離散数理工学 (2025 年度後学期)

第 12 回

高次元 (6)：距離とボロノイ図

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 1 月 27 日

最終更新：2026 年 1 月 18 日　18:15

目標

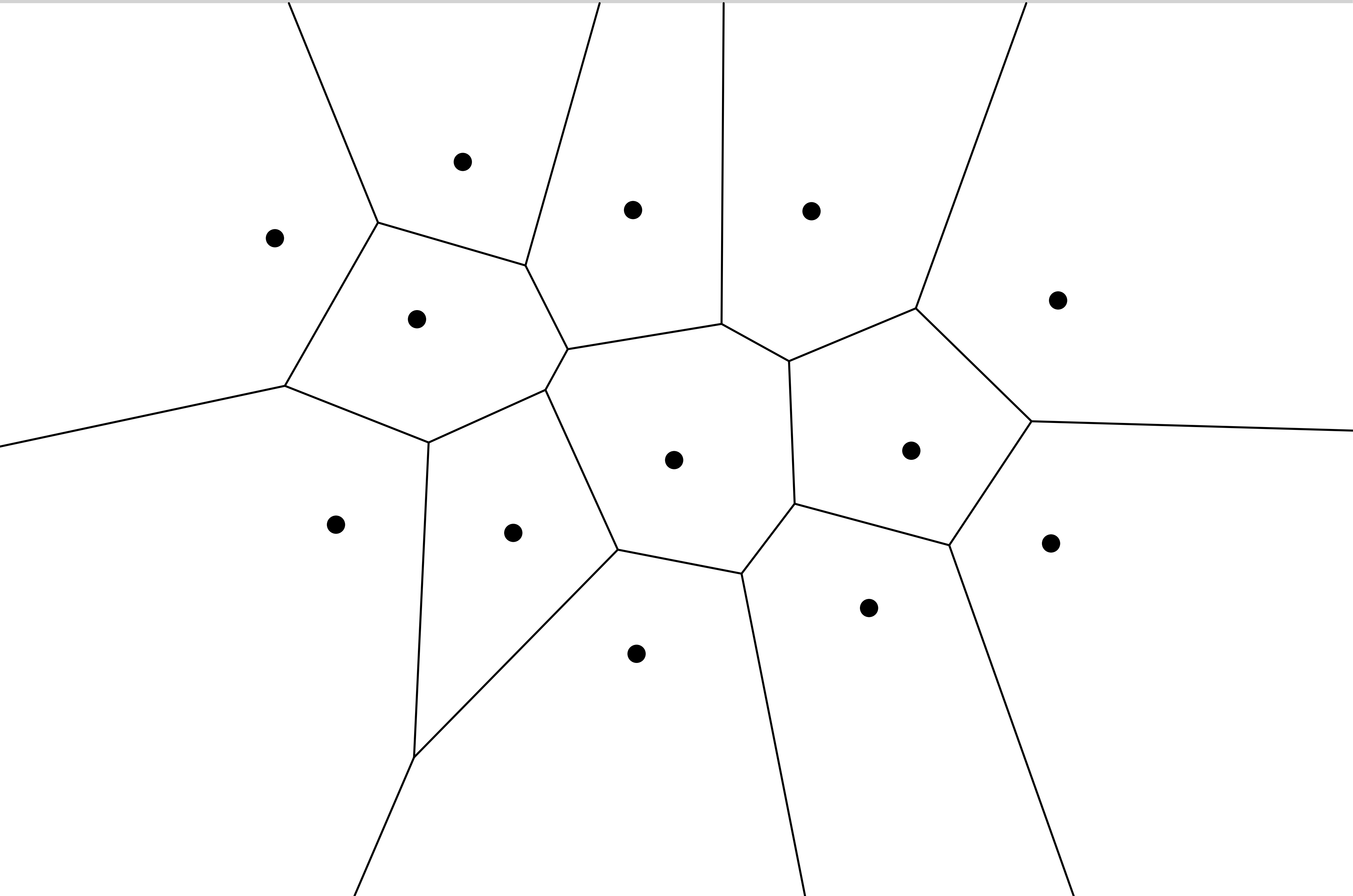
1. ボロノイ図を上側エンベロープとして捉えられるようになる
2. さまざまな距離と凸集合を関係づけられるようになる

教訓

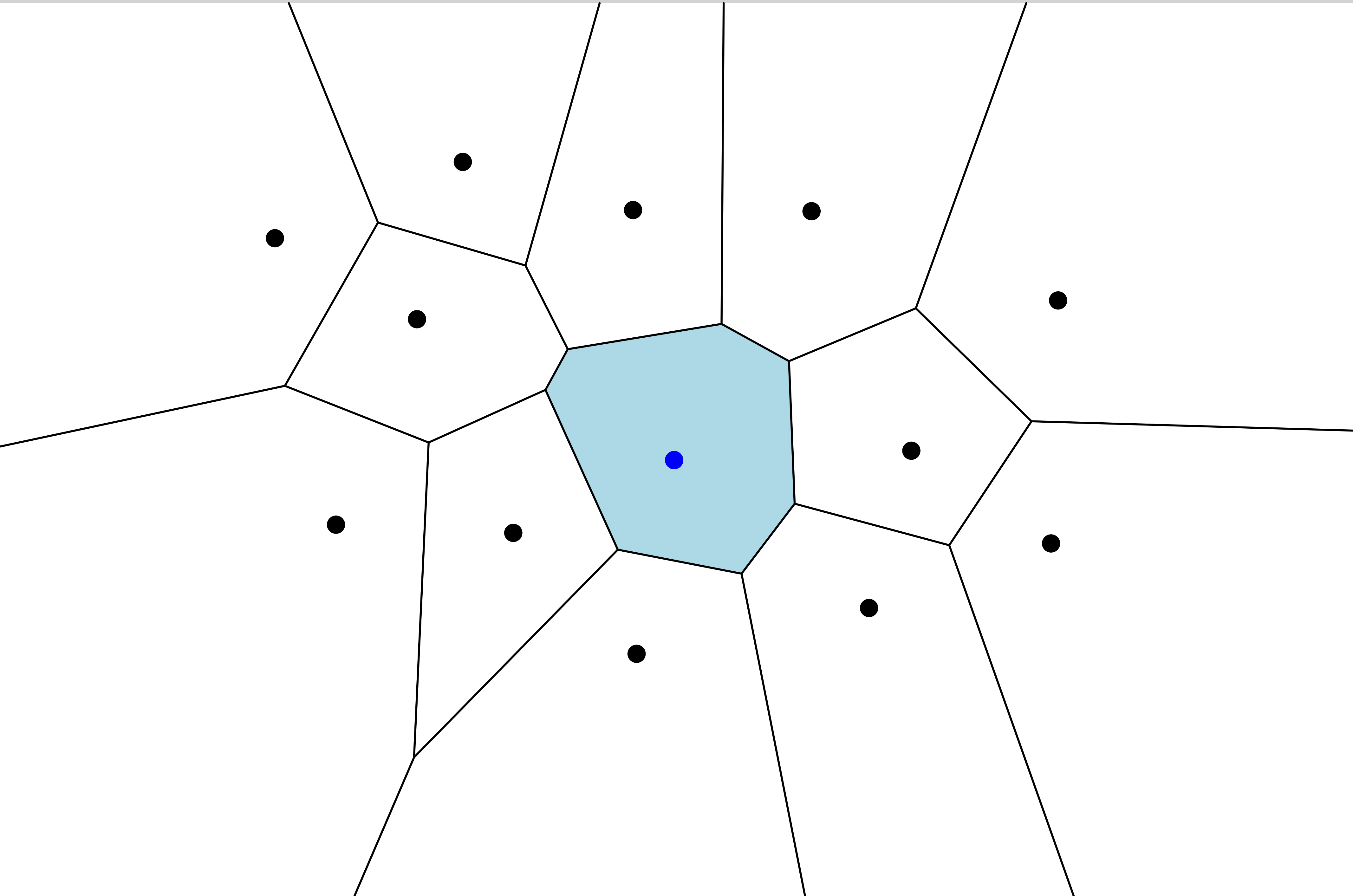
次元を上げたり，概念を抽象化することで
見通しがよくなることがある

目次

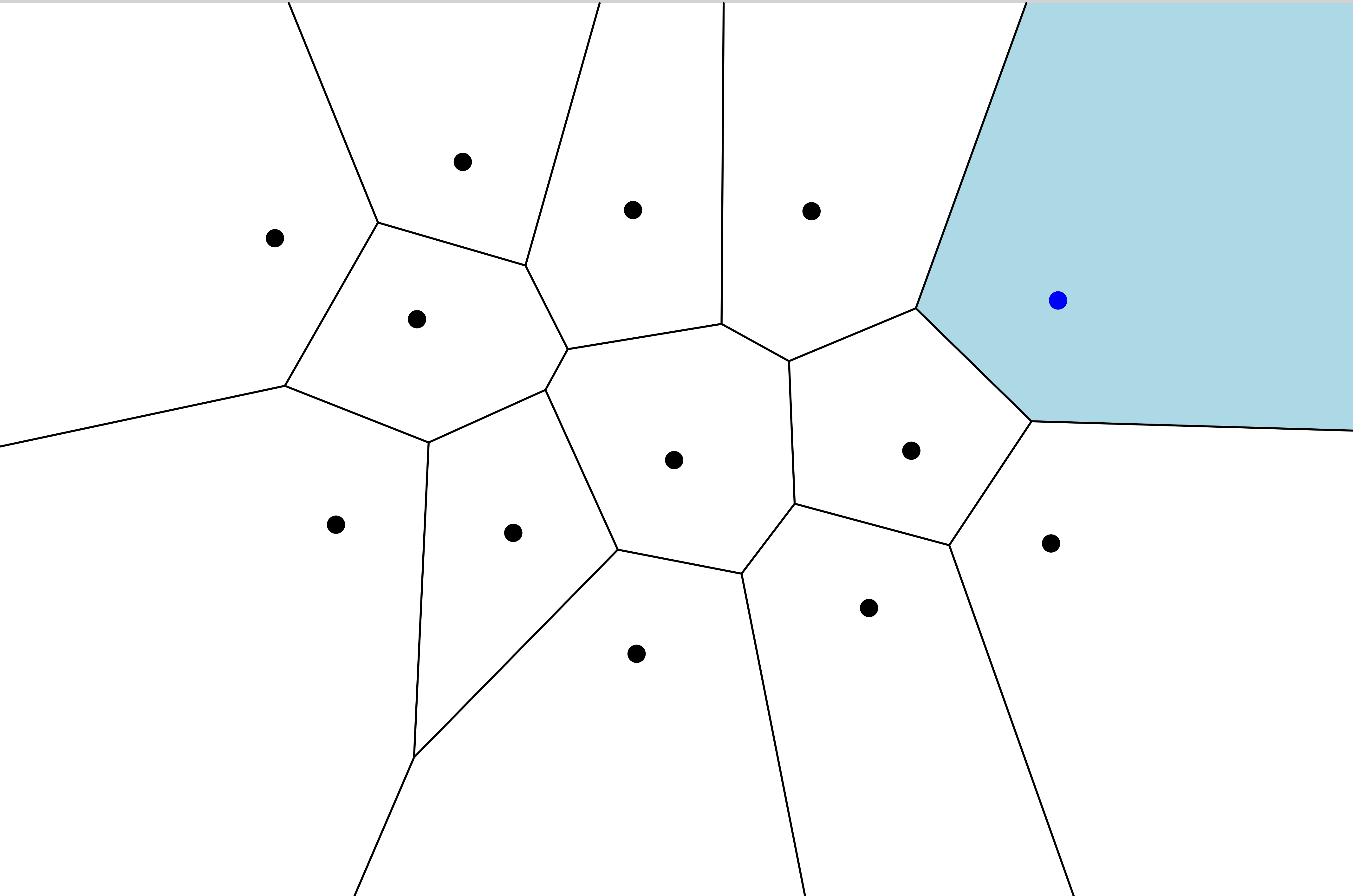
[復習] ボロノイ図：例



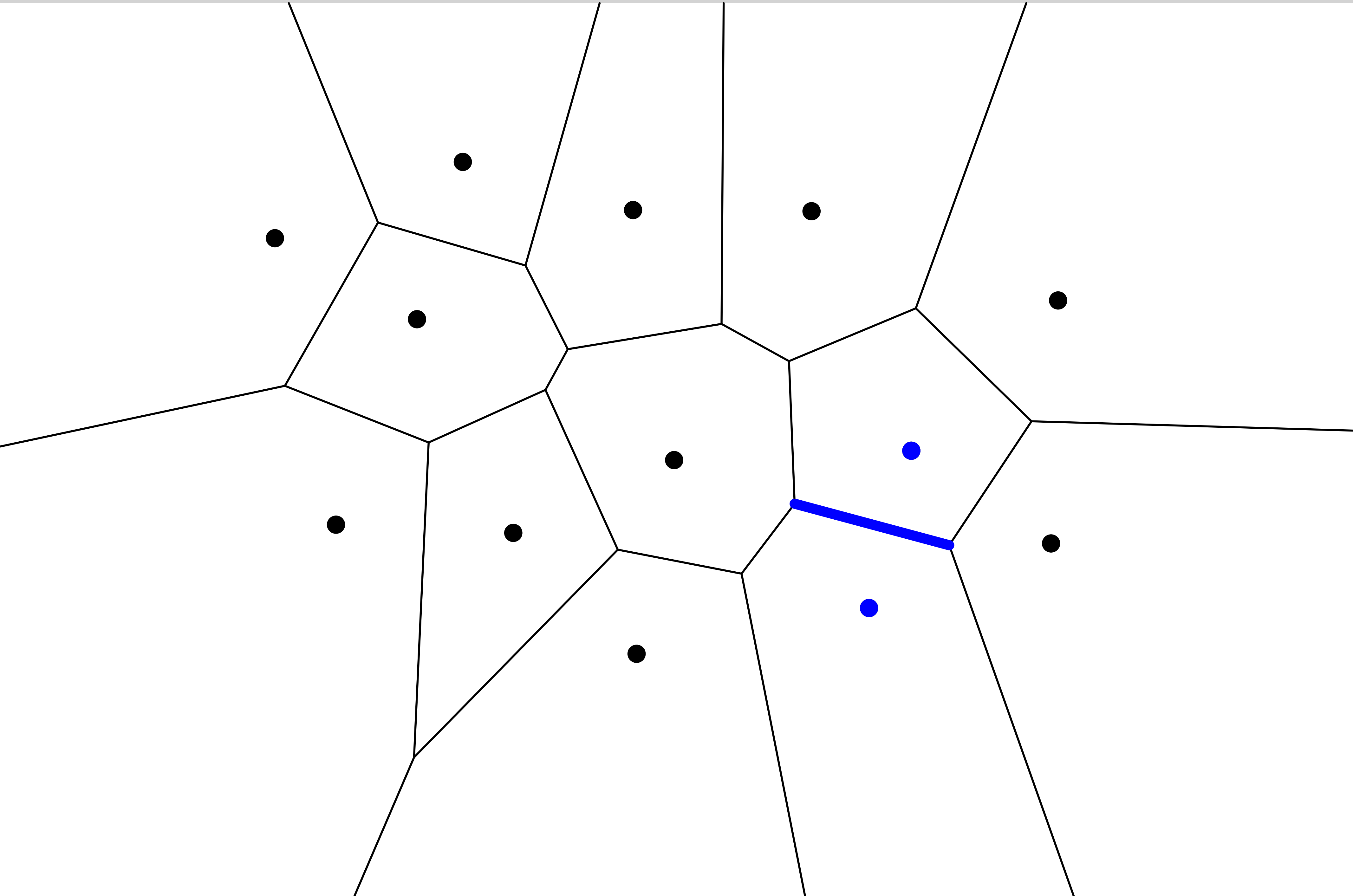
[復習] ボロノイ図：例



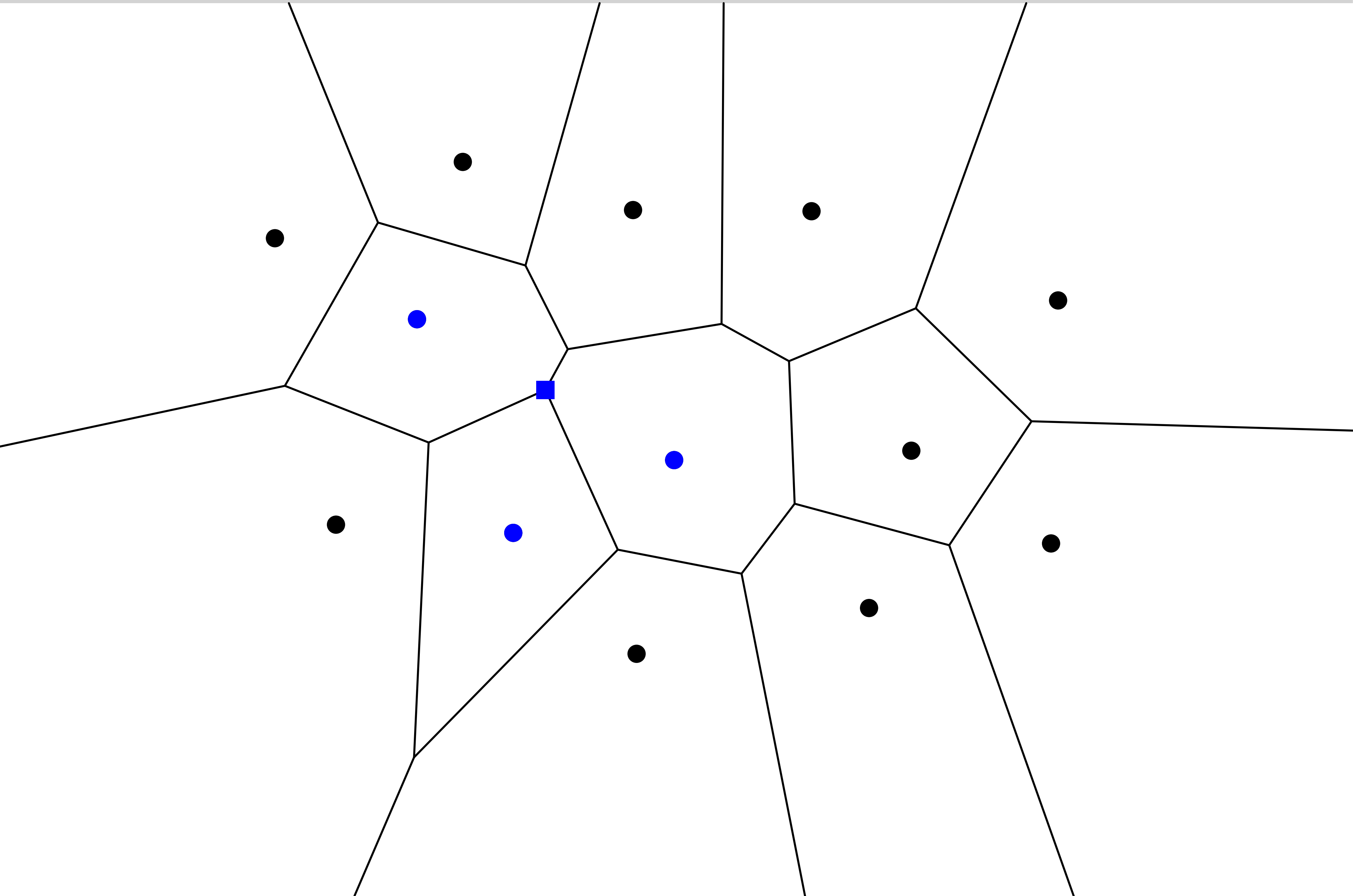
[復習] ボロノイ図：例



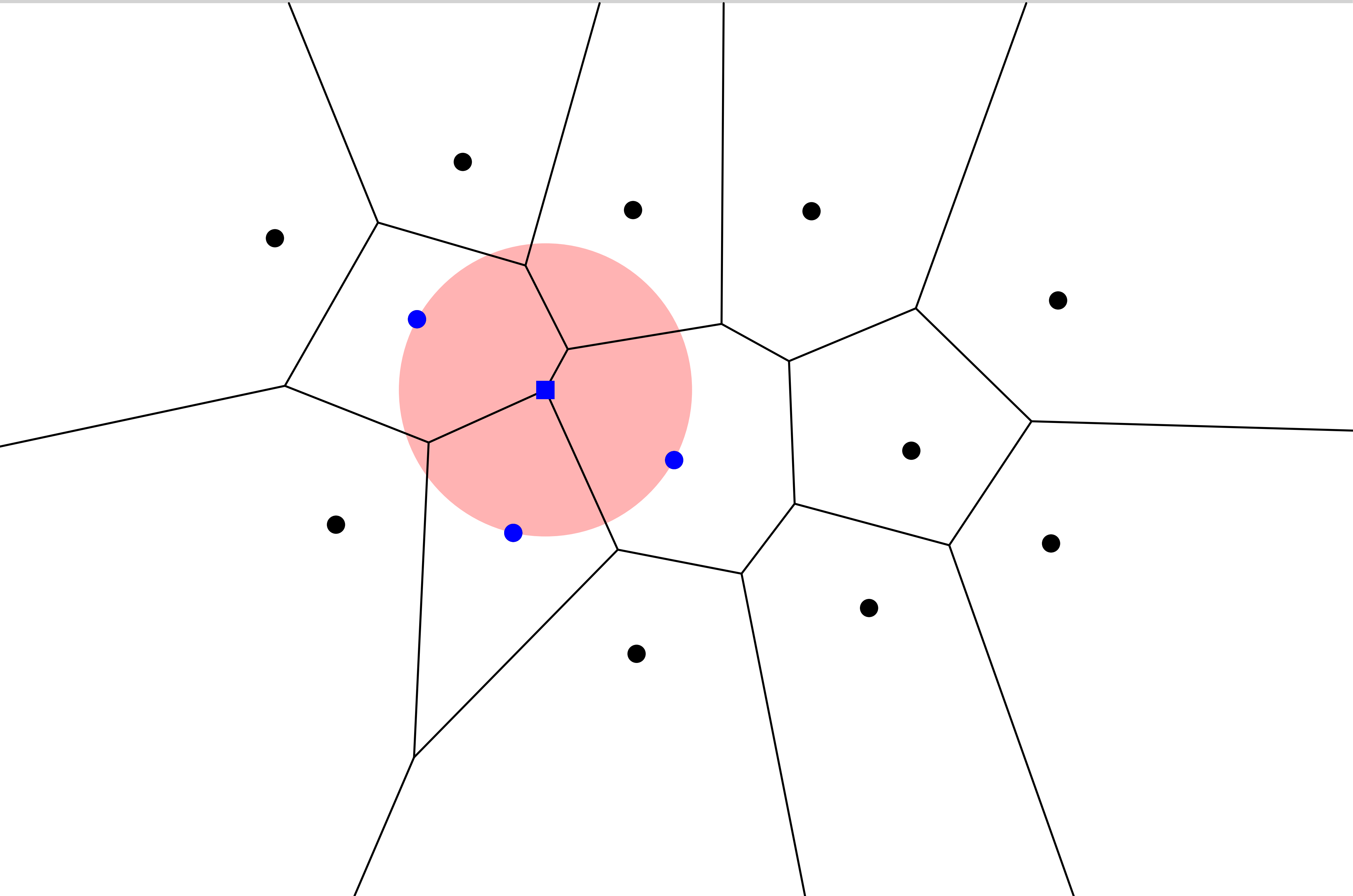
[復習] ボロノイ図：例



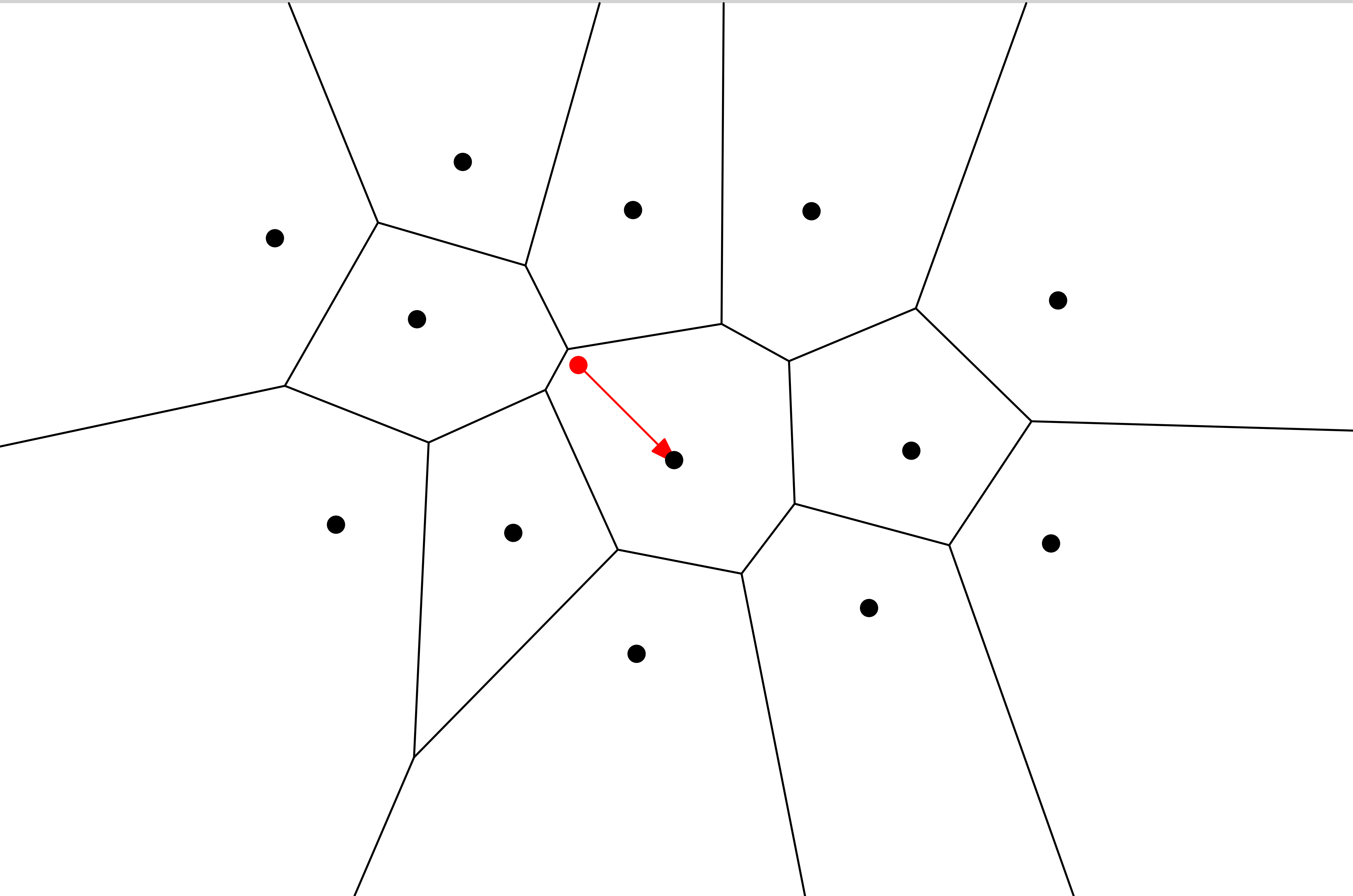
[復習] ボロノイ図：例



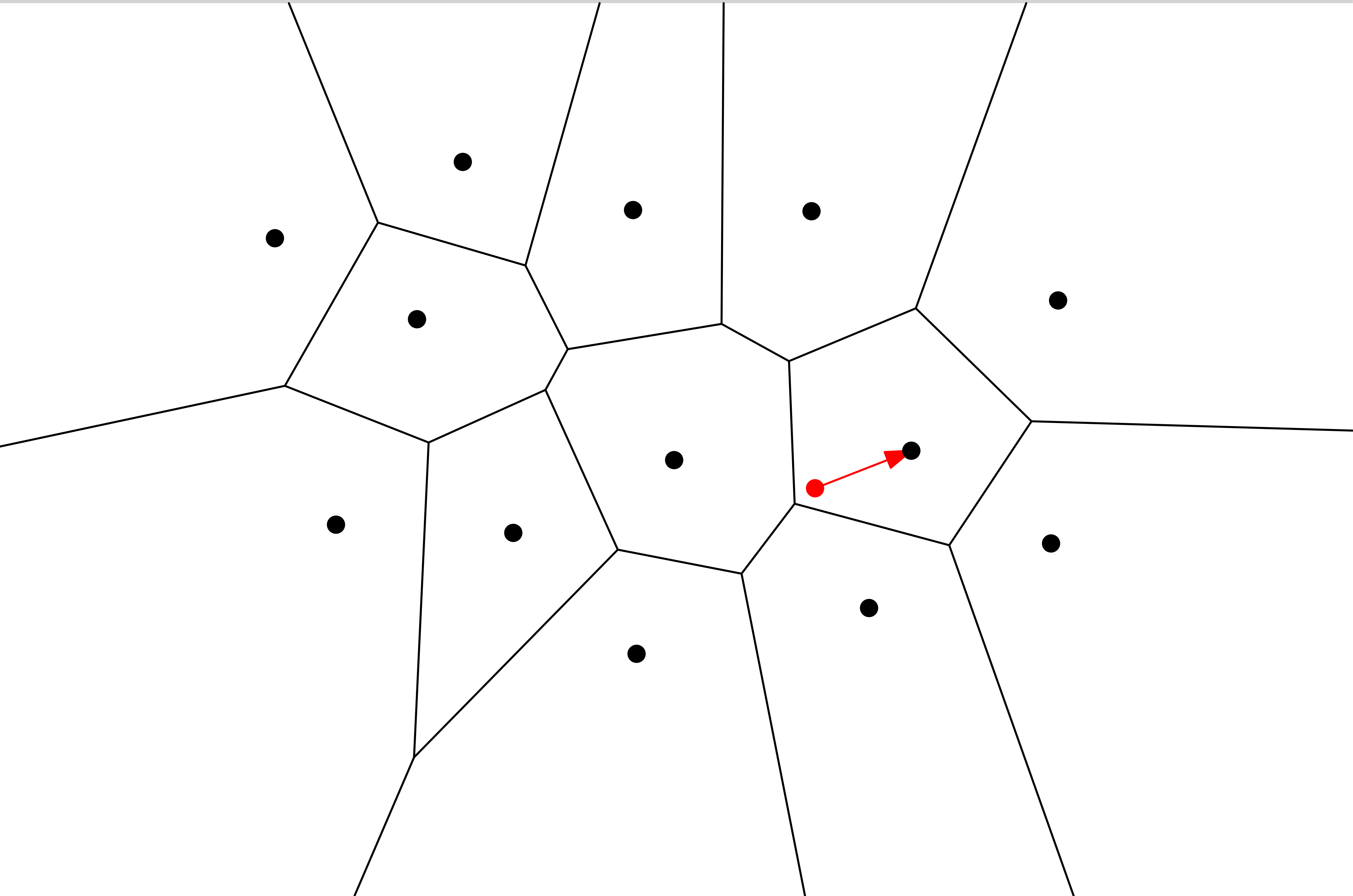
[復習] ボロノイ図：例



[復習] ボロノイ図：例



[復習] ボロノイ図：例



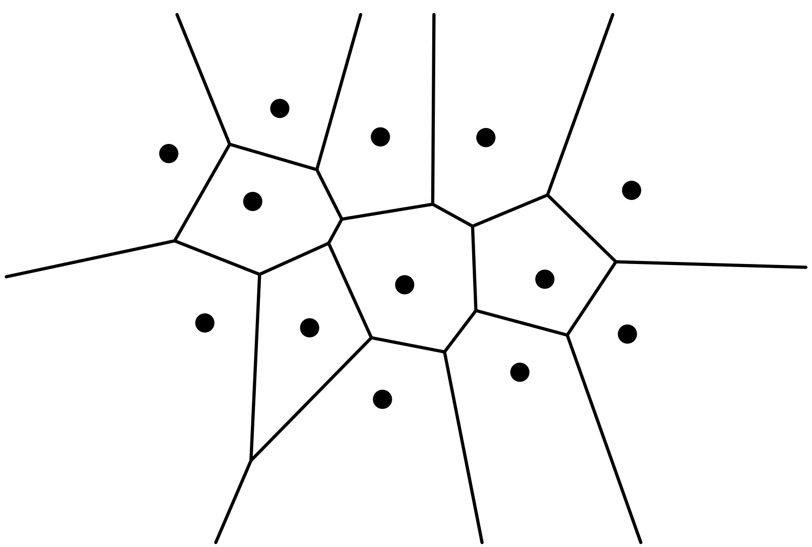
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：ボロノイ図

P の **ボロノイ図** とは，次の図形 $V(\boldsymbol{p})$ による $\mathbb{R}^d$ の分割

$$V(\boldsymbol{p}) = \left\{ \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{p} \text{ と } \boldsymbol{q} \text{ の距離} \le \boldsymbol{r} \text{ と } \boldsymbol{q} \text{ の距離} \\ \forall\, \boldsymbol{r} \in P - \{\boldsymbol{p}\} \end{array} \right\}$$

ただし，$\boldsymbol{p} \in P$



各点 $\boldsymbol{p} \in P$ を **母点** や **サイト** と呼ぶことがある

ボロノイ図：定義

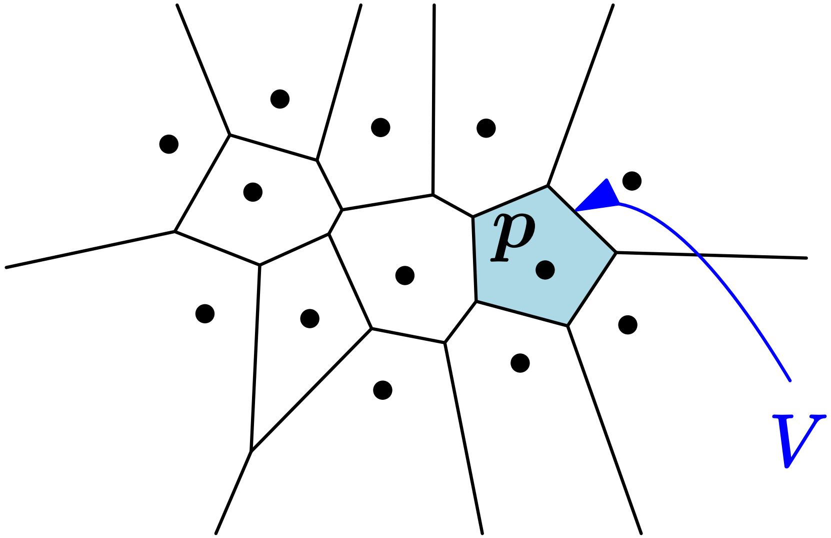
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：ボロノイ図

P の **ボロノイ図** とは，次の図形 $V(\boldsymbol{p})$ による $\mathbb{R}^d$ の分割

$$V(\boldsymbol{p}) = \left\{ \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{p} \text{ と } \boldsymbol{q} \text{ の距離} \leq \boldsymbol{r} \text{ と } \boldsymbol{q} \text{ の距離} \\ \forall\, \boldsymbol{r} \in P - \{\boldsymbol{p}\} \end{array} \right\}$$

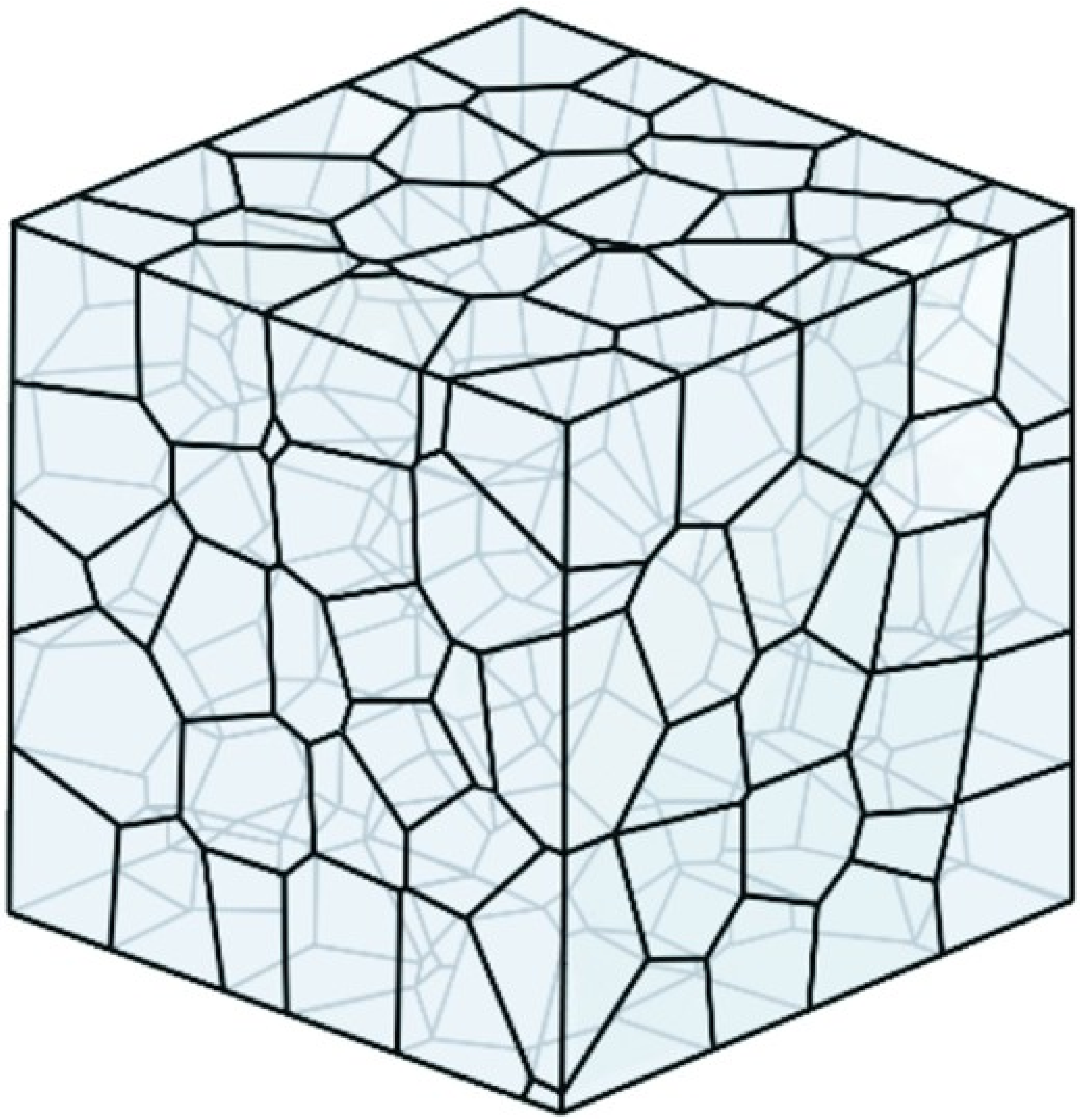
ただし，$\boldsymbol{p} \in P$



各点 $\boldsymbol{p} \in P$ を **母点** や **サイト** と呼ぶことがある

$V(\boldsymbol{p})$ $\leftarrow$ $\boldsymbol{p}$ の**ボロノイ領域**

ボロノイ図：3 次元の例



(Cheng, Liu, Liu, Cao ’22)

「距離」とは？

今回の前半

- ユークリッド距離 を扱う

今回の後半

- その他の距離 を扱う

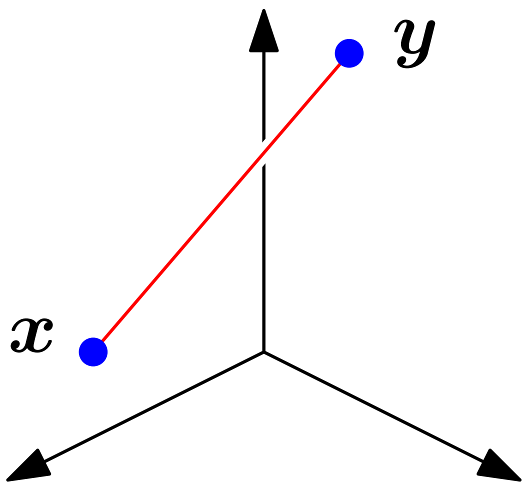
ユークリッド距離

点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$

定義：ユークリッド距離

点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の **ユークリッド距離** とは，次の量のこと

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}$$



等距離面

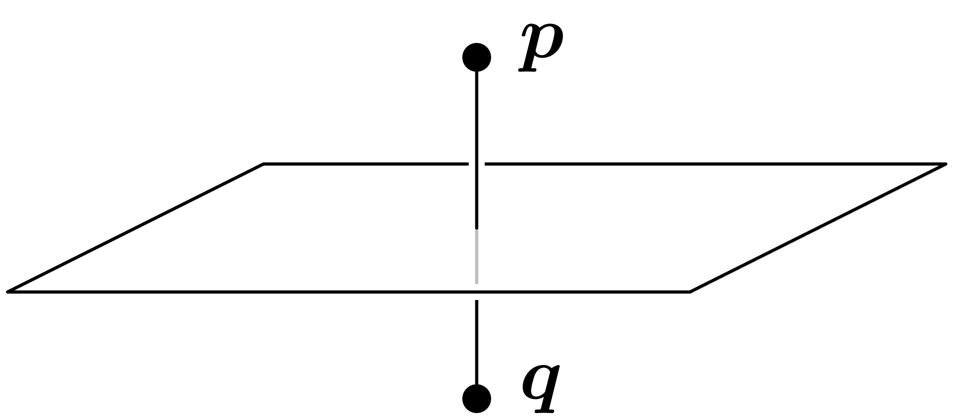
$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の等距離面上にある

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - p_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - q_i)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{d}(x_i^2 - 2x_ip_i + p_i^2) = \sum_{i=1}^{d}(x_i^2 - 2x_iq_i + q_i^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{d}(2(q_i - p_i))x_i + \sum_{i=1}^{d}(p_i^2 - q_i^2) = 0$$

$\mathbb{R}^d$ における超平面を表す



ボロノイ領域は凸多面集合

性質：ボロノイ領域は凸多面集合

ボロノイ領域は凸多面集合

- 特に，有界であれば，凸多面体

証明：$\boldsymbol{p}$ のボロノイ領域 $V(\boldsymbol{p})$ は次のように書ける

$$V(\boldsymbol{p}) = \bigcap_{\boldsymbol{q} \in P - \{\boldsymbol{p}\}} \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d} (2(q_i - p_i)) x_i + \sum_{i=1}^{d} (p_i^2 - q_i^2) \leq 0 \right\}$$

これは，有限個の閉半空間の共通部分なので，凸多面集合

$\square$

ボロノイ図の面

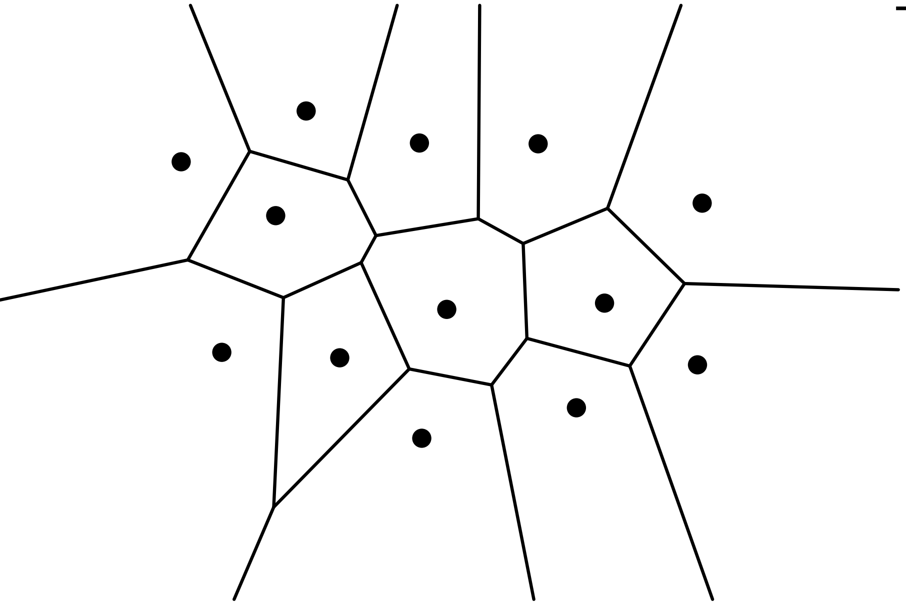
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：ボロノイ図の面

P のボロノイ図の **面** とは，$Q \subseteq P$ に対して，

$$\bigcap_{q \in Q} V(q)$$

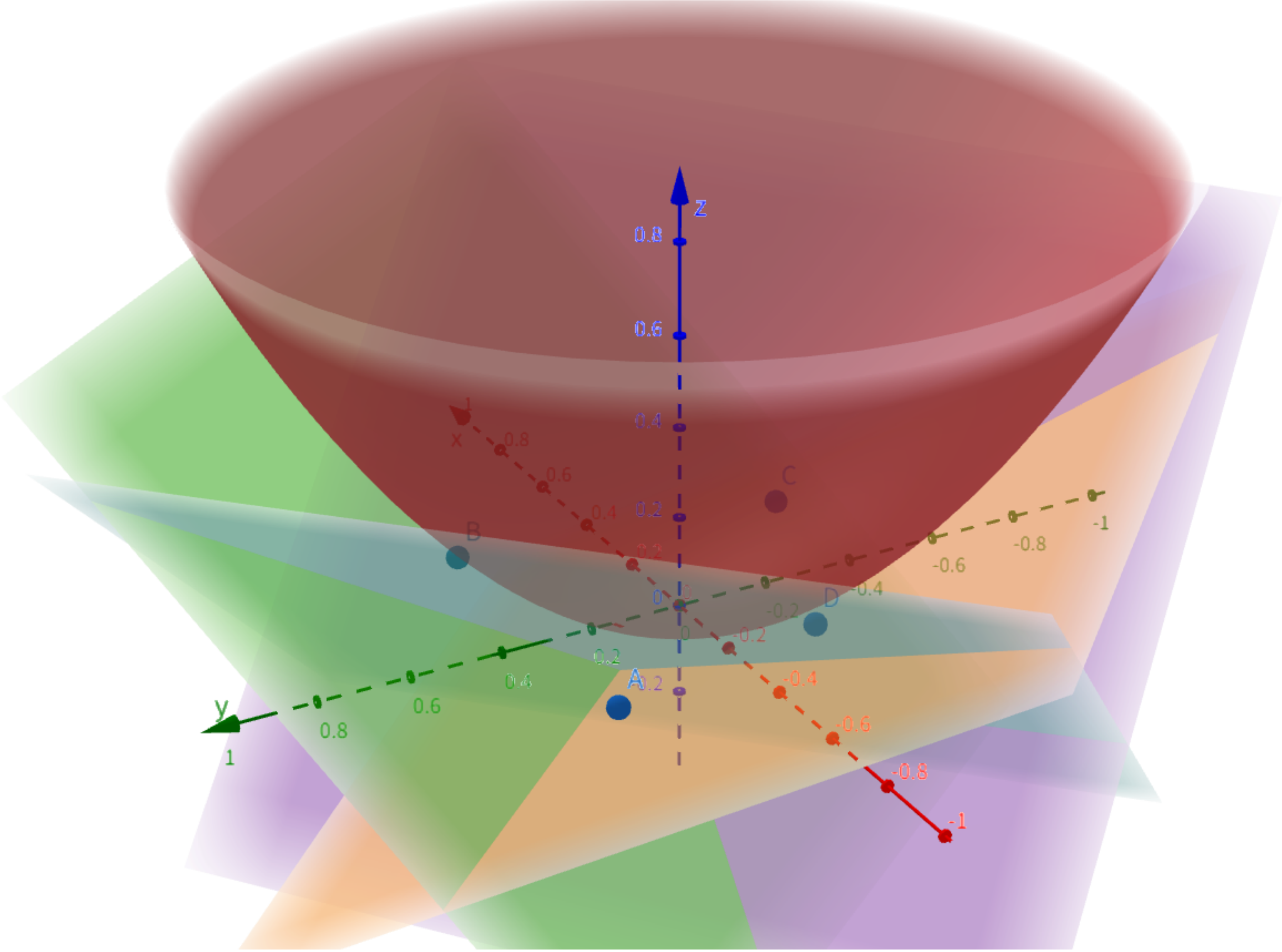
と書ける非空の集合



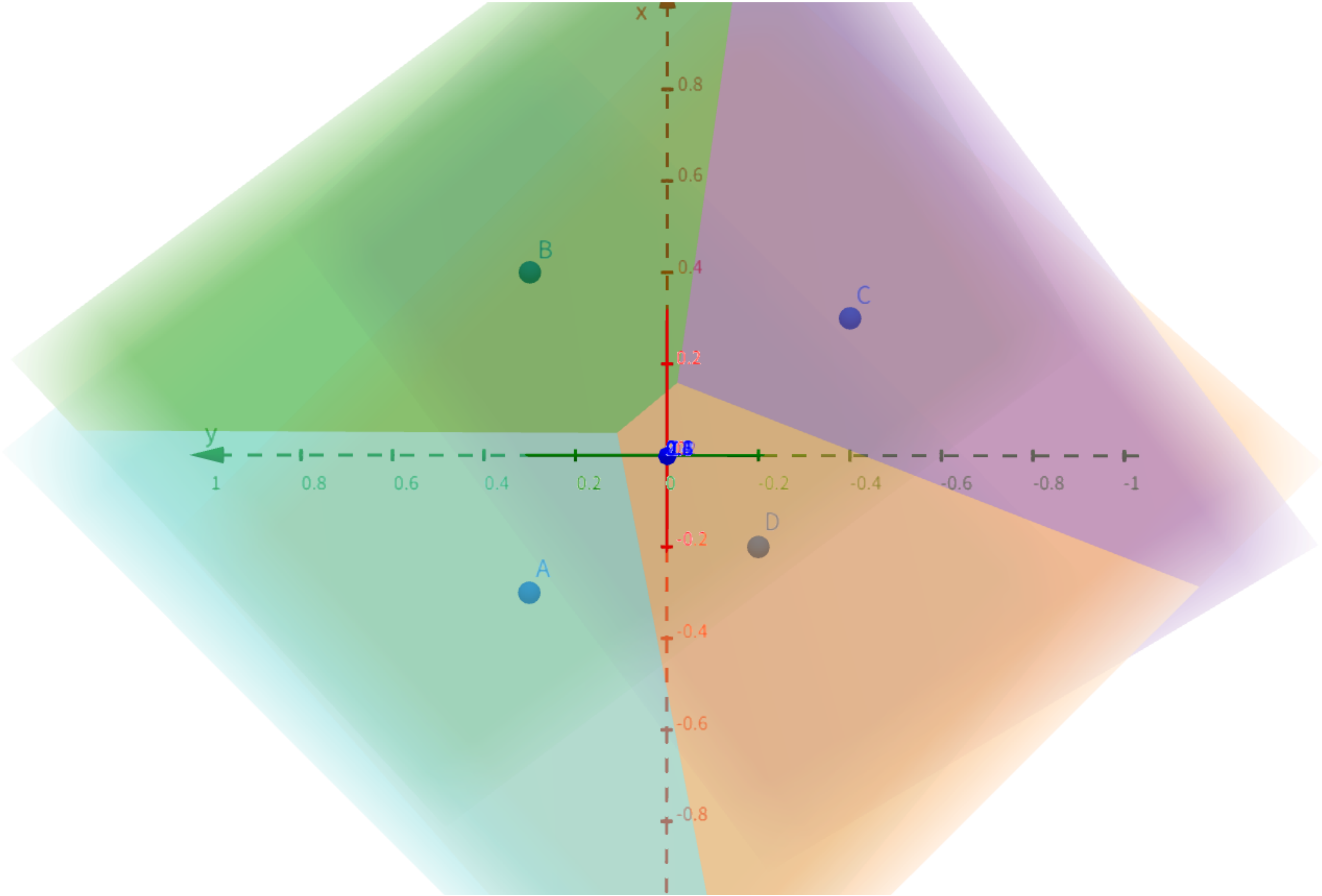
性質：ボロノイ図の面は凸多面集合

- ボロノイ頂点：0 次元面
- ボロノイ辺：1 次元面
- ボロノイ領域 (胞)：d 次元面

ボロノイ図と上側エンベロープ：例



ボロノイ図と上側エンベロープ：例 (続)

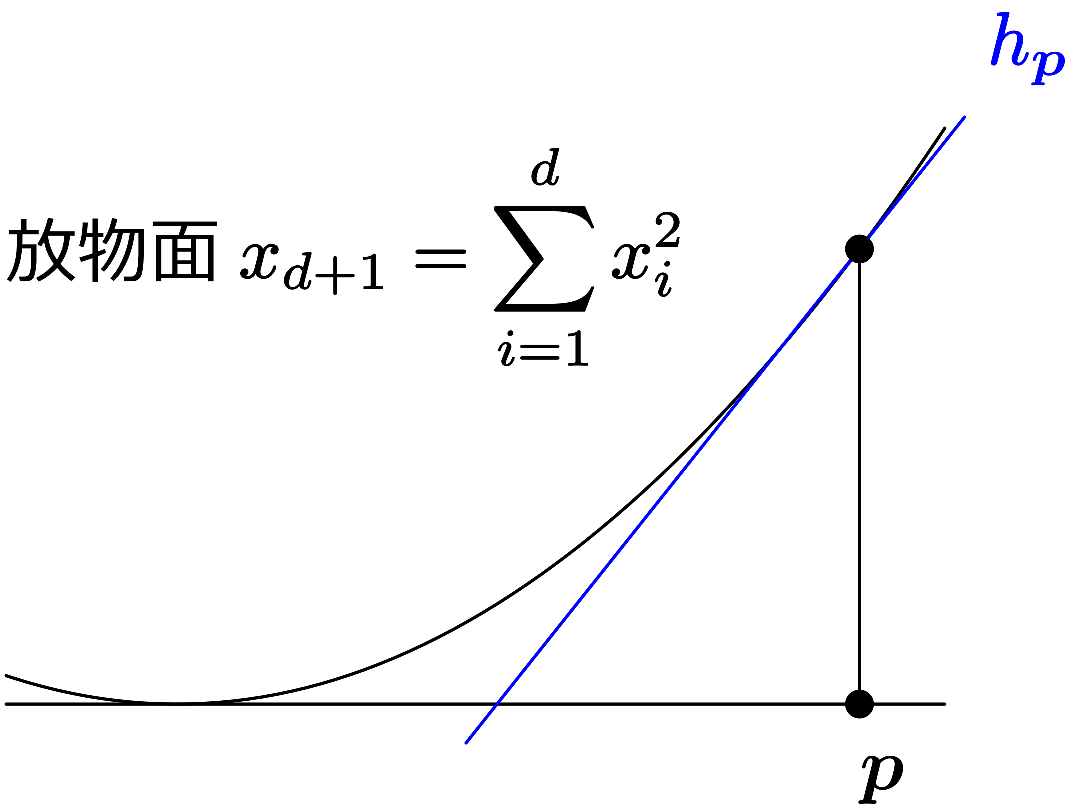


ボロノイ図と上側エンベロープ：準備

点 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_d) \in \mathbb{R}^d$

超平面 $h_{\boldsymbol{p}} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; x_{d+1} = \sum_{i=1}^{d} (2p_i x_i - p_i^2) \right\}$

放物面 $x_{d+1} = \sum_{i=1}^{d} x_i^2$



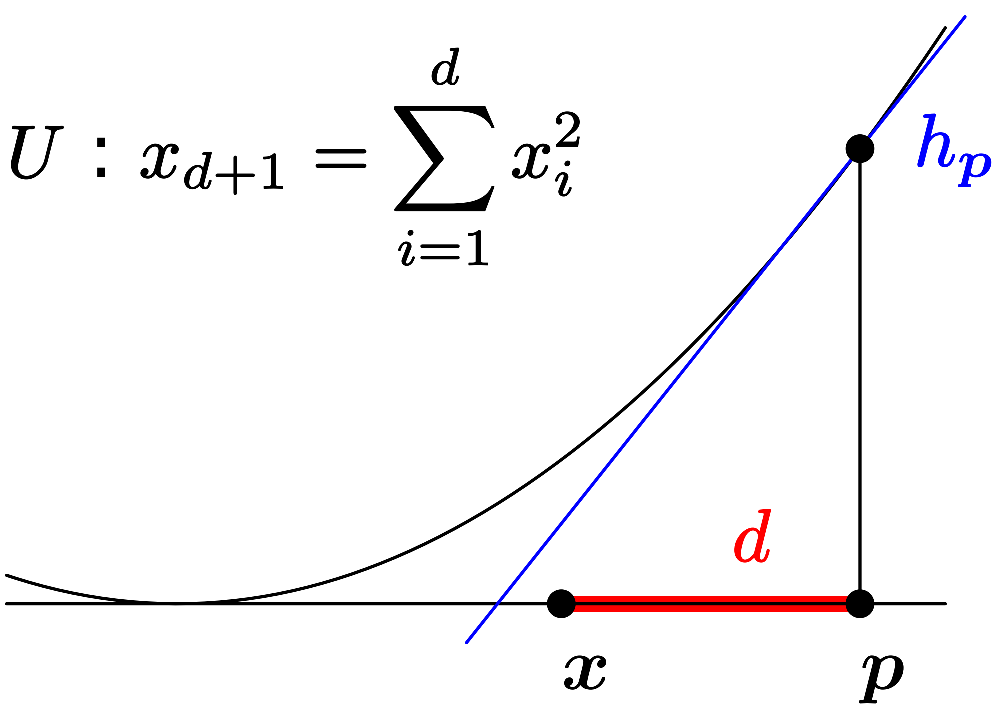
ボロノイ図と上側エンベロープ：命題

点 $p \in \mathbb{R}^d$，超平面 $h_p = \{x \mid x_{d+1} = \sum(2p_i x_i - p_i^2)\}$
放物面 $U = \{x \mid x_{d+1} = \sum x_i^2\}$

性質：ユークリッド距離と放物面

$d =$ 点 $x \in \mathbb{R}^d$ と p の距離 $\Rightarrow$
$d^2 = U$ と h_p の x における x_{d+1} 方向の距離

$$U : x_{d+1} = \sum_{i=1}^{d} x_i^2$$



ボロノイ図と上側エンベロープ：命題

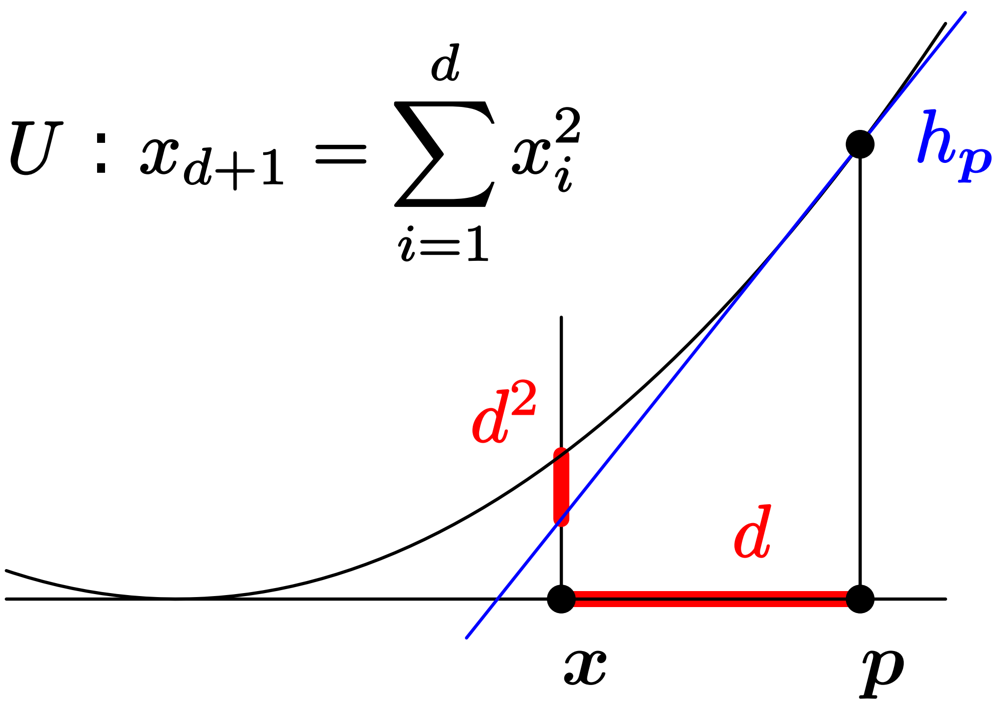
点 $p \in \mathbb{R}^d$，超平面 $h_p = \{x \mid x_{d+1} = \sum(2p_i x_i - p_i^2)\}$

放物面 $U = \{x \mid x_{d+1} = \sum x_i^2\}$

性質：ユークリッド距離と放物面

$d =$ 点 $x \in \mathbb{R}^d$ と p の距離 $\Rightarrow$

$d^2 = U$ と h_p の x における x_{d+1} 方向の距離



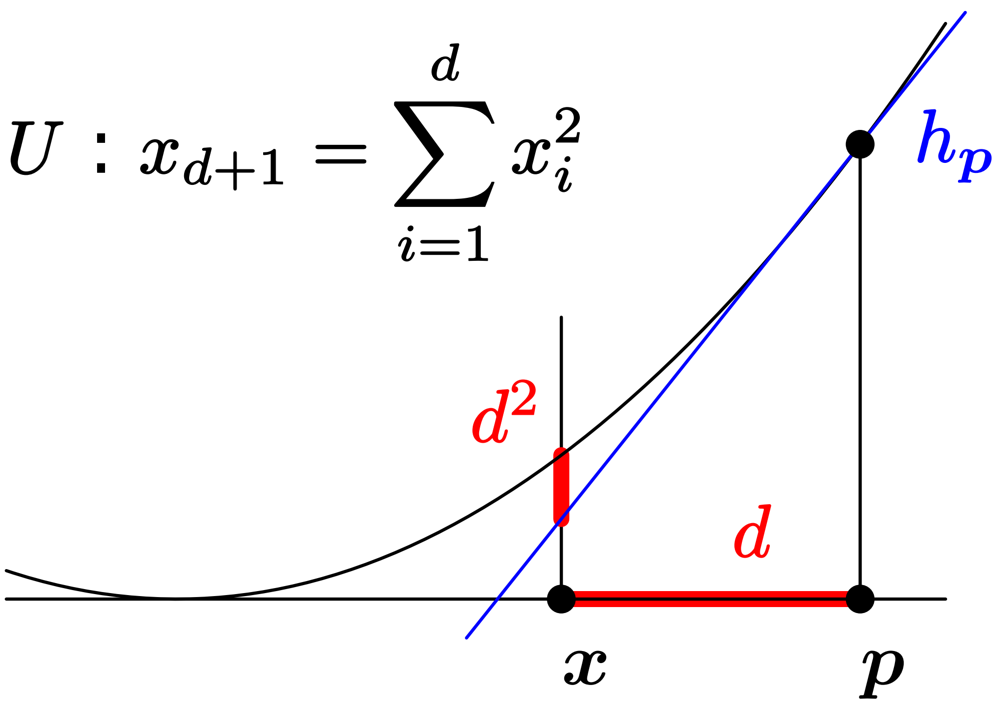
ボロノイ図と上側エンベロープ：命題

点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$，超平面 $h_{\boldsymbol{p}} = \{\boldsymbol{x} \mid x_{d+1} = \sum(2p_i x_i - p_i^2)\}$
放物面 $U = \{\boldsymbol{x} \mid x_{d+1} = \sum x_i^2\}$

性質：ユークリッド距離と放物面

$d =$ 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ と $\boldsymbol{p}$ の距離 $\Rightarrow$
$d^2 = U$ と $h_{\boldsymbol{p}}$ の $\boldsymbol{x}$ における x_{d+1} 方向の距離

$$U : x_{d+1} = \sum_{i=1}^{d} x_i^2$$



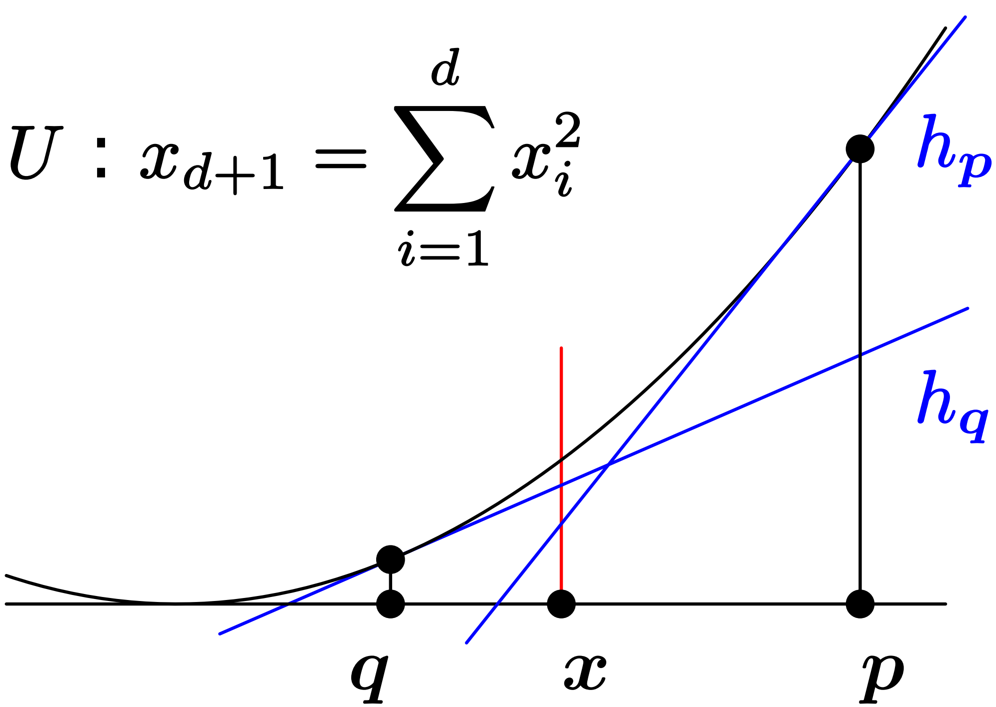
$$\begin{aligned}
&\sum x_i^2 - \sum(2p_i x_i - p_i^2) \\
&= \sum(x_i^2 - 2p_i x_i + p_i^2) \\
&= \sum(x_i - p_i)^2 \\
&= d^2
\end{aligned}$$

ボロノイ図と上側エンベロープ：命題

点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$，超平面 $h_{\boldsymbol{p}} = \{\boldsymbol{x} \mid x_{d+1} = \sum (2p_i x_i - p_i^2)\}$
放物面 $U = \{\boldsymbol{x} \mid x_{d+1} = \sum x_i^2\}$

性質：ユークリッド距離と放物面

$d =$ 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ と $\boldsymbol{p}$ の距離 $\Rightarrow$
$d^2 = U$ と $h_{\boldsymbol{p}}$ の $\boldsymbol{x}$ における x_{d+1} 方向の距離



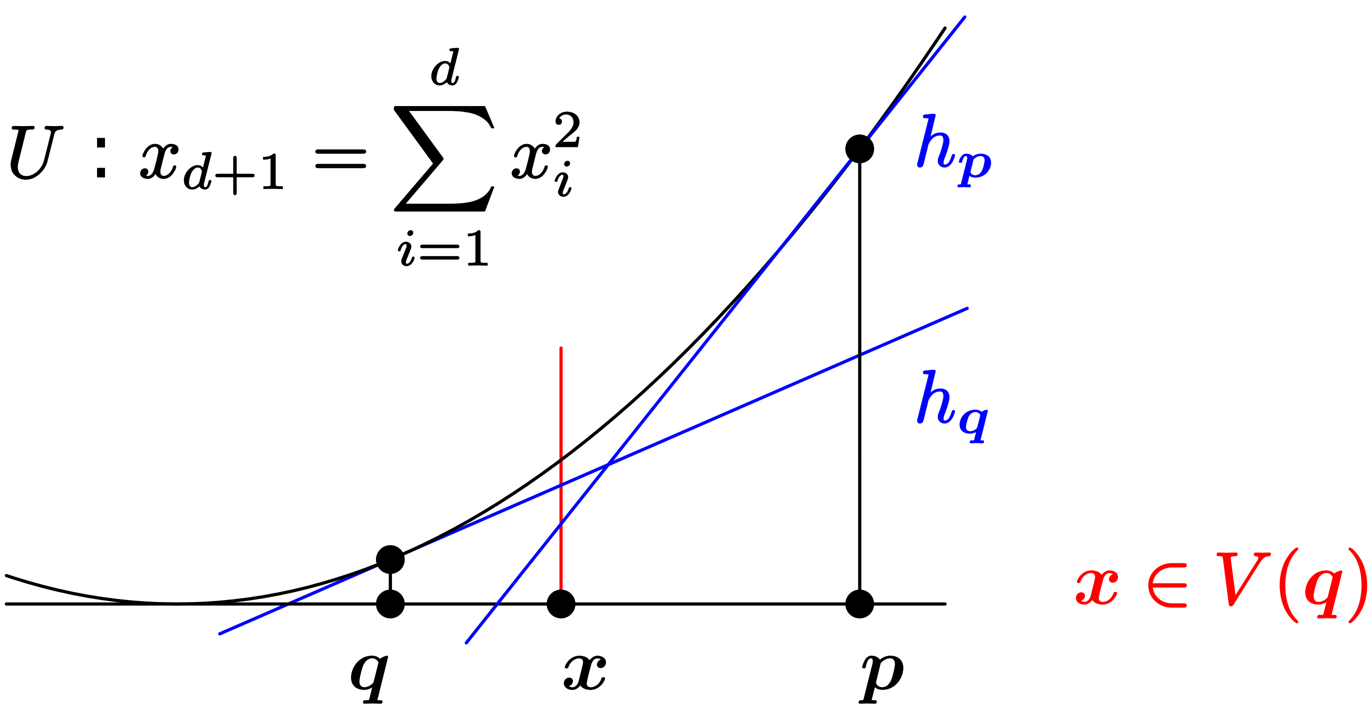
点 $p \in \mathbb{R}^d$, 超平面 $h_p = \{x \mid x_{d+1} = \sum(2p_i x_i - p_i^2)\}$

放物面 $U = \{x \mid x_{d+1} = \sum x_i^2\}$

性質：ユークリッド距離と放物面

$d =$ 点 $x \in \mathbb{R}^d$ と p の距離 $\Rightarrow$

$d^2 = U$ と h_p の x における x_{d+1} 方向の距離

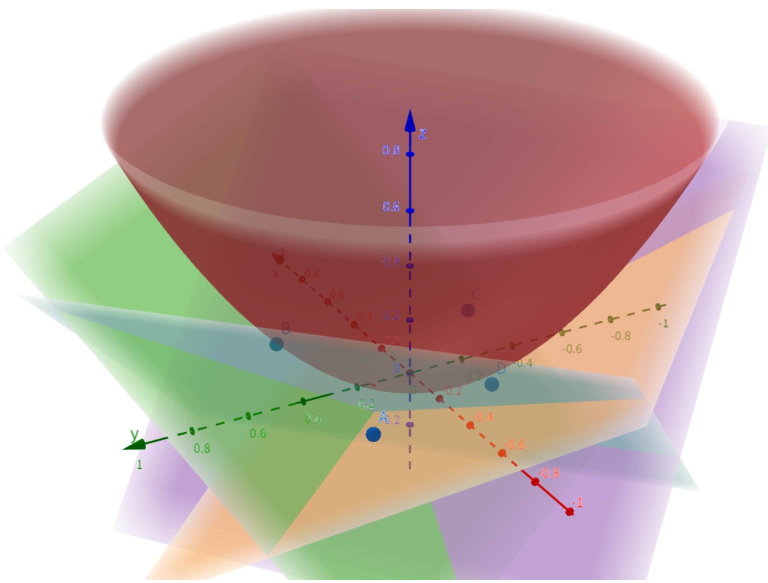


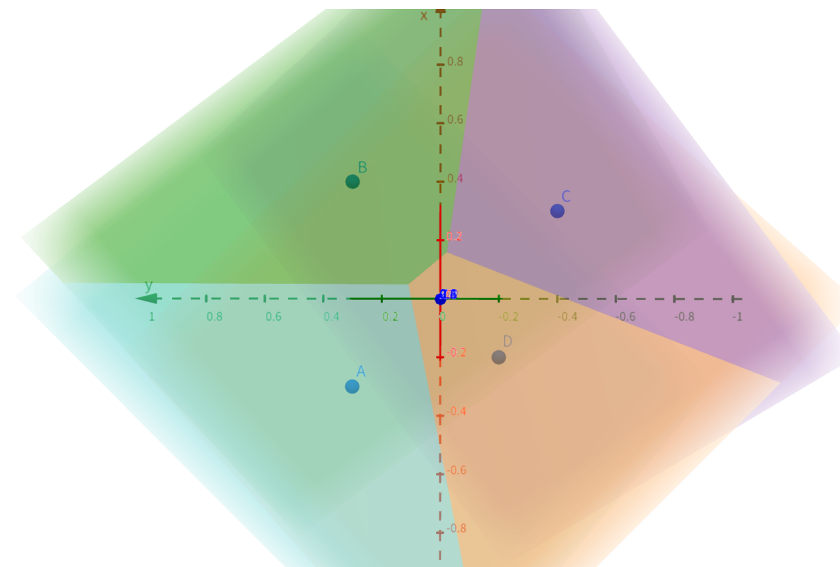
ボロノイ図と上側エンベロープ

前のページの議論から，次の性質が得られる

性質：ボロノイ図と上側エンベロープ

有限点集合 P のボロノイ図は
超平面配置 $\mathcal{A} = \{h_p \mid p \in P\}$ の上側エンベロープから
得られる





双対変換を通して，凸包の計算に帰着される

目次

ここからの話題

いままでの話

距離として次を扱った

- ユークリッド距離 (2 次元，d 次元)
- マンハッタン距離 (2 次元)

ここからの話

一般的に「距離」を扱う

- 距離の公理を導入する

距離と凸集合の関係を見る

- そこからさまざまな距離を得る

ユークリッド距離が満たす性質 (1), (2)

ユークリッド距離の性質 (1) : 非退化性

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

ユークリッド距離の性質 (2) : 対称性

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ に対して

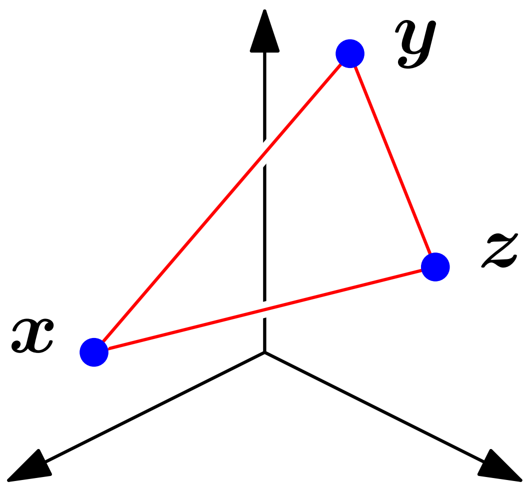
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (y_i - x_i)^2}$$

ユークリッド距離が満たす性質 (3)

ユークリッド距離の性質 (3)：三角不等式

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(z_i - y_i)^2}$$



距離とは？

一般的に，次を満たす関数 μ の値を距離と呼ぶことにする

定義：距離

関数 $\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が次を満たすとき
μ を **距離関数** と呼ぶ

- **非退化性**：$\mu(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- **対称性**：$\mu(x, y) = \mu(y, x)$
- **三角不等式**：$\mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$

距離の公理

注意：$\mu(x, y) \geq 0$ (演習問題)

距離の例

- ユークリッド距離

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}$$

- マンハッタン距離

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$$

- L_p 距離 ($p \geq 1$，整数でなくてもよい)

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

- 楕円距離 ($A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ は対称正定値)

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} A (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}$$

距離の例

- ユークリッド距離

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}$$

$p = 2$

- マンハッタン距離

$p = 1$

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$$

- L_p 距離 ($p \geq 1$，整数でなくてもよい)

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

- 楕円距離 ($A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ は対称正定値)

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} A (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}$$

距離の例

- ユークリッド距離

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}$$

$A = E$

- マンハッタン距離

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$$

- L_p 距離 ($p \geq 1$，整数でなくてもよい)

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

- 楕円距離 ($A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ は対称正定値)

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} A (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}$$

距離の例

- ユークリッド距離

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}$$

- マンハッタン距離

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$$

- L_p 距離 ($p \geq 1$，整数でなくてもよい)

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

- 楕円距離 ($A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ は対称正定値)

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} A (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}$$

このそれぞれが

非退化性，対称性，

三角不等式を満たすのを

確認するのは面倒

目標　距離　(ただし，ある条件を満たす)

前のページの例はすべて
この条件を満たす

ノルム

凸集合 (ただし，ある条件を満たす)

[復習] 凸集合

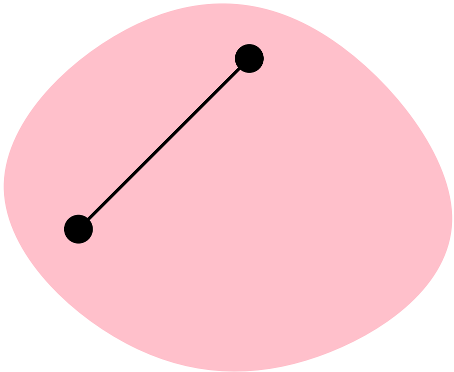
$X \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：凸集合

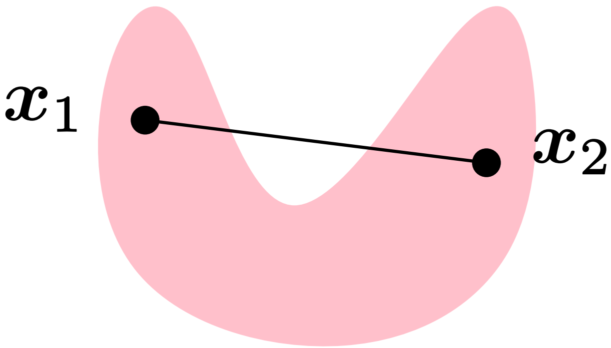
X が **凸集合** であるとは，次を満たすこと

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in X$$

直感：2 点 $\in X \Rightarrow$ その 2 点を結ぶ線分 $\subseteq X$



凸集合である



凸集合ではない

注：凹集合とは言わない

ノルム：定義

次を満たす関数 $\|\cdot\|$ (の値) をノルムと呼ぶ

定義：ノルム

関数 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が次を満たすとき
$\|\cdot\|$ を **ノルム** と呼ぶ

- **独立性**：$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
- **斉次性**：$\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\| \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
- **三角不等式**：$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

$\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ のノルムと呼ぶ

特に，独立性より，$\|\boldsymbol{0}\| = 0$

また，$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$　(演習問題)

ノルムの公理

ノルムの例

- ユークリッド・ノルム

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$$

- マンハッタン・ノルム

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$$

- L_p ノルム ($p \geq 1$，整数でなくてもよい)

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

- 楕円ノルム ($A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ は対称正定値)

$$\|\boldsymbol{x}\|_A = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}$$

性質：ノルムから距離へ

$\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ をノルムとする，このとき，

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$$

とすると，$\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は距離関数である

例：　ユークリッド・ノルム　$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$

↓

ユークリッド距離　$\mu(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}$

ノルム → 距離：証明 (1)

証明：μ が非退化性，対称性，三角不等式を満たすことを示す

証明：μ が非退化性，対称性，三角不等式を満たすことを示す

$\boxed{\text{非退化性}}$ $\quad \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とすると，$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$

$$
\begin{aligned}
&= \|\mathbf{0}\| \\
&= 0 \ (\because \text{独立性})
\end{aligned}
$$

ノルム → 距離：証明 (1)

証明：μ が非退化性，対称性，三角不等式を満たすことを示す

$\boxed{\text{非退化性}}$ $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とすると，$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$
$$\begin{aligned} &= \|\mathbf{0}\| \\ &= 0 \ (\because \text{独立性}) \end{aligned}$$
- $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ とすると，$0 = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$
- 独立性より，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ $\square$

ノルム → 距離：証明 (2)

<u>証明</u>：μ が非退化性，対称性，三角不等式を満たすことを示す

$\boxed{\text{対称性}}$ $\quad \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

- $$\begin{aligned} \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \\ &= \|-(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\| \\ &= |-1| \cdot \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \quad \text{(斉次性)} \\ &= \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

□

ノルム → 距離：証明 (2)

証明：μ が非退化性，対称性，三角不等式を満たすことを示す

対称性　$\mu(x, y) = \mu(y, x)$

- $$\begin{aligned} \mu(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|-(y - x)\| \\ &= |-1| \cdot \|y - x\| \quad \text{(斉次性)} \\ &= \mu(y, x) \end{aligned}$$ $\square$

三角不等式　$\mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$

- $$\begin{aligned} \mu(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \quad \text{(三角不等式)} \\ &= \mu(x, z) + \mu(z, y) \end{aligned}$$ $\square$

ノルム → 凸集合

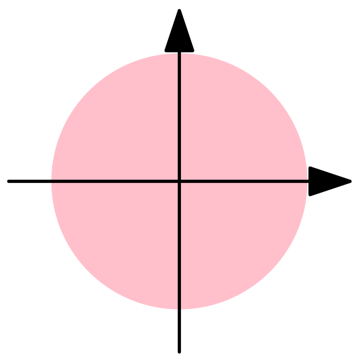
性質：ノルムから凸集合へ

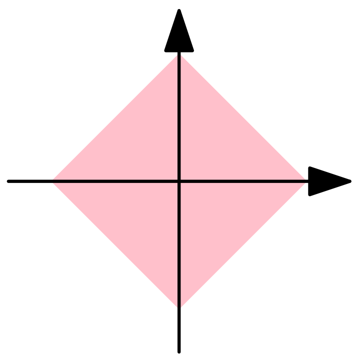
$\|\cdot\|: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ をノルムとする，このとき，

$$B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$$

とすると，B は凸集合

ユークリッド・ノルム　マンハッタン・ノルム





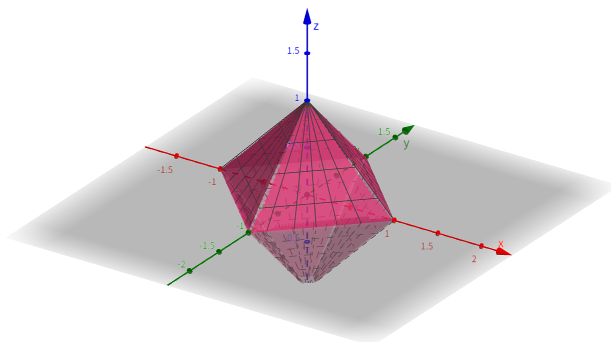
B をノルム $\|\cdot\|$ における単位球体と呼ぶことがある

ノルム → 凸集合：他の例

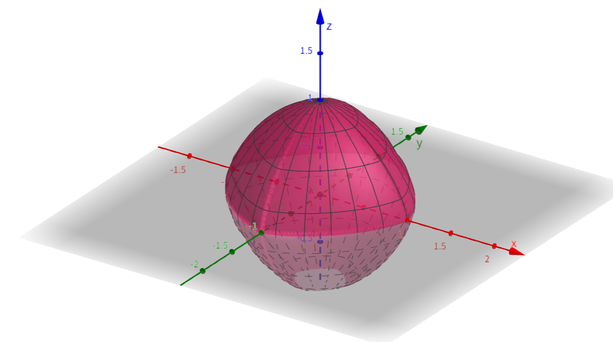
L_p ノルムの単位球体 ($d = 3$ の場合)

$$B = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \left(\sum |x_i|^p \right)^{1/p} \leq 1 \right\}$$

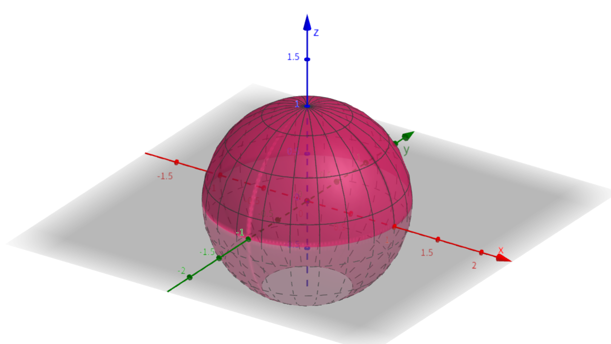
$p = 1$



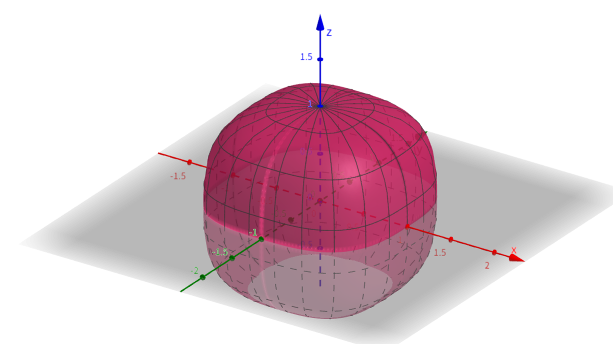
$p = 1.5$



$p = 2$



$p = 3$



ノルム → 凸集合：証明

証明：$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B, \lambda \in [0,1]$ とする（つまり，$\|\boldsymbol{x}\| \leq 1, \|\boldsymbol{y}\| \leq 1$）

- 目標は $\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in B$ を示すこと
- （つまり，$\|\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}\| \leq 1$ を示すこと）

ノルム → 凸集合：証明

<u>証明</u>：$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B, \lambda \in [0,1]$ とする (つまり，$\|\boldsymbol{x}\| \leq 1, \|\boldsymbol{y}\| \leq 1$)

- 目標は $\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in B$ を示すこと
- (つまり，$\|\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}\| \leq 1$ を示すこと)
- $\|\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}\|$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\lambda \boldsymbol{x}\| + \|(1-\lambda)\boldsymbol{y}\| && \text{(三角不等式)} \\
&= |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\| + |(1-\lambda)| \cdot \|\boldsymbol{y}\| && \text{(斉次性)} \\
&= \lambda \cdot \|\boldsymbol{x}\| + (1-\lambda) \cdot \|\boldsymbol{y}\| && (\lambda \in [0,1]) \\
&\leq \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 && (\|\boldsymbol{x}\| \leq 1, \|\boldsymbol{y}\| \leq 1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

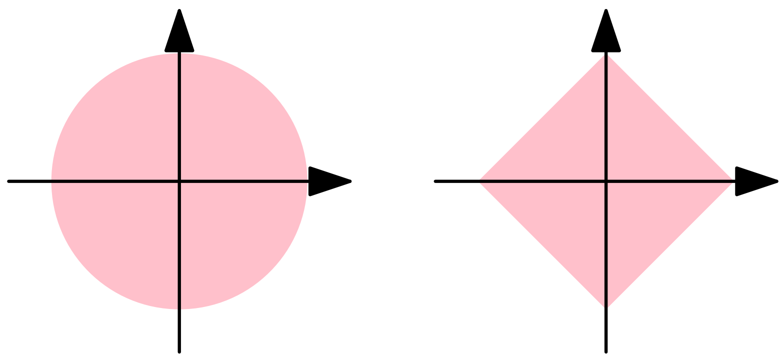
□

単位球体の性質

ノルム $\|\cdot\|$ に対して，$B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$

性質：単位球体の性質

1. B は中心対称 $(\boldsymbol{x} \in B \Rightarrow -\boldsymbol{x} \in B)$
2. $\mathrm{lin}(B) = \mathbb{R}^d$
3. B は有界閉集合



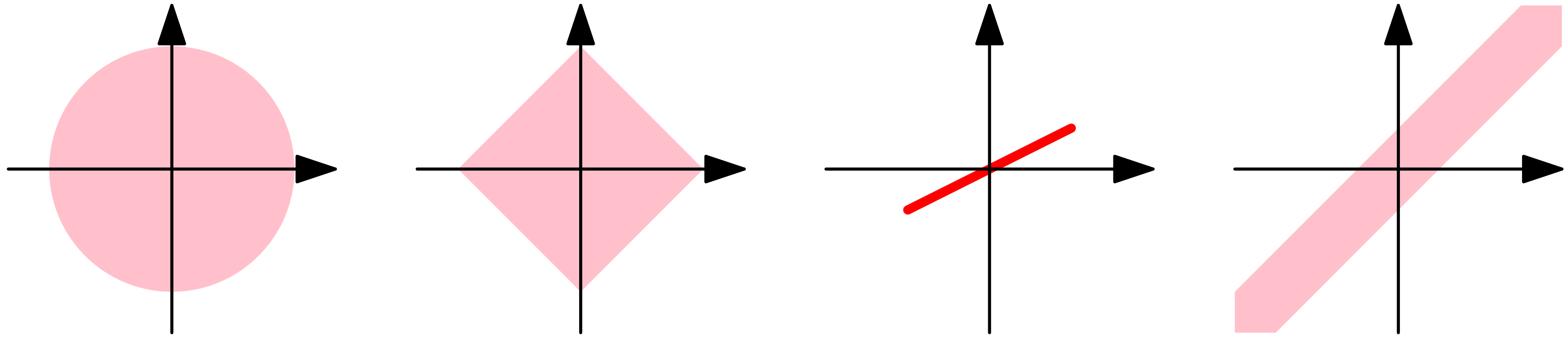
「3. B は有界閉集合」の証明は省略 (位相に関する準備が必要)

単位球体の性質

ノルム $\|\cdot\|$ に対して，$B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$

性質：単位球体の性質

1. B は中心対称 $(\boldsymbol{x} \in B \Rightarrow -\boldsymbol{x} \in B)$
2. $\mathrm{lin}(B) = \mathbb{R}^d$
3. B は有界閉集合

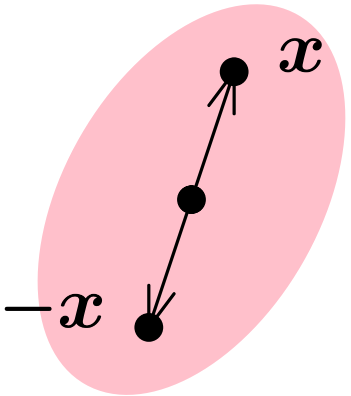


「3. B は有界閉集合」の証明は省略 (位相に関する準備が必要)

単位球体の性質：証明

証明 (中心対称)：$\boldsymbol{x} \in B$ とする (つまり，$\|\boldsymbol{x}\| \leq 1$)

- このとき，$\|-\boldsymbol{x}\| = |-1| \cdot \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\| \leq 1$
- $\therefore -\boldsymbol{x} \in B$



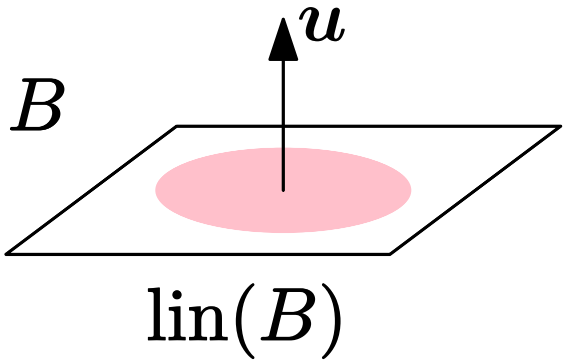
単位球体の性質：証明

証明 (中心対称) : $\boldsymbol{x} \in B$ とする (つまり，$\|\boldsymbol{x}\| \leq 1$)

- このとき，$\|-\boldsymbol{x}\| = |-1| \cdot \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\| \leq 1$
- $\therefore -\boldsymbol{x} \in B$

証明 ($\mathrm{lin}(B) = \mathbb{R}^d$) : $\mathrm{lin}(B) \neq \mathbb{R}^d$ と仮定する

- $\boldsymbol{u} \notin \mathrm{lin}(B)$ を任意にとる
- このとき，任意の $t \neq 0$ に対して，$t\boldsymbol{u} \notin B$
- $\therefore$ 任意の $t \neq 0$ に対して，$\|t\boldsymbol{u}\| > 1$



- $\alpha = \|\boldsymbol{u}\| > 1$ とする
- このとき，$1 < \|\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{u}\| = |\frac{1}{\alpha}| \cdot \|\boldsymbol{u}\| = 1$ となり，矛盾 $\square$

距離，ノルム，凸集合：途中経過

距離関数 $\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (非退化性，対称性，三角不等式)

ノルム $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (独立性，斉次性，三角不等式)

凸集合 $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \le 1\}$

(中心対称，全次元，有界閉)

距離，ノルム，凸集合：途中経過

距離関数 $\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ （非退化性，対称性，三角不等式）

ノルム $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ （独立性，斉次性，三角不等式）

凸集合 $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$

（中心対称，全次元，有界閉）

凸集合 → ノルム

凸集合 $C \subseteq \mathbb{R}^d$

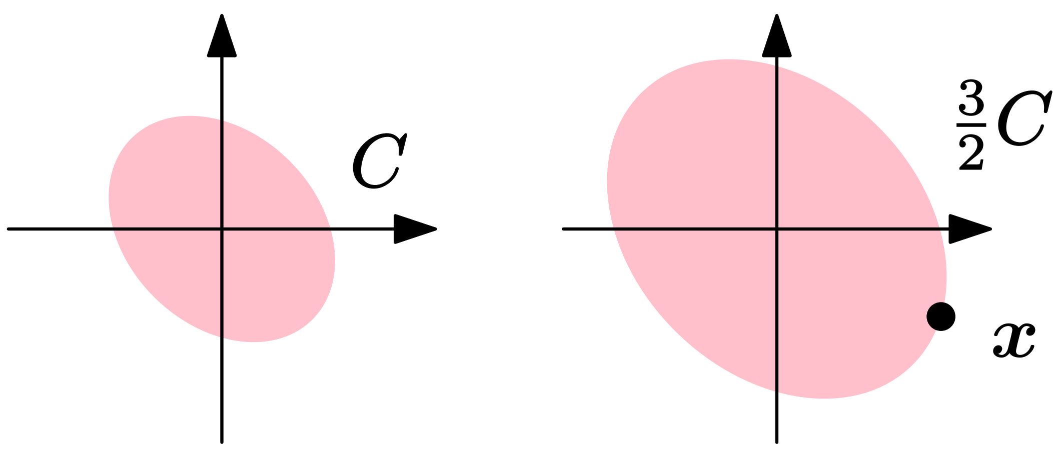
性質：凸集合からノルムへ

C が中心対称，有界，閉で $\mathrm{lin}(C) = \mathbb{R}^d$ を満たすとき，

$$\|x\|_C = \min\{t \geq 0 \mid x \in tC\}$$

とすると，関数 $\|\cdot\|_C \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ はノルムである

ただし，$tC = \{tx \mid x \in C\}$



注意：「有界・閉・$\mathrm{lin}(C) = \mathbb{R}^d$」は min の存在保証に用いる

証明：$\|\cdot\|_C$ がノルムの条件を満たすことを示す

独立性　$\|\boldsymbol{x}\|_C = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

- $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき，

$$\|\boldsymbol{x}\|_C = \min\{t \geq 0 \mid \boldsymbol{x} \in tC\} = 0$$

- $\|\boldsymbol{x}\|_C = 0$ のとき，$\boldsymbol{x} \in 0C = \{\mathbf{0}\}$

$\therefore \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ $\square$

凸集合 → ノルム：証明 (2)

証明：$\|\cdot\|_C$ がノルムの条件を満たすことを示す

$\boxed{\text{斉次性}}$ $\|\alpha x\|_C = |\alpha|\cdot\|x\|_C$ ($\alpha \neq 0$ と仮定してよい)

- $$\|\alpha x\|_C = \min\{t \geq 0 \mid \underline{\alpha x \in tC}\}$$

ある $y \in C$ に対して，$\alpha x = ty$

$$= \min\{t \geq 0 \mid x \in \tfrac{t}{\alpha}C\}$$

$$= \min\{t \geq 0 \mid x \in \tfrac{t}{|\alpha|}C\} \quad \text{(中心対称性)}$$

$$= \min\{|\alpha|s \geq 0 \mid x \in sC\}$$

$$= |\alpha|\cdot\min\{s \geq 0 \mid x \in sC\}$$

$$= |\alpha|\cdot\|x\|_C \qquad \square$$

証明：$\|\cdot\|_C$ がノルムの条件を満たすことを示す

$\boxed{\text{三角不等式}}$ $\quad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_C \le \|\boldsymbol{x}\|_C + \|\boldsymbol{y}\|_C$

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のときは簡単 (なぜ？)
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ で，$\alpha = \|\boldsymbol{x}\|_C, \beta = \|\boldsymbol{y}\|_C$ とする
- このとき，$\therefore \alpha, \beta > 0$ で，$\boldsymbol{x} \in \alpha C, \boldsymbol{y} \in \beta C$
- C が凸なので，$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \dfrac{1}{\alpha}\boldsymbol{x} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \dfrac{1}{\beta}\boldsymbol{y} \in C$
- $\therefore \|\boldsymbol{x}\|_C + \|\boldsymbol{y}\|_C = \alpha + \beta$

$$\ge \min\{t \ge 0 \mid \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in tC\} = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_C$$

$\square$

距離．ノルム．凸集合：途中経過

距離関数 $\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (非退化性，対称性，三角不等式)

$\Big\uparrow$

ノルム $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (独立性，斉次性，三角不等式)

$\Big\downarrow \quad {\color{red}\Big\uparrow}$

凸集合 $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \le 1\}$

(中心対称，全次元，有界閉)

距離．ノルム．凸集合：途中経過

距離関数 $\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (非退化性，対称性，三角不等式)

(並進不変性，斉次性)

ノルム $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (独立性，斉次性，三角不等式)

凸集合 $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$

(中心対称，全次元，有界閉)

ノルム $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

性質：並進不変性・斉次性

$\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を

$$\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d)$$

と定義すると，μ は次を満たす

- **並進不変性**：$\mu(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d)$
- **斉次性**：$\mu(\alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = |\alpha|\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

証明：演習問題

距離関数 $\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

性質：距離からノルムへ

関数 $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$$

と定義すると，μ が並進不変性，斉次性を満たすならば，$\|\cdot\|$ はノルムである

<u>証明</u>：演習問題

L_p ノルムの単位球体の凸性

L_p ノルムの単位球体が凸であることを証明するのに次を使う

性質：ヤングの不等式

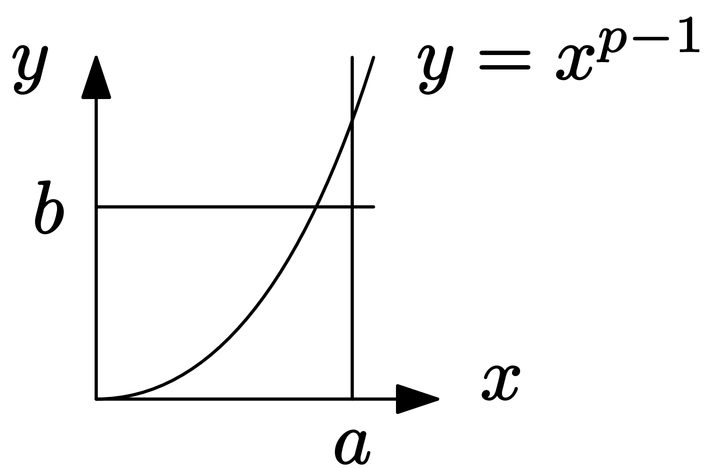
設定

- p, q : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす 1 以上の実数
- a, b : 非負実数

このとき，

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

証明のヒント



L_p ノルムの単位球体の凸性

L_p ノルムの単位球体が凸であることを証明するのに次を使う

性質：ヤングの不等式

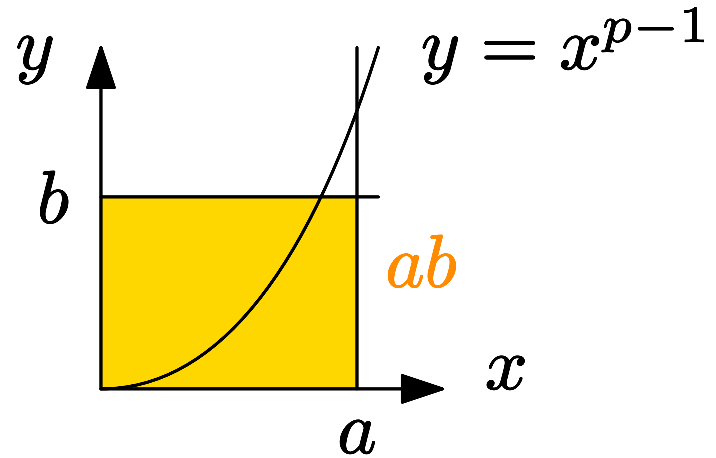
設定

- p, q : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす 1 以上の実数
- a, b : 非負実数

このとき，

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

証明のヒント



L_p ノルムの単位球体が凸であることを証明するのに次を使う

性質：ヤングの不等式

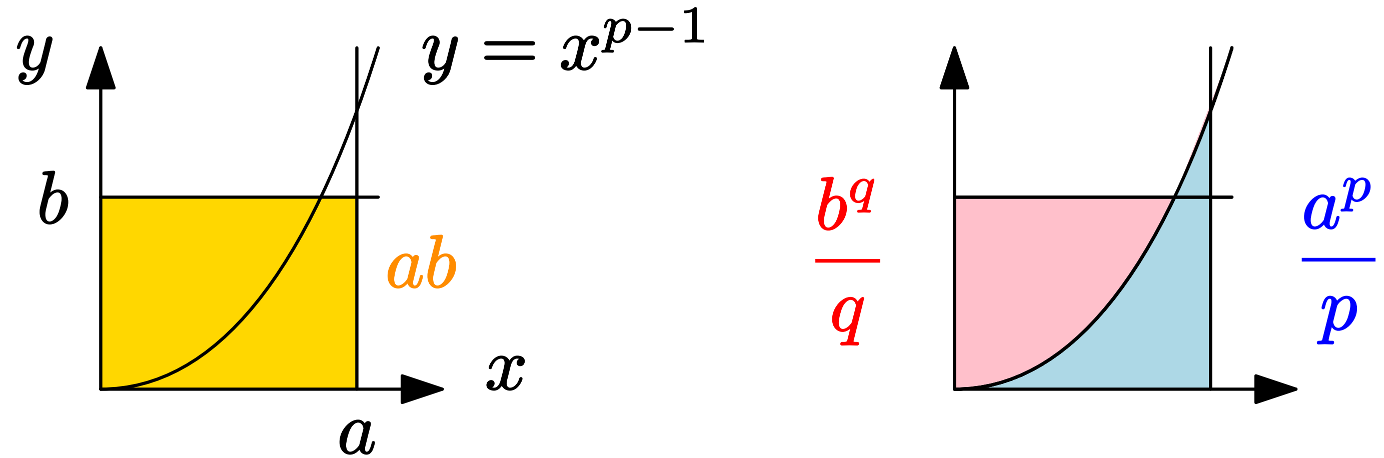
設定

- p, q : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす 1 以上の実数
- a, b : 非負実数

このとき，

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

証明のヒント



まとめ

目標

1. ボロノイ図を上側エンベロープとして捉えられるようになる
   - 重要な技法：放物面による次元の持ち上げ
2. さまざまな距離と凸集合を関係づけられるようになる
   - 重要な概念：ノルム，距離関数

教訓

次元を上げたり，概念を抽象化することで
見通しがよくなることがある