離散数理工学 **2026 年 2 月 10 日**
期末試験 **岡本 吉央**

9:00–10:30．A4 用紙 (両面自筆書き込み)，定規，コンパス，分度器のみ持ち込み可．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．

採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．

採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．

採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1 凸集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，

$$A \times B = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \middle| \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B \right\} \subseteq \mathbb{R}^{d+d}$$

と定義する．このとき，$A \times B$ も凸集合であることを証明せよ．

問題 2 次の超平面記述で表される凸多面体 P を考える．

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{array}{l} -x_1 \leq 0, \\ -x_2 \leq 0, \\ -x_3 \leq 0, \\ -x_4 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_3 + x_4 \leq 1 \end{array} \right\}$$

1. 次の点 $\boldsymbol{v}$ が P の頂点であることを証明せよ．

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. 次の点 $\boldsymbol{v}'$ が P の頂点ではないことを証明せよ．

$$\boldsymbol{v}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

問題 3 実対称行列 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ の第 2 最大固有値を λ_2 とするとき，

$$\lambda_2 = \max_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d - \{\boldsymbol{0}\} \\ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = 0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$\boldsymbol{v}_1$ は最大固有値に対応する A の固有ベクトルである．(ヒント：$\{\boldsymbol{v}_1\}$ の線形包の直交補空間の基底として，$\{\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$ が取れることを利用せよ．)

なお，この問題では，実対称行列について，以下に述べる性質を用いてもよい．

性質 1 実対称行列の固有値はどれも実数である．

性質 2 d 次実対称行列の固有ベクトルを使って，$\mathbb{R}^d$ の正規直交基底を構成できる．つまり，d 次実対称行列 A の固有値が $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d$ であるとき，$\boldsymbol{v}_i$ を λ_i に対応する固有ベクトルとして，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$ が $\mathbb{R}^d$ の正規直交基底となるようにできる．

問題 4 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \#\{i \in \{1, 2, \ldots, d\} \mid x_i \neq 0\}$$

とすることで，関数 $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を定める．ただし，有限集合 I に対して，$\#I$ でその要素数を表すものとする．

1. 次の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\|\boldsymbol{x}\|$ と $\|\boldsymbol{y}\|$ の値を答えよ．

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. 関数 $\|\cdot\|$ がノルムであるかないか，証明を付けて答えよ．(注：$d \geq 1$ の値によって成否が変わる場合は，それも含めて答えよ．)

以上