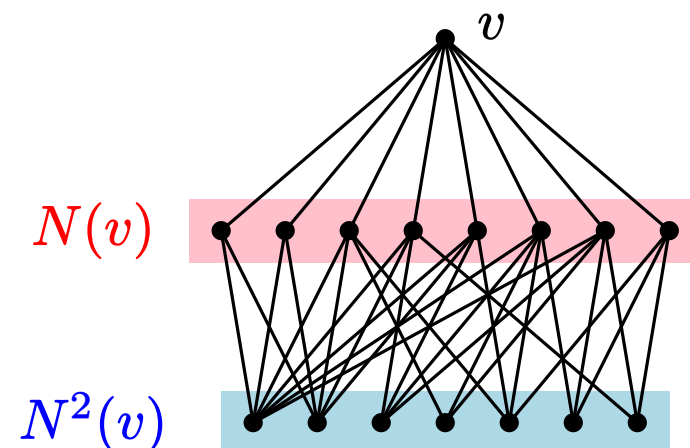
$$\geq \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + \sum_{h=1}^d h p_h (\mu_d - \mu_{d-1})$$

$$= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + \underline{p} \cdot (\mu_d - \mu_{d-1})$$

= $N(v)$ と $N^2(v)$ の
間にある辺の総数



... [2]



再帰式：

$$T(\mu(G)) \leq T(\mu(G - M(v) - \{v\})) + T(\mu(G - N[v]))$$


特性方程式：

$$x^{\mu(G)} = x^{\mu(G - M(v) - \{v\})} + x^{\mu(G - N[v])}$$

$$\therefore 1 = x^{-(\mu(G) - \mu(G - M(v) - \{v\}))} + x^{-(\mu(G) - \mu(G - N[v]))}$$

再帰式：

$$T(\mu(G)) \leq T(\mu(G - M(v) - \{v\})) + T(\mu(G - N[v]))$$


特性方程式：

$$x^{\mu(G)} = x^{\mu(G - M(v) - \{v\})} + x^{\mu(G - N[v])}$$

$$\therefore 1 = x^{-(\mu(G) - \mu(G - M(v) - \{v\}))} + x^{-(\mu(G) - \mu(G - N[v]))}$$

$$\therefore 1 \leq x^{-([1])} + x^{-([2])}$$

ただし,

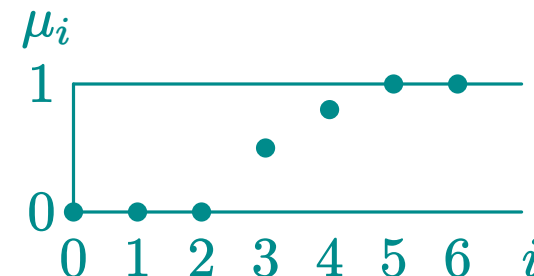
$$[1] = \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1})$$

$$[2] = \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1})$$

$$[1] = \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1})$$

$$= \mu_3 + p_3 \mu_3 + m_3 \mu_3$$

$$= (1 + p_3 + m_3)/2$$



$$[2] = \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1})$$

$$= \mu_3 + m_3 \mu_3 + p \mu_3$$

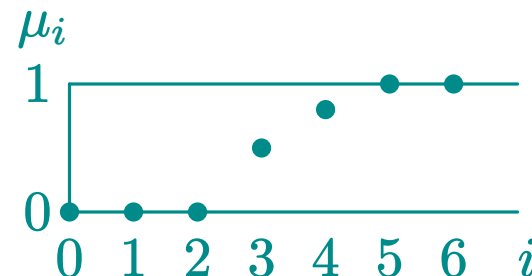
$$= (1 + m_3 + p)/2$$

特性方程式： $d = 3$ のとき

31/45

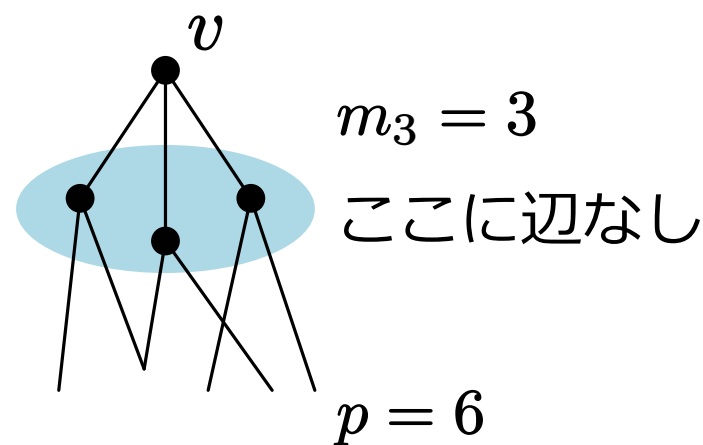
$$[1] = \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1})$$

$$\begin{aligned} &= \mu_3 + p_3 \mu_3 + m_3 \mu_3 \\ &= (1 + p_3 + m_3)/2 \end{aligned}$$



$$[2] = \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1})$$

$$\begin{aligned} &= \mu_3 + m_3 \mu_3 + p \mu_3 \\ &= (1 + m_3 + p)/2 \end{aligned}$$

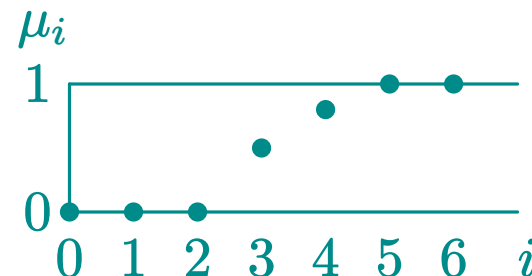


$$[1] = \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1})$$

$$= \mu_3 + p_3 \mu_3 + m_3 \mu_3$$

$$= (1 + p_3 + m_3)/2$$

$$\geq (1 + 0 + 3)/2 = 2$$

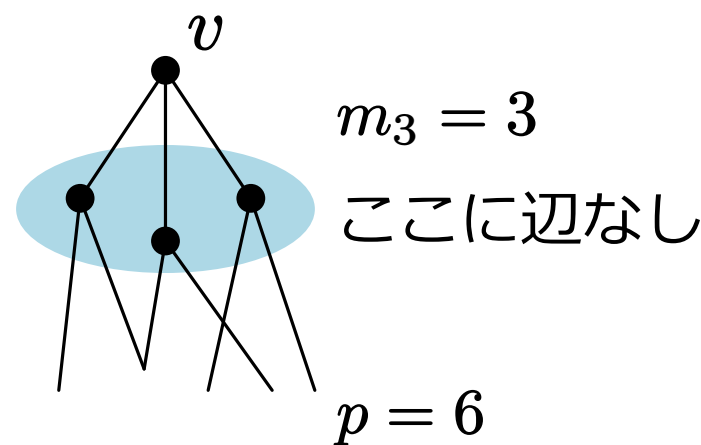


$$[2] = \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1})$$

$$= \mu_3 + m_3 \mu_3 + p \mu_3$$

$$= (1 + m_3 + p)/2$$

$$= (1 + 3 + 6)/2 = 5$$



特性方程式： $d = 3$ のとき

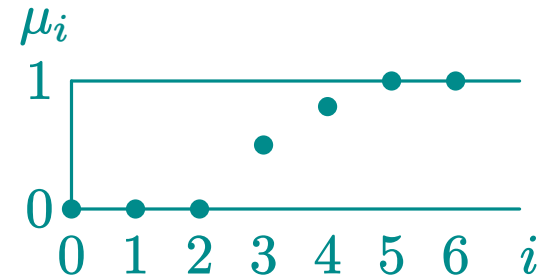
31/45

$$[1] = \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1})$$

$$= \mu_3 + p_3 \mu_3 + m_3 \mu_3$$

$$= (1 + p_3 + m_3)/2$$

$$\geq (1 + 0 + 3)/2 = 2$$

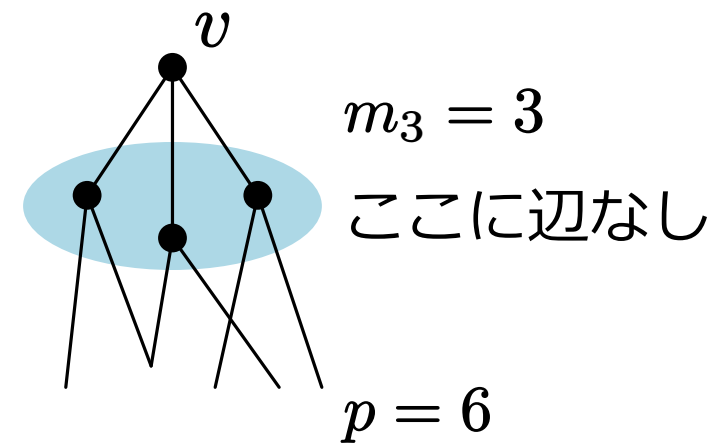


$$[2] = \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1})$$

$$= \mu_3 + m_3 \mu_3 + p \mu_3$$

$$= (1 + m_3 + p)/2$$

$$= (1 + 3 + 6)/2 = 5$$



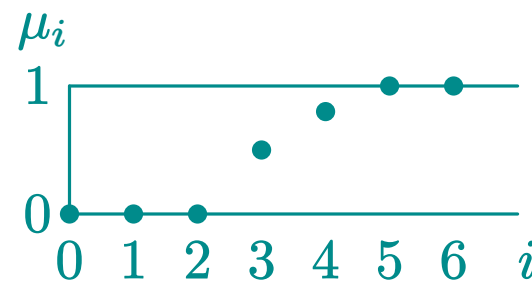
$\therefore$ 特性方程式 $1 = x^{-2} + x^{-5} \leadsto$ 正の実数解 $= 1.2365$

特性方程式： $d = 4$ のとき

32/45

$$\begin{aligned}
 [1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\
 &= \mu_4 + p_4 \mu_4 + p_3 \mu_3 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) \\
 &\geq 4/5 + m_3/2 + 3m_4/10
 \end{aligned}$$

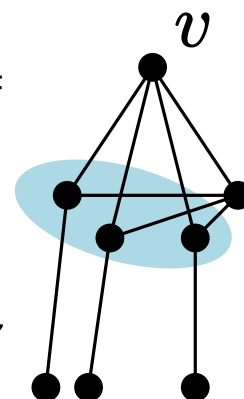
$$\begin{aligned}
 [2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\
 &= \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + p(\mu_4 - \mu_3) \\
 &\geq 4/5 + m_3/2 + 4m_4/5 + 7 \cdot 3/10 \\
 &\geq 29/10 + m_3/2 + 4m_4/5
 \end{aligned}$$



$$m_3 + m_4 = 4$$

WLOG ここに辺なし

$$p \geq 7$$

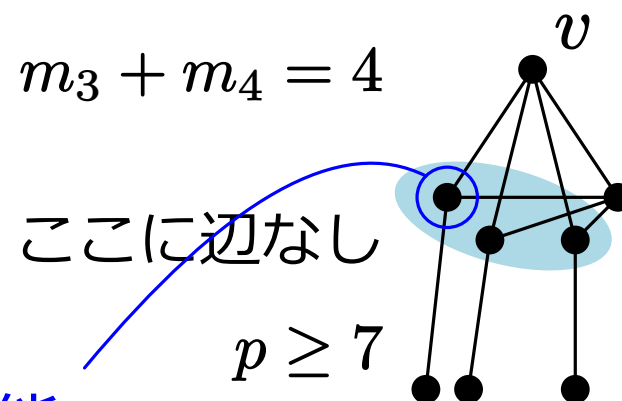
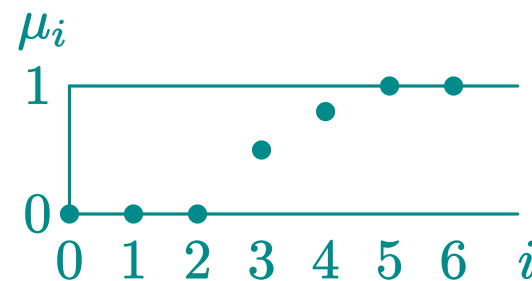


特性方程式： $d = 4$ のとき

32/45

$$\begin{aligned}[1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\ &= \mu_4 + p_4 \mu_4 + p_3 \mu_3 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) \\ &\geq 4/5 + m_3/2 + 3m_4/10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\ &= \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + p(\mu_4 - \mu_3) \\ &\geq 4/5 + m_3/2 + 4m_4/5 + 7 \cdot 3/10 \\ &\geq 29/10 + m_3/2 + 4m_4/5\end{aligned}$$



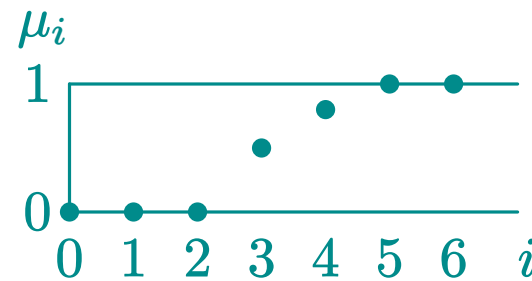
折畳可能

特性方程式： $d = 4$ のとき

32/45

$$\begin{aligned}[1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\ &= \mu_4 + p_4 \mu_4 + p_3 \mu_3 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) \\ &\geq 4/5 + m_3/2 + 3m_4/10\end{aligned}$$

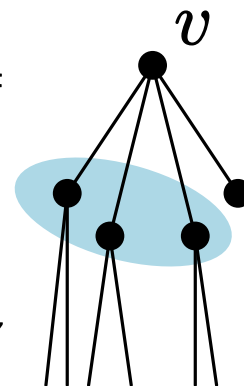
$$\begin{aligned}[2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\ &= \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + p(\mu_4 - \mu_3) \\ &\geq 4/5 + m_3/2 + 4m_4/5 + 7 \cdot 3/10 \\ &\geq 29/10 + m_3/2 + 4m_4/5\end{aligned}$$



$$m_3 + m_4 = 4$$

WLOG ここに辺なし

$$p \geq 7$$

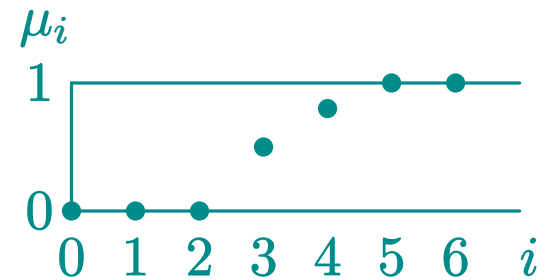


特性方程式： $d = 4$ のとき

32/45

$$\begin{aligned}[1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\ &= \mu_4 + p_4 \mu_4 + p_3 \mu_3 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) \\ &\geq 4/5 + m_3/2 + 3m_4/10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\ &= \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + p(\mu_4 - \mu_3) \\ &\geq 4/5 + m_3/2 + 4m_4/5 + 7 \cdot 3/10 \\ &\geq 29/10 + m_3/2 + 4m_4/5\end{aligned}$$

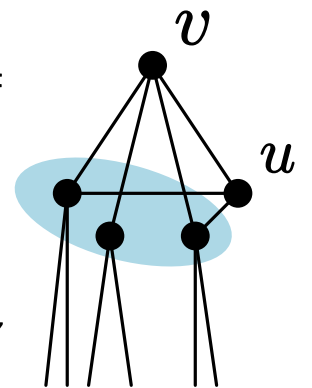


$$m_3 + m_4 = 4$$

WLOG ここに辺なし

$$p \geq 7$$

$$N[v] \supseteq N[u]$$

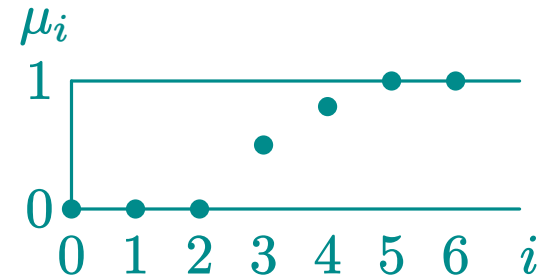


特性方程式： $d = 4$ のとき

32/45

$$\begin{aligned}
 [1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\
 &= \mu_4 + p_4 \mu_4 + p_3 \mu_3 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) \\
 &\geq 4/5 + m_3/2 + 3m_4/10
 \end{aligned}$$

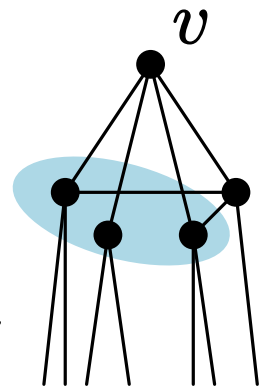
$$\begin{aligned}
 [2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\
 &= \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + p(\mu_4 - \mu_3) \\
 &\geq 4/5 + m_3/2 + 4m_4/5 + 7 \cdot 3/10 \\
 &\geq 29/10 + m_3/2 + 4m_4/5
 \end{aligned}$$



$$m_3 + m_4 = 4$$

WLOG ここに辺なし

$$p \geq 7$$



特性方程式： $d = 4$ のとき (続)

33/45

$$[1] \geq 4/5 + m_3/2 + 3m_4/10$$

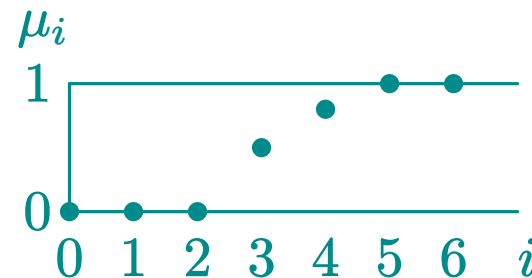
$$[2] \geq 29/10 + m_3/2 + 4m_4/5$$

m_3	m_4	[1]	[2]	特性方程式	正の実数解
0	4	10/5	61/10	$1 = x^{-2} + x^{-61/10}$	1.20839
1	3	11/5	58/10	$1 = x^{-11/5} + x^{-29/5}$	1.20590
2	2	12/5	55/10	$1 = x^{-12/5} + x^{-11/2}$	1.20423
3	1	13/5	52/10	$1 = x^{-13/5} + x^{-26/5}$	1.20332
4	0	14/5	49/10	$1 = x^{-14/5} + x^{-49/10}$	1.20310

特性方程式： $d = 5$ のとき

34/45

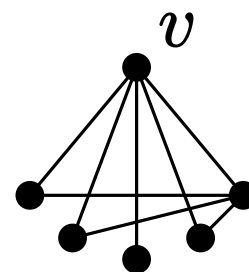
$$\begin{aligned}
 [1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\
 &= \mu_5 + p_5 \mu_5 + p_4 \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) + m_5 (\mu_5 - \mu_4) \\
 &\geq 1 + m_3/2 + 3m_4/10 + m_5/5 \\
 &\geq 1 + 5/5 = 2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 [2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\
 &= \mu_5 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + m_5 \mu_5 + p(\mu_5 - \mu_4) \\
 &= 1 + m_3/2 + 4m_4/5 + m_5 + (5 + m_3)/5 \\
 &\geq 2 + 7m_3/10 + 4m_4/5 + m_5 \\
 &\geq 2 + 7 \cdot 5/10 = 11/2
 \end{aligned}$$

$$m_3 + m_4 + m_5 = 5$$

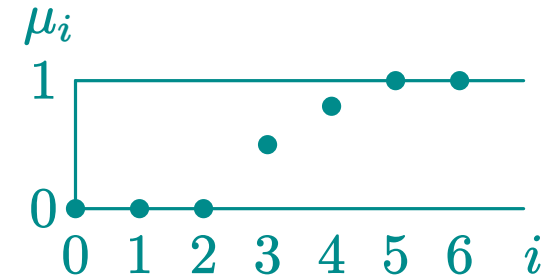
$$p \geq d + m_3$$



特性方程式： $d = 5$ のとき

34/45

$$\begin{aligned}
 [1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\
 &= \mu_5 + p_5 \mu_5 + p_4 \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) + m_5 (\mu_5 - \mu_4) \\
 &\geq 1 + m_3/2 + 3m_4/10 + m_5/5 \\
 &\geq 1 + 5/5 = 2
 \end{aligned}$$

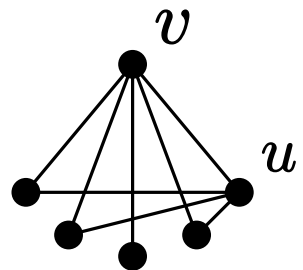


$$\begin{aligned}
 [2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\
 &= \mu_5 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + m_5 \mu_5 + p(\mu_5 - \mu_4) \\
 &= 1 + m_3/2 + 4m_4/5 + m_5 + (5 + m_3)/5 \\
 &\geq 2 + 7m_3/10 + 4m_4/5 + m_5 \\
 &\geq 2 + 7 \cdot 5/10 = 11/2
 \end{aligned}$$

$$m_3 + m_4 + m_5 = 5$$

$$p \geq d + m_3$$

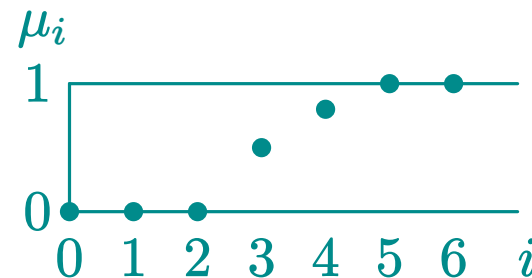
$$N[v] \supseteq N[u]$$



特性方程式： $d = 5$ のとき

34/45

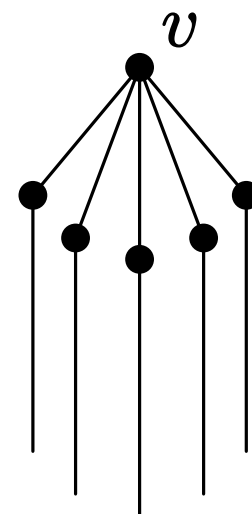
$$\begin{aligned}
 [1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\
 &= \mu_5 + p_5 \mu_5 + p_4 \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) + m_5 (\mu_5 - \mu_4) \\
 &\geq 1 + m_3/2 + 3m_4/10 + m_5/5 \\
 &\geq 1 + 5/5 = 2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 [2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\
 &= \mu_5 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + m_5 \mu_5 + p(\mu_5 - \mu_4) \\
 &= 1 + m_3/2 + 4m_4/5 + m_5 + (5 + m_3)/5 \\
 &\geq 2 + 7m_3/10 + 4m_4/5 + m_5 \\
 &\geq 2 + 7 \cdot 5/10 = 11/2
 \end{aligned}$$

$$m_3 + m_4 + m_5 = 5$$

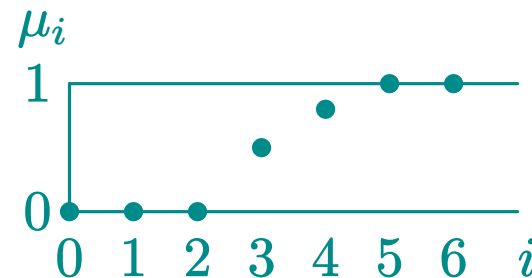
$$p \geq d + m_3$$



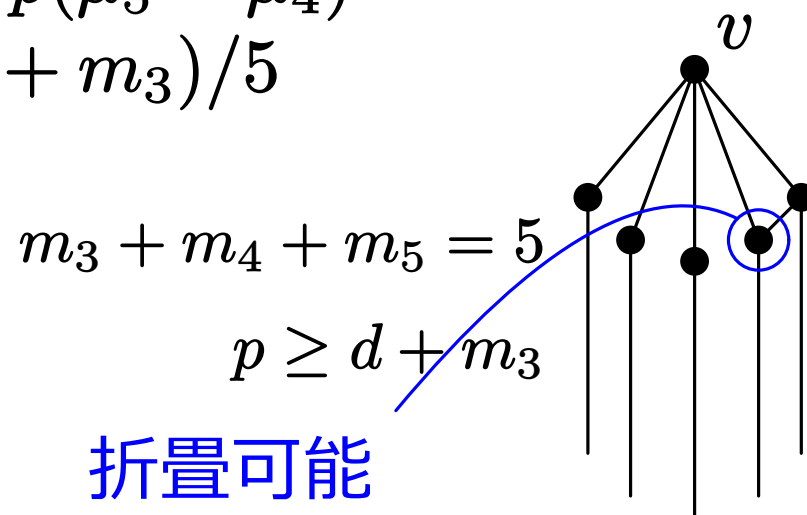
特性方程式： $d = 5$ のとき

34/45

$$\begin{aligned}
 [1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\
 &= \mu_5 + p_5 \mu_5 + p_4 \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) + m_5 (\mu_5 - \mu_4) \\
 &\geq 1 + m_3/2 + 3m_4/10 + m_5/5 \\
 &\geq 1 + 5/5 = 2
 \end{aligned}$$



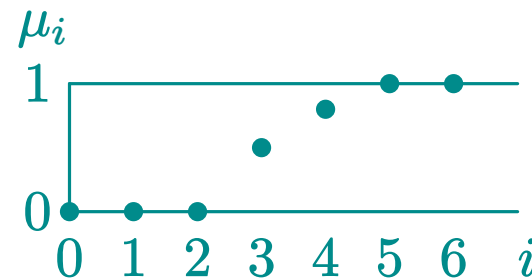
$$\begin{aligned}
 [2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\
 &= \mu_5 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + m_5 \mu_5 + p(\mu_5 - \mu_4) \\
 &= 1 + m_3/2 + 4m_4/5 + m_5 + (5 + m_3)/5 \\
 &\geq 2 + 7m_3/10 + 4m_4/5 + m_5 \\
 &\geq 2 + 7 \cdot 5/10 = 11/2
 \end{aligned}$$



特性方程式： $d = 5$ のとき

34/45

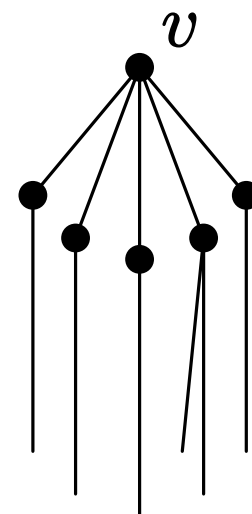
$$\begin{aligned}
 [1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\
 &= \mu_5 + p_5 \mu_5 + p_4 \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) + m_5 (\mu_5 - \mu_4) \\
 &\geq 1 + m_3/2 + 3m_4/10 + m_5/5 \\
 &\geq 1 + 5/5 = 2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 [2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\
 &= \mu_5 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + m_5 \mu_5 + p(\mu_5 - \mu_4) \\
 &= 1 + m_3/2 + 4m_4/5 + m_5 + (5 + m_3)/5 \\
 &\geq 2 + 7m_3/10 + 4m_4/5 + m_5 \\
 &\geq 2 + 7 \cdot 5/10 = 11/2
 \end{aligned}$$

$$m_3 + m_4 + m_5 = 5$$

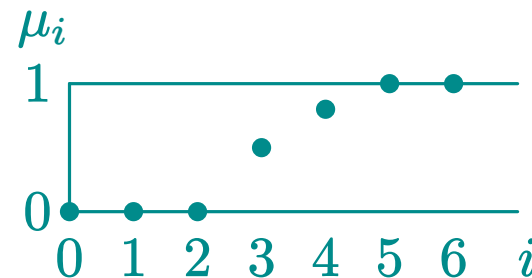
$$p \geq d + m_3$$



特性方程式： $d = 5$ のとき

34/45

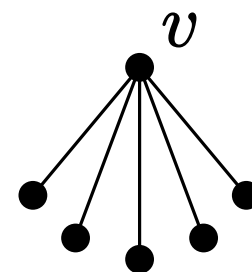
$$\begin{aligned}
 [1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\
 &= \mu_5 + p_5 \mu_5 + p_4 \mu_4 + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) + m_5 (\mu_5 - \mu_4) \\
 &\geq 1 + m_3/2 + 3m_4/10 + m_5/5 \\
 &\geq 1 + 5/5 = 2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 [2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\
 &= \mu_5 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4 + m_5 \mu_5 + p(\mu_5 - \mu_4) \\
 &= 1 + m_3/2 + 4m_4/5 + m_5 + (5 + m_3)/5 \\
 &\geq 2 + 7m_3/10 + 4m_4/5 + m_5 \\
 &\geq 2 + 7 \cdot 5/10 = 11/2
 \end{aligned}$$

$$m_3 + m_4 + m_5 = 5$$

$$p \geq d + m_3$$



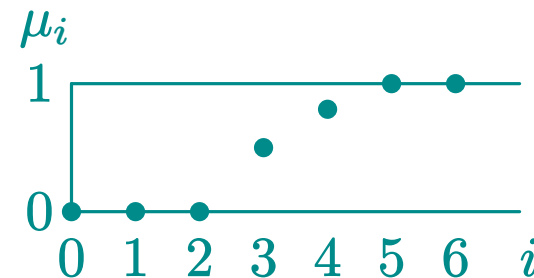
$\therefore$ 特性方程式 $1 = x^{-2} + x^{-11/2} \leadsto$ 正の実数解 $= 1.2263$

特性方程式： $d \geq 6$ のとき

35/45

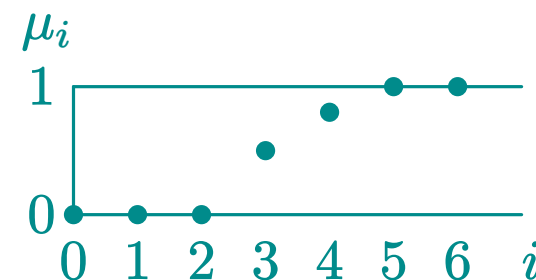
$$\begin{aligned} [1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\ &= 1 + p_d + p_{d-1} + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) + m_5 (\mu_5 - \mu_4) \\ &\geq 1 + m_3/2 + 3m_4/10 + m_5/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\ &\geq 1 + m_3/2 + 4m_4/5 + m_5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 [1] &= \mu_d + p_d \mu_d + p_{d-1} \mu_{d-1} + \sum_{i=3}^d m_i (\mu_i - \mu_{i-1}) \\
 &= 1 + p_d + p_{d-1} + m_3 \mu_3 + m_4 (\mu_4 - \mu_3) + m_5 (\mu_5 - \mu_4) \\
 &\geq 1 + m_3/2 + 3m_4/10 + m_5/5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [2] &= \mu_d + \sum_{i=3}^d m_i \mu_i + p \cdot (\mu_d - \mu_{d-1}) \\
 &\geq 1 + m_3/2 + 4m_4/5 + m_5
 \end{aligned}$$



m_3	m_5	[1]	[2]	特性方程式	正の実数解
0	6	11/5	7	$1 = x^{-11/5} + x^{-7}$	1.18278
6	0	4	4	$1 = x^{-4} + x^{-4}$	1.18920

特性方程式の正の実数解は $d = 3$ のときがもっとも大きい

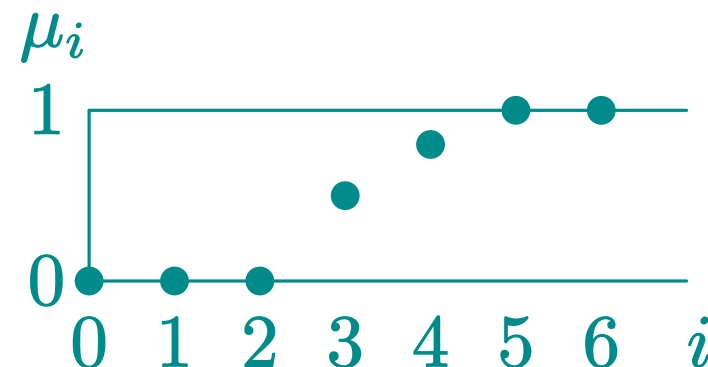
そのときの正の実数解 $= 1.2365$

$\therefore$ アルゴリズム A'' の計算量 $= O^*(1.2365^n)$

(前回導出した計算量 $= O^*(1.3247^n)$)

1. 基本的なアイデア
 2. 測度統治法：測度の変化と計算量の解析
 3. **測度統治法：パラメータの調整**
-

考えた値 : $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 = 1/2, \mu_4 = 4/5,$
 $\mu_5 = \mu_6 = \dots = 1$



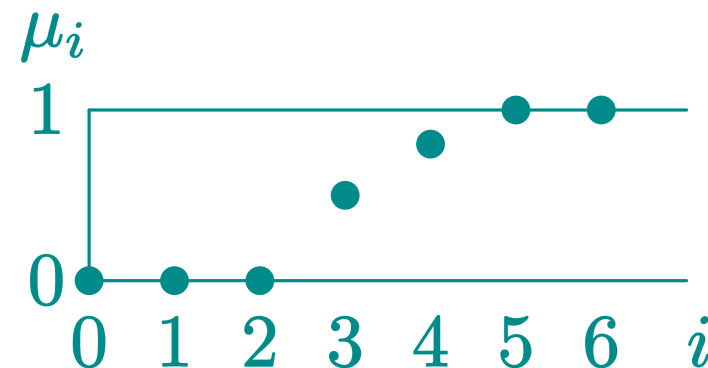
なぜこの値にするのか？

〜 計算量をもっと小さくする値はないか？

測度統治法 (measure & conquer) の考え方

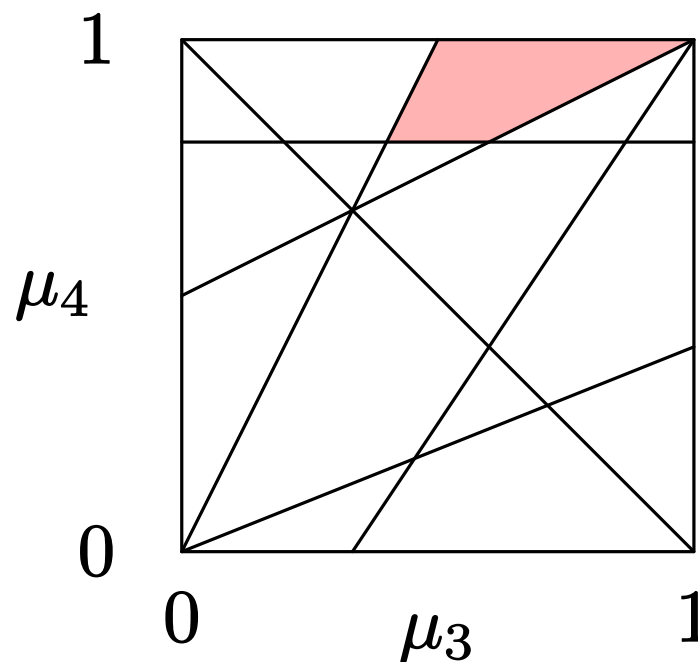
$\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_5 = \mu_6 = \dots = 1$ を固定して
計算量が小さくなるように μ_3, μ_4 を動かす

制約 : 測度が増えてはならない

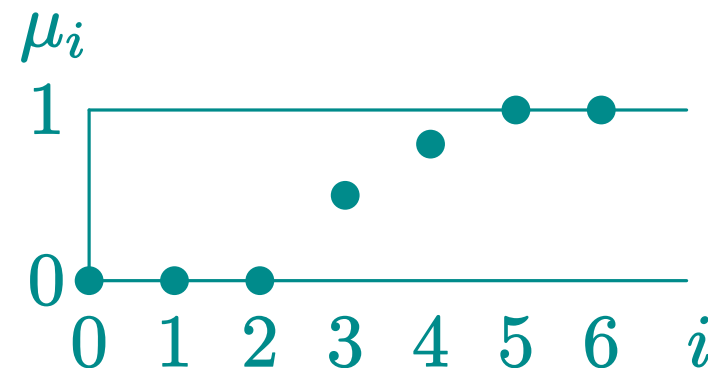


前処理に対する考察から次の制約が得られる

- $0 \leq \mu_3 \leq 1$
- $0 \leq \mu_4 \leq 1$
- $\mu_3 \geq \mu_4 - \mu_3$
- $\mu_4 - \mu_3 \geq 1 - \mu_4$
- $\mu_3 + \mu_4 \geq 1$
- $3\mu_3 - 2\mu_4 \geq 1$
- $5\mu_4 \geq 4$
- $5\mu_4 \geq 2\mu_3$

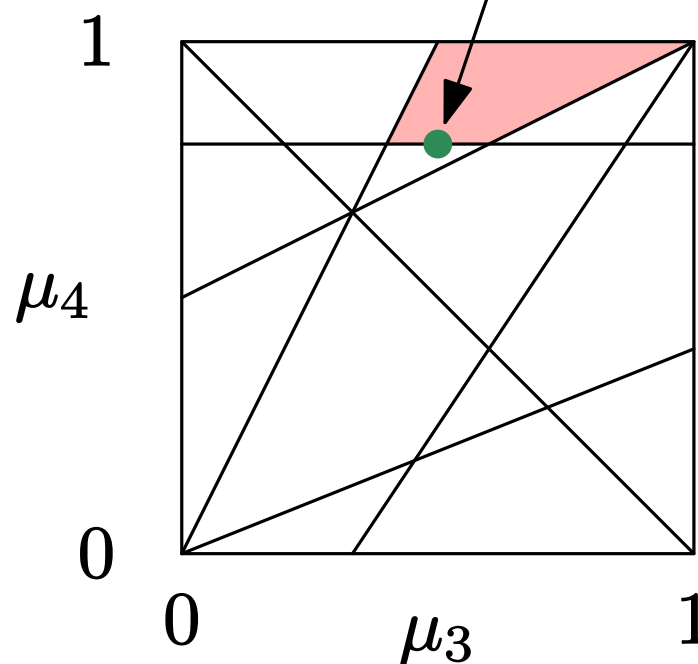


制約 : 測度が増えてはならない



前処理に対する考察から次の制約が得られる

- $0 \leq \mu_3 \leq 1$
- $0 \leq \mu_4 \leq 1$
- $\mu_3 \geq \mu_4 - \mu_3$
- $\mu_4 - \mu_3 \geq 1 - \mu_4$
- $\mu_3 + \mu_4 \geq 1$
- $3\mu_3 - 2\mu_4 \geq 1$
- $5\mu_4 \geq 4$
- $5\mu_4 \geq 2\mu_3$



目的 : 次に挙げる特性方程式の正の実数解の最大値の最小化

- $1 = x^{-4\mu_3} + x^{-10\mu_3}$ $(d = 3)$
- $1 = x^{-\mu_4-4\mu_3} + x^{-8\mu_4+3\mu_3}$ $(d = 4, m_3 = 4)$
- $1 = x^{-5\mu_4+4\mu_3} + x^{-12\mu_4+7\mu_3}$ $(d = 4, m_4 = 4)$
- $1 = x^{-6+5\mu_4} + x^{-11+10\mu_4-5\mu_3}$ $(d = 5)$
- $1 = x^{-7+6\mu_4} + x^{-7}$ $(d = 6, m_5 = 6)$
- $1 = x^{-1-6\mu_3} + x^{-1-6\mu_3}$ $(d = 6, m_3 = 6)$

目的 : 次に挙げる特性方程式の正の実数解の最大値の最小化

$$\bullet \quad 1 = x^{-4\mu_3} + x^{-10\mu_3}$$

正の実数解

$$1 = x^{-12/5} + x^{-6}$$

1.1935

$$\bullet \quad 1 = x^{-\mu_4-4\mu_3} + x^{-8\mu_4+3\mu_3}$$

$$1 = x^{-16/5} + x^{-23/5}$$

1.1969

$$\bullet \quad 1 = x^{-5\mu_4+4\mu_3} + x^{-12\mu_4+7\mu_3}$$

$$1 = x^{-8/5} + x^{-27/5}$$

1.2497

$$\bullet \quad 1 = x^{-6+5\mu_4} + x^{-11+10\mu_4-5\mu_3}$$

$$1 = x^{-2} + x^{-6}$$

1.2106

$$\bullet \quad 1 = x^{-7+6\mu_4} + x^{-7}$$

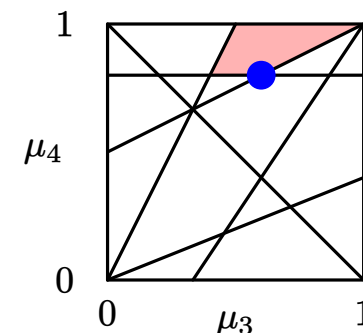
$$1 = x^{-11/5} + x^{-7}$$

1.1827

$$\bullet \quad 1 = x^{-1-6\mu_3} + x^{-1-6\mu_3}$$

$$1 = x^{-23/5} + x^{-23/5}$$

1.1626



$$\mu_3 = 3/5$$

$$\mu_4 = 4/5$$

注 : $\mu_3 = 1/2, \mu_4 = 4/5$ のとき, 計算量 = $O^*(1.2365^n)$

目的 : 次に挙げる特性方程式の正の実数解の最大値の最小化

$$\bullet 1 = x^{-4\mu_3} + x^{-10\mu_3}$$

正の実数解

1.2154

$$\bullet 1 = x^{-\mu_4-4\mu_3} + x^{-8\mu_4+3\mu_3}$$

1.2001

$$\bullet 1 = x^{-5\mu_4+4\mu_3} + x^{-12\mu_4+7\mu_3}$$

1.2247

$$\bullet 1 = x^{-6+5\mu_4} + x^{-11+10\mu_4-5\mu_3}$$

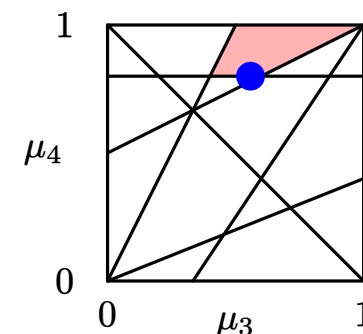
1.2171

$$\bullet 1 = x^{-7+6\mu_4} + x^{-7}$$

1.1827

$$\bullet 1 = x^{-1-6\mu_3} + x^{-1-6\mu_3}$$

1.1765



$$\mu_3 = 68/125$$

$$\mu_4 = 4/5$$

注 : $\mu_3 = 1/2, \mu_4 = 4/5$ のとき, 計算量 = $O^*(1.2365^n)$

目的 : 次に挙げる特性方程式の正の実数解の最大値の最小化

$$\bullet 1 = x^{-4\mu_3} + x^{-10\mu_3}$$

正の実数解

1.2154

$$\bullet 1 = x^{-\mu_4-4\mu_3} + x^{-8\mu_4+3\mu_3}$$

1.1994

$$\bullet 1 = x^{-5\mu_4+4\mu_3} + x^{-12\mu_4+7\mu_3}$$

1.2228

$$\bullet 1 = x^{-6+5\mu_4} + x^{-11+10\mu_4-5\mu_3}$$

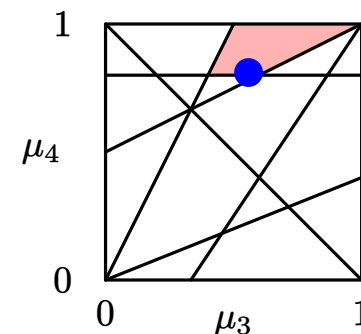
1.2187

$$\bullet 1 = x^{-7+6\mu_4} + x^{-7}$$

1.1835

$$\bullet 1 = x^{-1-6\mu_3} + x^{-1-6\mu_3}$$

1.1765



$$\mu_3 = 68/125$$

$$\mu_4 = 3213/4000$$

注 : $\mu_3 = 1/2, \mu_4 = 4/5$ のとき, 計算量 = $O^*(1.2365^n)$

アルゴリズム $A''(G)$

1. 優越規則と折畳規則を可能な限り G に適用
2. $v = G$ の次数最大の頂点
3. 次の2つの大きいほうを出力
 - $A''(G - N[v])$ の出力を復元したもの $\cup \{v\}$
 - $A''(G - M(v) - \{v\})$ の出力を復元したもの

結論

アルゴリズム A'' の計算量は $O^*(1.2228^n)$

測度統治法の適用法

1. 入力 G の大きさを測る「測度」 $\mu(G)$ を定義する
 - $\mu(G)$ の定義に調整可能なパラメータを入れる
 - $\mu(G) \leq n$ や単調性を満たすように注意する
2. 計算量が小さくなるようにパラメータを決める

最大独立集合問題 以外にも 適用可能

次回と次々回

動的計画法 (dynamic programming) によるアルゴリズム
の設計と解析

例題：巡回セールスマン問題, 最小シュタイナー木問題