離散数理工学 (2025 年度後学期)

第 8 回

高次元 (2)：凸集合と凸包

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 12 月 23 日

最終更新：2025 年 12 月 15 日　11:04

今回の目標

今日の目標

凸集合に関する用語を正しく使えるようになる

- 楕円体
- 凸結合と凸包
- 凸多面集合と凸多面体

[復習] 凸集合

$X \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：凸集合

X が **凸集合** であるとは，次を満たすこと

$$x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X$$

直感：2 点 $\in X \Rightarrow$ その 2 点を結ぶ線分 $\subseteq X$

凸集合である

凸集合ではない

注：凹集合とは言わない

[復習] 凸集合

$X \subseteq \mathbb{R}^d$

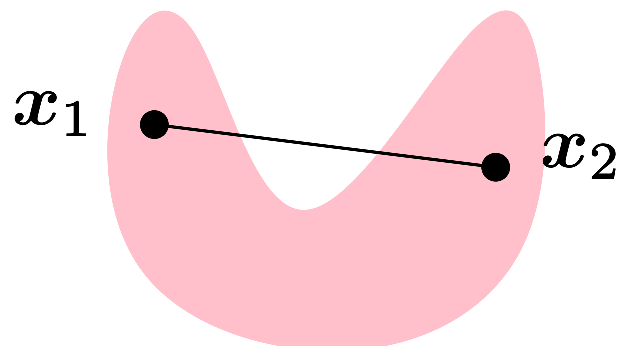
定義：凸集合

X が **凸集合** であるとは，次を満たすこと

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in X$$

<u>直感</u>：2 点 $\in X \Rightarrow$ その 2 点を結ぶ線分 $\subseteq X$

凸集合である



凸集合ではない

<u>注</u>：凹集合とは言わない

[復習] 凸集合

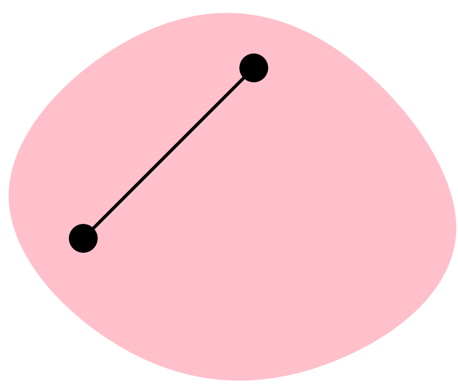
$X \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：凸集合

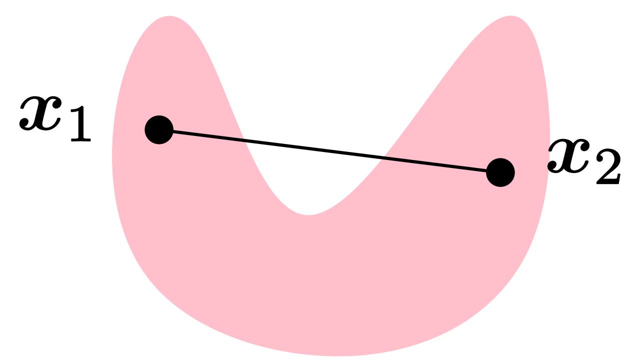
X が **凸集合** であるとは，次を満たすこと

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in X$$

直感：2 点 $\in X \Rightarrow$ その 2 点を結ぶ線分 $\subseteq X$



凸集合である



凸集合ではない

注：凹集合とは言わない

[復習] 凸集合の例

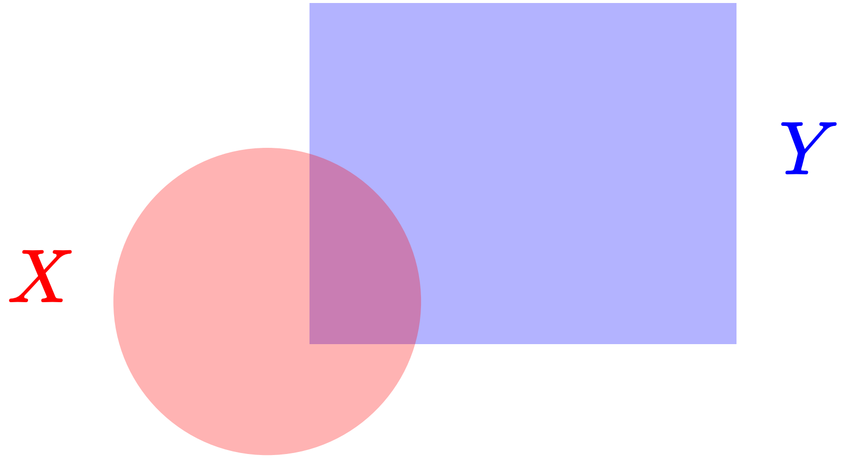
- アフィン部分空間
  - $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ $\quad (A \in \mathbb{R}^{m \times d}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d)$
- 半空間
  - $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b\}$ $\quad (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R})$
- 球体
  - $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \leq 1\right\}$

[復習] 凸集合の共通部分

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$

性質：凸集合の共通部分は凸集合

X, Y が凸集合 $\Rightarrow$ $X \cap Y$ は凸集合



注意：X, Y が凸集合でも，$X \cup Y$ が凸集合とは限らない

目次

アフィン変換，アフィン像

定義：アフィン変換

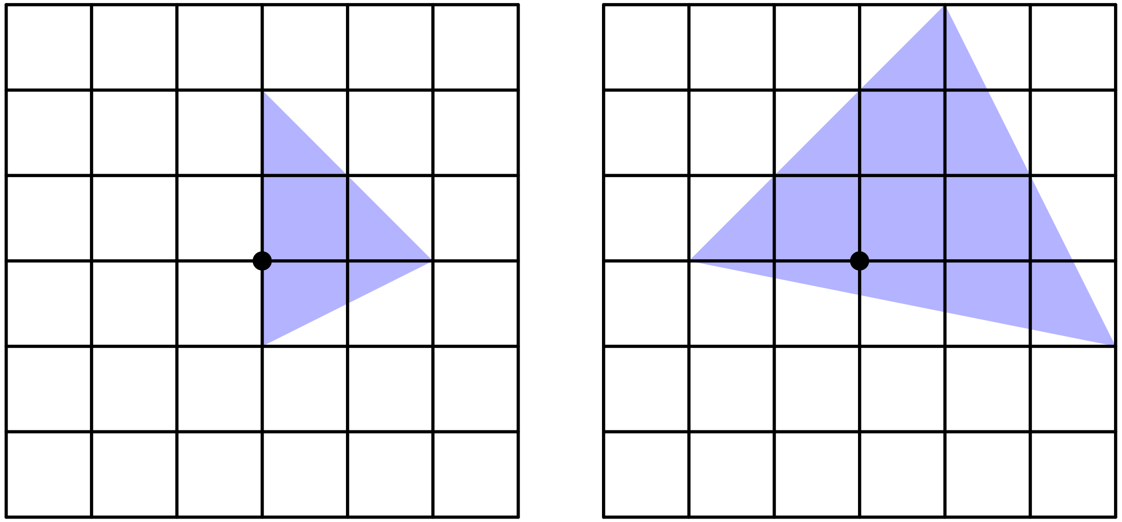
アフィン変換 とは次のように書ける写像 (変換)

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \quad \mapsto \quad A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$$

ここで，$A \in \mathbb{R}^{d\times d}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$

例：$d = 2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



定義：アフィン変換

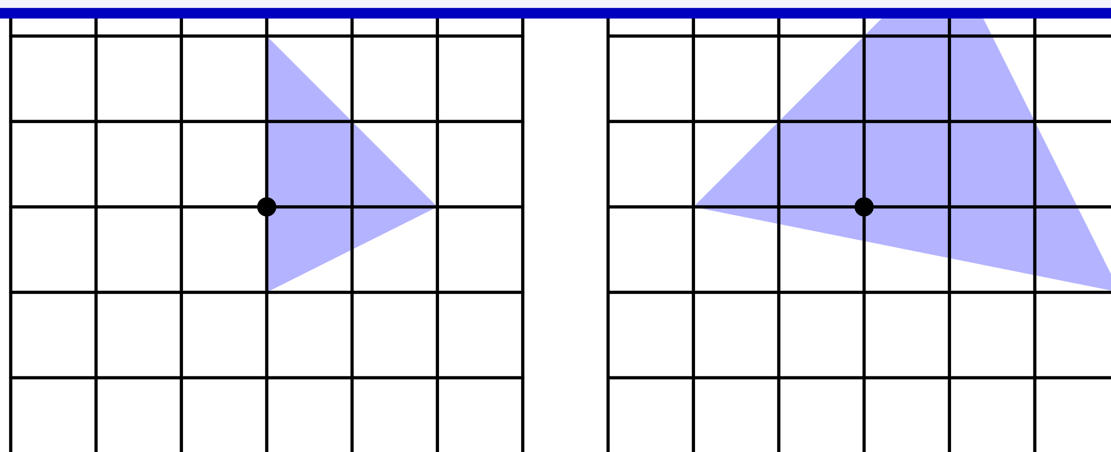
アフィン変換 とは次のように書ける写像 (変換)

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \quad \mapsto \quad A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$$

ここで，$A \in \mathbb{R}^{d \times d}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$

定義：アフィン像

アフィン変換による像を **アフィン像** と呼ぶ



凸集合のアフィン像は凸集合

性質：凸集合のアフィン像は凸集合

$X \subseteq \mathbb{R}^d$ が凸集合 $\Rightarrow$ 次の X' は凸集合

$$X' = \{A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \in X\}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{d \times d}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$

証明：$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$，$\lambda \in [0, 1]$ とする

- 示すこと：$\lambda(A\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{b}) + (1 - \lambda)(A\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{b}) \in X'$
- $\lambda(A\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{b}) + (1 - \lambda)(A\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{b})$
  $= A(\underbrace{\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1 - \lambda)\boldsymbol{x}_2}_{\in X}) + \boldsymbol{b}$
  $\in X'$

□

楕円体

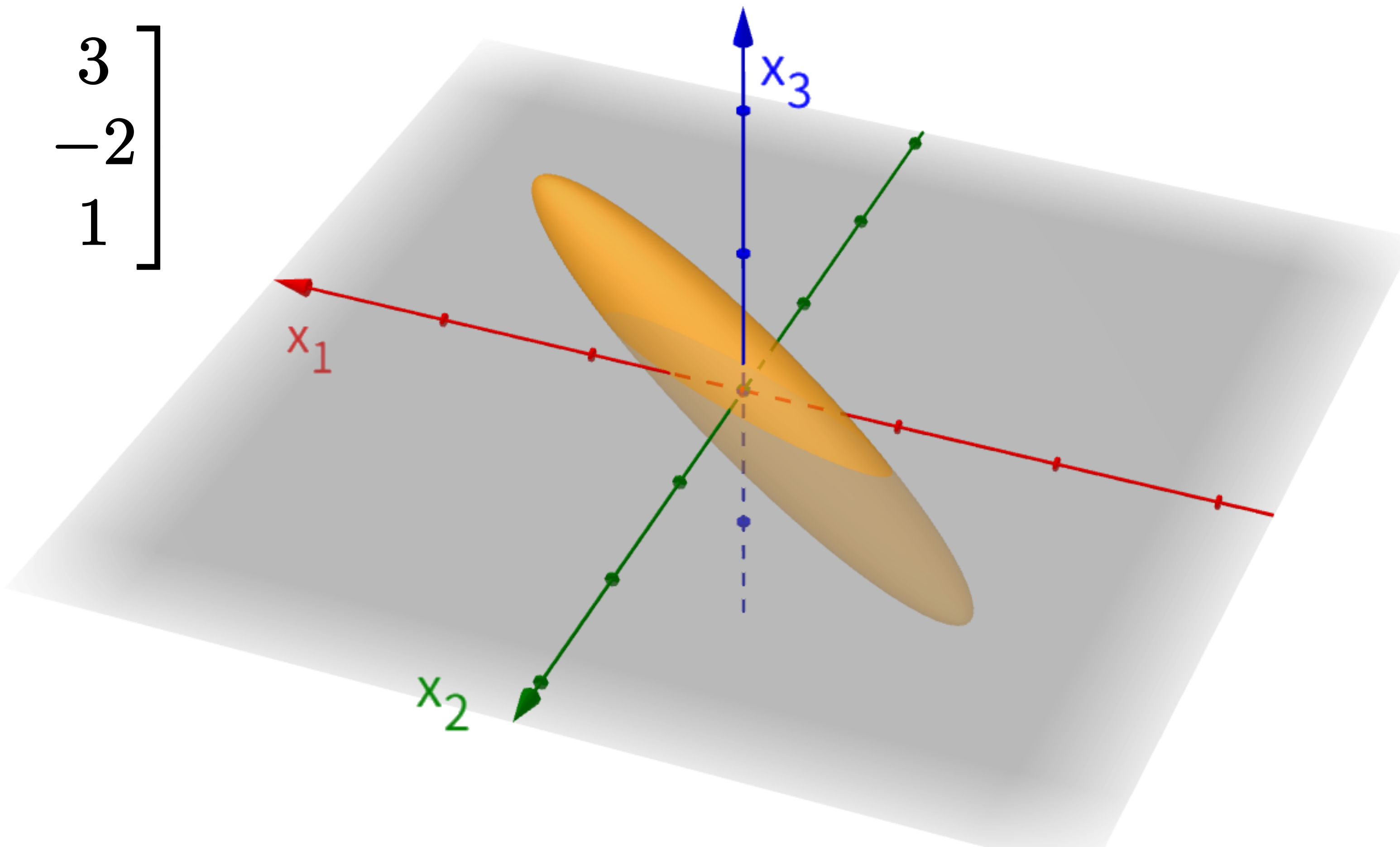
定義：楕円体

楕円体 とは，球体の正則行列によるアフィン像

例：$d = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



楕円体の記述法

$$B = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} \leq 1 \right\},$$ 正則行列 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ に対して

$B' = \{A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \in B\}$ とすると，B' は楕円体

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} \in B' \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}\boldsymbol{y} \in B \\
&\Leftrightarrow \quad (A^{-1}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(A^{-1}\boldsymbol{y}) \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{y} \leq 1
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad B' = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{y} \leq 1\}$$

楕円体の記述法

$$B = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} \le 1 \right\},$$ 正則行列 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ に対して

$B' = \{ A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x} \in B \}$ とすると，B' は楕円体

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} \in B' \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}\boldsymbol{y} \in B \\
&\Leftrightarrow \quad (A^{-1}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(A^{-1}\boldsymbol{y}) \le 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{y} \le 1
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad B' = \{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\underline{(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{-1}}\boldsymbol{y} \le 1 \}$$

この行列の性質は？

対称正定値行列

定義：対称正定値行列

正則な対称行列 $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ に対して，次は同値

1. ある正則行列 $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ が存在して，$M = C^{\mathrm{T}}C$
2. M の固有値はすべて正
3. 任意の $x \in \mathbb{R}^d - \{\mathbf{0}\}$ に対して，$x^{\mathrm{T}}Mx > 0$

この性質を持つ M を **対称正定値行列** と呼ぶ

証明 (1) ⇒ (3)：$M = C^{\mathrm{T}}C$，$x \neq \mathbf{0}$ とする

- $x^{\mathrm{T}}Mx = x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Cx = (Cx)^{\mathrm{T}}(Cx) \geq 0$
- ここで，$(Cx)^{\mathrm{T}}(Cx) = 0 \Leftrightarrow Cx = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$
- $\therefore x^{\mathrm{T}}Mx > 0$

$\square$

定義：対称正定値行列

正則な対称行列 $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ に対して，次は同値

1. ある正則行列 $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ が存在して，$M = C^{\mathrm{T}} C$
2. M の固有値はすべて正
3. 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d - \{\mathbf{0}\}$ に対して，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} M \boldsymbol{x} > 0$

この性質を持つ M を **対称正定値行列** と呼ぶ

証明 (3) ⇒ (2)：$M\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ とする

- $0 < \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} M \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} (\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}$
- $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v} \geq 0$ なので，$\lambda > 0$ $\square$

実対称行列は直交行列で対角化可能

(2)⇒(1) の証明に，次の性質を用いる

定義：直交行列

$A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ が **直交行列** であるとは,
$A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = E$ (単位行列) であること

性質：実対称行列は直交行列で対角化可能

$A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ が対称行列 $\Rightarrow$
$\exists$ 直交行列 $P \in \mathbb{R}^{d\times d}$ と対角行列 $D \in \mathbb{R}^{d\times d}$

$$A = PDP^{\mathrm{T}}$$

ここで，D の対角成分は A の固有値にできる

証明：演習問題

対称正定値行列 (続 2)

定義：対称正定値行列

正則な対称行列 $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ に対して，次は同値

1. ある正則行列 $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ が存在して，$M = C^{\mathrm{T}} C$
2. M の固有値はすべて正
3. 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d - \{\boldsymbol{0}\}$ に対して，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} M \boldsymbol{x} > 0$

この性質を持つ M を **対称正定値行列** と呼ぶ

証明 (2) ⇒ (1)：M の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_d > 0$ とする

- M は対称なので，ある直交行列 P と $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ を対角成分とする対角行列 D で $M = PDP^{\mathrm{T}}$ と書ける
- F を対角成分が $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d}$ の対角行列とすると，$D = FF^{\mathrm{T}}$
- $\therefore M = P(FF^{\mathrm{T}})P^{\mathrm{T}} = (PF)(PF)^{\mathrm{T}}$ $\square$

楕円体の別の記述

いままでの議論をまとめると，次が得られる

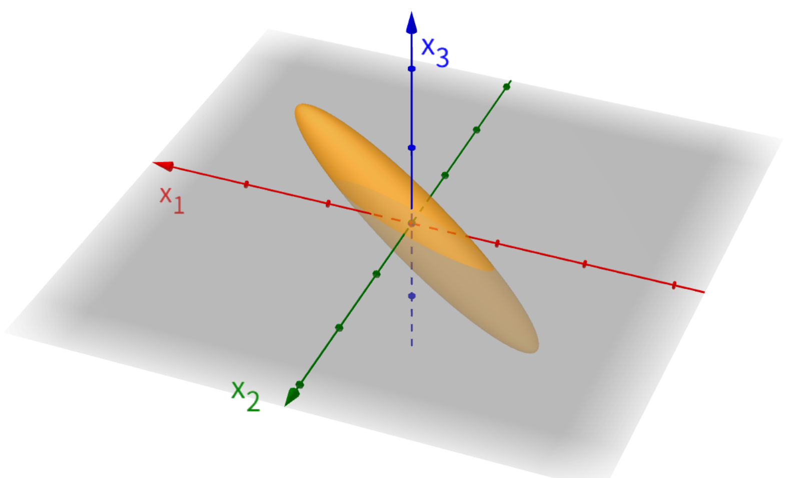
性質：楕円体の記述法

任意の楕円体は，対称正定値行列 $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ と
ベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$ を使って次のように書ける

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}} M (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) \le 1\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M = (A^{-1})^{\mathrm{T}} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

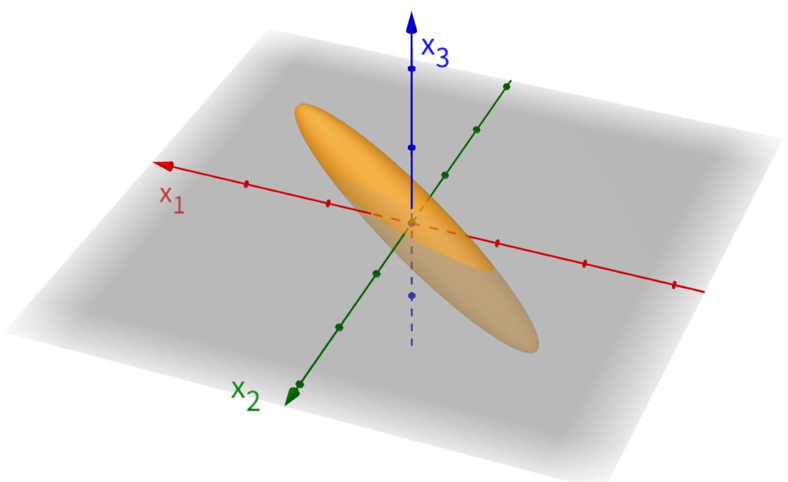


楕円体：まとめ

楕円体の表現

- 球体のアフィン像として $(A \in \mathbb{R}^{d\times d}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{d})$
  $$\{A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq 1\}$$
- 対称正定値行列による $(M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 対称正定値$)$
  $$\{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})^{\mathrm{T}} M (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \leq 1\}$$

性質 ：楕円体は凸集合



目次

[復習] アフィン結合

点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}^d$

定義：アフィン結合

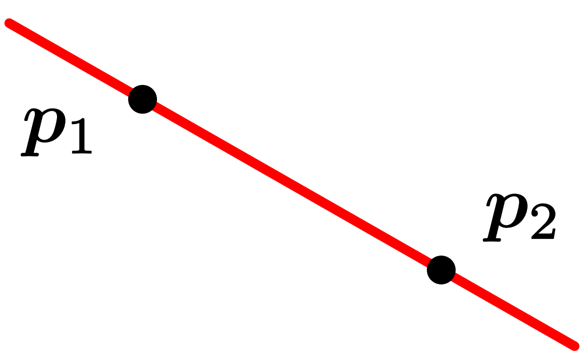
$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ の **アフィン結合** とは,

線形結合 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i$ で, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ を満たすもののこと

性質：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ が $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ のアフィン結合

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ が } \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_m \\ 1 \end{bmatrix} \text{ の線形結合}$$

例：$d = 2$ のとき



[復習] アフィン包

点の集合 $P = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：アフィン包

P の **アフィン包** とは，次の集合

$$\mathrm{aff}(P) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

P の張るアフィン部分空間とも言う

直感：アフィン包はアフィン結合全体の集合

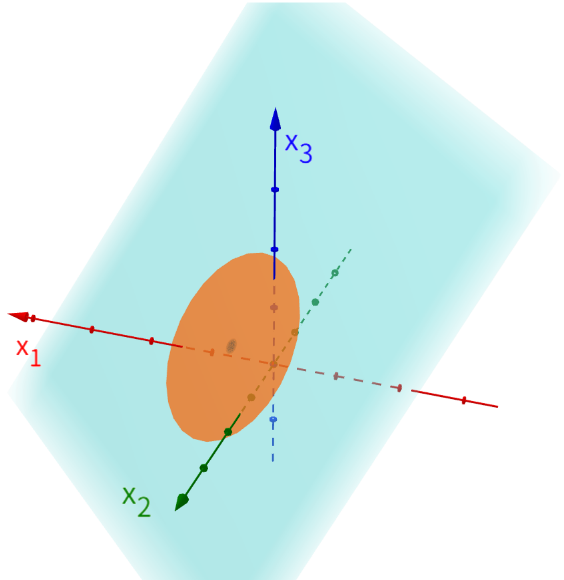
重要な性質：アフィン包はアフィン部分空間

点の集合 $P \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：アフィン包

P の **アフィン包** とは，次の集合

$$\mathrm{aff}(P) = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \boldsymbol{p}_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{p}_i \in P, \lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, d+1\}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



アフィン独立・アフィン従属

点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}^d$

定義：アフィン独立・アフィン従属

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ が **アフィン独立** であるとは,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m = 0$$

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ が **アフィン従属** であるとは,
$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ が アフィン独立でないこと

アフィン独立：例

例：$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ は

アフィン独立

アフィン独立：$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0}, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \; \forall\, i$

アフィン独立：例

例：$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ は

アフィン独立

証明：
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

アフィン独立：$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0}, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall\, i$

アフィン独立：例 (続)

証明：
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

アフィン独立：$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0}, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall\, i$

アフィン独立：例 (続)

証明：
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{行基本変形}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

アフィン独立：$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0}, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall\, i$

アフィン独立：例 (続)

証明：
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{行基本変形}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

$\square$

アフィン独立：$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0}, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall\, i$

アフィン独立な点の最大数

性質：アフィン独立性と線形独立性

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}^d$ がアフィン独立 $\Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_m \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$ が線形独立

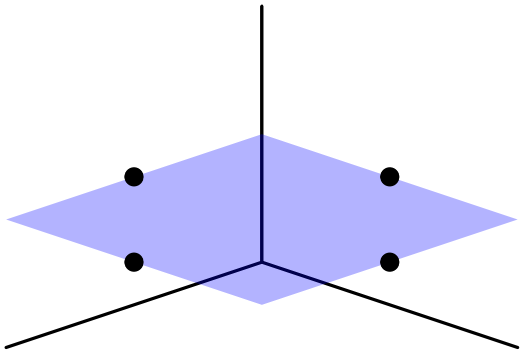
この性質から次の性質がただちに導かれる

性質：アフィン独立な点の最大数

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}^d$ がアフィン独立
$\Rightarrow m \leq d+1$

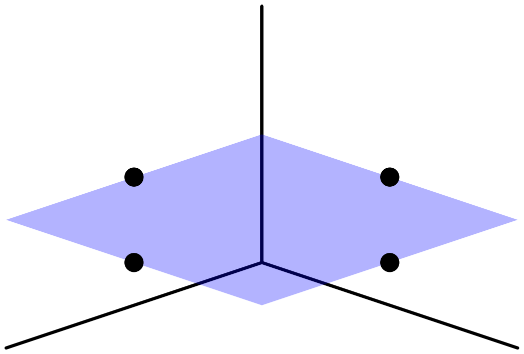
アフィン従属な点

超平面 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b\}$ 上の
$d+1$ 点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{d+1}$ はアフィン従属
$(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$



アフィン従属な点

超平面 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b\}$ 上の
$d+1$ 点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{d+1}$ はアフィン従属
$(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$

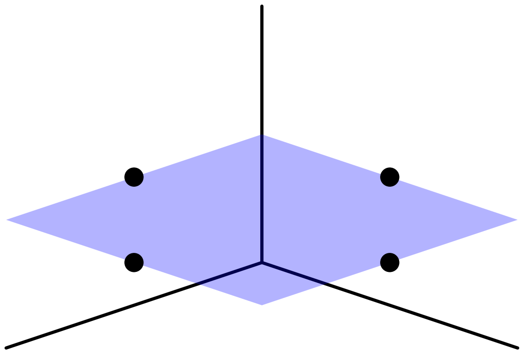


証明：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_{d+1} \\ | & | & \cdots & | \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{d+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

アフィン従属な点

超平面 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b\}$ 上の
$d+1$ 点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{d+1}$ はアフィン従属
$(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$



証明：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_{d+1} \\ | & | & \cdots & | \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{d+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} & -b \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1 - b & \cdots & \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_{d+1} - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \operatorname{rank}(A) < d+1 \qquad \square$$

凸結合

点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}^d$

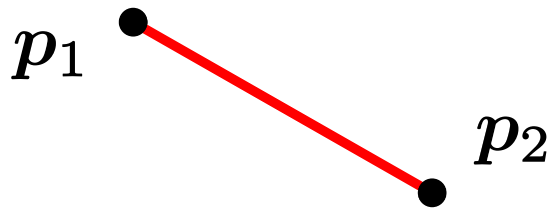
定義：凸結合

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ の **凸結合** とは,

線形結合 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i$ で, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ と $\lambda_i \geq 0 \ \forall\, i$ を

満たすもののこと

例：$d = 2$ のとき



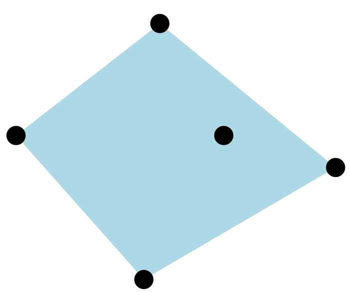
点の集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$

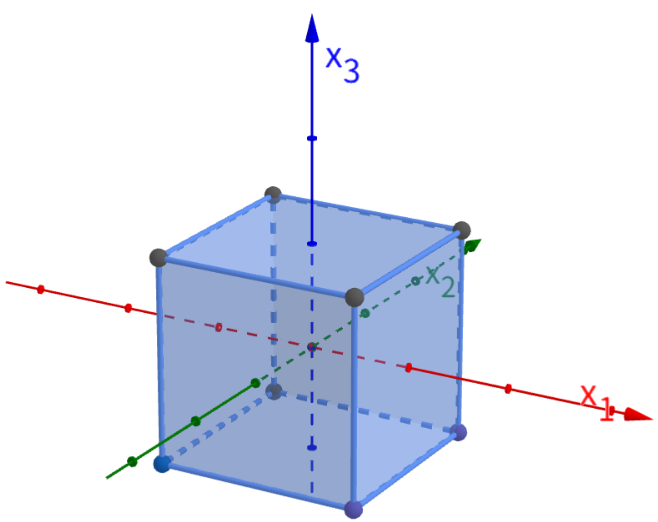
定義：凸包

P の **凸包** とは，次の集合

$$\mathrm{CH}(P) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \geq 0, i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

性質：$\mathrm{CH}(P)$ は凸集合





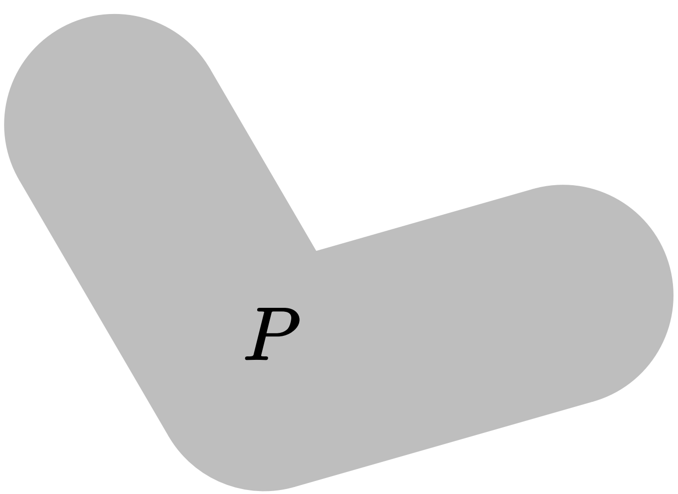
凸包：有限集合でない場合

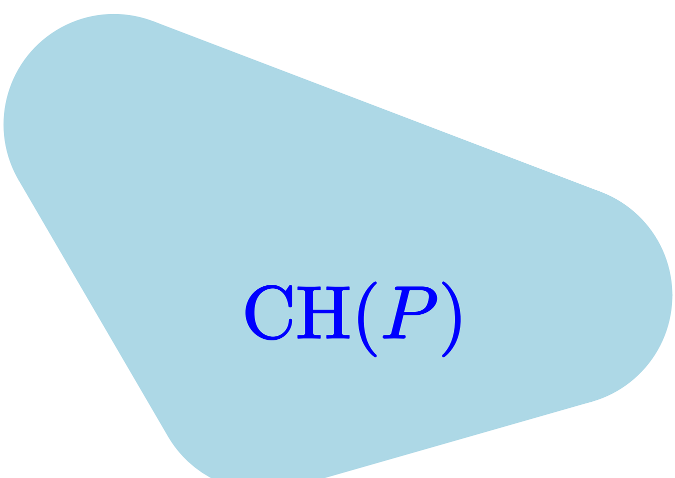
点の集合 $P \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：凸包

P の **凸包** とは，次の集合

$$\mathrm{CH}(P) = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \boldsymbol{p}_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{p}_i \in P, \lambda_i \geq 0, i \in \{1, \ldots, d+1\}, \\ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

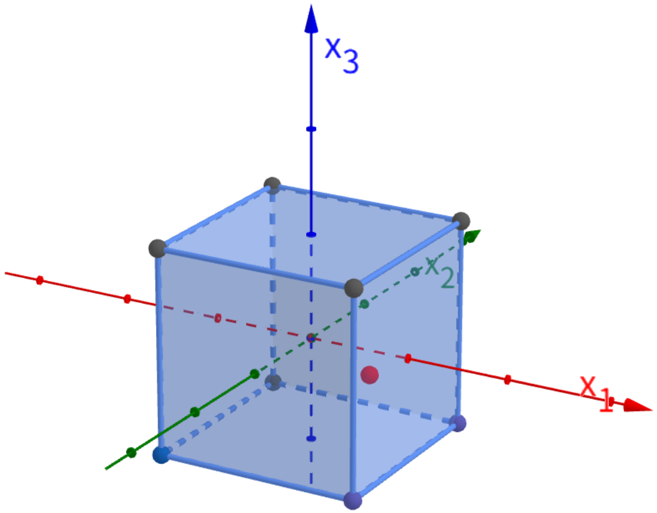


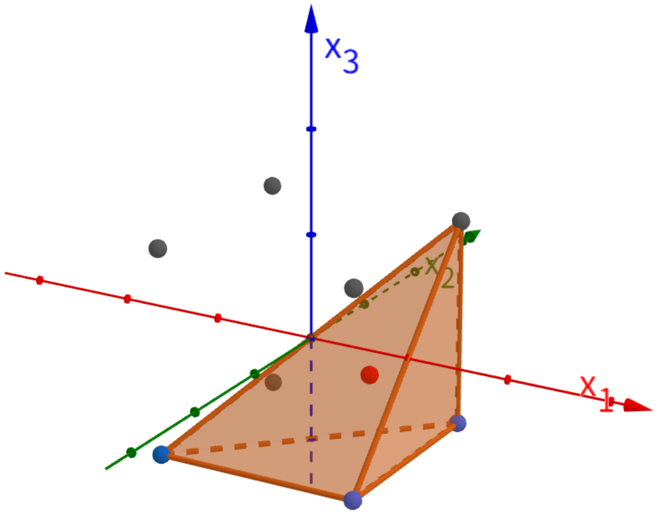


カラテオドリの定理

性質：カラテオドリの定理

点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$ が $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}^d$ の凸結合
$\Rightarrow d+1$ 個の添え字 $i_1, \ldots, i_{d+1}$ が存在して
$\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{i_{d+1}}$ の凸結合





<u>証明</u>：$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i$ とする (ただし，$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \ (\forall\, i)$)

方針

$m > d + 1$ のとき，ある係数を 0 にできる

カラテオドリの定理：証明

証明：$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i$ とする (ただし，$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \ (\forall\, i)$)

- $m \geq d + 2$ で，$\lambda_i > 0 \ (\forall\, i)$ とする
- $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ はアフィン従属なので，すべてが 0 ではない実数 μ_i で次を満たすものが存在する

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0} \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 0$$

ある項は正で，
ある項は負

- このとき，任意の実数 α に対して，

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i - \alpha \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \alpha \mu_i) \boldsymbol{p}_i$$

カラテオドリの定理：証明 (続)

- このとき，任意の実数 α に対して，

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i - \alpha \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \alpha \mu_i) \boldsymbol{p}_i$$

カラテオドリの定理：証明 (続)

- このとき，任意の実数 α に対して，

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i - \alpha \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \alpha\mu_i) \boldsymbol{p}_i$$

- $\alpha^* = \min \left\{ \dfrac{\lambda_i}{\mu_i} \mid i \in \{1, \ldots, m\}, \mu_i > 0 \right\}$ として，
  その最小値を与える添え字を i^* とすると
  - $\lambda_{i^*} - \alpha^* \mu_{i^*} = \lambda_{i^*} - \dfrac{\lambda_{i^*}}{\mu_{i^*}} \mu_{i^*} = 0$
  - $\lambda_i - \alpha^* \mu_i = \lambda_i - \dfrac{\lambda_{i^*}}{\mu_{i^*}} \mu_i \geq 0$
  - $\sum_i (\lambda_i - \alpha^* \mu_i) = \underbrace{\sum_i \lambda_i}_{=1} - \alpha^* \underbrace{\sum_i \mu_i}_{=0} = 1 - \alpha^* \cdot 0 = 1$

カラテオドリの定理：証明 (続 2)

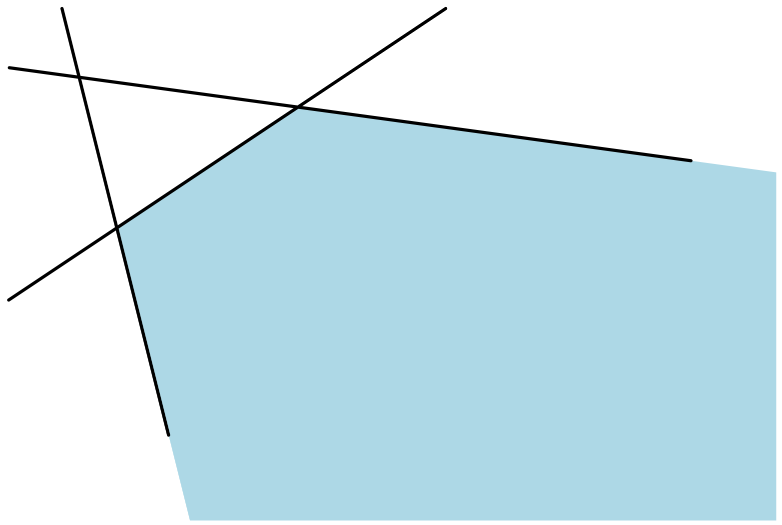
- つまり，$\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ の中の $m-1$ 個の点の凸結合として書ける
- これを繰り返すと，$\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}_1 \ldots, \boldsymbol{p}_m$ の中の $d+1$ 個の点の凸結合として書ける $\square$

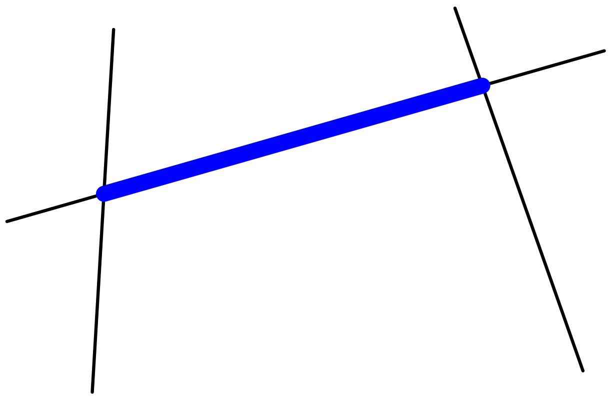
目次

凸多面集合

定義：凸多面集合

凸多面集合 とは，有限個の閉半空間の共通部分



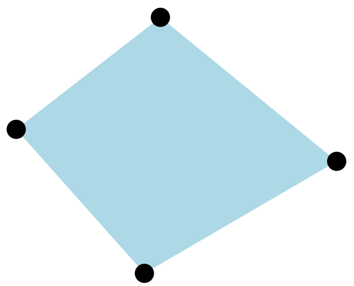


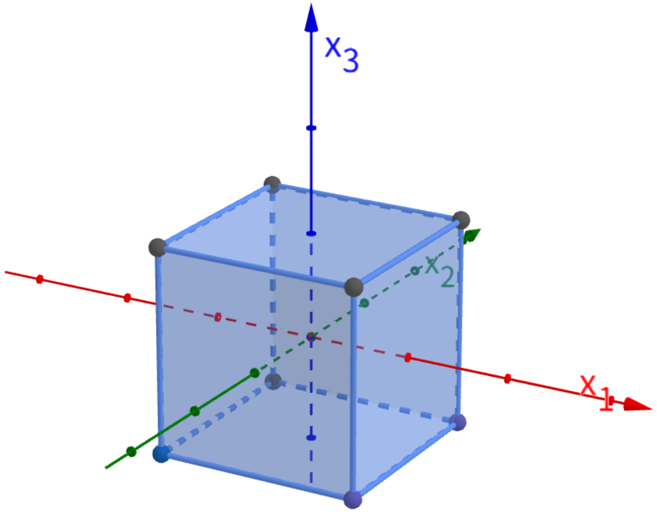
凸多面集合の <u>次元</u> とは，そのアフィン包の次元

凸多面体

定義：凸多面体

凸多面体 とは，有限点集合の凸包



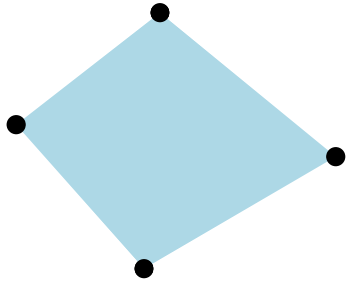


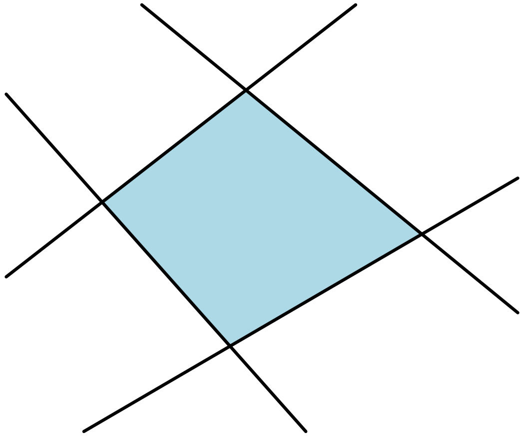
凸多面体の 次元 とは，そのアフィン包の次元

凸多面集合と凸多面体

性質 (ここでは証明しないが，重要)

1. 凸多面体 は 有界な凸多面集合
2. 有界な凸多面集合 は 凸多面体





つまり，凸多面体は次の 2 つの記述法を持つ

- **頂点記述**：有限点集合の凸包
- **超平面記述**：有限個の閉半空間の共通部分

定義：立方体

d **次元立方体** とは，次で定義される凸多面体

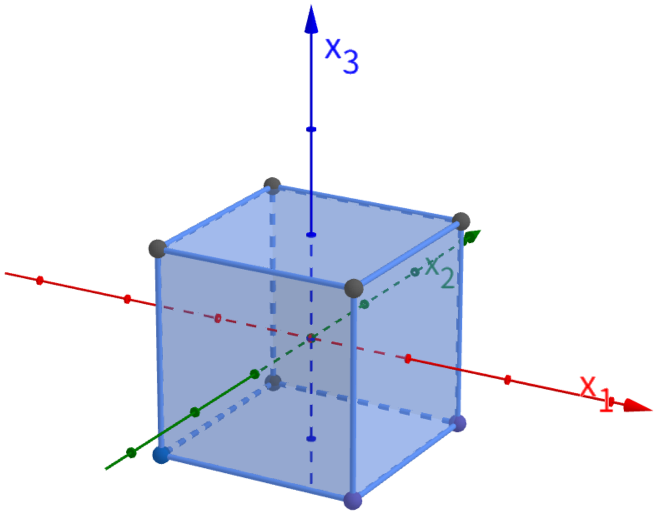
- 頂点記述：

$$\mathrm{CH}\left(\left\{\sum_{i=1}^{d}(-1)^{s_i}\boldsymbol{e}_i \mid s_i \in \{0,1\}\right\}\right)$$

($\boldsymbol{e}_i$ は基本ベクトル)

- 超平面記述：

$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,d\}\right\}$$



凸多面体の例：十字多面体

定義：十字多面体

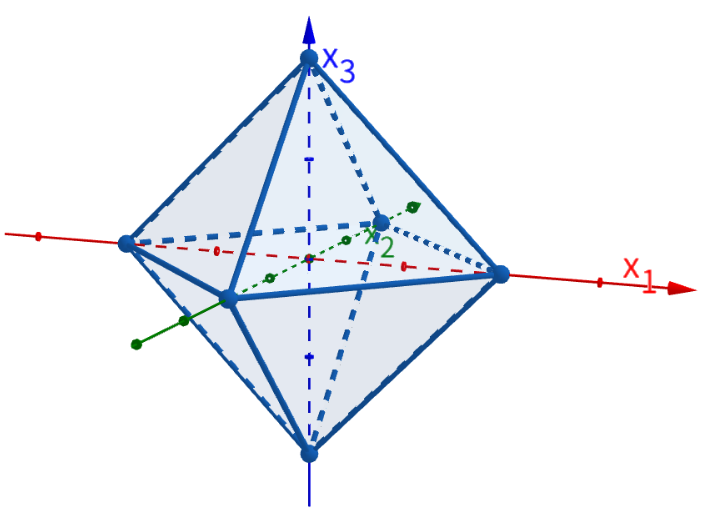
d **次元十字多面体** とは，次で定義される凸多面体

- 頂点記述：

$$\mathrm{CH}(\{\pm e_i \mid i \in \{1,\ldots,d\}\})$$

- 超平面記述：

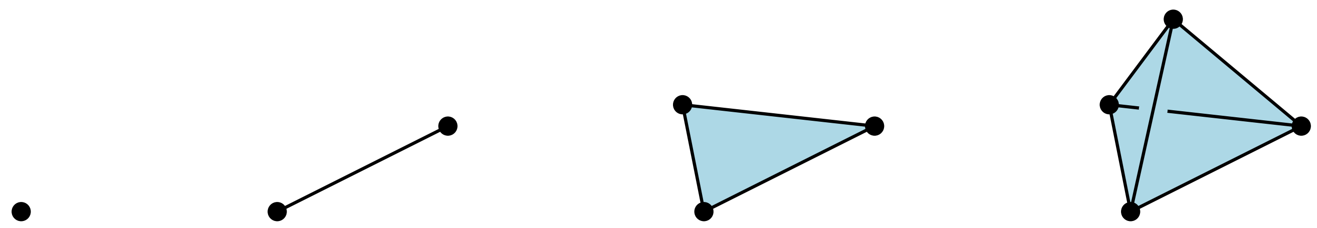
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \sum_{i=1}^{d} (-1)^{s_i} x_i \leq 1 \quad \forall\, s_i \in \{0,1\} \right\}$$



凸多面体の例：単体

定義：単体

d **次元単体** とは，
$d+1$ 個のアフィン独立な点の集合の凸包



次元	0	1	2	3
		線分	三角形	四面体

まとめ

今日の目標

凸集合に関する用語を正しく使えるようになる

- 楕円体
- 凸結合と凸包
- 凸多面集合と凸多面体