離散数理工学 (2025 年度後学期)

第 9 回

高次元 (3)：凸多面体の面構造

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2026 年 1 月 6 日

最終更新：2025 年 12 月 22 日　07:40

今回の目標

今日の目標

凸多面体の面を調べることができるようになる

- 面の定義：頂点，ファセット
- 凸多面体の面の数

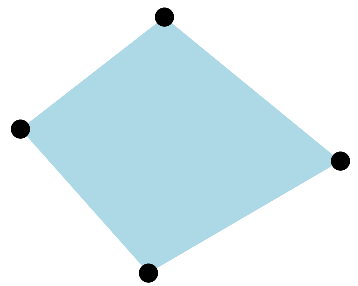
多くの証明を省略する

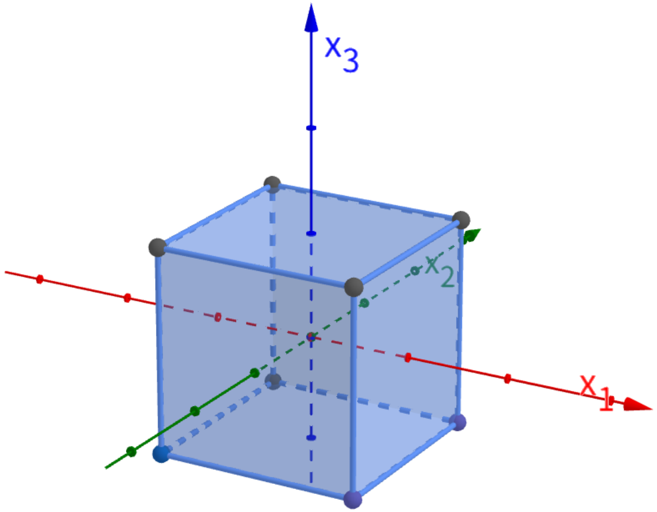
(線形計画法の理論を必要とするため)

[復習] 凸多面体

定義：凸多面体

凸多面体 とは，有限点集合の凸包

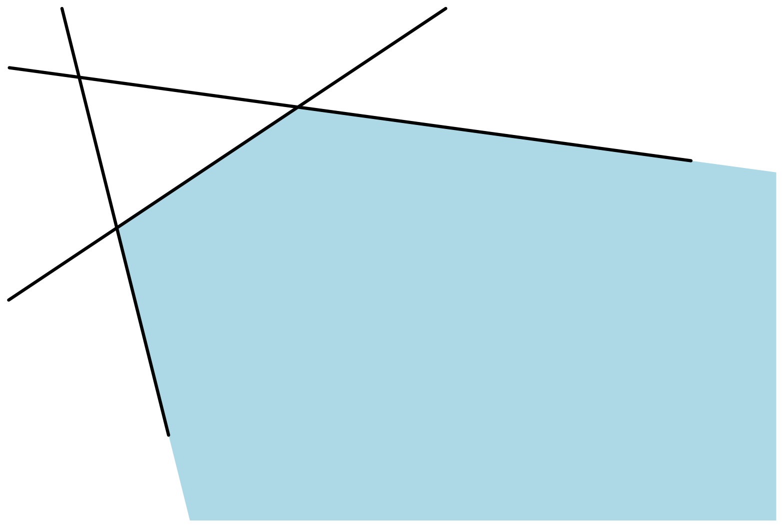


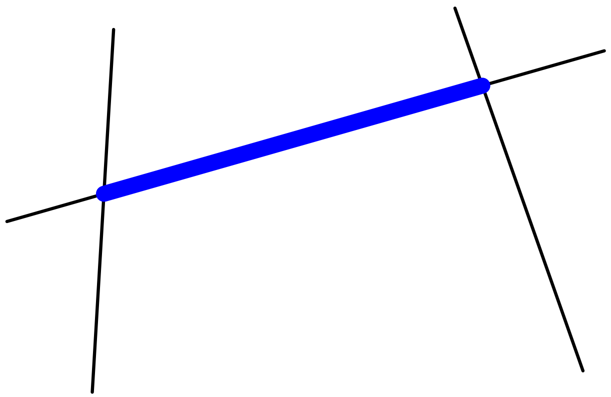


凸多面体の 次元 とは，そのアフィン包の次元

定義：凸多面集合

凸多面集合 とは，有限個の閉半空間の共通部分



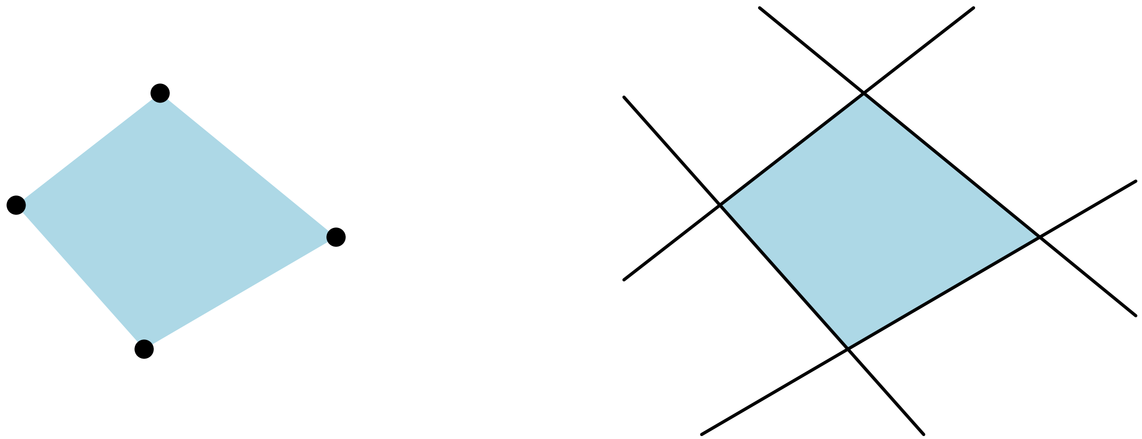


凸多面集合の 次元 とは，そのアフィン包の次元

[復習] 凸多面集合と凸多面体

性質 (ここでは証明しないが，重要)

1. 凸多面体 は 有界な凸多面集合
2. 有界な凸多面集合 は 凸多面体



つまり，凸多面体は次の 2 つの記述法を持つ

- **頂点記述**：有限点集合の凸包
- **超平面記述**：有限個の閉半空間の共通部分

目次

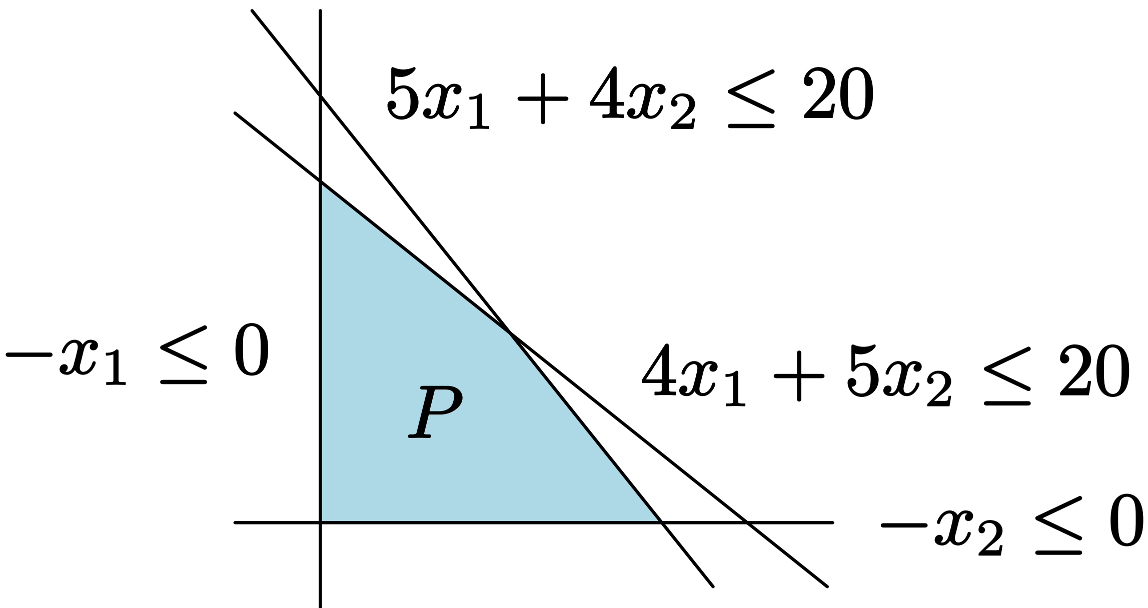
凸多面体 $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_i \ \forall\, i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$

ただし，$\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^d, b_i \in \mathbb{R} \ \forall\, i \in \{1, 2, \dots, m\}$

定義：凸多面体の面

P の **面** とは，ある添字部分集合 $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ を用いて，次のように書ける集合 F

$$F = P \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i \ \forall\, i \in I\}$$



凸多面体の面：定義

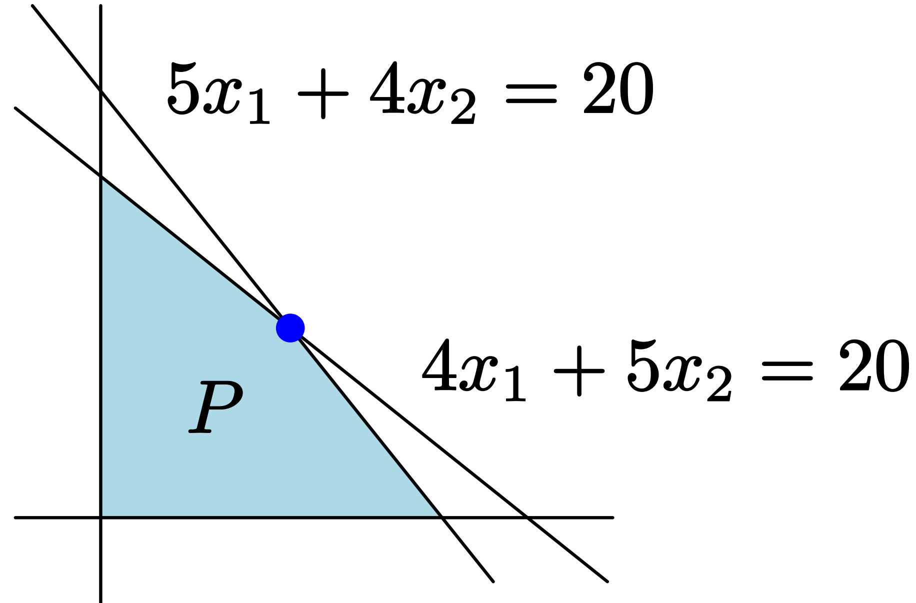
凸多面体 $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_i \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$

ただし，$\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^d, b_i \in \mathbb{R} \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

定義：凸多面体の面

P の **面** とは，ある添字部分集合 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ を用いて，次のように書ける集合 F

$$F = P \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i \ \forall\, i \in I\}$$



凸多面体の面：定義

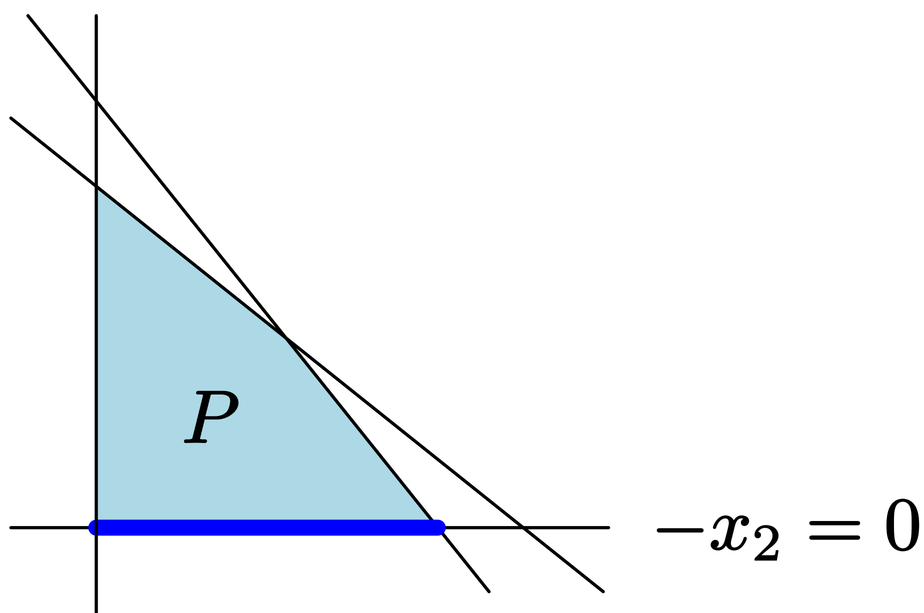
凸多面体 $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_i \ \forall\, i \in \{1,2,\ldots,m\}\}$

ただし，$\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^d, b_i \in \mathbb{R} \ \forall\, i \in \{1,2,\ldots,m\}$

定義：凸多面体の面

P の **面** とは，ある添字部分集合 $I \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$ を用いて，次のように書ける集合 F

$$F = P \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i \ \forall\, i \in I\}$$



凸多面体の面：定義

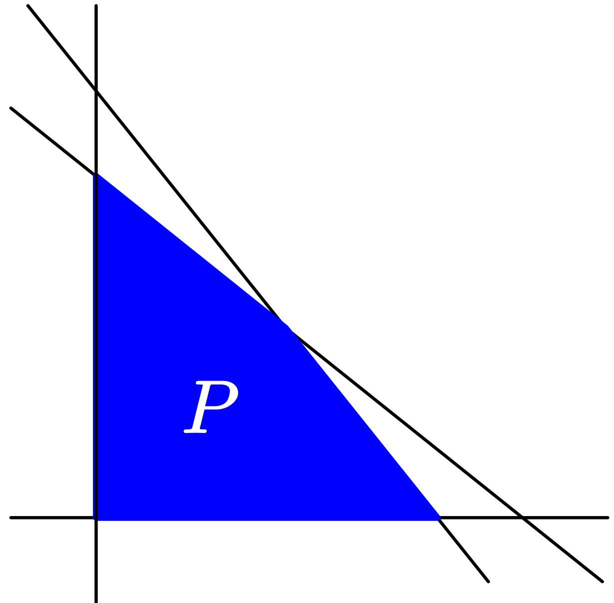
凸多面体 $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq b_i \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$

ただし，$\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^d, b_i \in \mathbb{R} \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

定義：凸多面体の面

P の **面** とは，ある添字部分集合 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ を用いて，次のように書ける集合 F

$$F = P \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = b_i \ \forall\, i \in I\}$$

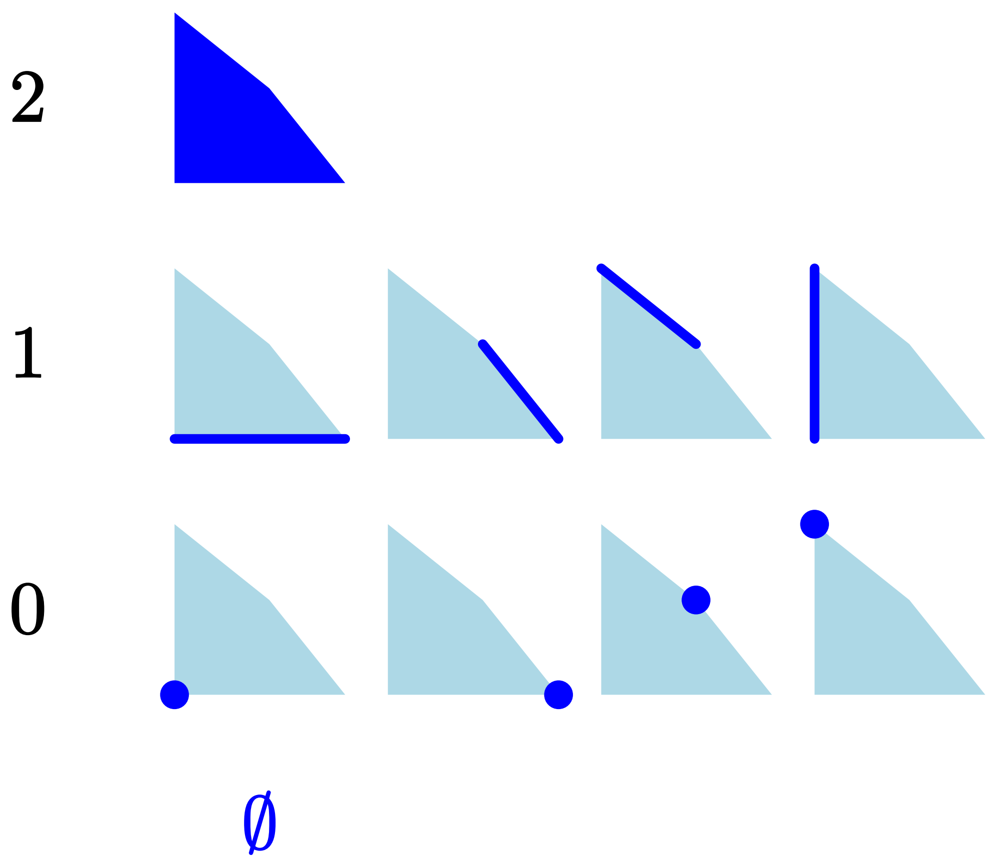


凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：面の次元

P の面 F の次元は，F のアフィン包 $\mathrm{aff}(F)$ の次元

次元



頂点，辺，ファセット

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$，P の次元 $= \dim P \leq d$

定義：頂点，辺，ファセット (側面)

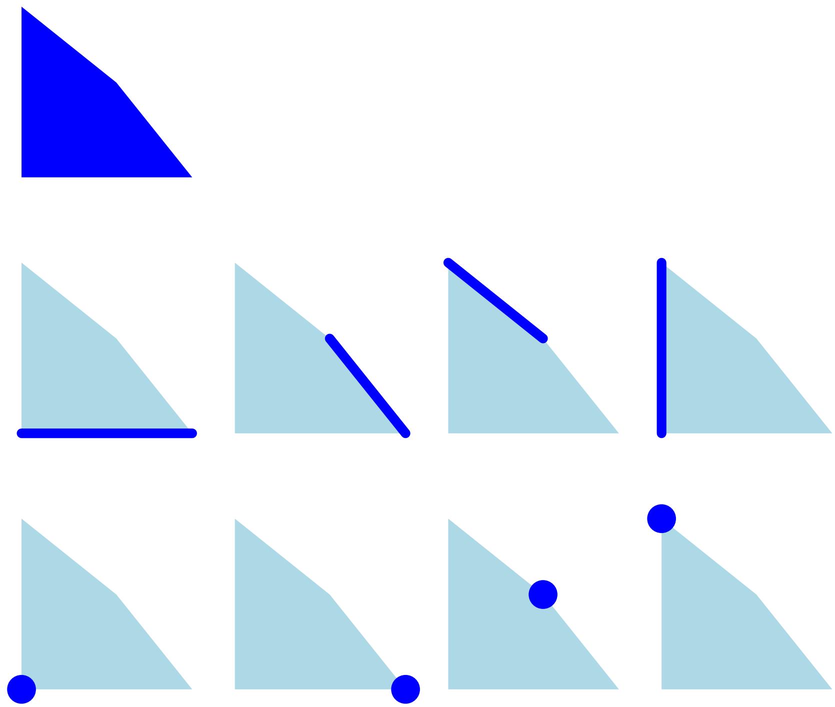
- P の **頂点** とは，P の 0 次元面のこと
- P の **辺** とは，P の 1 次元面のこと
- P の **ファセット** とは，P の $\dim P - 1$ 次元面のこと

次元

2

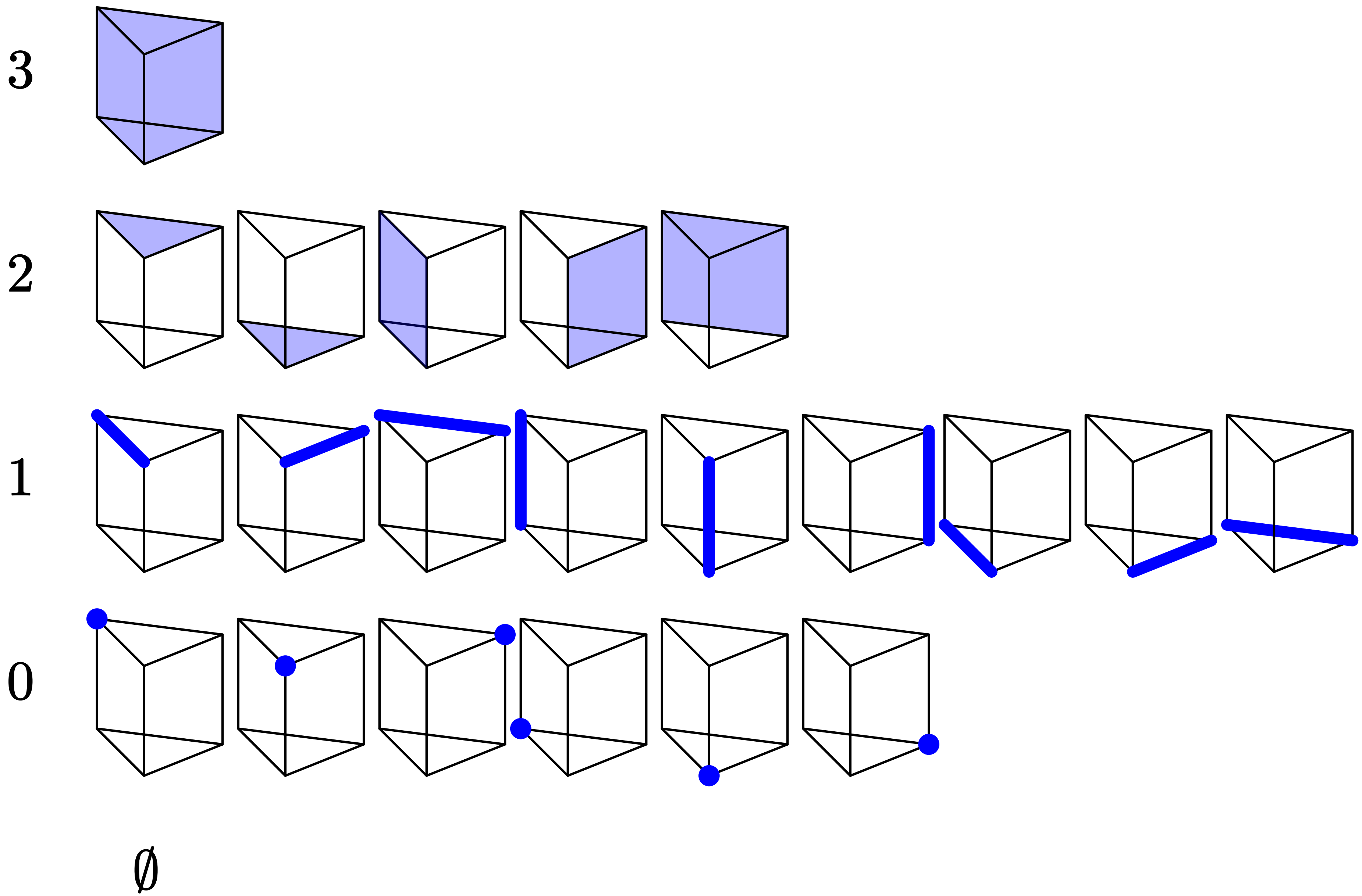
1 辺，ファセット

0 頂点

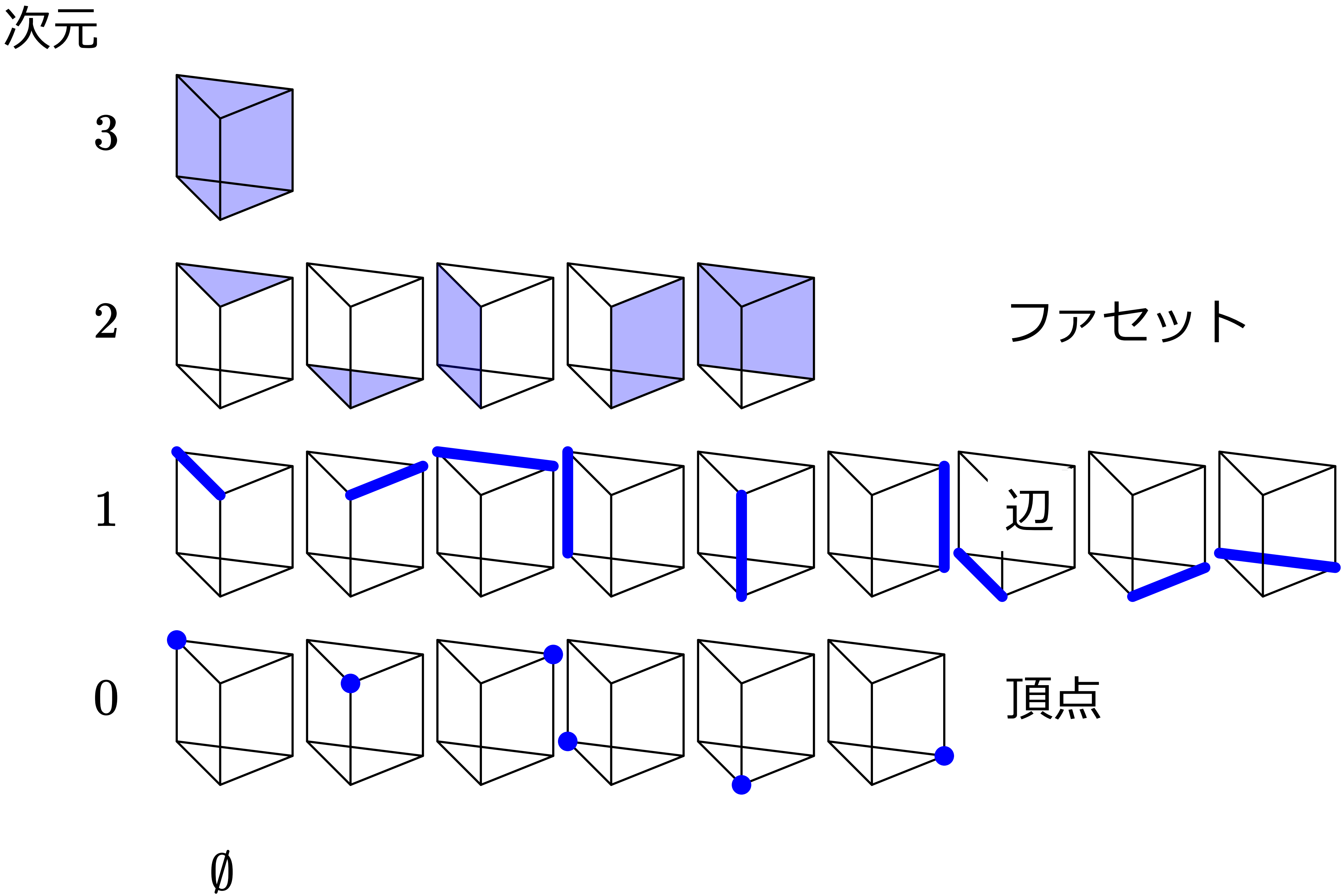


凸多面体の面：例

次元



凸多面体の面：例



凸多面体の例：立方体

定義：立方体

d **次元立方体** とは，次で定義される凸多面体

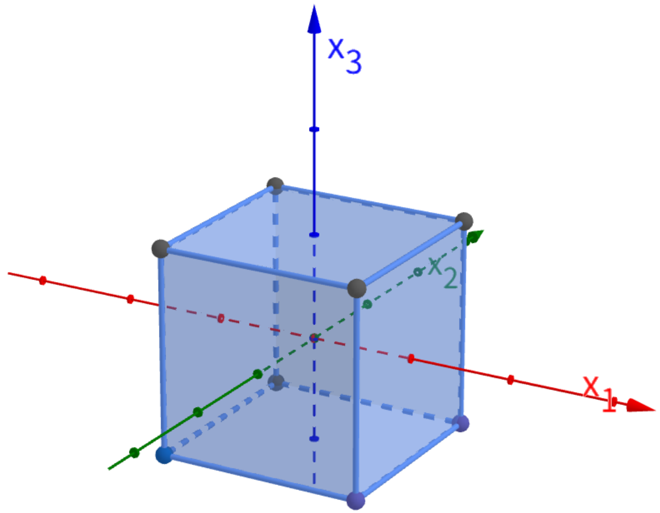
- 頂点記述：

$$\mathrm{CH}\left(\left\{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i}\boldsymbol{e}_i \mid s_i \in \{0,1\}\right\}\right)$$

($\boldsymbol{e}_i$ は基本ベクトル)

- 超平面記述：

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,d\}\right\}$$



超平面記述から頂点を求める

d 次元立方体 $C_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, d\}\}$

確認したいこと

$v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$ は C_d の頂点である

超平面記述から頂点を求める

d 次元立方体 $C_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, d\}\}$

確認したいこと

$v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$ は C_d の頂点である

d 個の等式

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ & \\ x_d &= 1 \end{aligned}\right\} \text{これらを満たす点の集合} = \{v\}$$

$\therefore \{v\} = C_d \cap \{x \mid x_i = 1 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, d\}\}$

次元は 0

d 次元立方体 $C_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, d\}\}$

確認したいこと

$v' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$ は C_d の頂点である

d 個の等式

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \\ & \\ x_d &= 1 \end{aligned}\right\} \text{これらを満たす点の集合} = \{v'\}$$

$$\therefore \{v\} = C_d \cap \{x \mid x_1 = -1, x_i = 1 \quad \forall\, i \in \{2, \ldots, d\}\}$$

次元は 0

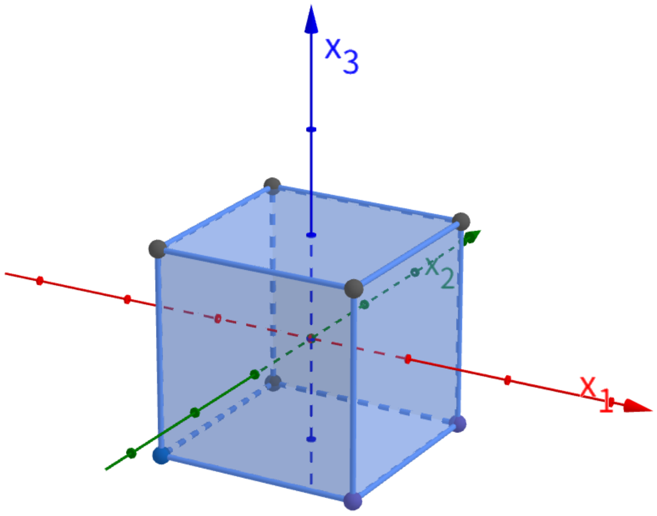
頂点記述からファセットを求める

手順

$P = \mathrm{CH}(V) \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim P = d$ とする

1. V から点を d 個選んで，W とする
2. $\mathrm{aff}(W)$ の次元が $d-1$ であることを確認する
3. $\mathrm{aff}(W)$ を $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ の形で書く
4. 不等式 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b$ を任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が満たすことを確認する
5. $P \cap \mathrm{aff}(W)$ は P のファセットである

<u>証明</u>：省略



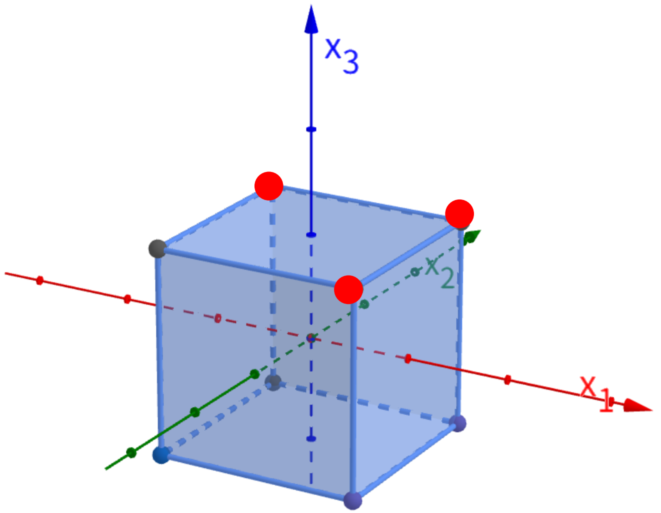
頂点記述からファセットを求める

手順

$P = \mathrm{CH}(V) \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim P = d$ とする

1. V から点を d 個選んで，W とする
2. $\mathrm{aff}(W)$ の次元が $d-1$ であることを確認する
3. $\mathrm{aff}(W)$ を $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ の形で書く
4. 不等式 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b$ を任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が満たすことを確認する
5. $P \cap \mathrm{aff}(W)$ は P のファセットである

証明：省略



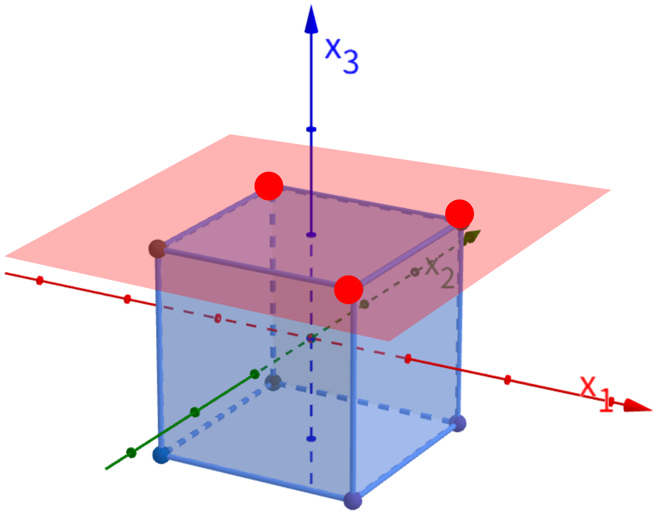
頂点記述からファセットを求める

手順

$P = \mathrm{CH}(V) \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim P = d$ とする

1. V から点を d 個選んで，W とする
2. $\mathrm{aff}(W)$ の次元が $d-1$ であることを確認する
3. $\mathrm{aff}(W)$ を $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ の形で書く
4. 不等式 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b$ を任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が満たすことを確認する
5. $P \cap \mathrm{aff}(W)$ は P のファセットである

証明：省略



頂点記述からファセットを… (1)

d 次元立方体 $C_d = \mathrm{CH}(\left\{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i}e_i \mid s_i \in \{0,1\}\right\})$

確認したいこと

次の W に対して，$F = C_d \cap \mathrm{aff}(W)$ は C_d のファセットである

1. V から点を d 個選んで，W とする

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

d 次元立方体 $C_d = \mathrm{CH}\left(\left\{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i}e_i \mid s_i \in \{0,1\}\right\}\right)$

確認したいこと

次の W に対して，$F = C_d \cap \mathrm{aff}(W)$ は
C_d のファセットである

2. $\mathrm{aff}(W)$ の次元が $d-1$ であることを確認する

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

頂点記述からファセットを… (2)

d 次元立方体 $C_d = \mathrm{CH}\left(\left\{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i}e_i \mid s_i \in \{0,1\}\right\}\right)$

確認したいこと

次の W に対して，$F = C_d \cap \mathrm{aff}(W)$ は
C_d のファセットである

2. $\mathrm{aff}(W)$ の次元が $d-1$ であることを確認する

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{rank} = d$$

$$\therefore \dim \mathrm{aff}(W) = d-1$$

頂点記述からファセットを… (3)

d 次元立方体 $C_d = \mathrm{CH}(\left\{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i}e_i \mid s_i \in \{0,1\}\right\})$

確認したいこと

次の W に対して，$F = C_d \cap \mathrm{aff}(W)$ は C_d のファセットである

3. $\mathrm{aff}(W)$ を $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ の形で書く

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_d & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$$

頂点記述からファセットを… (3)

d 次元立方体 $C_d = \mathrm{CH}\left(\left\{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i} e_i \mid s_i \in \{0,1\}\right\}\right)$

確認したいこと

次の W に対して，$F = C_d \cap \mathrm{aff}(W)$ は C_d のファセットである

3. $\mathrm{aff}(W)$ を $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ の形で書く

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_d & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

頂点記述からファセットを… (3)

d 次元立方体 $C_d = \mathrm{CH}\left(\left\{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i}\boldsymbol{e}_i \mid s_i \in \{0,1\}\right\}\right)$

確認したいこと

次の W に対して，$F = C_d \cap \mathrm{aff}(W)$ は C_d のファセットである

3. $\mathrm{aff}(W)$ を $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b$ の形で書く

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_d & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$$

$$\| $$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{aff}(W) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_1 = 1\}$$

頂点記述からファセットを… (4)

d 次元立方体 $C_d = \mathrm{CH}\left(\left\{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i}\boldsymbol{e}_i \mid s_i \in \{0,1\}\right\}\right)$

確認したいこと

次の W に対して，$F = C_d \cap \mathrm{aff}(W)$ は C_d のファセットである

4. 不等式 $\underline{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le b}$ を任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が満たすことを確認する　$x_1 \le 1$

$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i}\boldsymbol{e}_i$ とすると $(s_i \in \{0,1\})$

$$x_1 = (-1)^{s_1} \le 1$$

$\therefore$ 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が $x_1 \le 1$ を満たす

頂点記述からファセットを⋯(5)

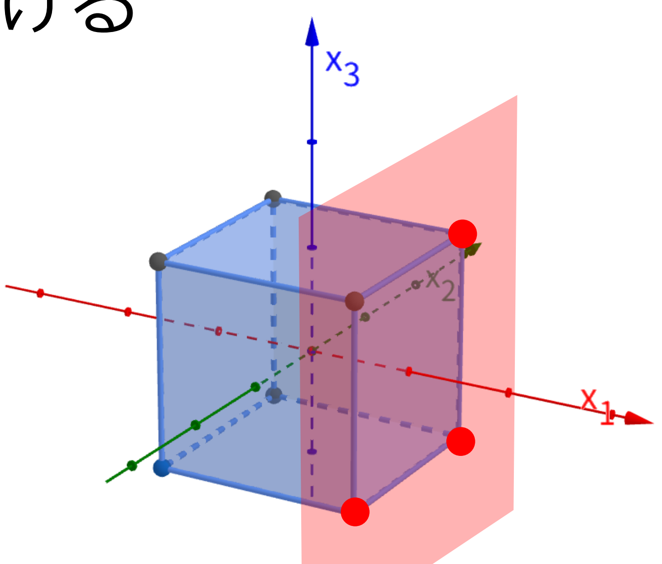
d 次元立方体 $C_d = \mathrm{CH}\left(\left\{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i}e_i \mid s_i \in \{0,1\}\right\}\right)$

確認したいこと

次の W に対して，$F = C_d \cap \mathrm{aff}(W)$ は
C_d のファセットである

5. $P \cap \mathrm{aff}(W)$ は P のファセットである

特に，$F = C_d \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1 = 1\}$ と書ける



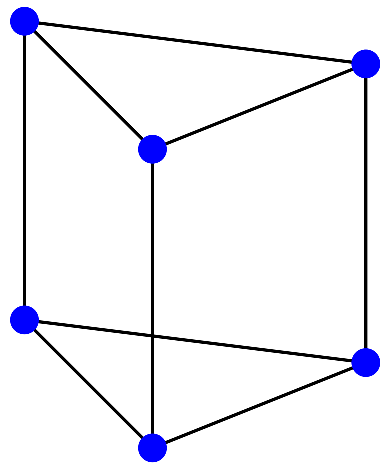
頂点記述と頂点集合

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$，P の頂点集合 V

性質：凸多面体はその頂点集合の凸包

- $P = \mathrm{CH}(V)$
- 任意の $v \in V$ に対して，$P \neq \mathrm{CH}(V - \{v\})$

証明：省略



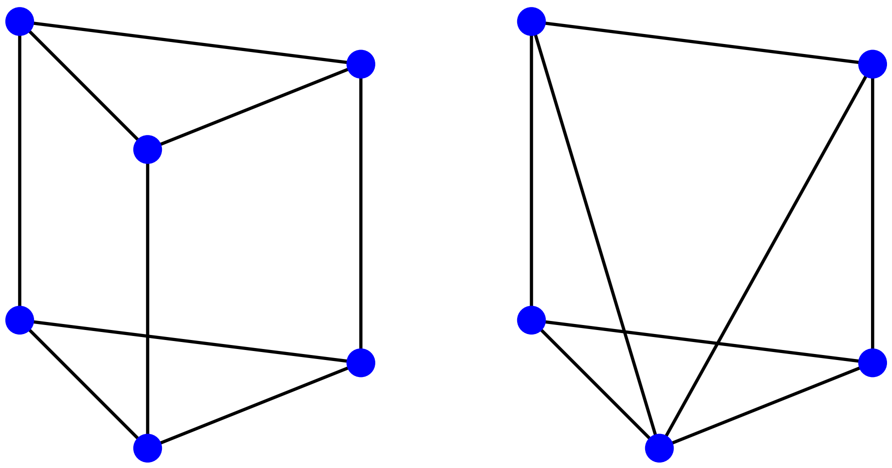
頂点記述と頂点集合

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$，P の頂点集合 V

性質：凸多面体はその頂点集合の凸包

- $P = \mathrm{CH}(V)$
- 任意の $v \in V$ に対して，$P \neq \mathrm{CH}(V - \{v\})$

証明：省略



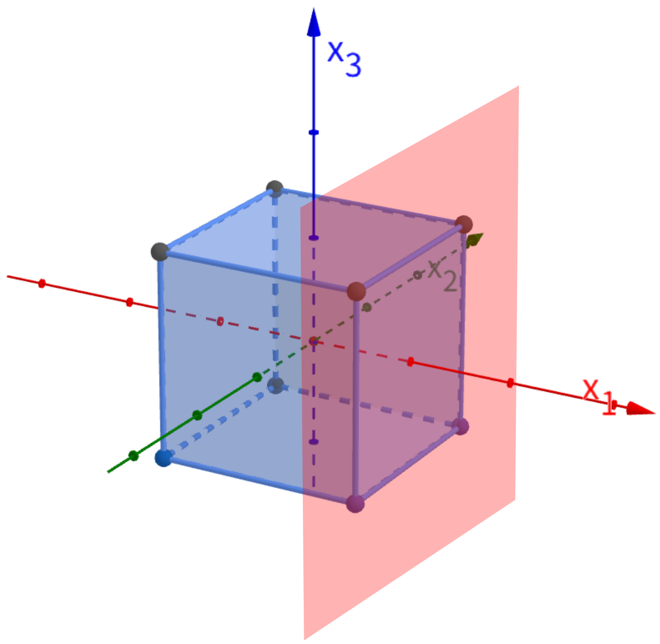
ファセット定義不等式

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$，P のファセット F

定義：ファセット定義不等式

$F = P \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b\}$ と書けて，
$P \subseteq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b\}$ であるとき，
「$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b$」を P の **ファセット定義不等式** と呼ぶ

「$x_1 \leq 1$」は
3 次元立方体のファセット定義不等式



凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$，P のファセット集合 $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$

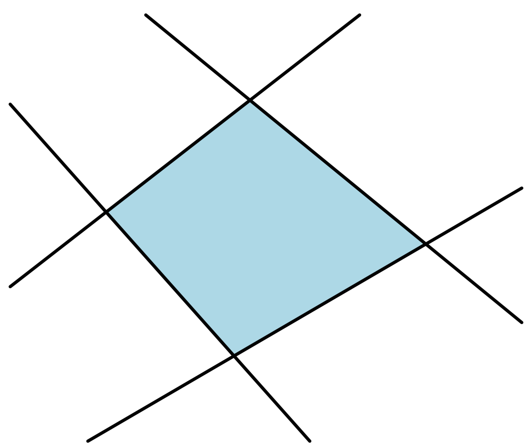
F_i を定義する不等式 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq b_i$ (ただし，$\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^d, b_i \in \mathbb{R}$)

性質：凸多面体とファセット定義不等式

P の次元が d のとき

- $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq b_i \ \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$
- 任意の $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して，
  $P \neq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq b_i \ \forall\, i \neq j\}$

証明：省略



超平面記述とファセット集合

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$，P のファセット集合 $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$

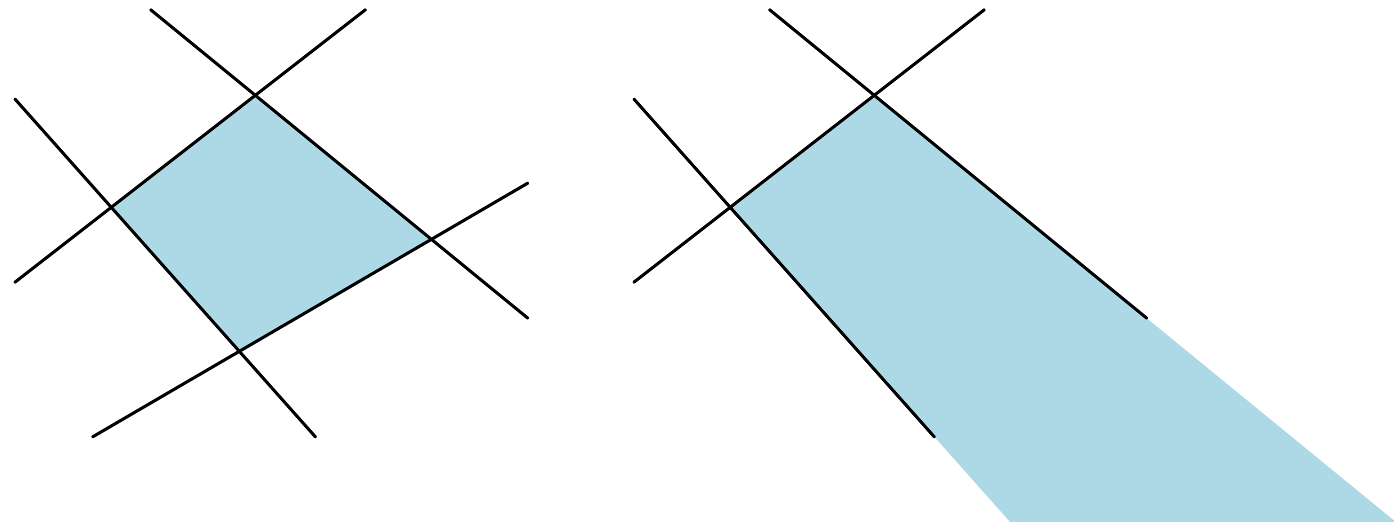
F_i を定義する不等式 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq b_i$ (ただし，$\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^d, b_i \in \mathbb{R}$)

性質：凸多面体とファセット定義不等式

P の次元が d のとき

- $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq b_i \; \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$
- 任意の $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して，
  $P \neq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \leq b_i \; \forall\, i \neq j\}$

証明：省略

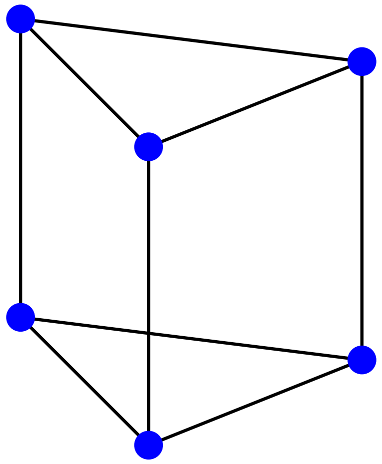


目次

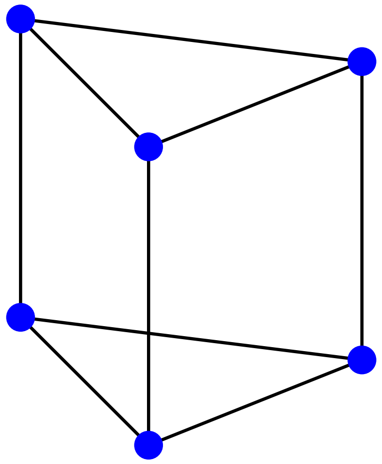
考える問題

問題

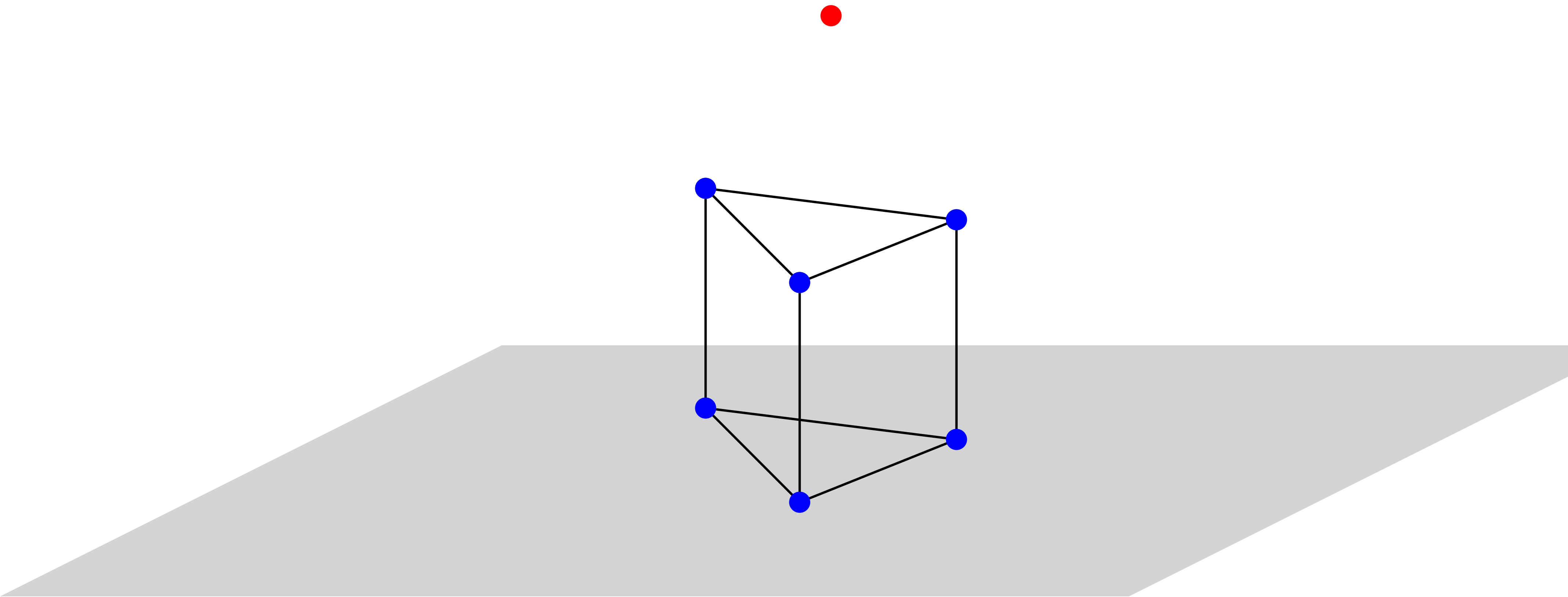
3 次元凸多面体 P の頂点数が n のとき，
P のファセット数はどれだけ大きくなりえるか？



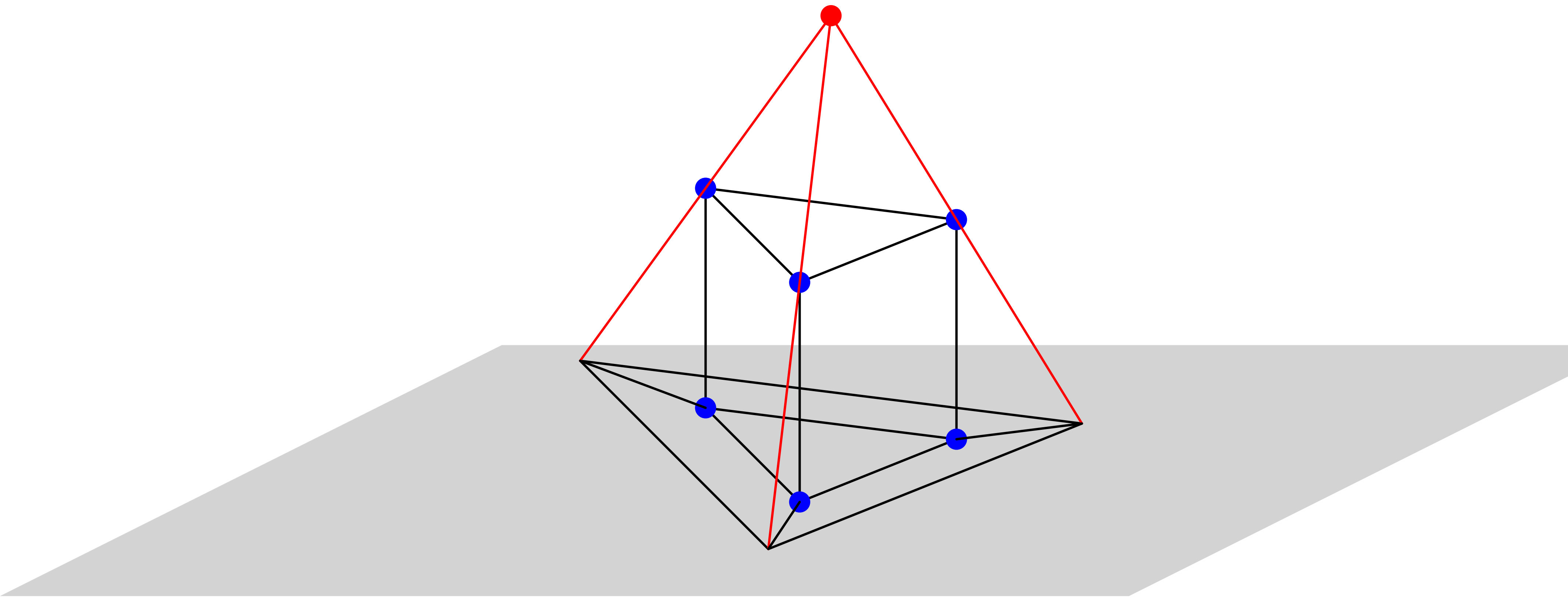
考え方



考え方

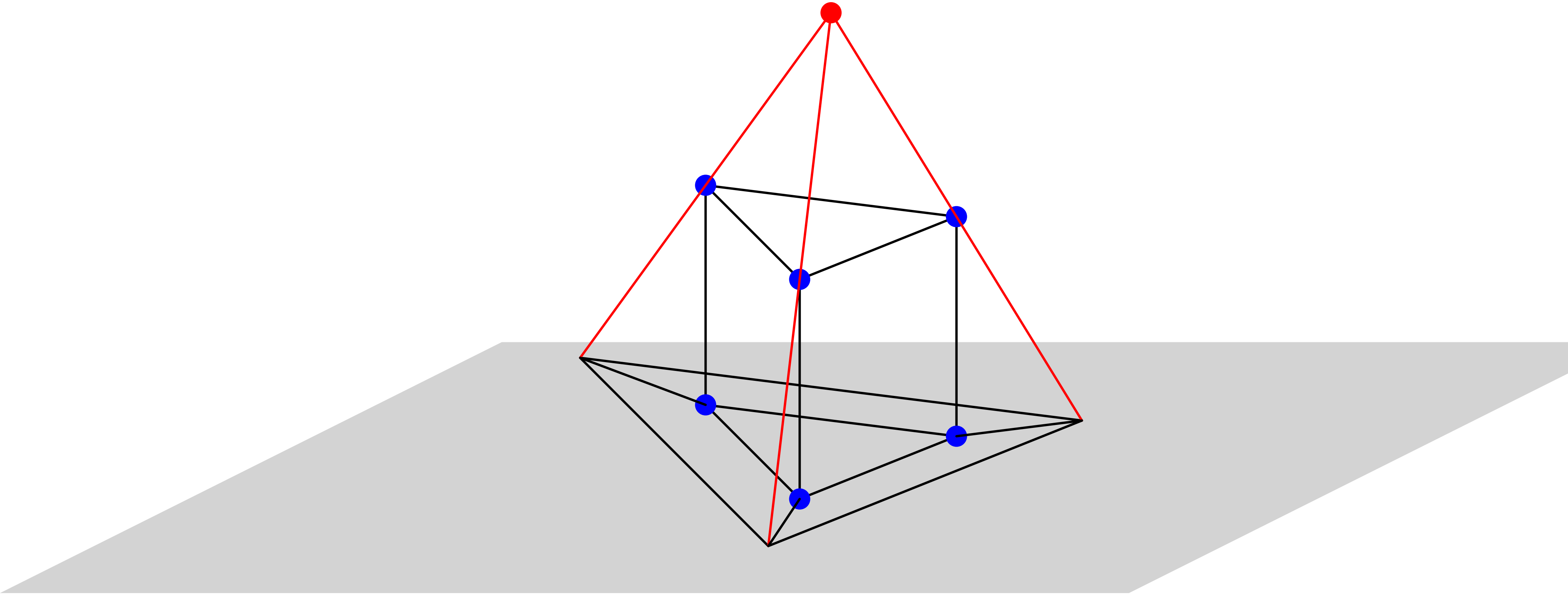


考え方



3 次元凸多面体 ⟶ 非交差幾何グラフ

頂点	頂点
辺	辺
ファセット	面



[復習] 非交差幾何グラフの面の数

性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の非交差幾何グラフにおいて，

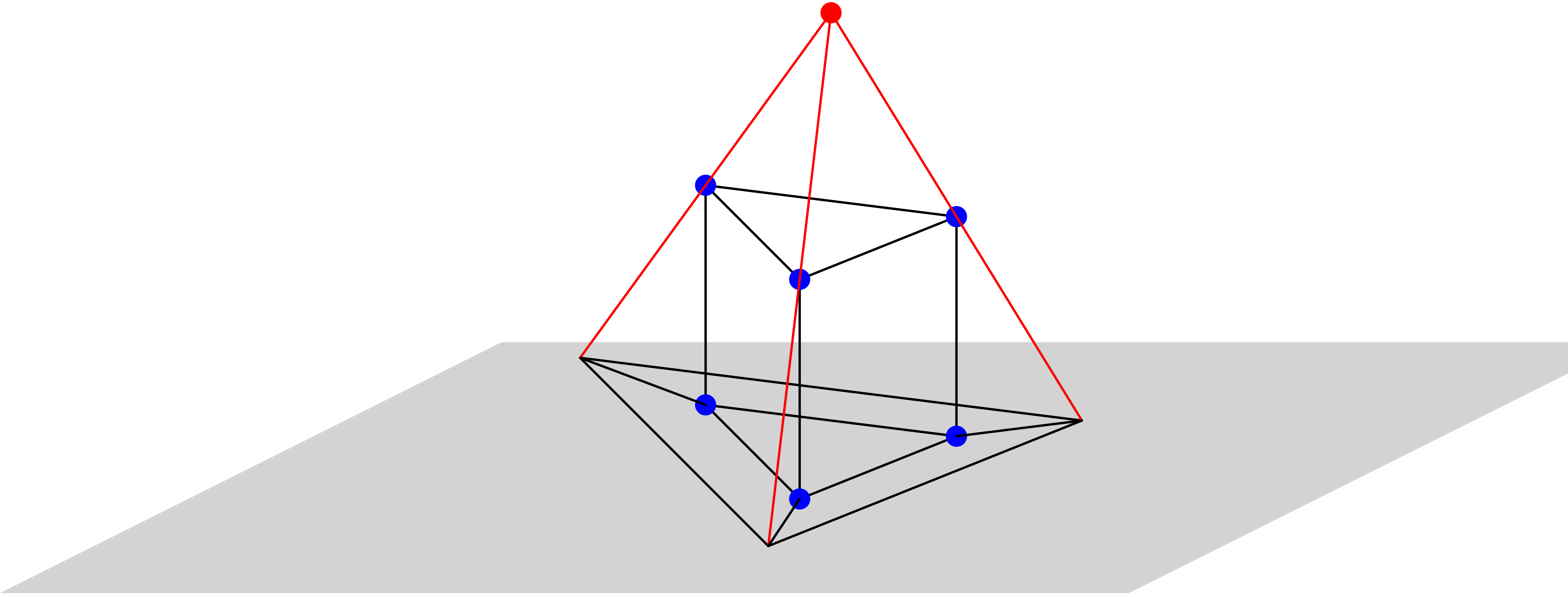
- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

証明には，オイラーの公式を用いた

3 次元凸多面体のファセットの数

3 次元凸多面体 ⟶ 非交差幾何グラフ

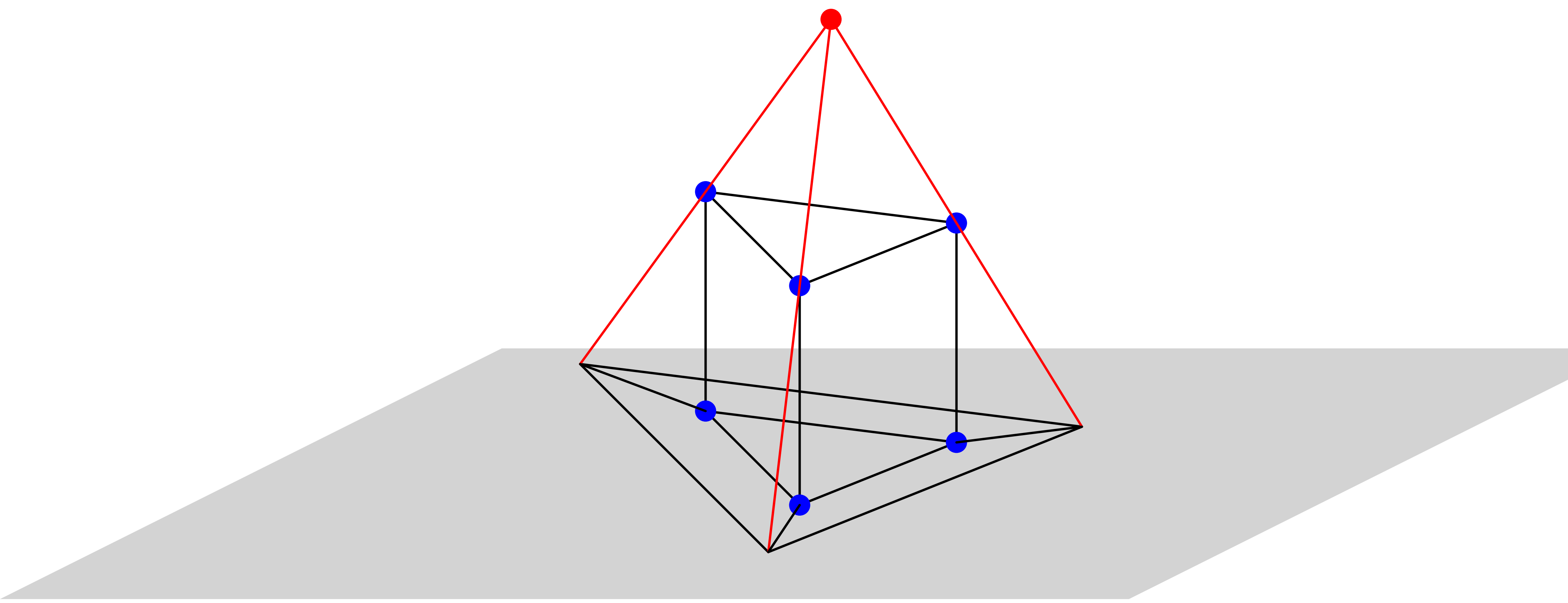
頂点数	$= n \geq 4$	頂点数
辺数		辺数
ファセット数		面数



3 次元凸多面体のファセットの数

3 次元凸多面体 $\longrightarrow$ 非交差幾何グラフ

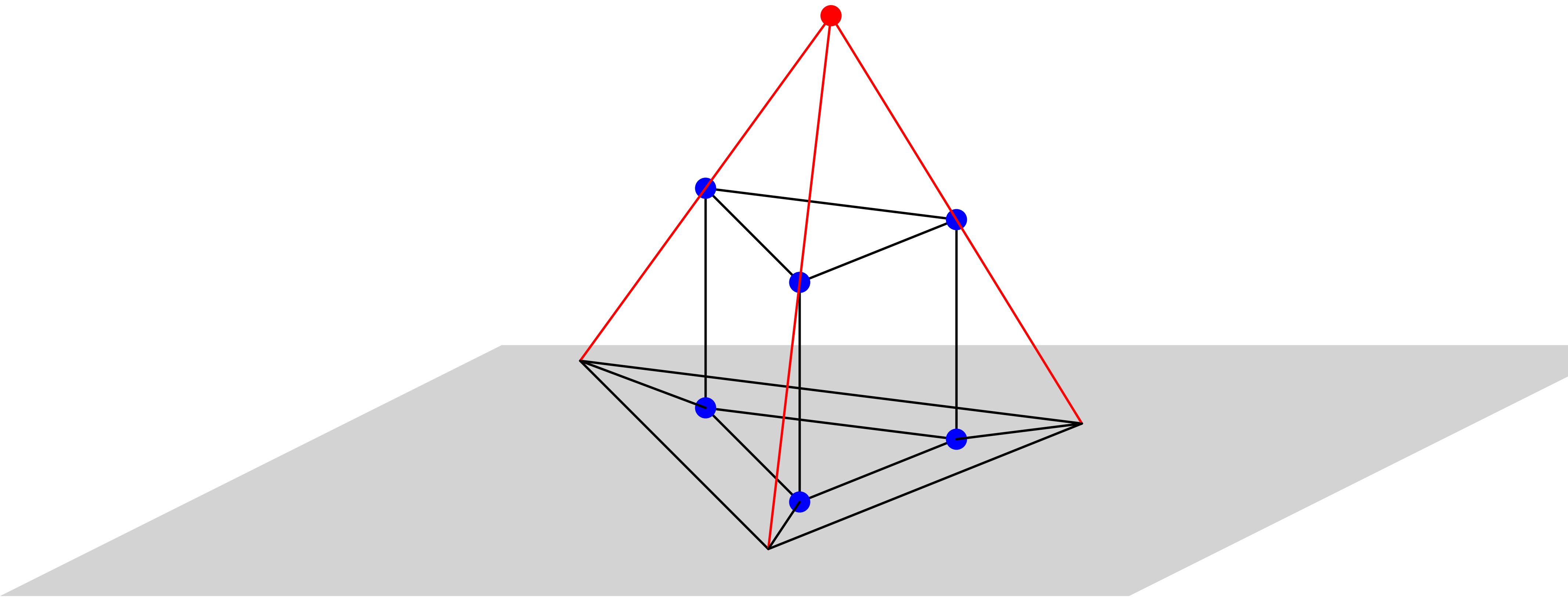
3 次元凸多面体		非交差幾何グラフ	
頂点数	$= n \geq 4$	頂点数	$= n \geq 4$
辺数		辺数	
ファセット数		面数	



3 次元凸多面体のファセットの数

3 次元凸多面体 $\longrightarrow$ 非交差幾何グラフ

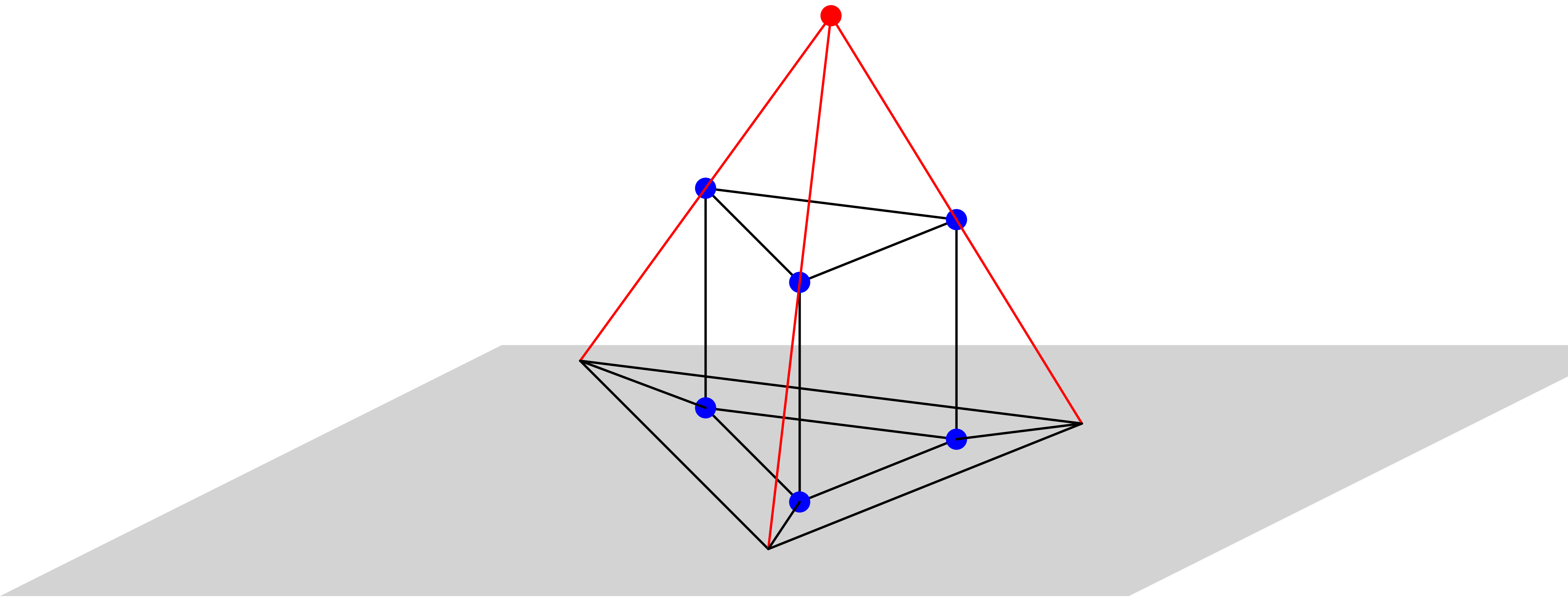
頂点数	$= n \geq 4$	頂点数	$= n \geq 4$
辺数		辺数	$\leq 3n - 6$
ファセット数		面数	$\leq 2n - 4$



3 次元凸多面体のファセットの数

3 次元凸多面体 $\longrightarrow$ 非交差幾何グラフ

頂点数	$= n \geq 4$	頂点数	$= n \geq 4$
辺数	$\leq 3n - 6$	辺数	$\leq 3n - 6$
ファセット数	$\leq 2n - 4$	面数	$\leq 2n - 4$



3 次元凸多面体のファセットの数

3 次元凸多面体 $\longrightarrow$ 非交差幾何グラフ

頂点数	$= n \geq 4$	頂点数	$= n \geq 4$
辺数	$\leq 3n - 6$	辺数	$\leq 3n - 6$
ファセット数	$\leq 2n - 4$	面数	$\leq 2n - 4$

結論：3 次元凸多面体のファセット数

3 次元凸多面体 P の頂点数が $n \Rightarrow$

P の辺数 $\leq 3n - 6$,

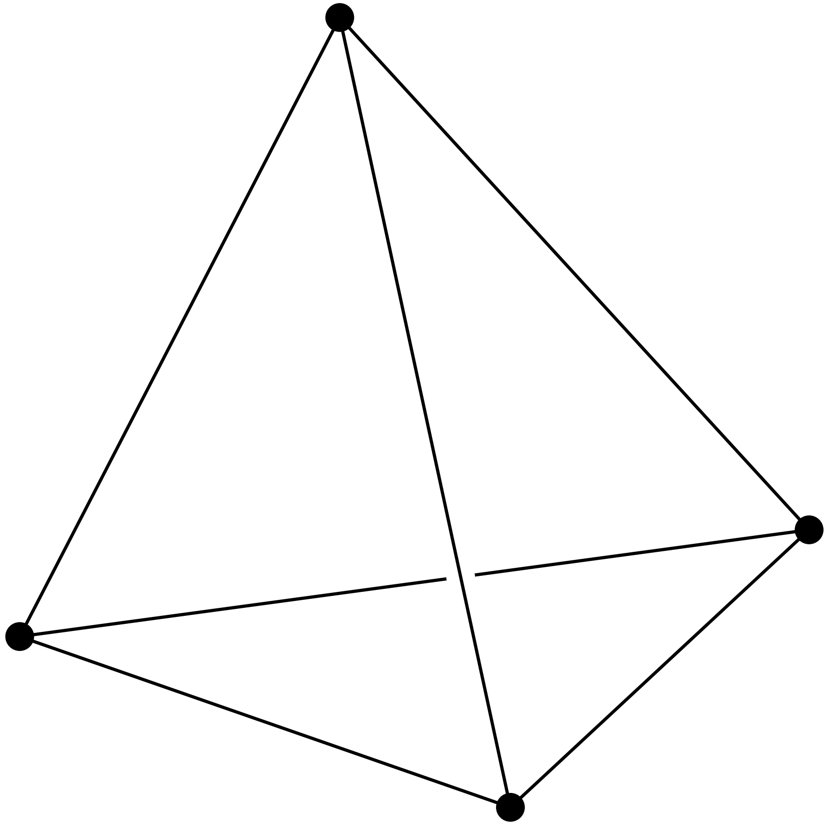
P のファセット数 $\leq 2n - 4$

補足：任意の整数 $n \geq 4$ に対して，

等号を同時に満たす 3 次元凸多面体が存在

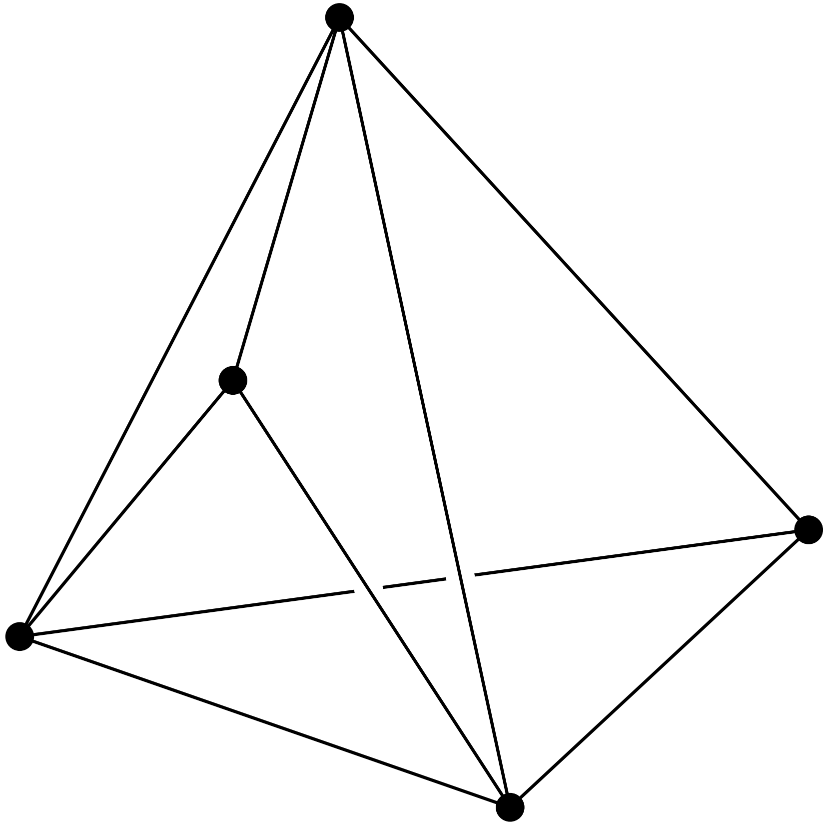
等号を満たす 3 次元凸多面体の構成例

頂点数	4
辺数	6
ファセット数	4



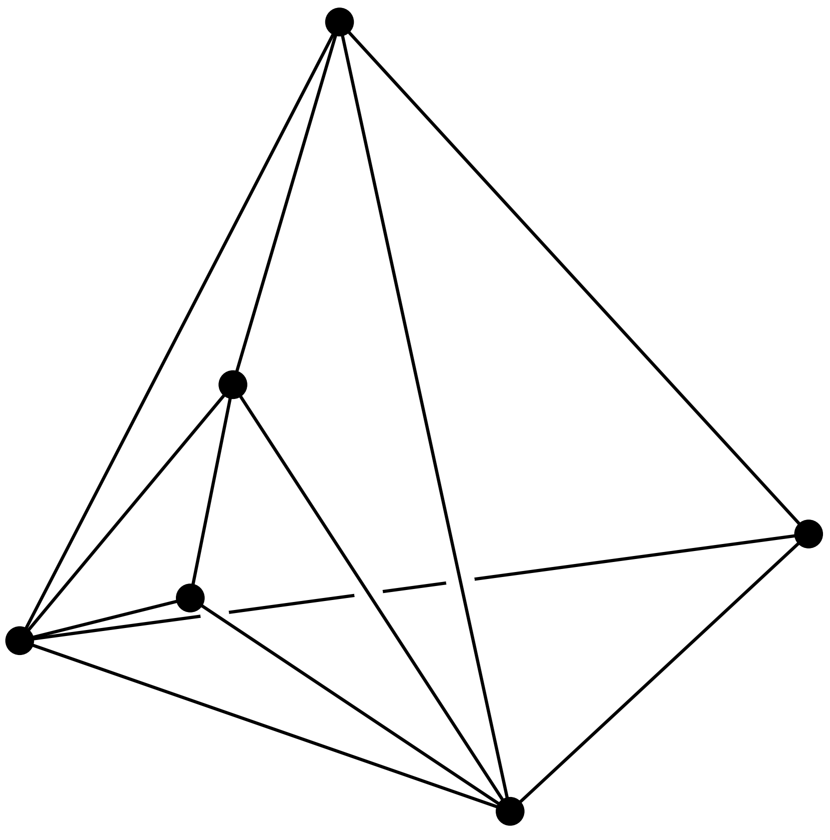
等号を満たす 3 次元凸多面体の構成例

頂点数	4	5
辺数	6	9
ファセット数	4	6



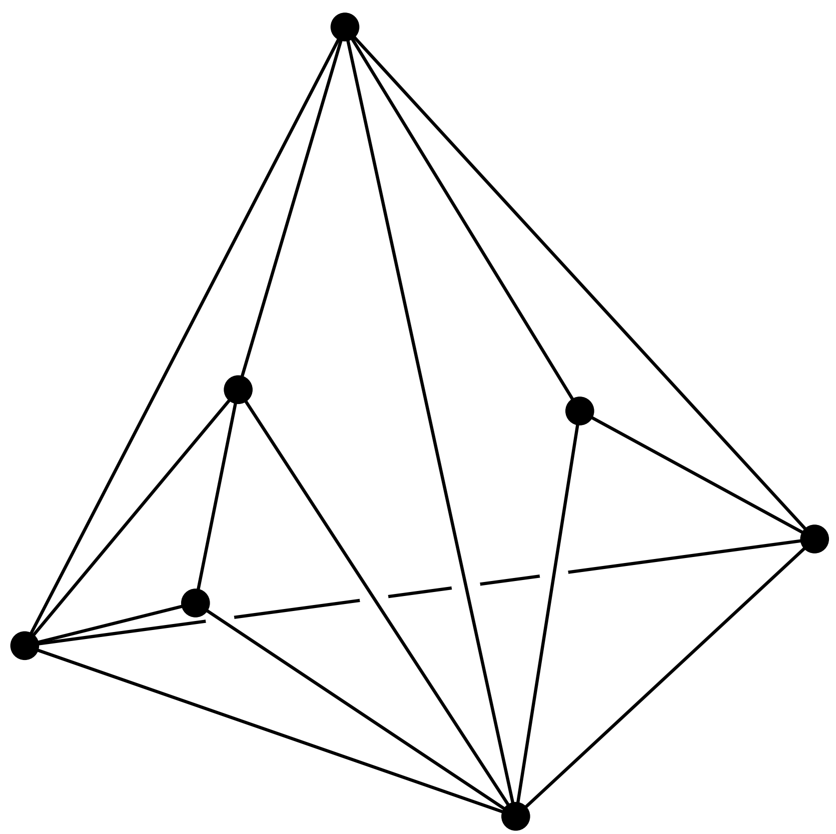
等号を満たす 3 次元凸多面体の構成例

頂点数	4	5	6
辺数	6	9	12
ファセット数	4	6	8



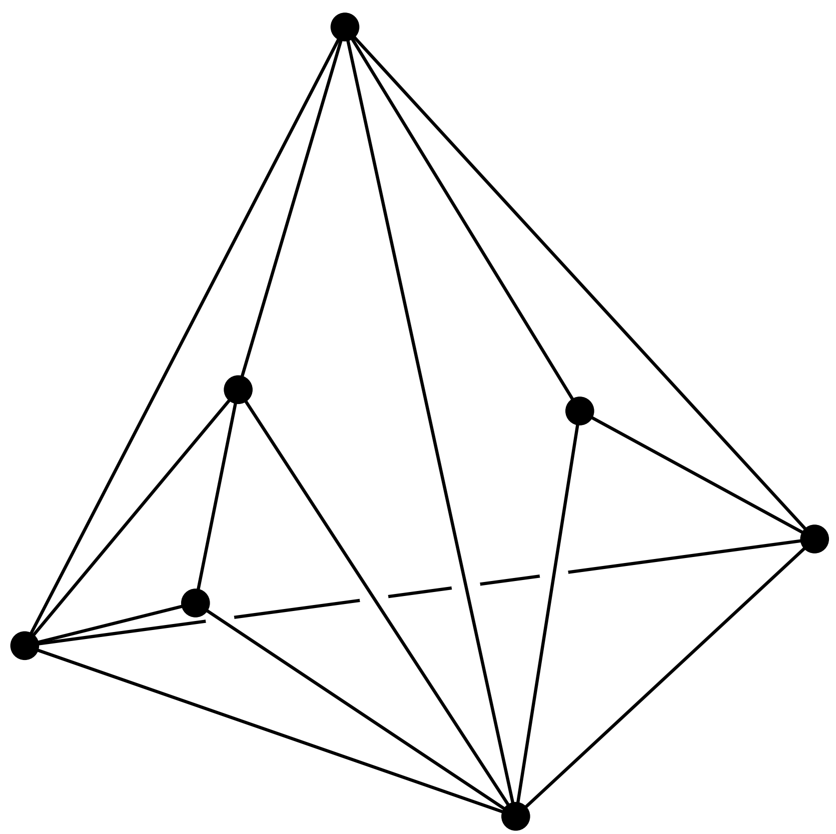
等号を満たす 3 次元凸多面体の構成例

頂点数	4	5	6	7
辺数	6	9	12	15
ファセット数	4	6	8	10



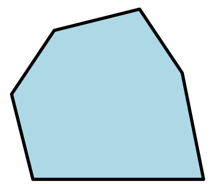
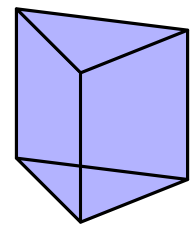
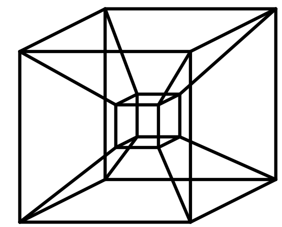
等号を満たす 3 次元凸多面体の構成例

頂点数	4	5	6	7	n
辺数	6	9	12	15	$3n-6$
ファセット数	4	6	8	10	$2n-4$



目次

4 次元以上の凸多面体の面の数

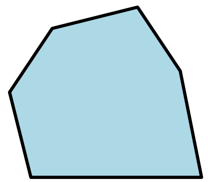
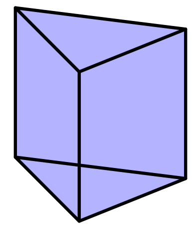
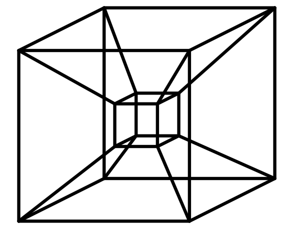
次元 d	2	3	4 以上 (の定数)
			

頂点数 $= n$ のとき

辺数	$= n$	$\leq 3n - 6$
ファセット数	$= n$	$\leq 2n - 4$

(等号を満たす場合あり)

4 次元以上の凸多面体の面の数

次元 d	2	3	4 以上 (の定数)
			

頂点数 $= n$ のとき

辺数	$= n$	$\leq 3n - 6$	$\leq \binom{n}{2}$
ファセット数	$= n$	$\leq 2n - 4$	$\leq O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$

(等号を満たす場合あり)

(等号を満たす場合あり)

モーメント曲線

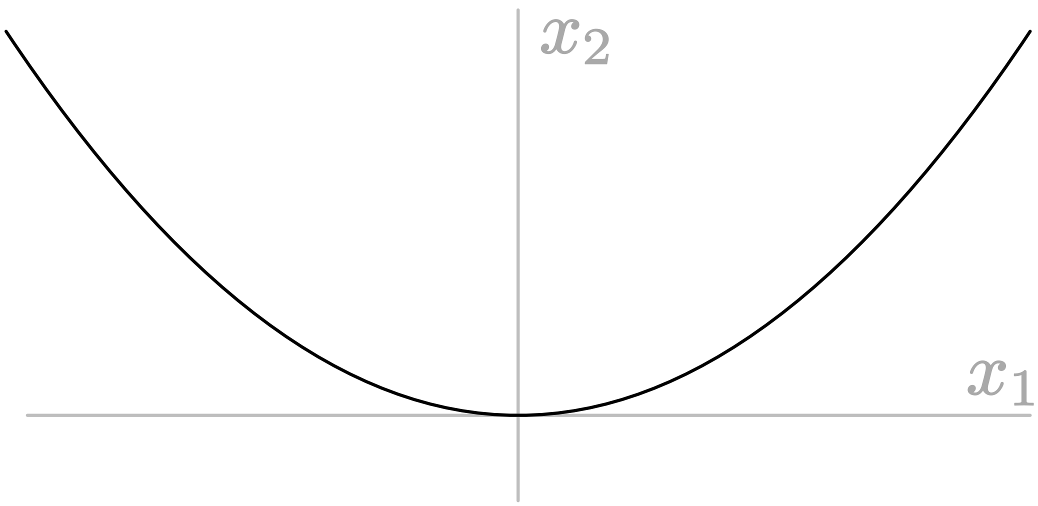
定義：モーメント曲線

$\mathbb{R}^d$ における **モーメント曲線** とは次の曲線

$$\left\{ \gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$d = 2$ のとき：$x_1 = t, x_2 = t^2$

$$\therefore x_2 = x_1^2$$



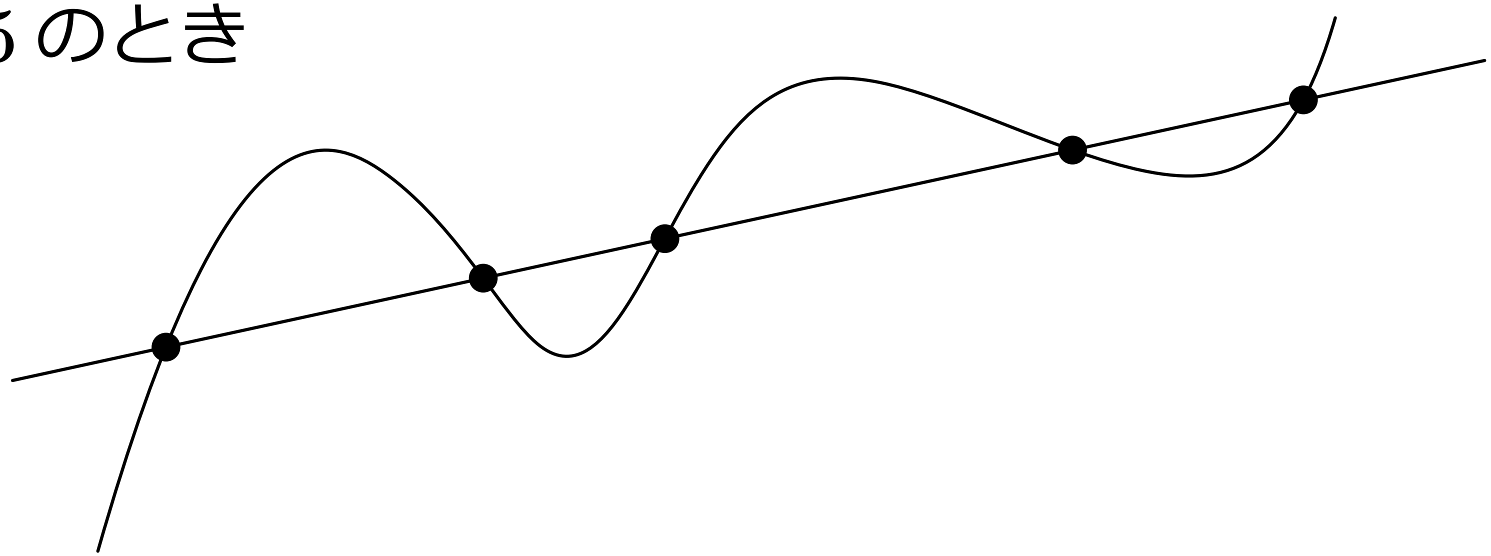
モーメント曲線と超平面の交わり

性質：モーメント曲線と超平面の交わり

$\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ において次が成り立つ

1. モーメント曲線と超平面の交わりは 高々 d 個の点
2. モーメント曲線と超平面が交わりがちょうど d 個の点
   $\Rightarrow$ 交わりにおいて，その超平面はモーメント曲線に接していない

$d = 5$ のとき



証明 (1)

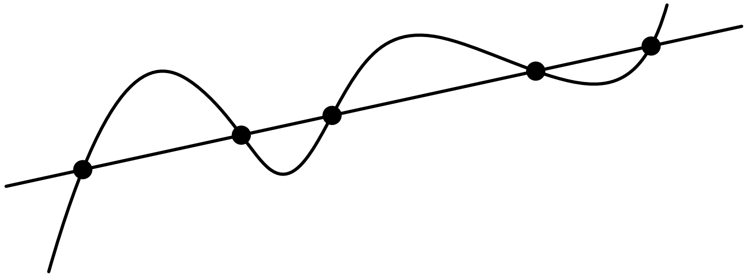
性質：モーメント曲線と超平面の交わり

$\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ において次が成り立つ

1. モーメント曲線と超平面の交わりは 高々 d 個の点

証明 (1)：超平面 h を $a^{\mathrm{T}}x = b$ が定義するとする

- モーメント曲線上の点 $\gamma(t)$ が h 上にある
  $\Leftrightarrow a^{\mathrm{T}}\gamma(t) = b$
  $\Leftrightarrow a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_d t^d - b = 0$
- 最後の式は t に関する高々 d 次の代数方程式
- $\therefore$ 高々 d 個しか解を持たない
- $\therefore$ 高々 d 個しか交わり点を持たない $\square$



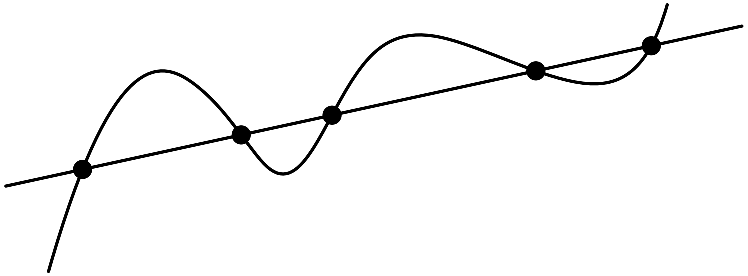
性質：モーメント曲線と超平面の交わり

$\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ において次が成り立つ

2. モーメント曲線と超平面が交わりがちょうど d 個の点 $\Rightarrow$ 交わりにおいて，その超平面はモーメント曲線に接していない

証明 (2)：超平面 h との交わり点がちょうど d 個であるとする

- t に関する多項式 $a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_d t^d - b = 0$ の次数は d で，すべての解の重複度は 1
- $\therefore$ 交わり点において接していない □



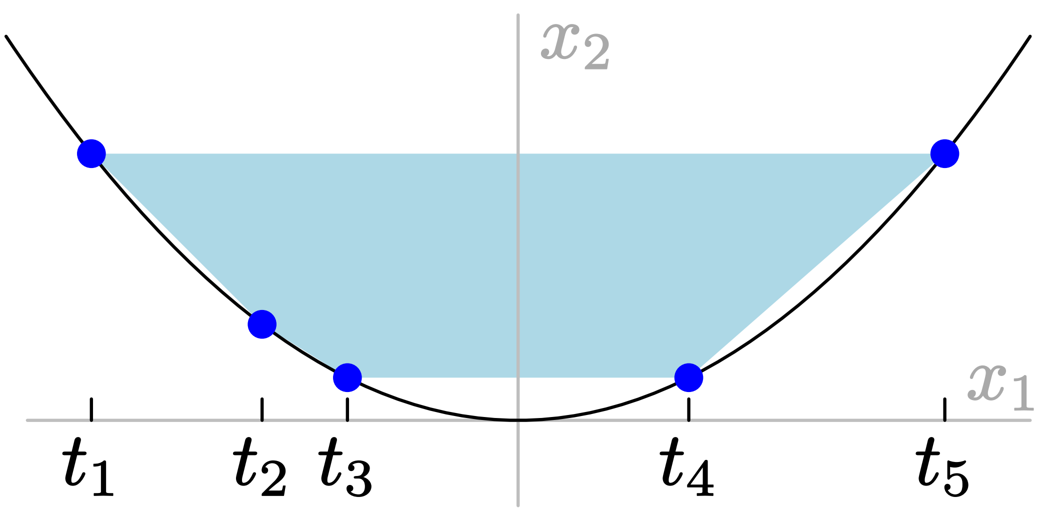
整数 $n \geq d+1$

定義：巡回多面体

頂点数 n の d **次元巡回多面体** とは，
モーメント曲線上の n 個の点の凸包のこと
つまり，$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ を用いた次の凸多面体

$$\mathrm{CH}\left(\{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots, \gamma(t_n)\}\right) \subseteq \mathbb{R}^d$$

$d = 2$ のとき



性質：巡回多面体の次元

頂点数 n の d 次元巡回多面体の次元は d である

証明：$\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots, \gamma(t_{d+1})$ がアフィン独立であればよい

巡回多面体の次元

性質：巡回多面体の次元

頂点数 n の d 次元巡回多面体の次元は d である

証明：$\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots, \gamma(t_{d+1})$ がアフィン独立であればよい

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{d+1} \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_{d+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^d & t_2^d & \cdots & t_{d+1}^d \end{bmatrix}$$

性質：巡回多面体の次元

頂点数 n の d 次元巡回多面体の次元は d である

証明：$\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_{d+1})$ がアフィン独立であればよい

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{d+1} \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_{d+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^d & t_2^d & \cdots & t_{d+1}^d \end{bmatrix} \longleftarrow \text{ヴァンデルモンド行列}$$

$$\text{行列式} = \prod_{1 \le i < j \le d+1} (t_j - t_i)$$

(演習問題)

$$\neq 0$$

$\therefore$ この行列の階数 $= d + 1$ $\square$

巡回多面体の面の数

次回に紹介すること

P が頂点数 n の d 次元巡回多面体であるとき

- P のファセット数が $\Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ であること
- P の辺数が $\binom{n}{2}$ であること

まとめ

今日の目標

凸多面体の面を調べることができるようになる

- 面の定義：頂点，ファセット
- 凸多面体の面の数

多くの証明を省略する

(線形計画法の理論を必要とするため)