

9:00–10:30. A4用紙(両面自筆書き込み), 定規, コンパス, 分度器のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ. 携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にする.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).

採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1

任意の多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ を考える. 多角形領域 P の頂点の総数が n であり, 穴の総数が h であるとき, P の三角形分割における三角形の総数を n と h を用いた式で表してみよ. (注: 結論の式だけでも部分点を与える.)

問題 2

平面上の原点以外の点 $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ (つまり, $(a, b) \neq (0, 0)$) を平面上の直線 $p^+ : ax + by = 1$ に写す操作と平面上の原点を通らない直線 $l : ax + by = 1$ (つまり, $(a, b) \neq (0, 0)$) を平面上の点 $l^+ = (a, b)$ に写す操作を考える.

1. 原点以外の点 $p \in \mathbb{R}^2$ が原点を通らない直線 l の上にのっているとき, そのときに限り, 点 l^+ が直線 p^+ の上にのっていることを証明せよ.
2. 原点以外の任意の点 $p \in \mathbb{R}^2$ に対して, $(p^+)^+ = p$ が成り立つことを証明せよ.

問題 3

平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ のボロノイ図において, すべてのボロノイ領域が4つの辺を境界上に持つということはあるか. あるならば, そのような例を1つ示せ. ないならば, ないことを証明せよ.

問題 4

次の方程式

$$6x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$$

を満たす点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が表す図形は, 放物線, 楕円, 双曲線のいずれであるか, 定めよ. 放物線である場合は, その焦点の座標と準線の方程式を求めよ. 楕円である場合は, その2つの焦点の座標を求めよ. 双曲線である場合は, その2つの焦点の座標と2つの漸近線の方程式を求めよ.