離散数理工学 (2025 年度後学期)

第 10 回

高次元 (4)：点配置と超平面配置

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 1 月 13 日

最終更新：2026 年 1 月 5 日　07:10

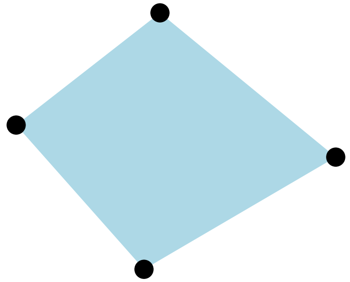
今回の目標

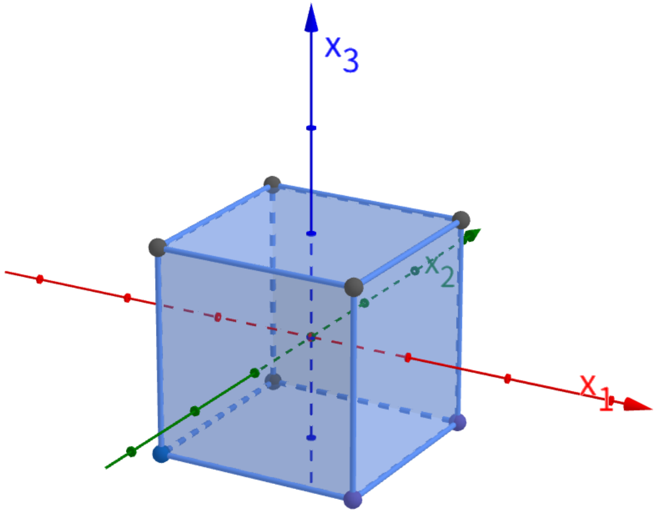
今日の目標

- 巡回多面体の面の数を調べることができる
- 超平面配置に関する用語を正しく用いることができる

定義：凸多面体

凸多面体 とは，有限点集合の凸包





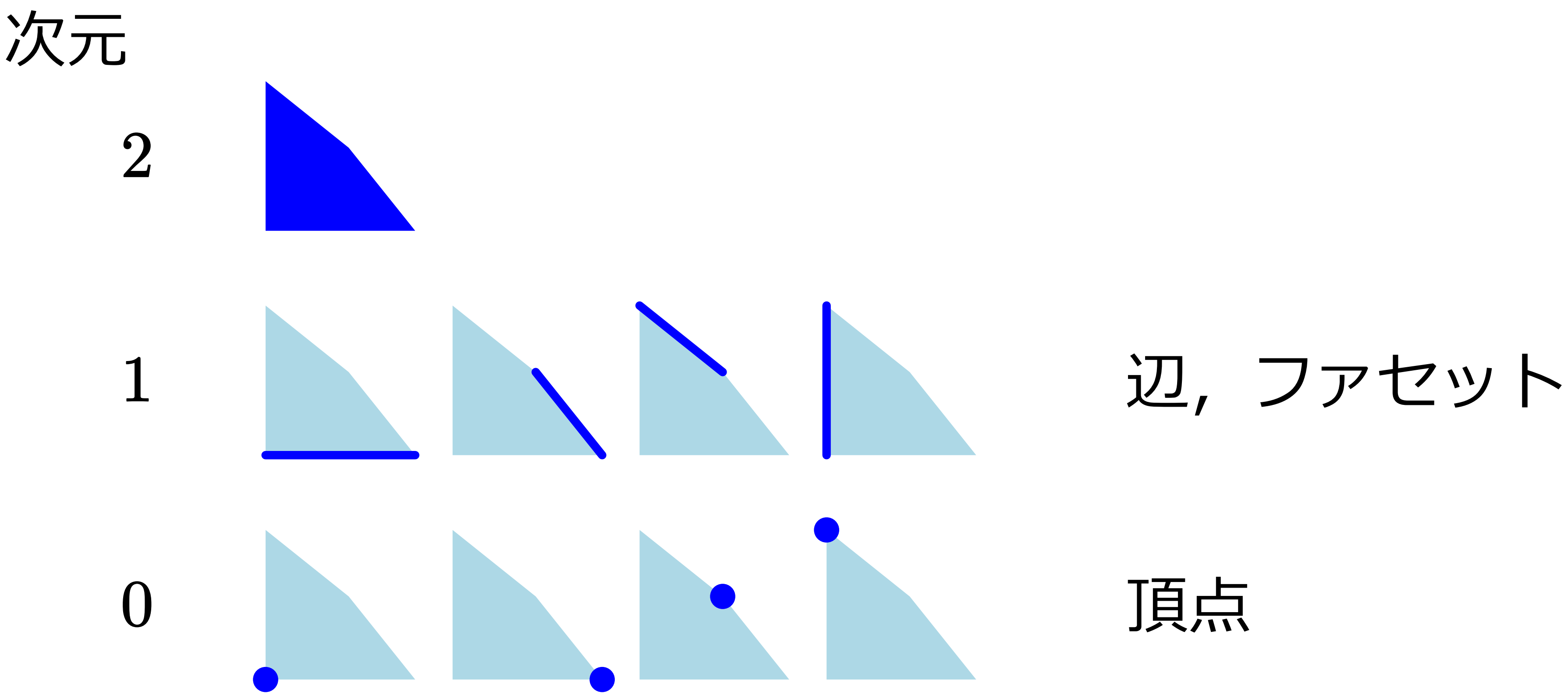
凸多面体の 次元 とは，そのアフィン包の次元

[復習] 頂点，辺，ファセット

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$，P の次元 $= \dim P \leq d$

定義：頂点，辺，ファセット (側面)

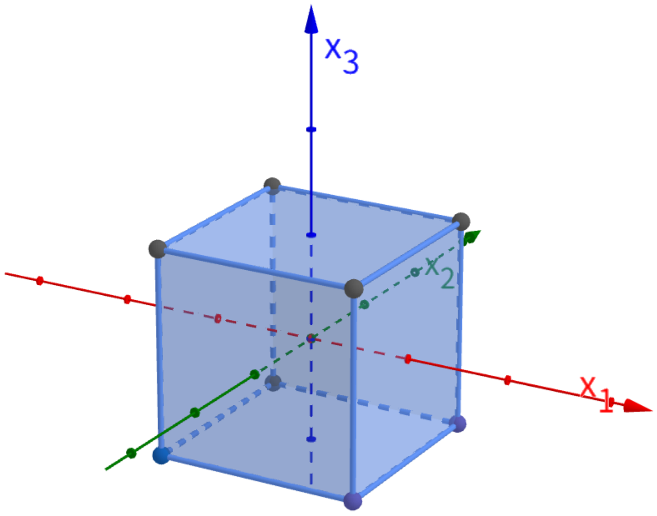
- P の **頂点** とは，P の 0 次元面のこと
- P の **辺** とは，P の 1 次元面のこと
- P の **ファセット** とは，P の $\dim P - 1$ 次元面のこと



手順

$P = \mathrm{CH}(V) \subseteq \mathbb{R}^d,\ \dim P = d$ とする

1. V から点を d 個選んで，W とする
2. $\mathrm{aff}(W)$ の次元が $d-1$ であることを確認する
3. $\mathrm{aff}(W)$ を $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ の形で書く
4. 不等式 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b$ を任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が満たすことを確認する
5. $P \cap \mathrm{aff}(W)$ は P のファセットである

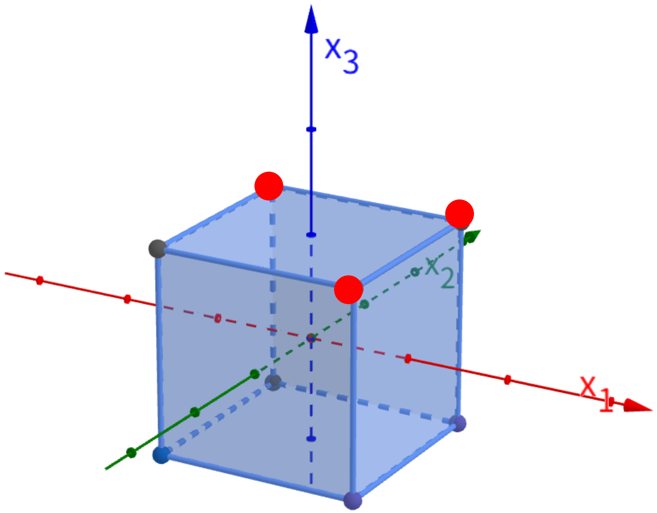


[復習] 頂点記述からファセットを求める

手順

$P = \mathrm{CH}(V) \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim P = d$ とする

1. V から点を d 個選んで，W とする
2. $\mathrm{aff}(W)$ の次元が $d-1$ であることを確認する
3. $\mathrm{aff}(W)$ を $\boldsymbol{a}^\mathrm{T}\boldsymbol{x} = b$ の形で書く
4. 不等式 $\boldsymbol{a}^\mathrm{T}\boldsymbol{x} \leq b$ を任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が満たすことを確認する
5. $P \cap \mathrm{aff}(W)$ は P のファセットである

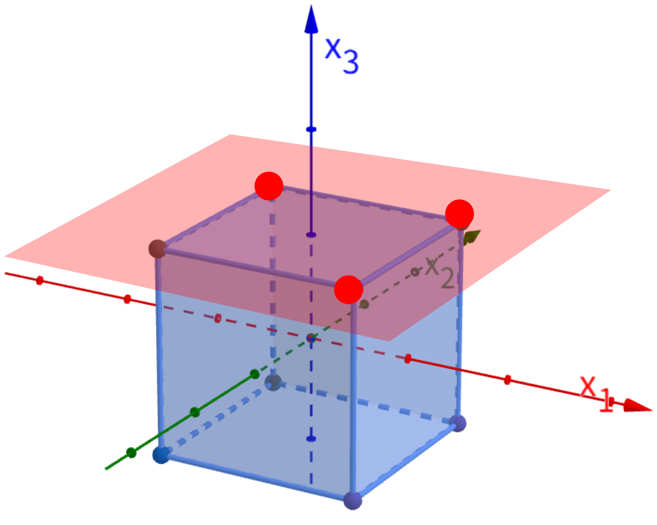


[復習] 頂点記述からファセットを求める

手順

$P = \mathrm{CH}(V) \subseteq \mathbb{R}^d,\ \dim P = d$ とする

1. V から点を d 個選んで，W とする
2. $\mathrm{aff}(W)$ の次元が $d-1$ であることを確認する
3. $\mathrm{aff}(W)$ を $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ の形で書く
4. 不等式 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b$ を任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が満たすことを確認する
5. $P \cap \mathrm{aff}(W)$ は P のファセットである



[復習] モーメント曲線

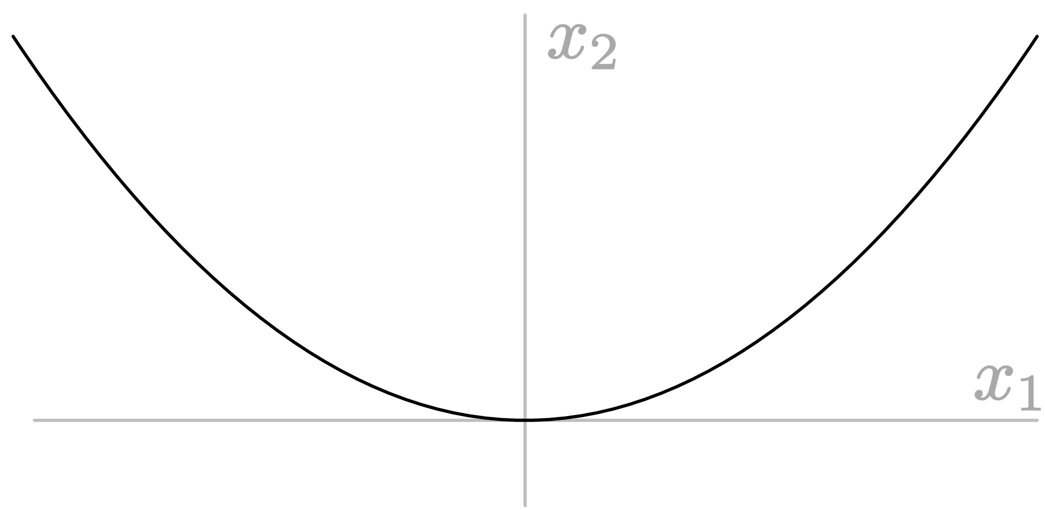
定義：モーメント曲線

$\mathbb{R}^d$ における **モーメント曲線** とは次の曲線

$$\left\{ \gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$d = 2$ のとき：$x_1 = t, x_2 = t^2$

$\therefore x_2 = x_1^2$



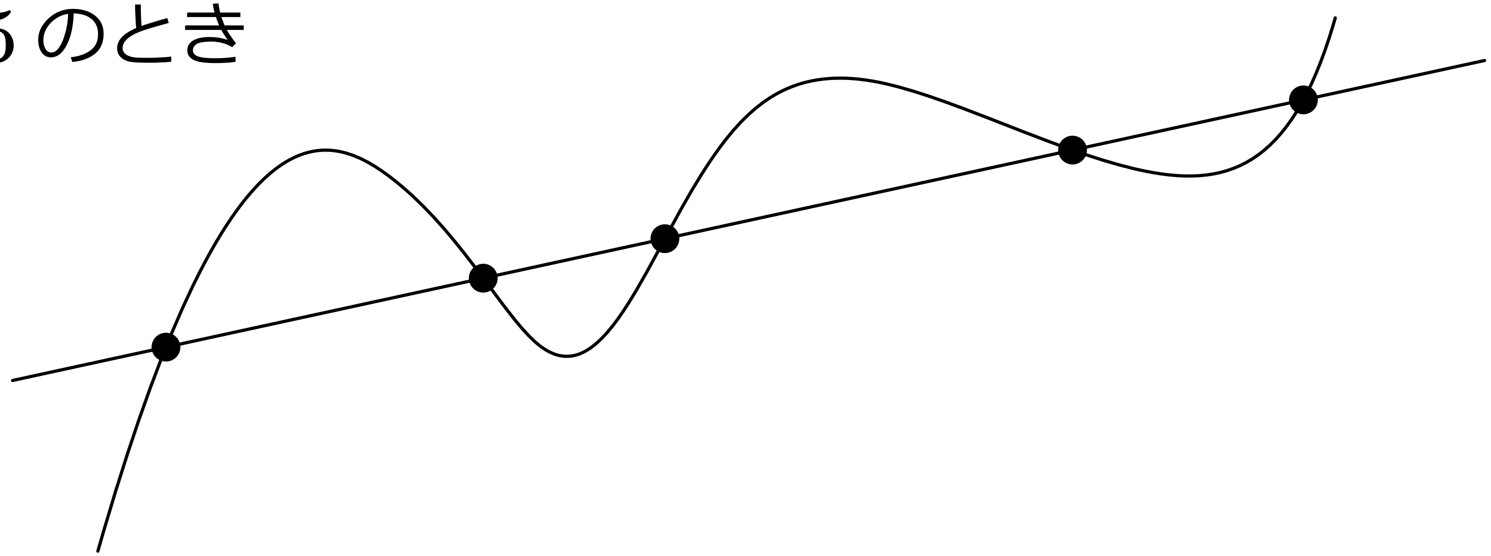
[復習] モーメント曲線と超平面の交わり

性質：モーメント曲線と超平面の交わり

$\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ において次が成り立つ

1. モーメント曲線と超平面の交わりは 高々 d 個の点
2. モーメント曲線と超平面が交わりがちょうど d 個の点
   $\Rightarrow$ 交わりにおいて，その超平面はモーメント曲線に接していない

$d = 5$ のとき



[復習] 巡回多面体

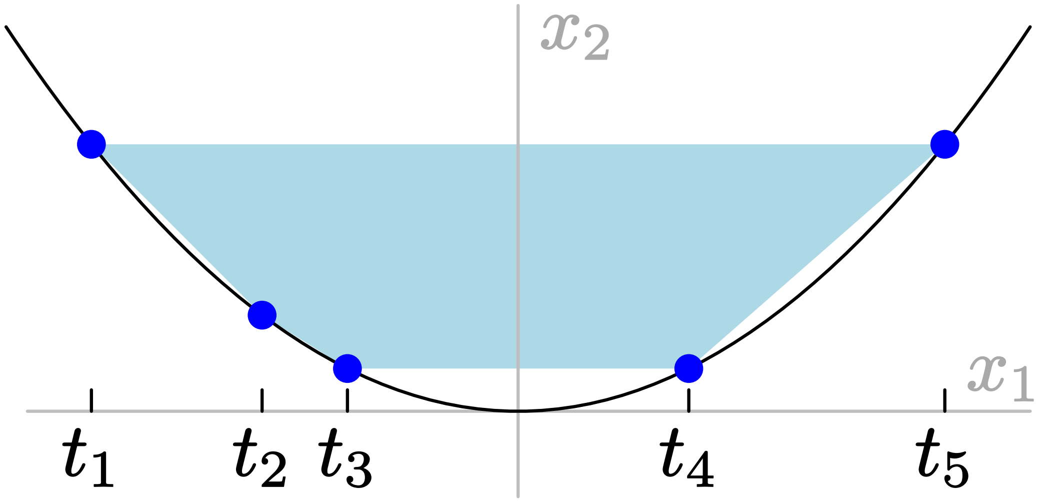
整数 $n \geq d+1$

定義：巡回多面体

頂点数 n の d **次元巡回多面体** とは,
モーメント曲線上の n 個の点の凸包のこと
つまり，$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ を用いた次の凸多面体

$$\mathrm{CH}\left(\{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots, \gamma(t_n)\}\right) \subseteq \mathbb{R}^d$$

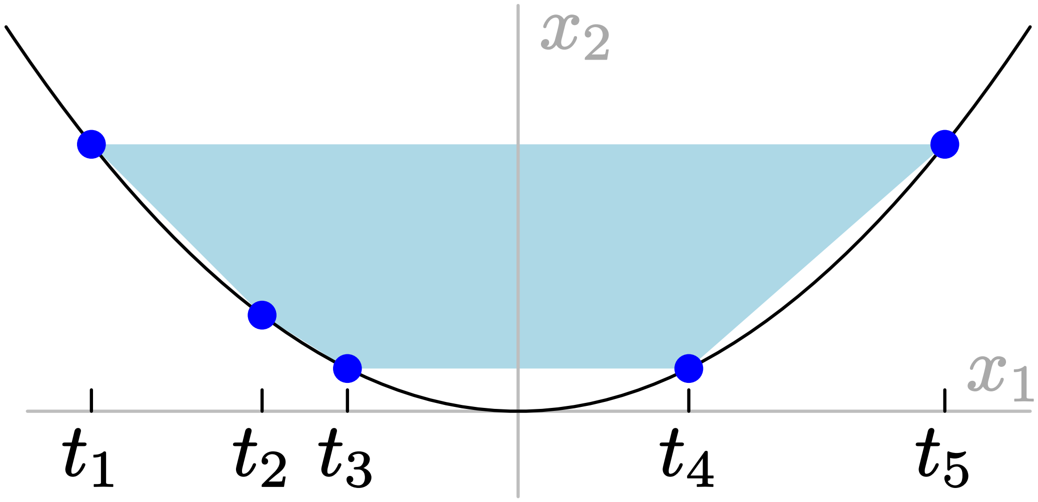
$d = 2$ のとき



性質：巡回多面体の次元

頂点数 n の d 次元巡回多面体の次元は d である

$d = 2$ のとき



巡回多面体の面の数

いまから 紹介すること

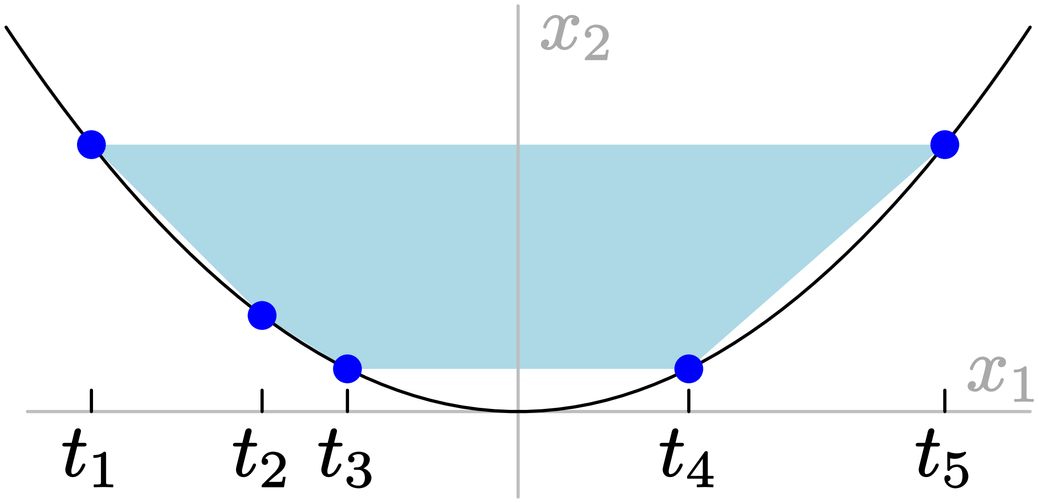
P が頂点数 n の d 次元巡回多面体であるとき $(d \geq 4)$

- P のファセット数が $\Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ であること
- P の辺数が $\binom{n}{2}$ であること

目次

巡回多面体のファセット：2 次元の場合

$d = 2, n = 5$ のとき



	1	2	3	4	5
12	*	*			
23		*	*		
34			*	*	
45				*	*
15	*				*

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	*					*	*	*
1568	*				*	*		*
1458	*			*	*			*
1348	*		*	*				*
1238	*	*	*					*
1234	*	*	*	*				
1245	*	*		*	*			
1256	*	*			*	*		
1267	*	*				*	*	
1278	*	*					*	*

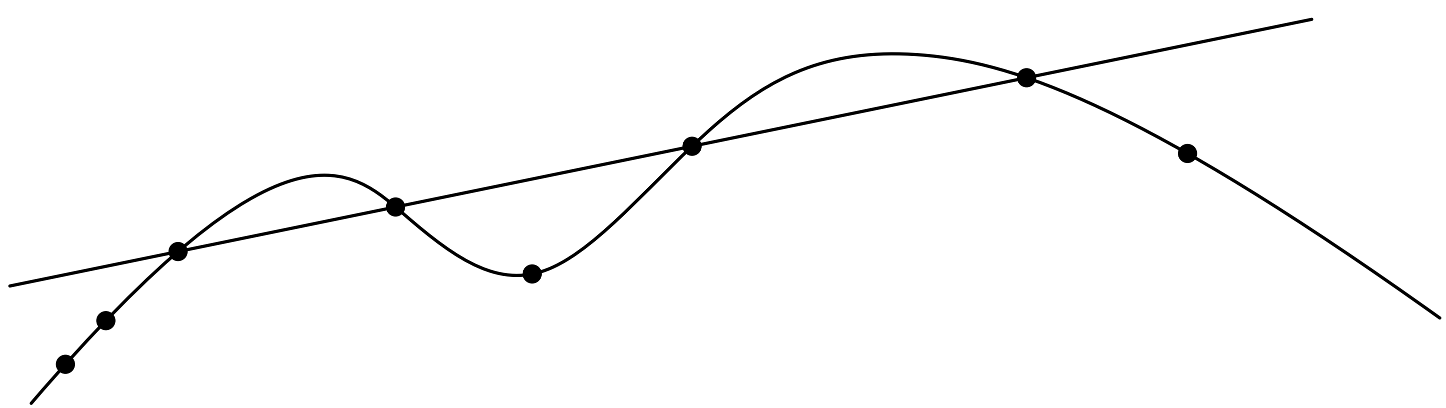
	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		*	*	*	*			
2356		*	*		*	*		
2367		*	*			*	*	
2378		*	*				*	*
3456			*	*	*	*		
3467			*	*		*	*	
3478			*	*			*	*
4567				*	*	*	*	
4578				*	*		*	*
5678					*	*	*	*

巡回多面体のファセット：4 次元の場合

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	$*$					$*$	$*$	$*$
1568	$*$				$*$	$*$		$*$
1458	$*$			$*$	$*$			$*$
1348	$*$		$*$	$*$				$*$
1238	$*$	$*$	$*$					$*$
1234	$*$	$*$	$*$	$*$				
1245	$*$	$*$		$*$	$*$			
1256	$*$	$*$			$*$	$*$		
1267	$*$	$*$				$*$	$*$	
1278	$*$	$*$					$*$	$*$

	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		$*$	$*$	$*$	$*$			
2356		$*$	$*$		$*$	$*$		
2367		$*$	$*$			$*$	$*$	
2378		$*$	$*$				$*$	$*$
3456			$*$	$*$	$*$	$*$		
3467			$*$	$*$		$*$	$*$	
3478			$*$	$*$			$*$	$*$
4567				$*$	$*$	$*$	$*$	
4578				$*$	$*$		$*$	$*$
5678					$*$	$*$	$*$	$*$

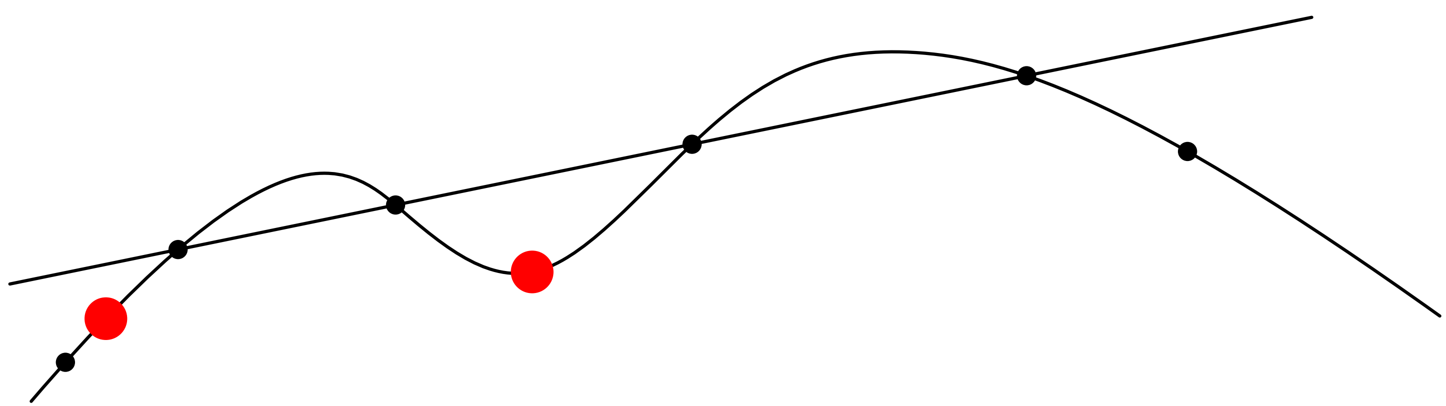


巡回多面体のファセット：4 次元の場合

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	$*$					$*$	$*$	$*$
1568	$*$				$*$	$*$		$*$
1458	$*$			$*$	$*$			$*$
1348	$*$		$*$	$*$				$*$
1238	$*$	$*$	$*$					$*$
1234	$*$	$*$	$*$	$*$				
1245	$*$	$*$		$*$	$*$			
1256	$*$	$*$			$*$	$*$		
1267	$*$	$*$				$*$	$*$	
1278	$*$	$*$					$*$	$*$

	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		$*$	$*$	$*$	$*$			
2356		$*$	$*$		$*$	$*$		
2367		$*$	$*$			$*$	$*$	
2378		$*$	$*$				$*$	$*$
3456			$*$	$*$	$*$	$*$		
3467		●	$*$	$*$	●	$*$	$*$	
3478			$*$	$*$			$*$	$*$
4567				$*$	$*$	$*$	$*$	
4578				$*$	$*$		$*$	$*$
5678					$*$	$*$	$*$	$*$

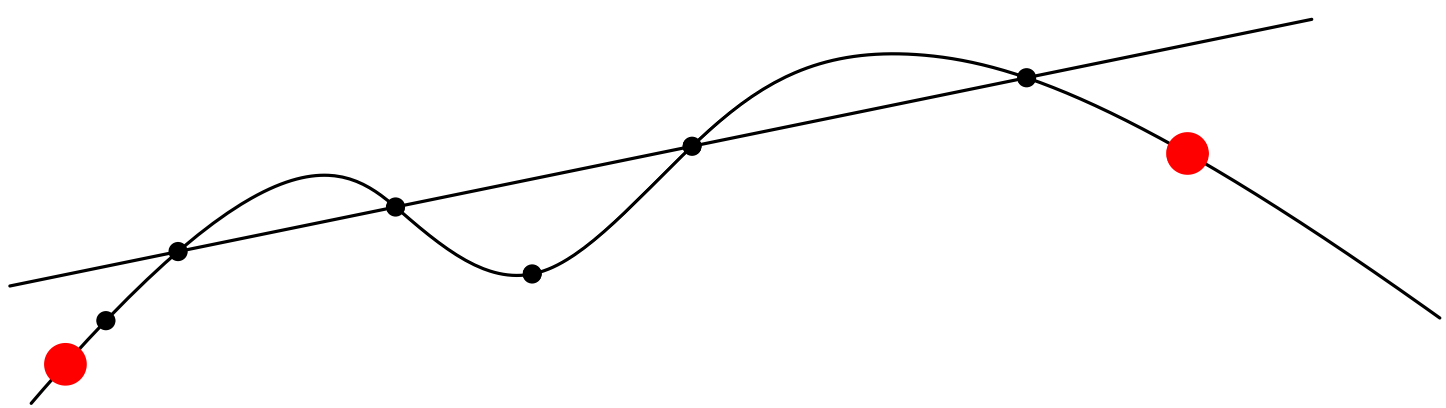


巡回多面体のファセット：4 次元の場合

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	*					*	*	*
1568	*				*	*		*
1458	*			*	*			*
1348	*		*	*				*
1238	*	*	*					*
1234	*	*	*	*				
1245	*	*		*	*			
1256	*	*			*	*		
1267	*	*				*	*	
1278	*	*					*	*

	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		*	*	*	*			
2356		*	*		*	*		
2367		*	*			*	*	
2378		*	*				*	*
3456			*	*	*	*		
3467			*	*		*	*	
3478			*	*			*	*
4567				*	*	*	*	
4578				*	*		*	*
5678					*	*	*	*



設定

- 整数 n, d, $n \geq d+1$, 実数 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$
- $P = \mathrm{CH}(\{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots, \gamma(t_n)\})$
  (頂点数 n の d 次元巡回多面体)
- $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_d\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$
- $F = P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2}), \ldots, \gamma(t_{i_d})\})$

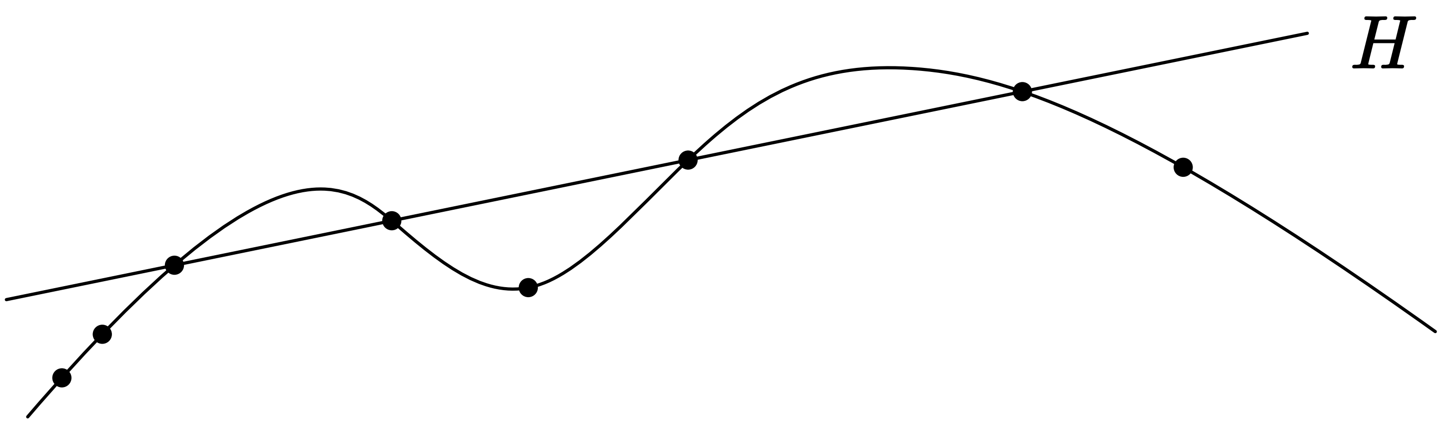
性質：ゲールの偶数性条件

F が P のファセット $\Leftrightarrow$
任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

つまり，頂点数 n の d 次元巡回多面体のファセット数
$=$ この条件を満たす I の総数

偶数性条件：証明

証明：$H = \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2}), \ldots, \gamma(t_{i_d})\})$ とする



偶数性条件：証明

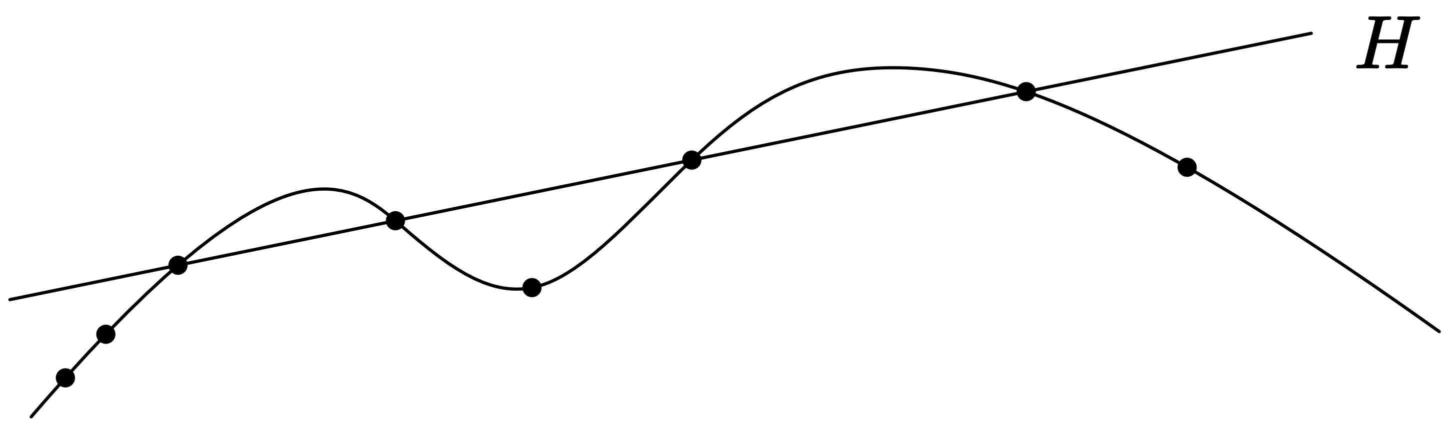
<u>証明</u>：$H = \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2}), \ldots, \gamma(t_{i_d})\})$ とする

- H はモーメント曲線を $d+1$ 個の部分に分ける

性質：モーメント曲線と超平面の交わり

$\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ において次が成り立つ

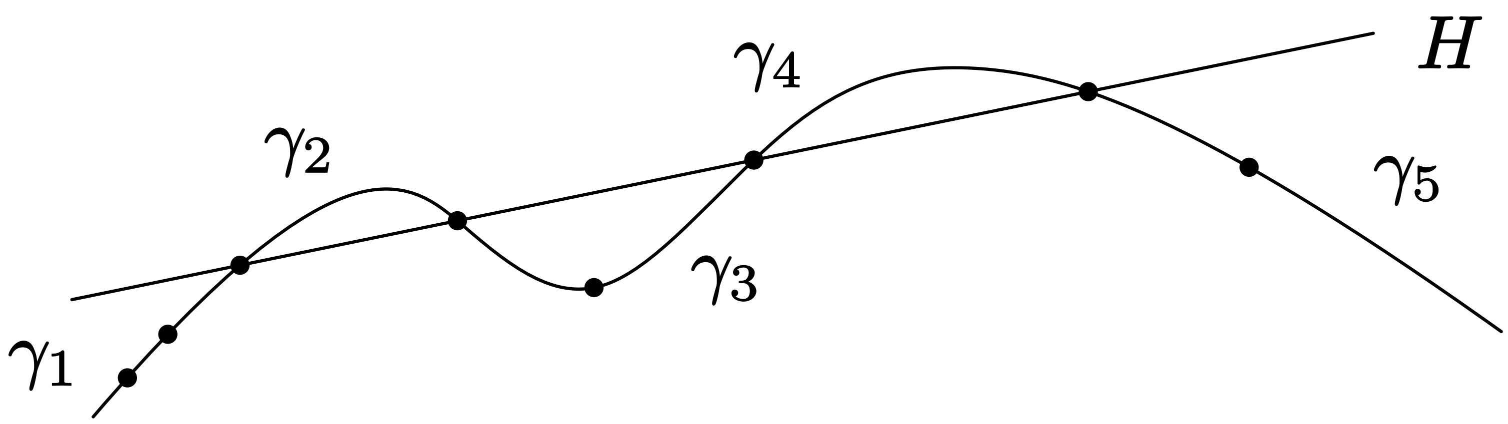
1. モーメント曲線と超平面の交わりは 高々 d 個の点
2. モーメント曲線と超平面が交わりがちょうど d 個の点
   ⇒ 交わりにおいて，その超平面はモーメント曲線に
   接していない



偶数性条件：証明

証明：$H = \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2}), \ldots, \gamma(t_{i_d})\})$ とする

- H はモーメント曲線を $d+1$ 個の部分に分ける
- その $d+1$ 個の部分を端から順に $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{d+1}$ とする

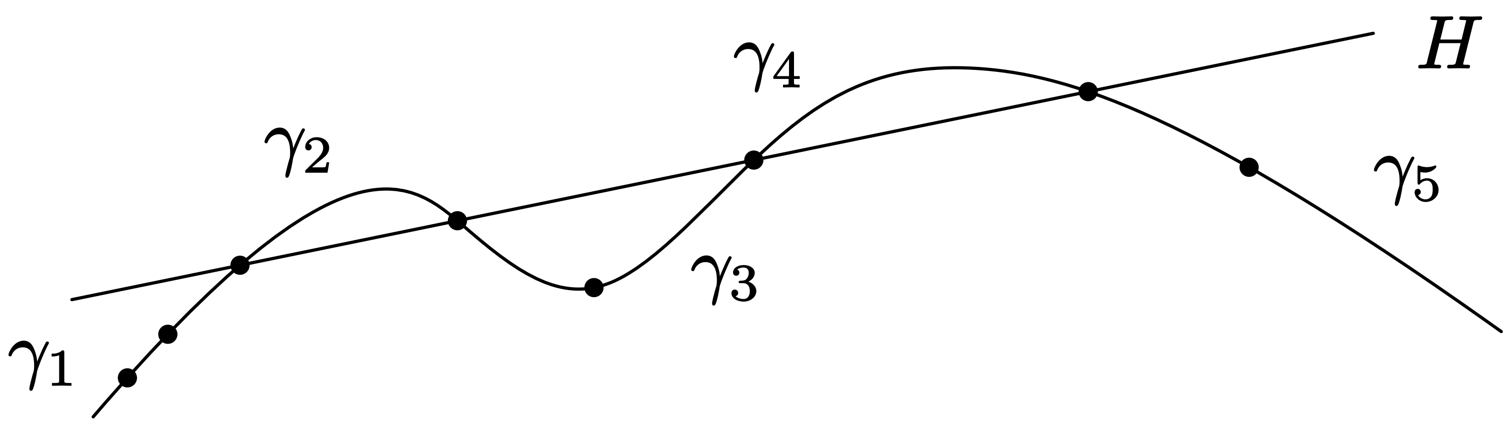


偶数性条件：証明

証明：$H = \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2}), \ldots, \gamma(t_{i_d})\})$ とする

- H はモーメント曲線を $d+1$ 個の部分に分ける
- その $d+1$ 個の部分を端から順に $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{d+1}$ とする
- $F = P \cap H$ が P のファセット

  $\Leftrightarrow$ 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{i_1, i_2, \ldots, i_d\}$ に対して
  $\gamma(t_i)$ は$\underbrace{\text{奇数番目}}_{\gamma_1, \gamma_3, \cdots}$か$\underbrace{\text{偶数番目}}_{\gamma_2, \gamma_4, \cdots}$の部分にある



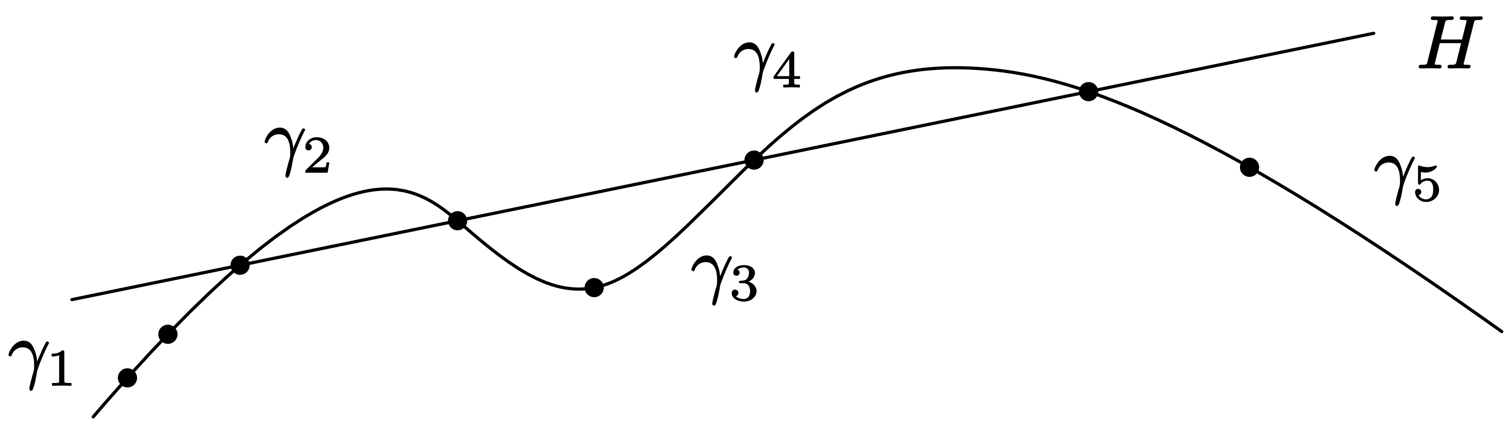
偶数性条件：証明

証明：$H = \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2}), \dots, \gamma(t_{i_d})\})$ とする

- H はモーメント曲線を $d+1$ 個の部分に分ける
- その $d+1$ 個の部分を端から順に $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{d+1}$ とする
- $F = P \cap H$ が P のファセット

$\Leftrightarrow$ 任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ に対して
$\gamma(t_i)$ は$\underbrace{\text{奇数番目}}_{\gamma_1, \gamma_3, \cdots}$か$\underbrace{\text{偶数番目}}_{\gamma_2, \gamma_4, \cdots}$の部分にある

$\Leftrightarrow$ 任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ に対して
$i < k < j$ を満たす $k \in \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ の数は偶数 $\square$



4 次元巡回多面体のファセット数

性質：ゲールの偶数性条件

F が P のファセット $\Leftrightarrow$
任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

4 次元の場合，$|I| = 4$

$n = 5$ のとき，ファセット数 $= 5$

1	2	3	4	5
*	*	*	*	
*	*	*		*
*	*		*	*
*		*	*	*
	*	*	*	*

4 次元巡回多面体のファセット数

性質：ゲールの偶数性条件

F が P のファセット $\Leftrightarrow$
　任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して
　$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

4 次元の場合，$|I| = 4$

$n = 5$ のとき，ファセット数 $= 5$

$n = 6$ のとき，ファセット数 $= 9$

1	2	3	4	5	6
*	*	*	*		
*	*		*	*	
*	*			*	*
	*	*	*	*	
	*	*		*	*
		*	*	*	*

4 次元巡回多面体のファセット数

性質：ゲールの偶数性条件

F が P のファセット $\Leftrightarrow$
任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

4 次元の場合，$|I| = 4$

$n = 5$ のとき，ファセット数 $= 5$

$n = 6$ のとき，ファセット数 $= 9$

1	2	3	4	5	6
*	*	*	*		
*	*		*	*	
*	*			*	*
	*	*	*	*	
	*	*		*	*
		*	*	*	*

性質：ゲールの偶数性条件

F が P のファセット $\Leftrightarrow$

　任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して

　$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

4 次元の場合，$|I| = 4$

$n = 5$ のとき，ファセット数 $= 5$

$n = 6$ のとき，ファセット数 $= 9$

1	2	3	4	5	6
*	*	*	*		
*	*		*	*	
*	*			*	*
	*	*	*	*	
	*	*		*	*
		*	*	*	*
*	*	*			*
*		*	*		*
*			*	*	*

4次元巡回多面体のファセット数

性質：ゲールの偶数性条件

F が P のファセット $\Leftrightarrow$
任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

4次元の場合，$|I| = 4$

$n = 5$ のとき，ファセット数 $= 5$

$n = 6$ のとき，ファセット数 $= 9$

1	2	3	4	5	6
*	*	*	*		
*	*		*	*	
*	*			*	*
	*	*	*	*	
	*	*		*	*
		*	*	*	*
*	*	*			*
*		*	*		*
*			*	*	*

性質：ゲールの偶数性条件

F が P のファセット $\Leftrightarrow$
　任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して
　$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

4 次元の場合，$|I| = 4$

$n = 5$ のとき，ファセット数 $= 5$

$n = 6$ のとき，ファセット数 $= 9$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & \\
\multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \\
\multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} \\
 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \\
 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} \\
 & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}}
\end{array}\right\} \binom{4}{2}$$

$$\left.\begin{array}{cccccc}
* & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & & * \\
* & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & * \\
* & & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & *
\end{array}\right\} \binom{3}{1}$$

4 次元巡回多面体のファセット数

性質：ゲールの偶数性条件

F が P のファセット $\Leftrightarrow$
　任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して
　$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

4 次元の場合，$|I| = 4$

$n = 5$ のとき，ファセット数 $= 5$

$n = 6$ のとき，ファセット数 $= 9$

$n = 7$ のとき，ファセット数 $= 14$

$$\binom{5}{2} + \binom{4}{1} = 10 + 4 = 14$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & \\
\multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \\
\multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} \\
 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \\
 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} \\
 & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}}
\end{array}\right\} \binom{4}{2}$$

$$\left.\begin{array}{cccccc}
* & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & & * \\
* & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & * \\
* & & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & *
\end{array}\right\} \binom{3}{1}$$

4 次元巡回多面体のファセット数

性質：ゲールの偶数性条件

F が P のファセット $\Leftrightarrow$
　任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して
　$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

4 次元の場合，$|I| = 4$

$n = 5$ のとき，ファセット数 $= 5$

$n = 6$ のとき，ファセット数 $= 9$

$n = 7$ のとき，ファセット数 $= 14$

$n = 8$ のとき，ファセット数 $= 20$

$$\binom{6}{2} + \binom{5}{1} = 15 + 5 = 20$$

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & \\
\multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \\
\multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} \\
& \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \\
& \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} \\
& & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}}
\end{array}\right\} \binom{4}{2}
$$

$$
\left.\begin{array}{cccccc}
* & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & & * \\
* & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & & * \\
* & & & \multicolumn{2}{c}{\boxed{* \quad *}} & *
\end{array}\right\} \binom{3}{1}
$$

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	*					*	*	*
1568	*				*	*		*
1458	*			*	*			*
1348	*		*	*				*
1238	*	*	*					*
1234	*	*	*	*				
1245	*	*		*	*			
1256	*	*			*	*		
1267	*	*				*	*	
1278	*	*					*	*

	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		*	*	*	*			
2356		*	*		*	*		
2367		*	*			*	*	
2378		*	*				*	*
3456			*	*	*	*		
3467			*	*		*	*	
3478			*	*			*	*
4567				*	*	*	*	
4578				*	*		*	*
5678					*	*	*	*

4 次元巡回多面体のファセット数 (続)

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	*					*	*	*
1568	*				*	*		*
1458	*			*	*			*
1348	*		*	*				*
1238	*	*	*					*
1234	*	*	*	*				
1245	*	*		*	*			
1256	*	*			*	*		
1267	*	*				*	*	
1278	*	*					*	*

	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		*	*	*	*			
2356		*	*		*	*		
2367		*	*			*	*	
2378		*	*				*	*
3456			*	*	*	*		
3467			*	*		*	*	
3478			*	*			*	*
4567				*	*	*	*	
4578				*	*		*	*
5678					*	*	*	*

$$\binom{6}{2} = 15$$

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	*					*	*	*
1568	*				*	*		*
1458	*			*	*			*
1348	*		*	*				*
1238	*	*	*					*
1234	*	*	*	*				
1245	*	*		*	*			
1256	*	*			*	*		
1267	*	*				*	*	
1278	*	*					*	*

	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		*	*	*	*			
2356		*	*		*	*		
2367		*	*			*	*	
2378		*	*				*	*
3456			*	*	*	*		
3467			*	*		*	*	
3478			*	*			*	*
4567				*	*	*	*	
4578				*	*		*	*
5678					*	*	*	*

$$\binom{6}{2} = 15 \qquad \binom{5}{1} = 5$$

d 次元巡回多面体のファセット数

整数 $n \geq d+1$

性質：巡回多面体のファセット数に対する下界

頂点数 n の d 次元
巡回多面体のファセット数 $\geq \binom{n - \lceil d/2 \rceil}{\lfloor d/2 \rfloor}$

証明：演習問題

d 次元巡回多面体のファセット数

整数 $n \geq d+1$

性質：巡回多面体のファセット数に対する下界

頂点数 n の d 次元巡回多面体のファセット数 $\geq \binom{n-\lceil d/2 \rceil}{\lfloor d/2 \rfloor}$

証明：演習問題

特に，d が定数であるとき，

$$\binom{n-\lceil d/2 \rceil}{\lfloor d/2 \rfloor} \geq \left(\frac{n-\lceil d/2 \rceil}{\lfloor d/2 \rfloor}\right)^{\lfloor d/2 \rfloor} = \Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$$

整数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$\binom{a}{b} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b$

巡回多面体の面の数：再掲

いまから 紹介すること

P が頂点数 n の d 次元巡回多面体であるとき $(d \geq 4)$

- P のファセット数が $\Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ であること　(済)
- P の辺数が $\binom{n}{2}$ であること

目次

4 次元巡回多面体の辺

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	*					*	*	*
1568	*				*	*		*
1458	*			*	*			*
1348	*		*	*				*
1238	*	*	*					*
1234	*	*	*	*				
1245	*	*		*	*			
1256	*	*			*	*		
1267	*	*				*	*	
1278	*	*					*	*

	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		*	*	*	*			
2356		*	*		*	*		
2367		*	*			*	*	
2378		*	*				*	*
3456			*	*	*	*		
3467			*	*		*	*	
3478			*	*			*	*
4567				*	*	*	*	
4578				*	*		*	*
5678					*	*	*	*

4次元巡回多面体の辺

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	*					*	*	*
1568	*				*	*		*
1458	*			*	*			*
1348	*		*	*				*
1238	*	*	*					*
1234	*	*	*	*				
1245	*	*		*	*			
1256	*	*			*	*		
1267	*	*				*	*	
1278	*	*					*	*

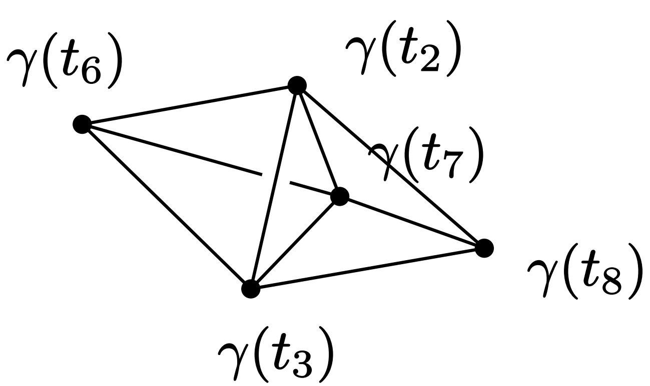
	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		*	*	*	*			
2356		*	*		*	*		
2367		*	*			*	*	
2378		*	*				*	*
3456			*	*	*	*		
3467			*	*		*	*	
3478			*	*			*	*
4567				*	*	*	*	
4578				*	*		*	*
5678					*	*	*	*

4 次元巡回多面体の辺

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	*					*	*	*
1568	*				*	*		*
1458	*			*	*			*
1348	*		*	*				*
1238	*	*	*					*
1234	*	*	*	*				
1245	*	*		*	*			
1256	*	*			*	*		
1267	*	*				*	*	
1278	*	*					*	*

	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		*	*	*	*			
2356		*	*		*	*		
2367		*	*			*	*	
2378		*	*				*	*
3456			*	*	*	*		
3467			*	*		*	*	
3478			*	*			*	*
4567				*	*	*	*	
4578				*	*		*	*
5678					*	*	*	*



4 次元巡回多面体の辺

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	*					*	*	*
1568	*				*	*		*
1458	*			*	*			*
1348	*		*	*				*
1238	*	*	*					*
1234	*	*	*	*				
1245	*	*		*	*			
1256	*	*			*	*		
1267	*	*				*	*	
1278	*	*					*	*

	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		*	*	*	*			
2356		*	*		*	*		
2367		*	*			*	*	
2378		*	*				*	*
3456			*	*	*	*		
3467			*	*		*	*	
3478			*	*			*	*
4567				*	*	*	*	
4578				*	*		*	*
5678					*	*	*	*

$$\{2,3,6,7\} \cap \{2,3,7,8\} \cap \{3,4,6,7\} \cap \{3,4,7,8\} = \{3,7\}$$

4 次元巡回多面体の辺

$d = 4, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
1678	*					*	*	*
1568	*				*	*		*
1458	*			*	*			*
1348	*		*	*				*
1238	*	*	*					*
1234	*	*	*	*				
1245	*	*		*	*			
1256	*	*			*	*		
1267	*	*				*	*	
1278	*	*					*	*

	1	2	3	4	5	6	7	8
2345		*	*	*	*			
2356		*	*		*	*		
2367		*	*			*	*	
2378		*	*				*	*
3456			*	*	*	*		
3467			*	*		*	*	
3478			*	*			*	*
4567				*	*	*	*	
4578				*	*		*	*
5678					*	*	*	*

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

3 次元巡回多面体の辺

$d = 3, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
178	*						*	*
167	*					*	*	
156	*				*	*		
145	*			*	*			
134	*		*	*				
123	*	*	*					

	1	2	3	4	5	6	7	8
128	*	*						*
238		*	*					*
348			*	*				*
458				*	*			*
568					*	*		*
678						*	*	*

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

3 次元巡回多面体の辺

$d = 3, n = 8$ のとき

	1	2	3	4	5	6	7	8
178	*						*	*
167	*					*	*	
156	*				*	*		
145	*			*	*			
134	*		*	*				
123	*	*	*					

	1	2	3	4	5	6	7	8
128	*	*						*
238		*	*					*
348			*	*				*
458				*	*			*
568					*	*		*
678						*	*	*

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

d 次元巡回多面体の辺：条件 1

仮定：$n \geq d+1,\ d \geq 4$

	1	i_1	i_2	n
		$*$	$*$	

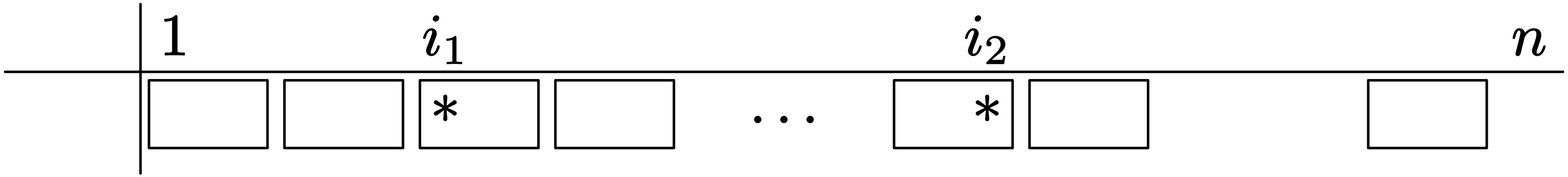
偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

d 次元巡回多面体の辺：条件 1

仮定：$n \geq d+1,\ d \geq 4$



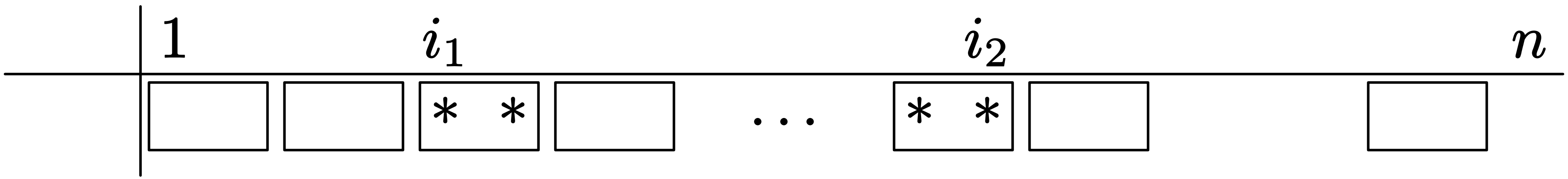
偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

d 次元巡回多面体の辺：条件 1

仮定：$n \geq d+1,\ \ d \geq 4$



偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

d 次元巡回多面体の辺：条件 1

仮定：$n \geq d+1,\ d \geq 4$

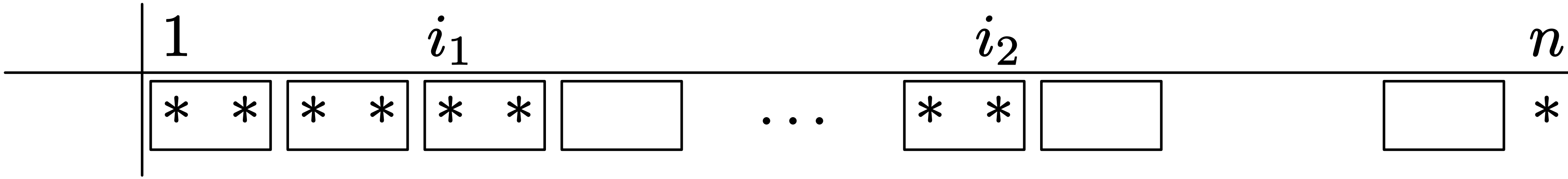
$$\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & & i_1 & & & i_2 & & n \\ \hline & \boxed{*\ \ *} & \boxed{*\ \ *} & \boxed{*\ \ *} & \boxed{} & \cdots & \boxed{*\ \ *} & \boxed{} & \boxed{} \end{array}$$

偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

仮定：$n \geq d+1$，$d \geq 4$



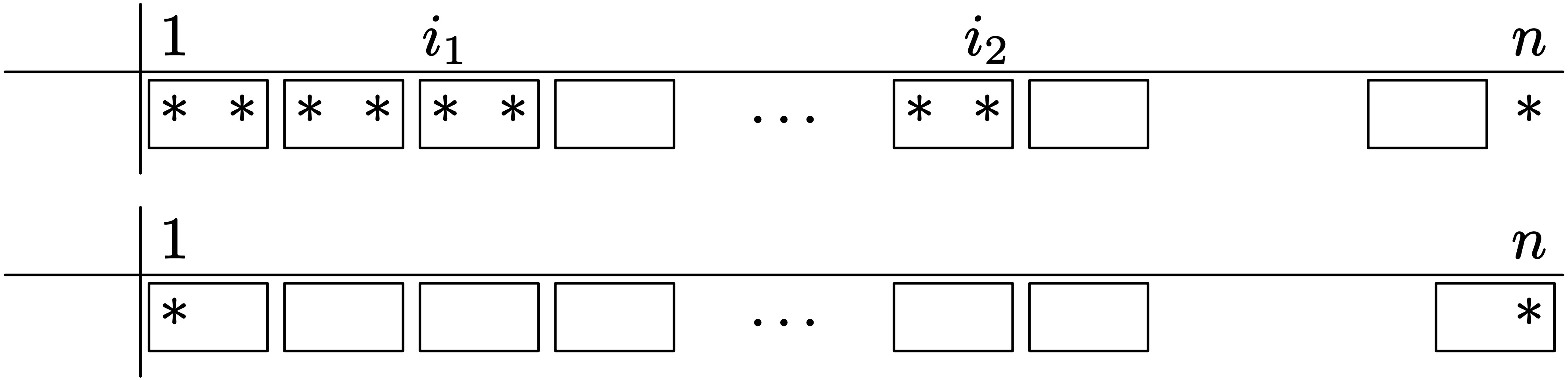
偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

d 次元巡回多面体の辺：条件 1

仮定：$n \geq d+1,\ d \geq 4$



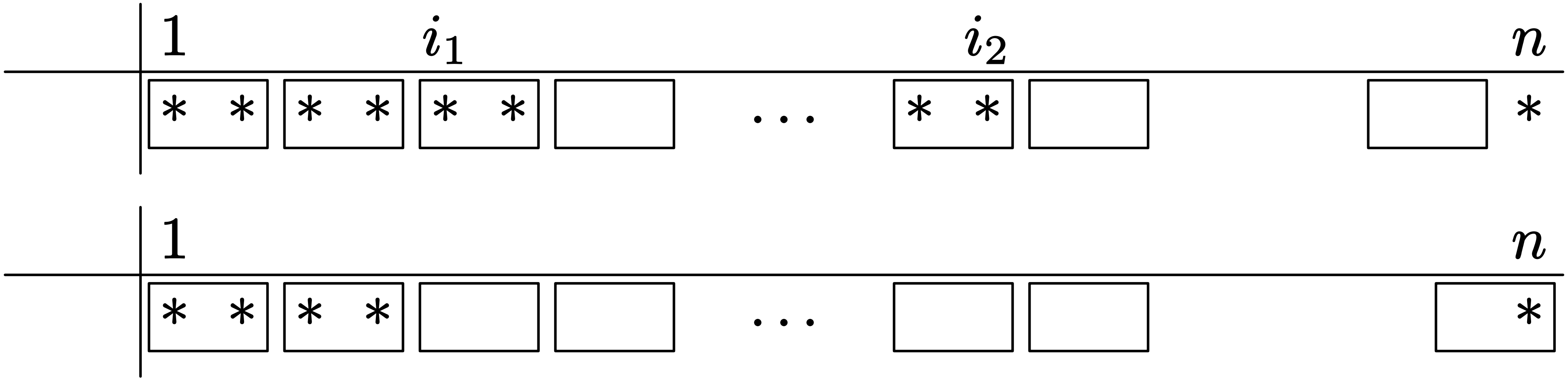
偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

d 次元巡回多面体の辺：条件 1

仮定：$n \geq d+1,\ \ d \geq 4$



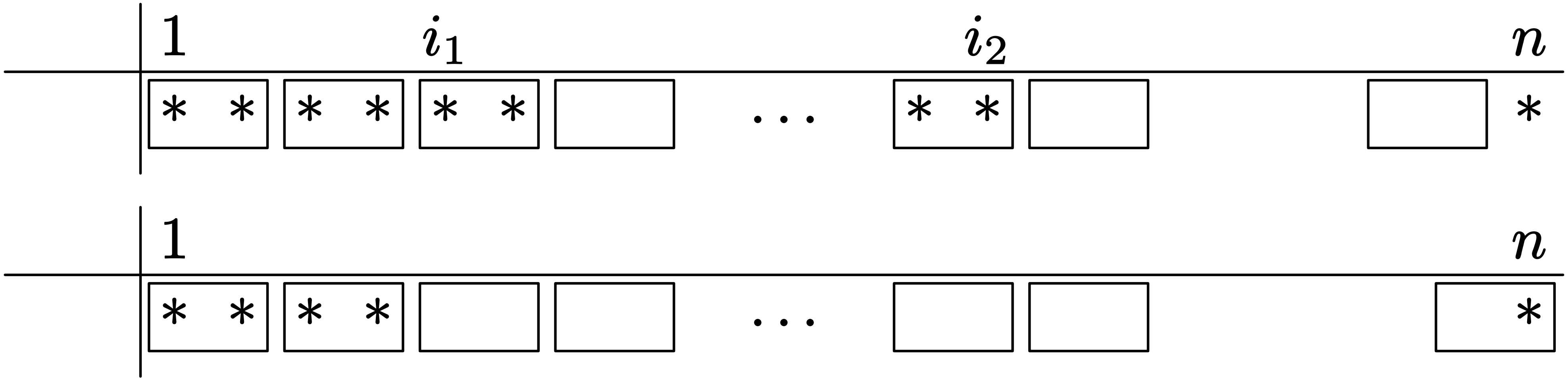
偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

d 次元巡回多面体の辺：条件 1

仮定：$n \geq d+1,\ d \geq 4$



証明を書き下すのは，演習問題

偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

仮定：$n \geq d+1,\ \ d \geq 4$

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & i & i_1 & & & i_2 & & & n \\
\hline
 & \boxed{*\quad *} & \boxed{*\quad *} & \boxed{*\quad *} & \boxed{} & \cdots & \boxed{*\quad *} & \boxed{} & \boxed{} & *
\end{array}
$$

偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

仮定：$n \geq d+1, \ d \geq 4$

1	i	i_1			i_2			n
$*\ \ *$	$*\ \ *$	$*\ \ *$		$\cdots$	$*\ \ *$			$*$
$*\ \ *$		$*\ \ *$	$*\ \ *$	$\cdots$	$*\ \ *$			$*$

偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

d 次元巡回多面体の辺：条件 2

仮定：$n \geq d+1,\ \ d \geq 4$

	1	i	i_1			i_2			n
	$\ast\ \ast$	$\ast\ \ast$	$\ast\ \ast$		$\cdots$	$\ast\ \ast$			$\ast$
	$\ast\ \ast$		$\ast\ \ast$	$\ast\ \ast$	$\cdots$	$\ast\ \ast$			$\ast$

	1		$i_1\ \ i$			i_2		n
			$\ast\ \ast$		$\cdots$	$\ast\ \ast$		

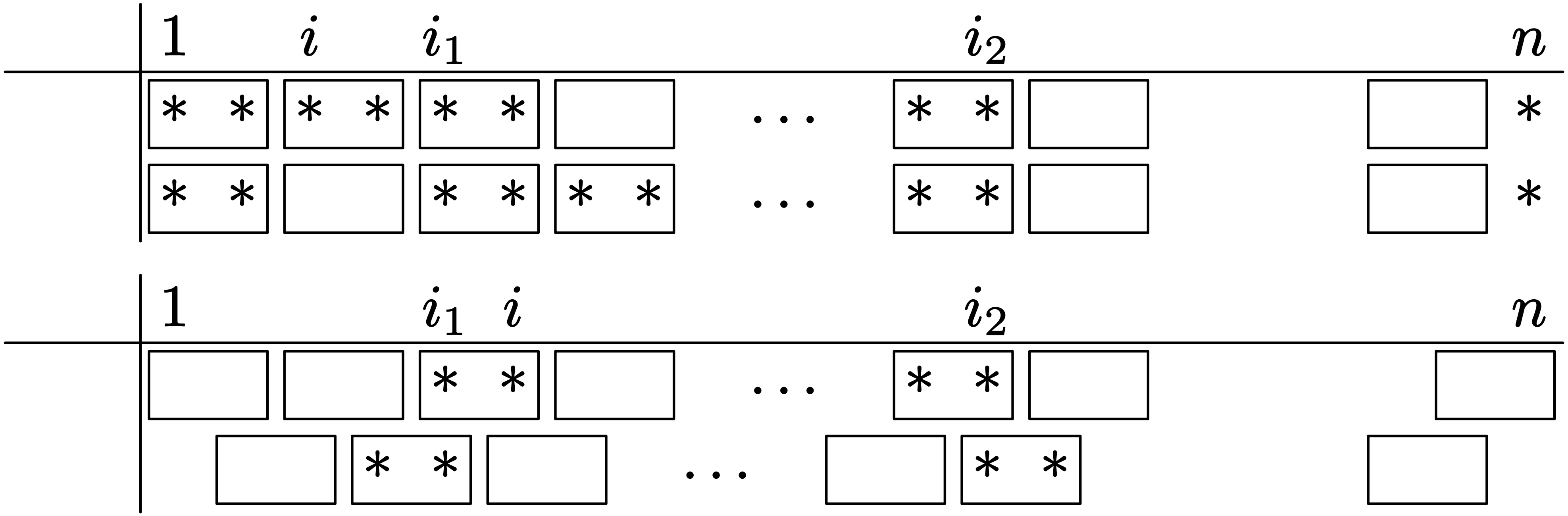
偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

d 次元巡回多面体の辺：条件 2

仮定：$n \geq d+1,\ d \geq 4$



偶数性条件：任意の $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} - I$ に対して，
$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数 $=$ 偶数

$P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_{i_1}), \gamma(t_{i_2})\})$ が P の辺 $\Leftrightarrow$

1. $i_1, i_2 \in I$ であり，偶数性条件を満たす I が存在
2. そのような I 全体の共通部分 $= \{i_1, i_2\}$

d 次元巡回多面体の辺：結論

仮定：$n \geq d+1,\ d \geq 4$

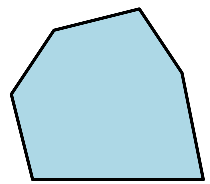
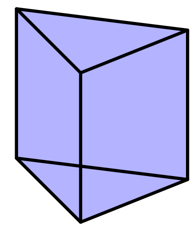
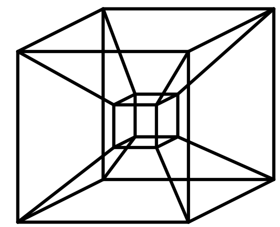
性質：巡回多面体の辺の数

$d \geq 4$ のとき，

頂点数 n の d 次元巡回多面体の辺の総数 $= \binom{n}{2}$

証明を書き下すのは演習問題 (コーナーケースに注意)

4 次元以上の凸多面体の面の数

次元 d	2	3	4 以上 (の定数)
			

頂点数 $= n$ のとき

辺数	$= n$	$\leq 3n - 6$	$\leq \binom{n}{2}$
ファセット数	$= n$	$\leq 2n - 4$	$\leq O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$

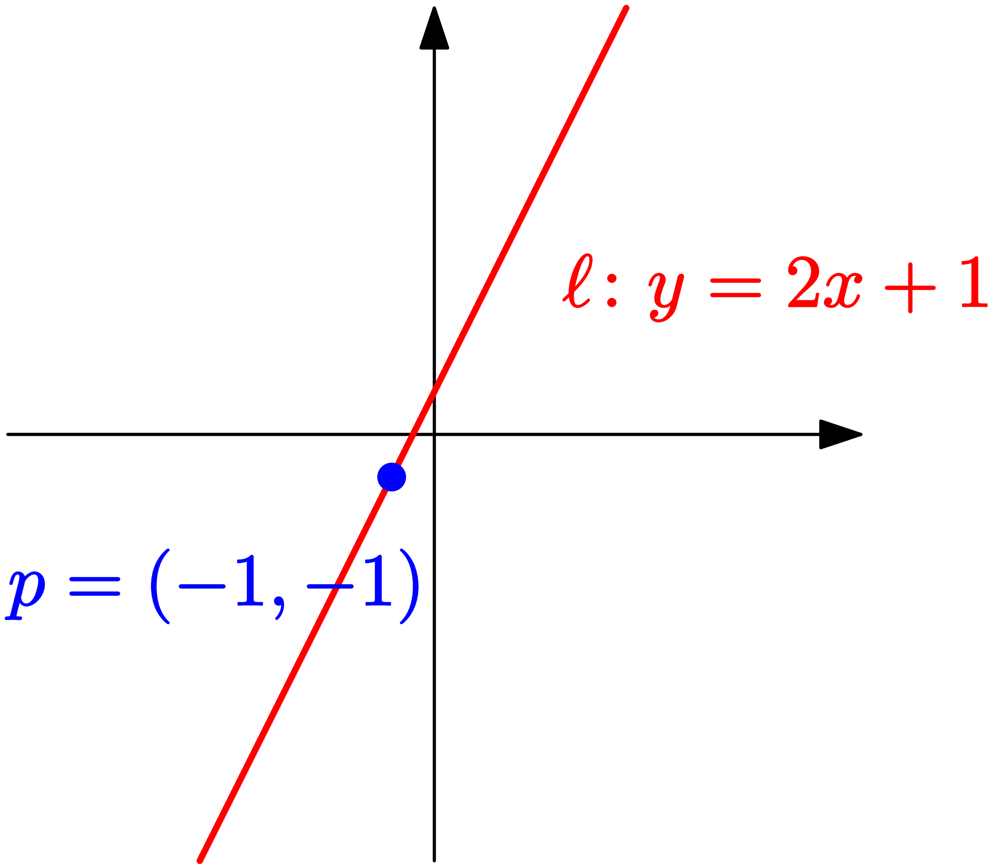
(等号を満たす場合あり)

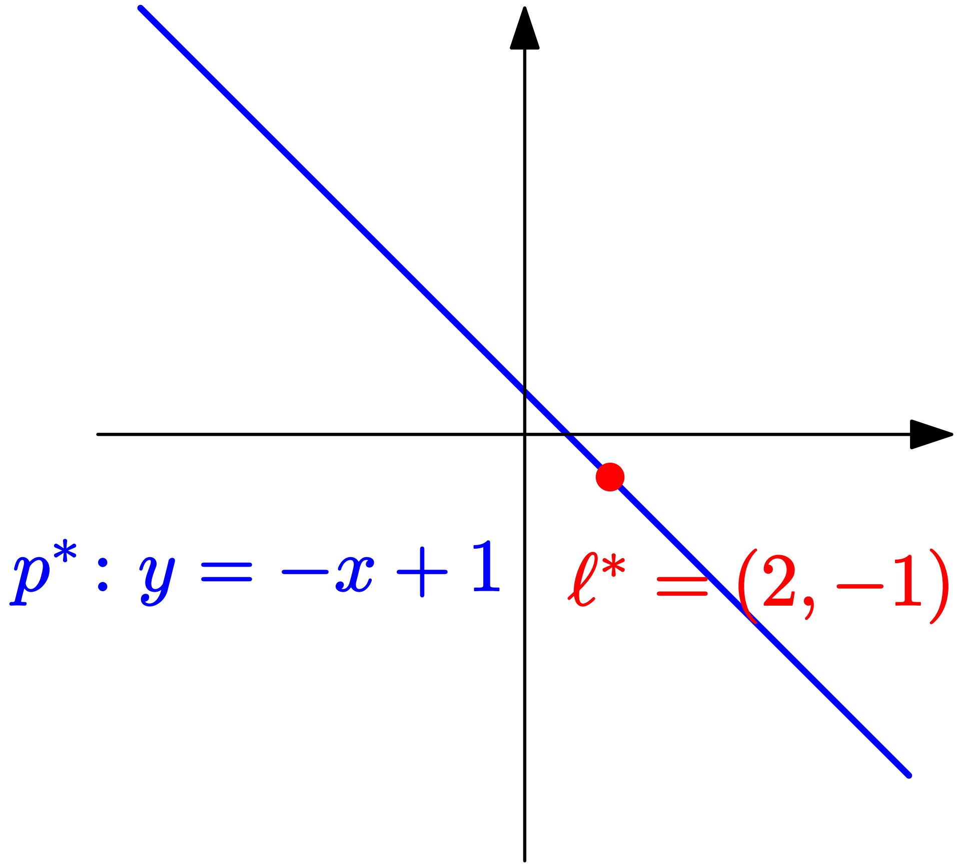
(等号を満たす場合あり)

目次

平面における双対変換

- 直線 $\ell\colon y = ax + b$ を点 $\ell^* = (a, -b)$ に変換する
- 点 $p = (a, b)$ を直線 $p^*\colon y = ax - b$ に変換する

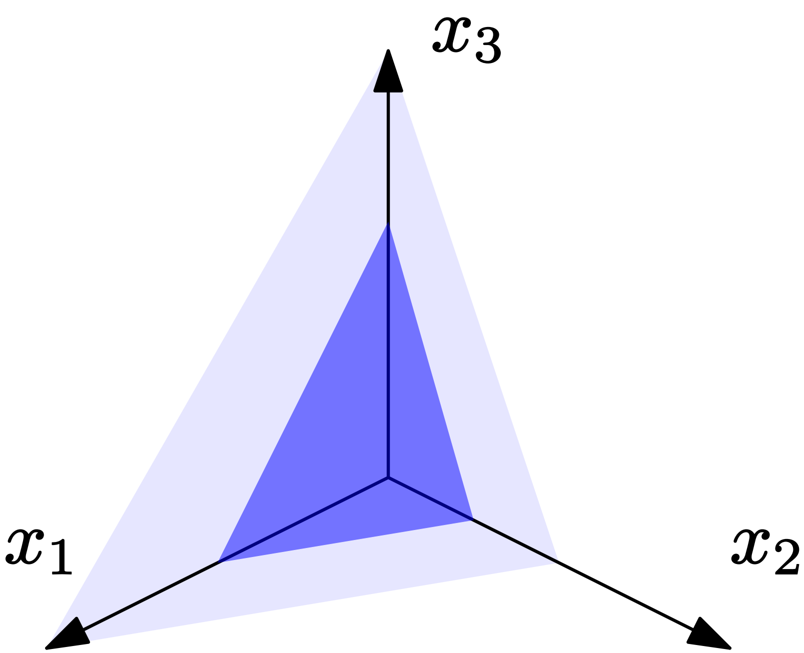




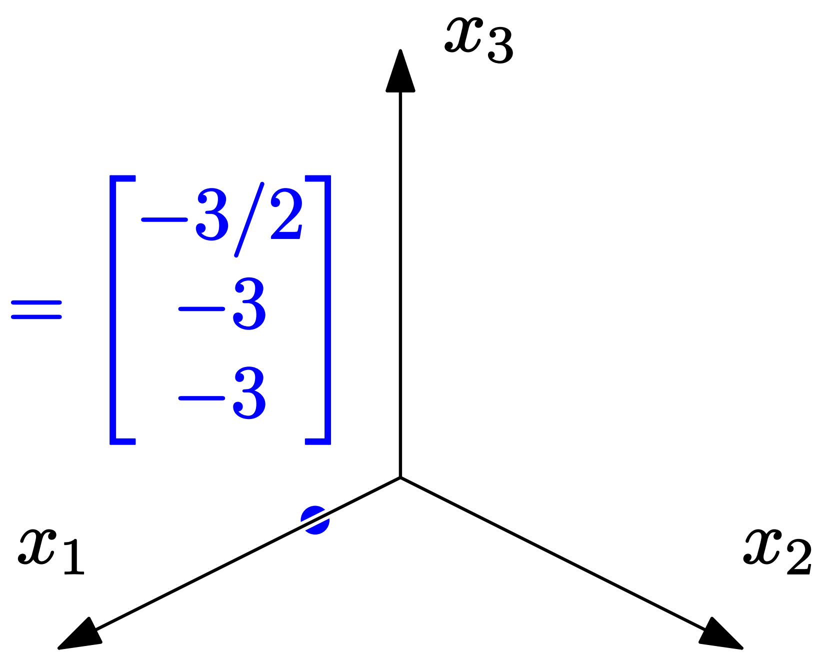
双対変換：超平面 → 点

双対変換

超平面 $h\colon x_d = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{d-1}x_{d-1} + b$ を
点 $h^* = (a_1, a_2, \ldots, a_{d-1}, -b)^{\mathrm{T}}$ に変換する



$h\colon x_3 = -(3/2)x_1 - 3x_2 + 3$



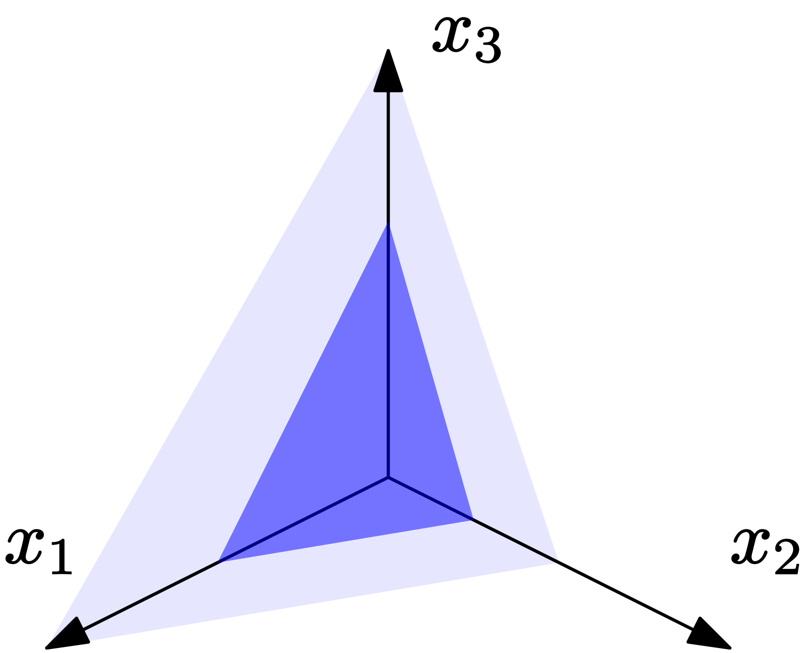
$$h^* = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

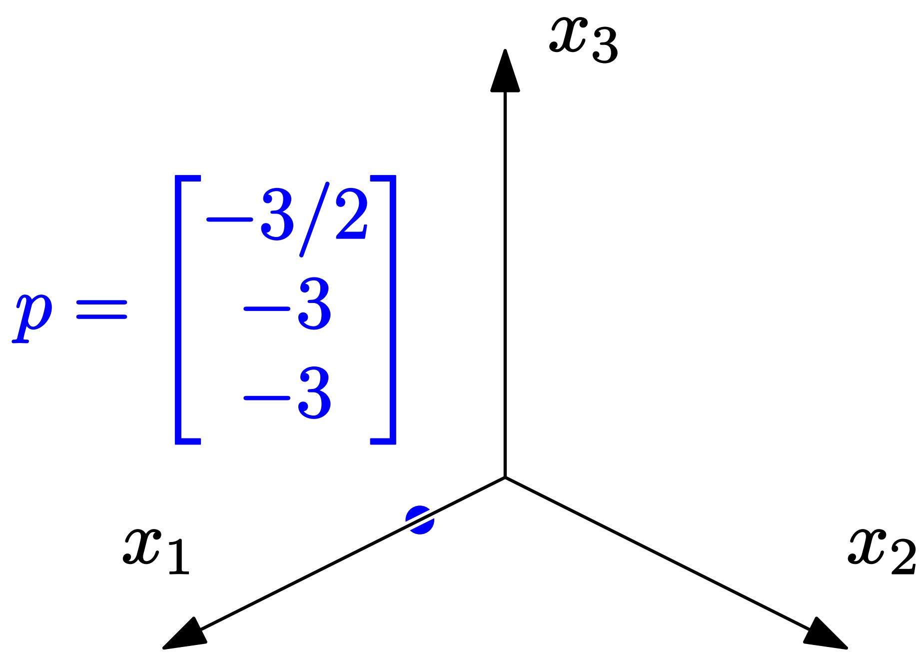
注：x_d 軸と交わらない超平面は変換できない

双対変換：点 → 超平面

双対変換

点 $p = (a_1, a_2, \ldots, a_{d-1}, a_d)^{\mathrm{T}}$ を
超平面 $p^*\colon x_d = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{d-1}x_{d-1} - a_d$ に
変換





$p^*\colon x_3 = -(3/2)x_1 - 3x_2 + 3$

双対変換の性質

平面における双対変換と同様の性質が成り立つ

性質：双対変換の性質

点 $p \in \mathbb{R}^d$ と x_d 軸と交わる超平面 $h \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して
次が成り立つ

1. $p^{**} = p, \ \ h^{**} = h$
2. $p \in h \Leftrightarrow h^* \in p^*$
3. p が h の上側にある $\Leftrightarrow h^*$ が p^* の上側にある

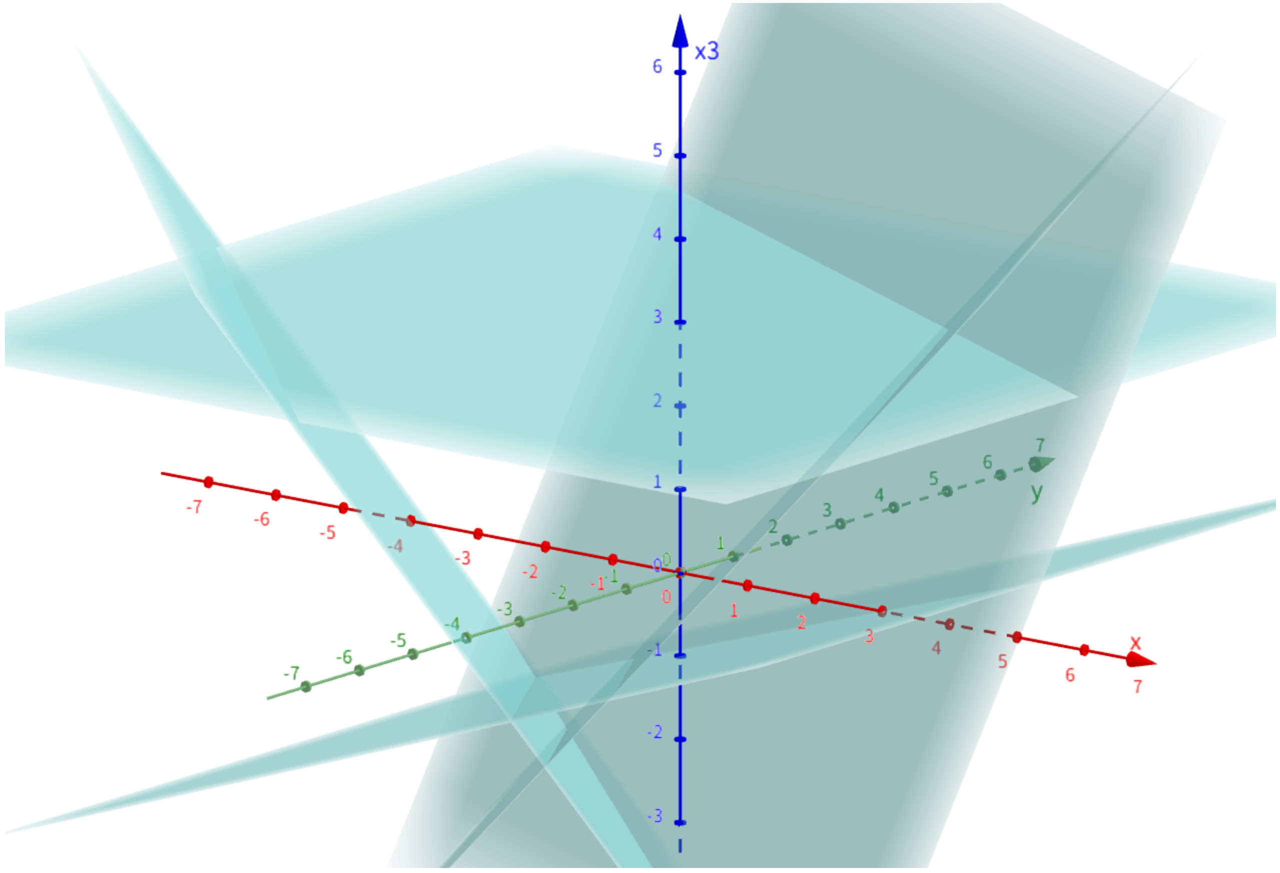
証明：演習問題

超平面配置

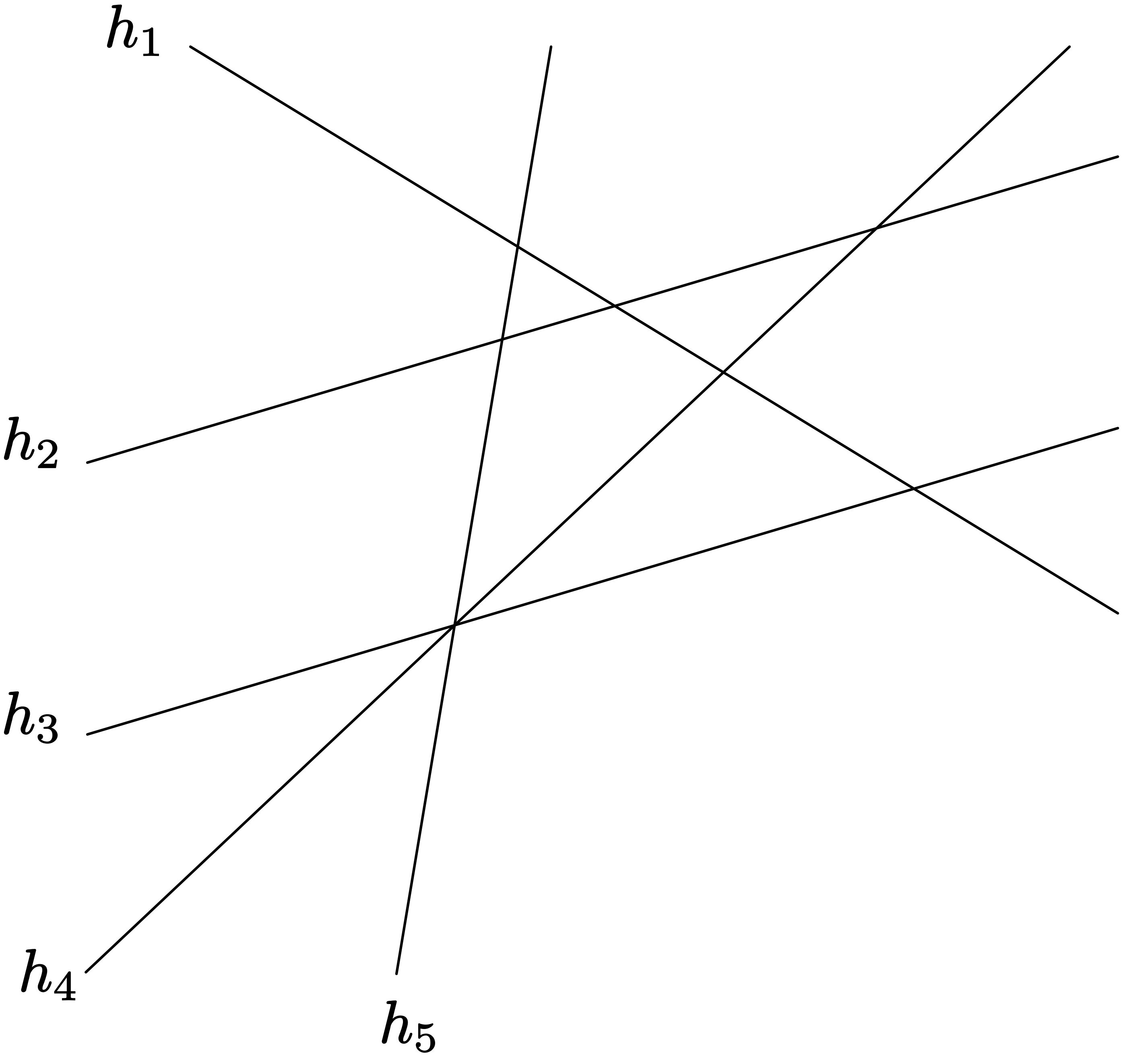
定義：超平面配置

超平面配置 とは 有限個の超平面の集合のこと

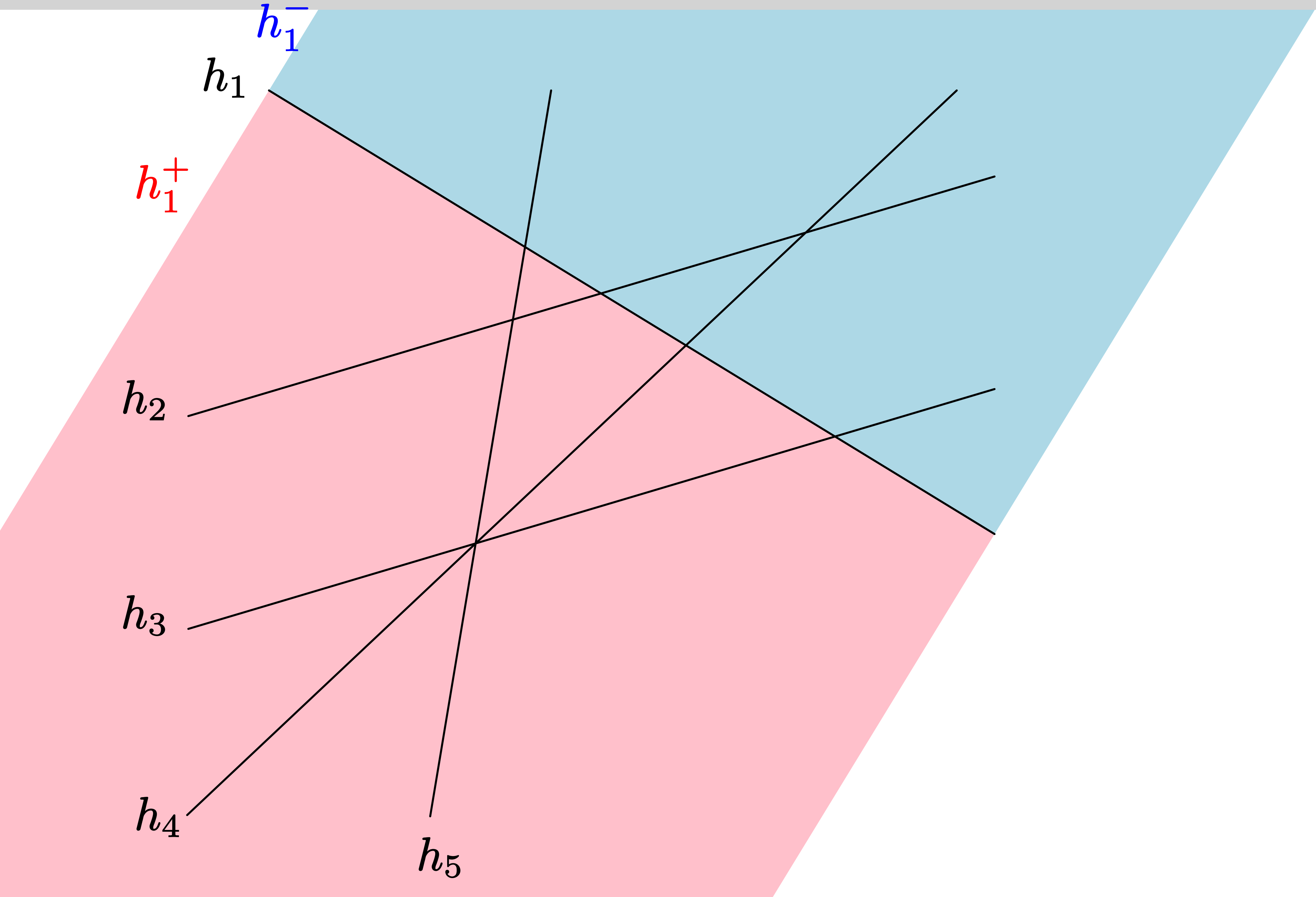
双対変換によって，点集合は超平面配置に写される



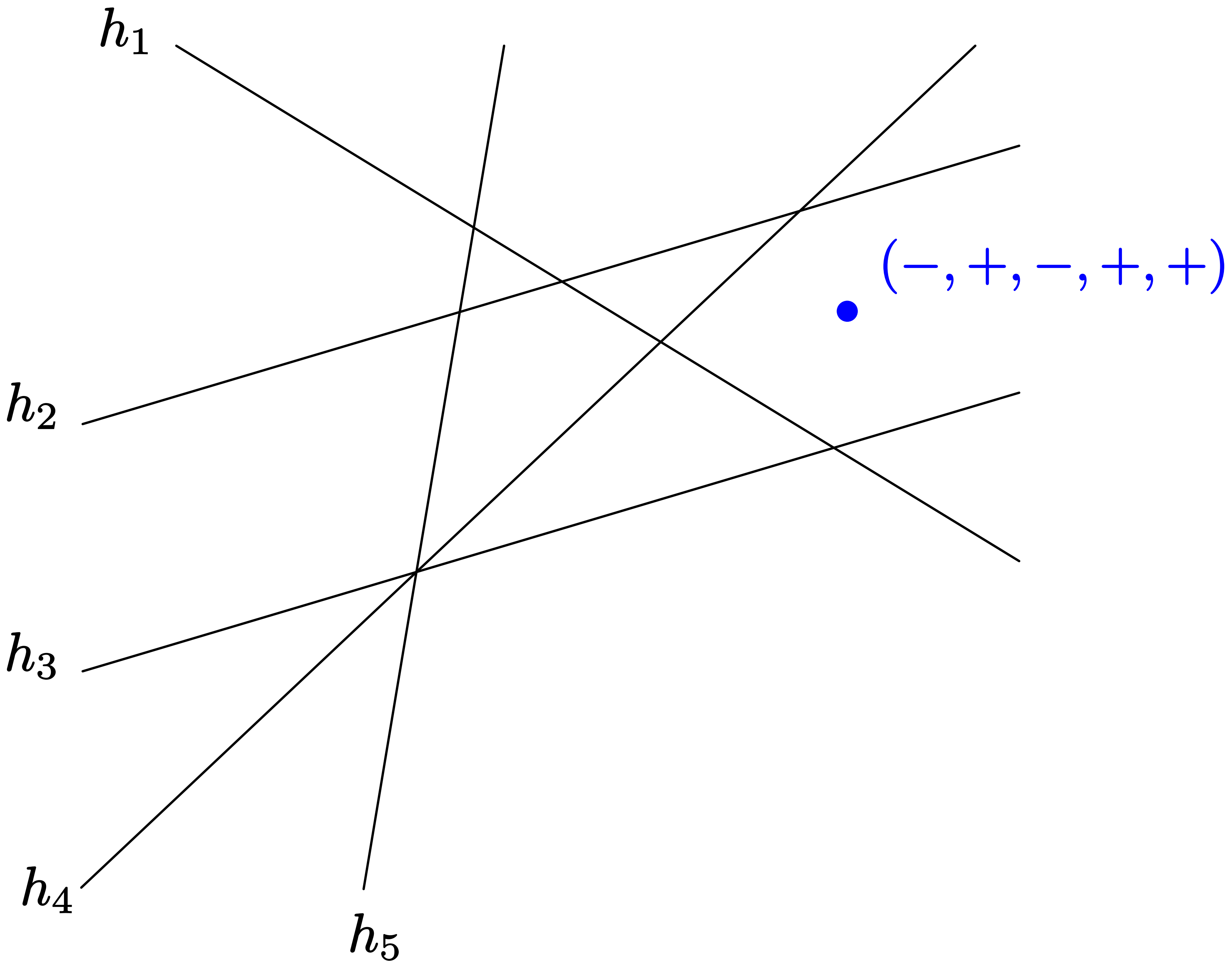
超平面配置の面：例



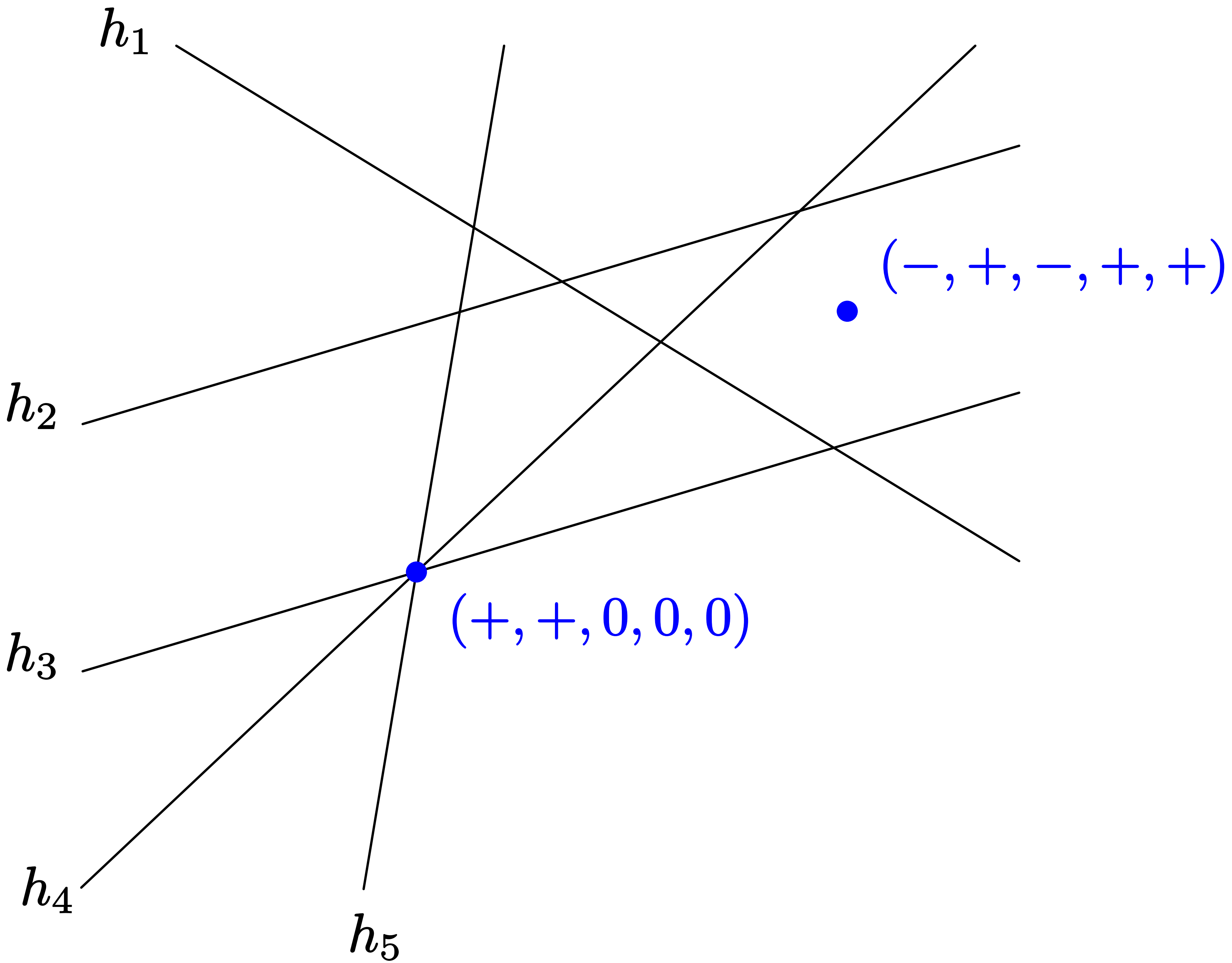
超平面配置の面：例



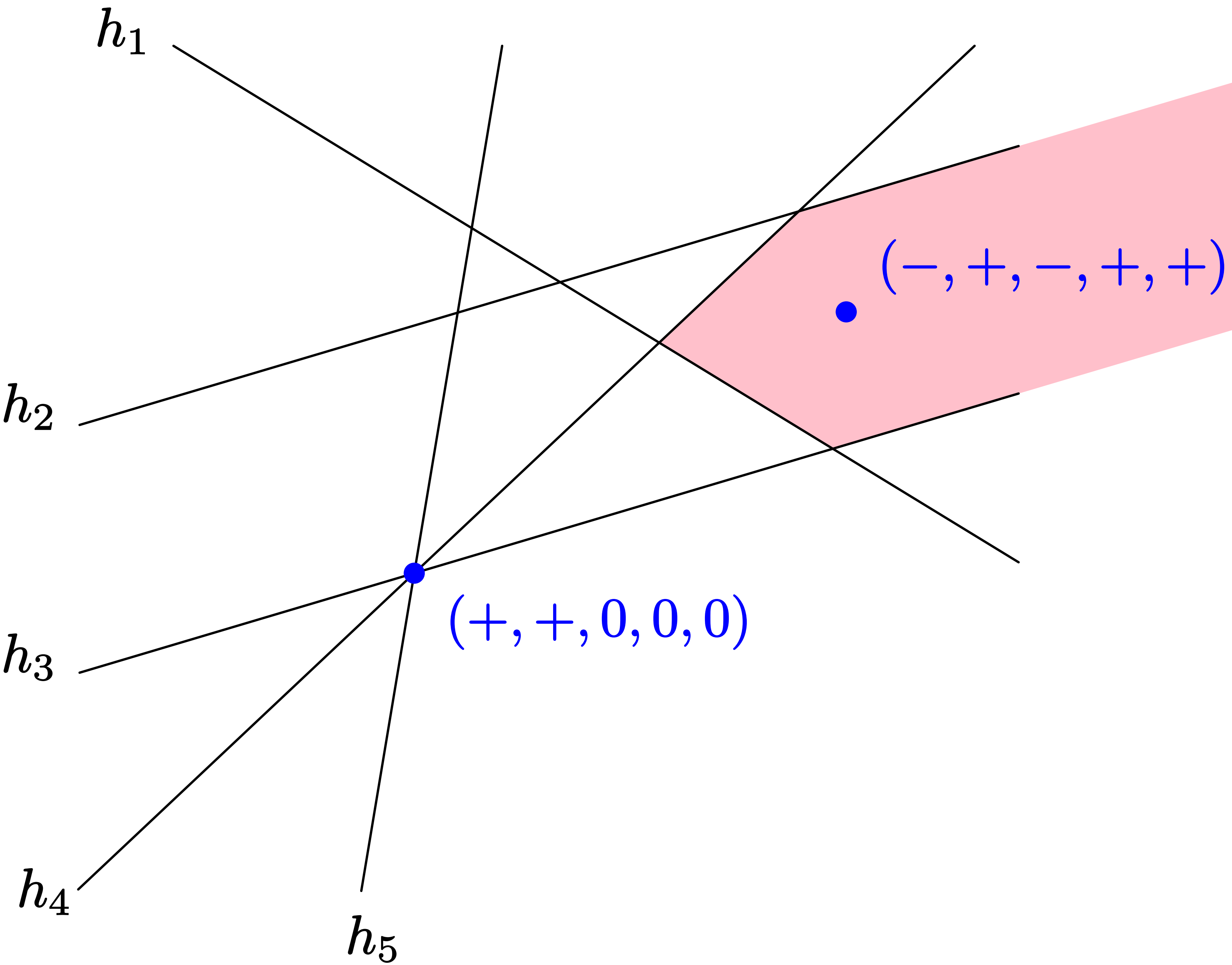
超平面配置の面：例



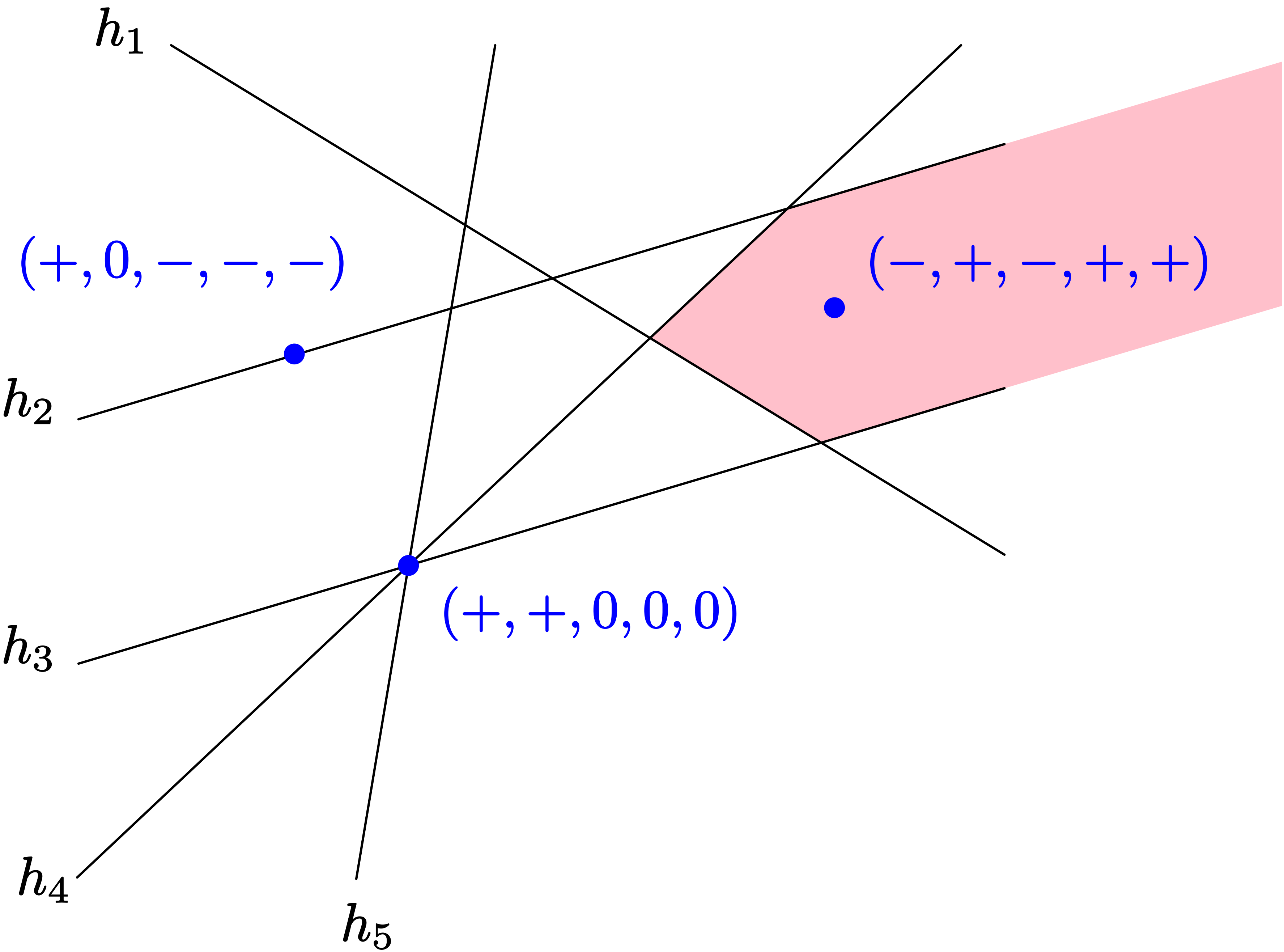
超平面配置の面：例



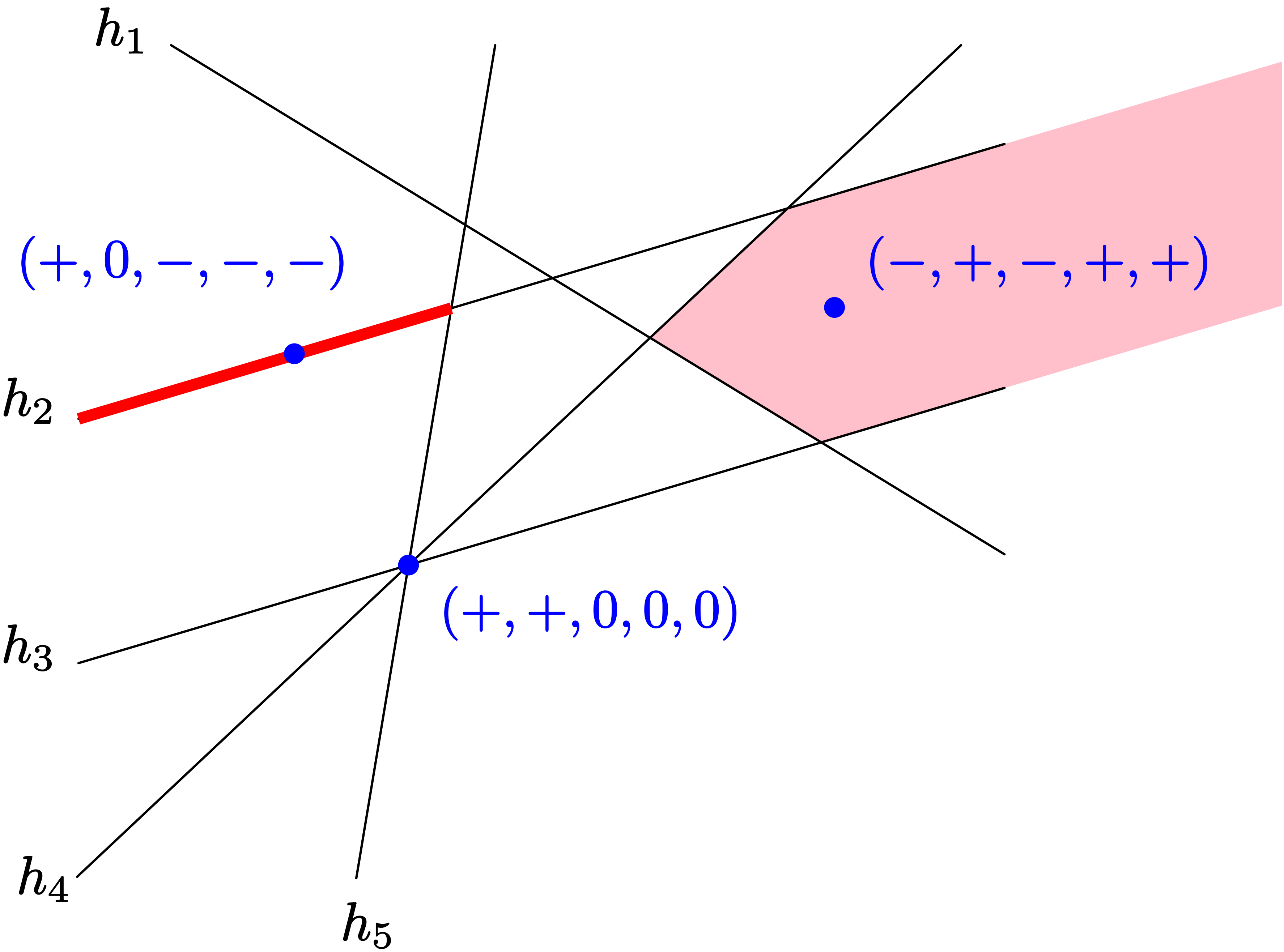
超平面配置の面：例



超平面配置の面：例



超平面配置の面：例



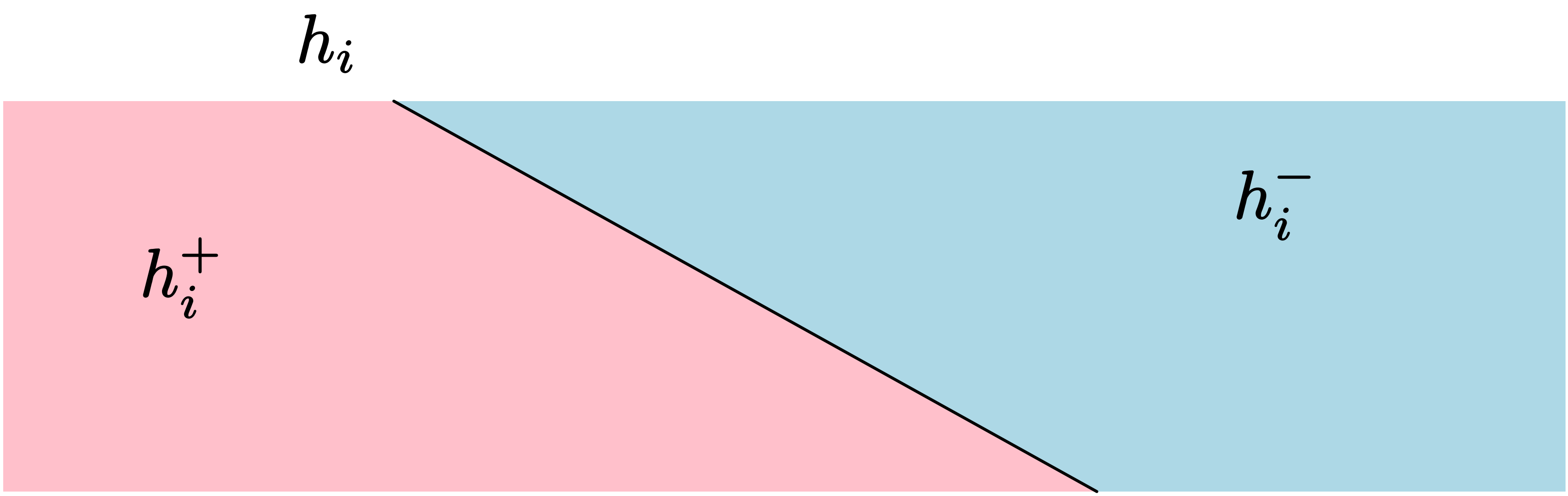
超平面配置と符号：準備

超平面配置 $\mathcal{A} = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$, $h_i \subseteq \mathbb{R}^d$

設定

各超平面 h_i に対して，それが定める開半空間の一方を**正開半空間** h_i^+，もう一方を**負開半空間** h_i^- とする

- 例えば，$h_i : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_dx_d = b$ のとき
  $h_i^+ : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_dx_d > b$,
  $h_i^- : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_dx_d < b$ とする

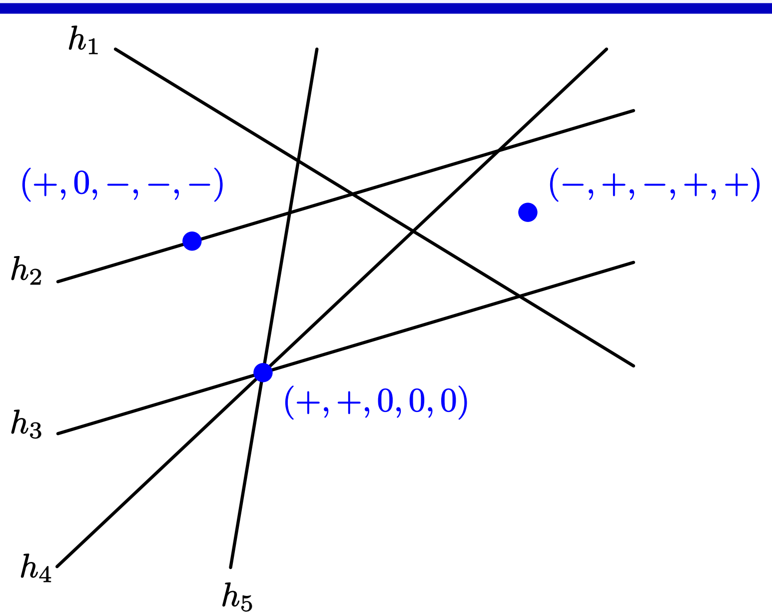


超平面配置 $\mathcal{A} = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$，$h_i \subseteq \mathbb{R}^d$，点 $p \in \mathbb{R}^d$

定義：点の符号ベクトル

$\mathcal{A}$ における p の **符号ベクトル** $\sigma(p) \in \{0, +, -\}^d$ とは

$$\sigma(p)_i = \begin{cases} 0 & (p \in h_i) \\ + & (p \in h_i^+) \\ - & (p \in h_i^-) \end{cases}$$



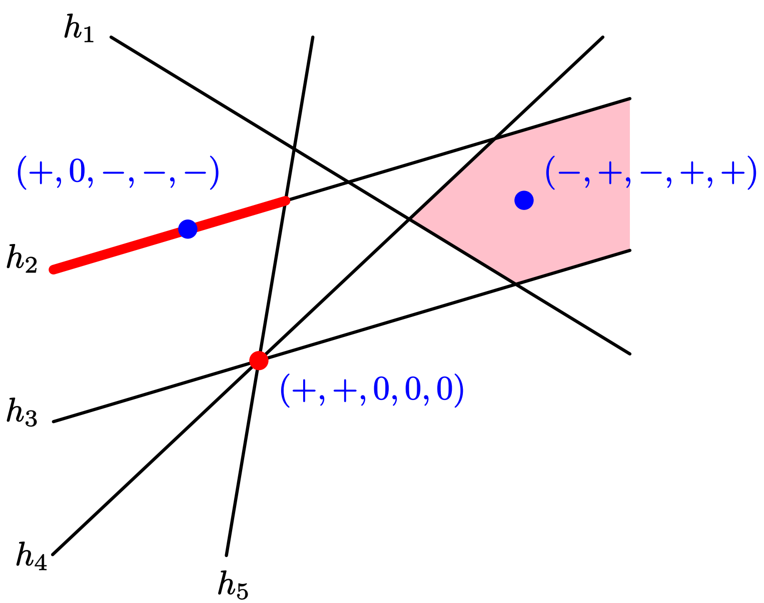
超平面配置 $\mathcal{A} = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$, $h_i \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：超平面配置の面

符号ベクトル $\sigma \in \{0, +, -\}^d$ に対して, 次の集合を考える

$$F = \{p \in \mathbb{R}^d \mid \sigma(p) = \sigma\}$$

$F \neq \emptyset$ のとき, F を σ が定める $\mathcal{A}$ の **面** という



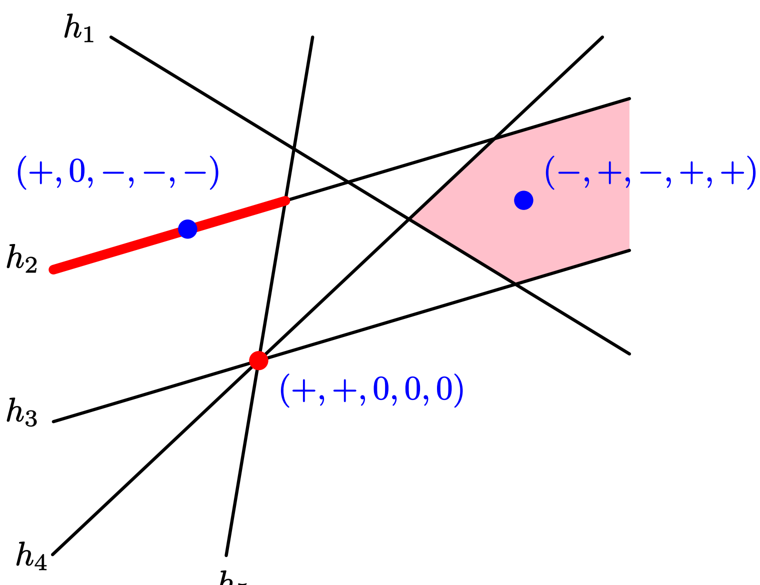
超平面配置 $\mathcal{A} = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$， $h_i \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：超平面配置の面

符号ベクトル $\sigma \in \{0, +, -\}^d$ に対して, 次の集合を考える

$$F = \{p \in \mathbb{R}^d \mid \sigma(p) = \sigma\}$$

$F \neq \emptyset$ のとき， F を σ が定める $\mathcal{A}$ の **面** という



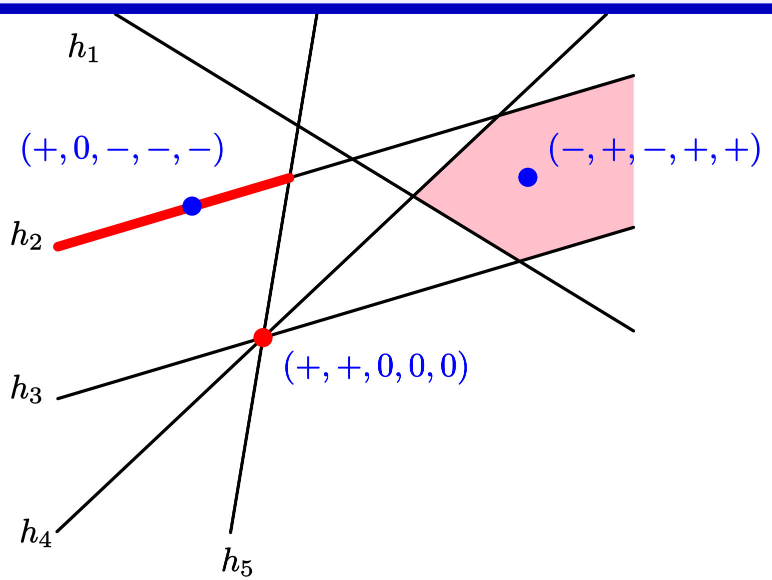
性質：面 (の閉包) は 凸多面集合

超平面配置の面の次元

超平面配置 $\mathcal{A} = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$, $h_i \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：面の次元

- 面 F の **次元** とは，アフィン包 $\mathrm{aff}(F)$ の次元のこと
- 特定の次元の面には特別な名称がある
  - **頂点**：0 次元面
  - **辺**：1 次元面
  - **ファセット**：$d-1$ 次元面
  - **セル** (胞)：d 次元面



超平面配置のセルの数

超平面配置 $\mathcal{A} = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$, $h_i \subseteq \mathbb{R}^d$

性質：超平面配置のセル数に対する上界

$$\mathcal{A}\text{ のセル数} \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$$

$d = 1$ のとき $= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n$

$d = 2$ のとき $= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$

$$= 1 + n + \frac{1}{2}n(n-1)$$

超平面配置のセルの数：証明 (1)

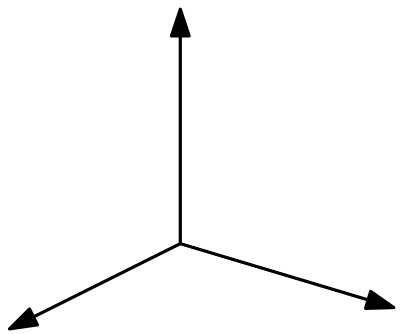
証明：$d \geq 1$ と $n \geq 0$ に関する帰納法

$d = 1$ のとき

- 超平面配置 は 直線上の点配置
- $\therefore$ セル数 $= 1 + n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}$

$n = 0$ のとき

- $\mathbb{R}^d$ 自体が唯一のセル
- $\therefore$ セル数 $= 1 = \sum_{i=0}^{d} \binom{0}{i}$



証明 (続)：$d \geq 1$ と $n \geq 0$ を任意に固定する

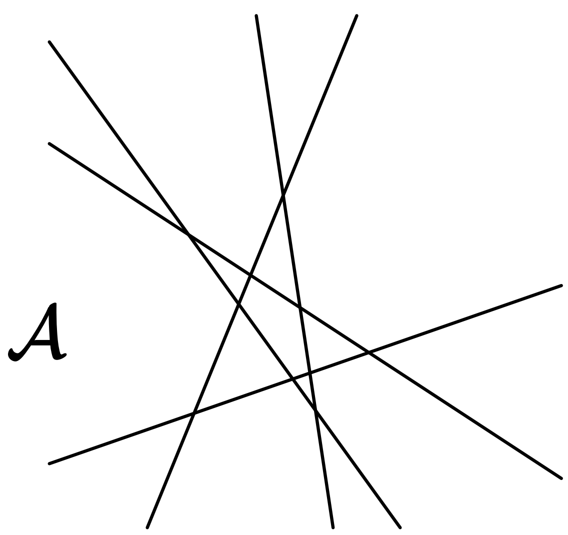
仮定

- $\mathbb{R}^{d+1}$ における n 個の超平面で，セル数 $\leq \displaystyle\sum_{i=0}^{d+1} \binom{n}{i}$
- $\mathbb{R}^{d}$ における $n+1$ 個の超平面で，セル数 $\leq \displaystyle\sum_{i=0}^{d} \binom{n+1}{i}$

超平面配置のセルの数：証明 (3)

証明 (続)：$\mathbb{R}^{d+1}$ における $n+1$ 個の超平面の配置 $\mathcal{A}$ を考える

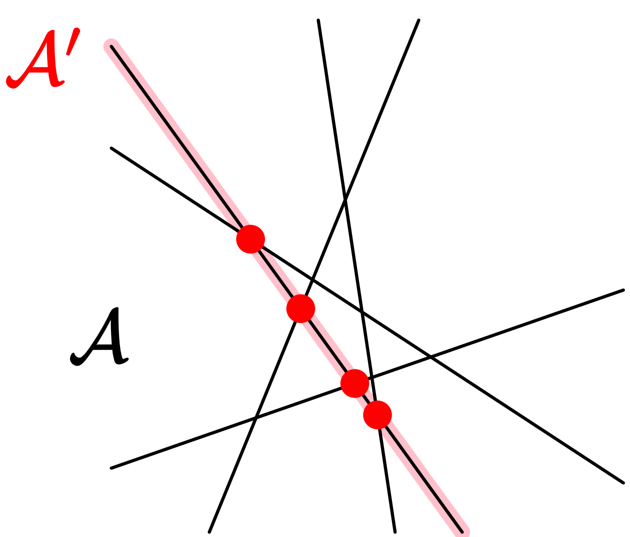
- それらを $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$ とする
- このとき，$\mathcal{A}' = \{h_1 \cap h_{n+1}, h_2 \cap h_{n+1}, \ldots, h_n \cap h_{n+1}\}$ は h_{n+1} における d 次元アフィン部分空間の集合
(注：$h_i \cap h_{n+1} = \emptyset$ となる h_i は無視する)
- これは $\mathbb{R}^d$ における高々 n 個の超平面の配置と見なせて各セルが元の超平面配置の 2 つのセルに接している



超平面配置のセルの数：証明 (3)

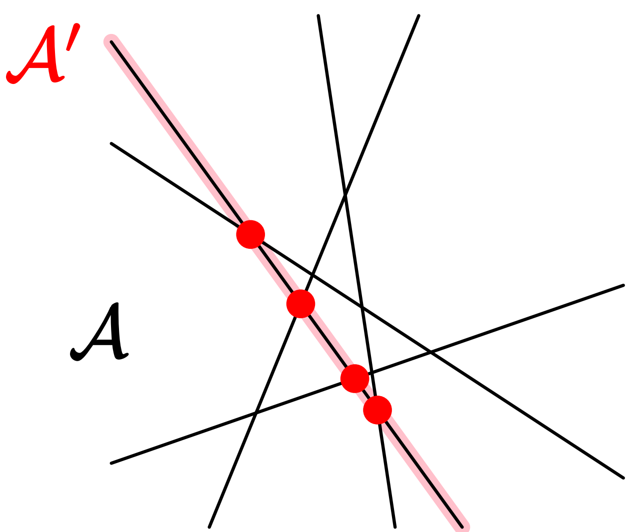
証明 (続)：$\mathbb{R}^{d+1}$ における $n+1$ 個の超平面の配置 $\mathcal{A}$ を考える

- それらを $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$ とする
- このとき，$\mathcal{A}' = \{h_1 \cap h_{n+1}, h_2 \cap h_{n+1}, \ldots, h_n \cap h_{n+1}\}$ は h_{n+1} における d 次元アフィン部分空間の集合
  (注：$h_i \cap h_{n+1} = \emptyset$ となる h_i は無視する)
- これは $\mathbb{R}^d$ における高々 n 個の超平面の配置と見なせて各セルが元の超平面配置の 2 つのセルに接している



証明 (続)：$\mathbb{R}^{d+1}$ における $n+1$ 個の超平面の配置 $\mathcal{A}$ を考える

- それらを $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$ とする
- このとき，$\mathcal{A}' = \{h_1 \cap h_{n+1}, h_2 \cap h_{n+1}, \ldots, h_n \cap h_{n+1}\}$ は h_{n+1} における d 次元アフィン部分空間の集合
(注：$h_i \cap h_{n+1} = \emptyset$ となる h_i は無視する)
- これは $\mathbb{R}^d$ における高々 n 個の超平面の配置と見なせて各セルが元の超平面配置の 2 つのセルに接している



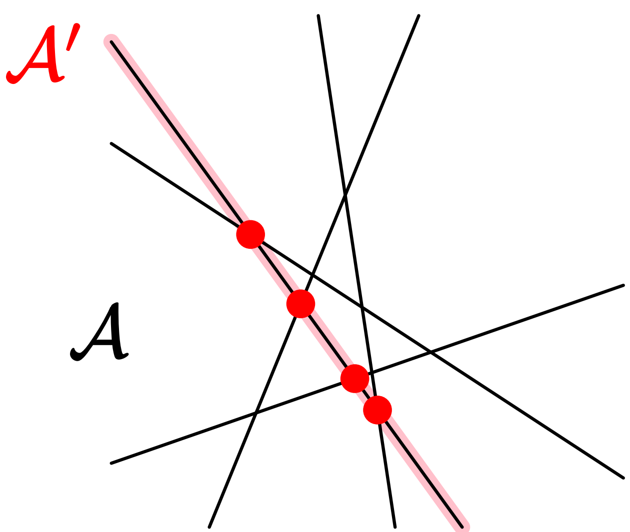
$\therefore \mathcal{A}$ のセルの数

$= \mathcal{A} - \{h_{n+1}\}$ のセルの数 $+ \mathcal{A}'$ のセルの数

$$\leq \sum_{i=0}^{d+1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$$

証明 (続)：$\mathbb{R}^{d+1}$ における $n+1$ 個の超平面の配置 $\mathcal{A}$ を考える

- それらを $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$ とする
- このとき，$\mathcal{A}' = \{h_1 \cap h_{n+1}, h_2 \cap h_{n+1}, \ldots, h_n \cap h_{n+1}\}$ は h_{n+1} における d 次元アフィン部分空間の集合
(注：$h_i \cap h_{n+1} = \emptyset$ となる h_i は無視する)
- これは $\mathbb{R}^d$ における高々 n 個の超平面の配置と見なせて各セルが元の超平面配置の 2 つのセルに接している



$$
\begin{aligned}
&\therefore \mathcal{A} \text{ のセルの数} \\
&= \mathcal{A} - \{h_{n+1}\} \text{ のセルの数} + \mathcal{A}' \text{ のセルの数} \\
&\leq \sum_{i=0}^{d+1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{i=0}^{d} \left(\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} \right)
\end{aligned}
$$

超平面のセルの数：証明 (4)

$$\therefore \mathcal{A} \text{ のセルの数} \le \sum_{i=0}^{d+1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{i=0}^{d} \left(\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} \right)$$

超平面のセルの数：証明 (4)

$$\therefore \mathcal{A} \text{ のセルの数} \le \sum_{i=0}^{d+1}\binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{d}\binom{n}{i}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1=\binom{n+1}{0}} + \sum_{i=0}^{d}\left(\underbrace{\binom{n}{i+1}+\binom{n}{i}}_{=\binom{n+1}{i+1}}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{d+1}\binom{n+1}{i} \qquad \square$$

まとめ

今日の目標

- 巡回多面体の面の数を調べることができる
- 超平面配置に関する用語を正しく用いることができる