離散数理工学 (2025 年度後学期)

第 7 回

高次元 (1)：高次元の物体の取り扱い方

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 12 月 16 日

最終更新：2025 年 12 月 8 日　17:19

今回の目標

今日の目標

高次元の物体をベクトルや行列を使って取り扱えるようになる

- 線形部分空間，アフィン部分空間，超平面，半空間
- 球面，球体
- 凸集合

高次元の物体を扱うとき，線形代数が重要な役割を果たす

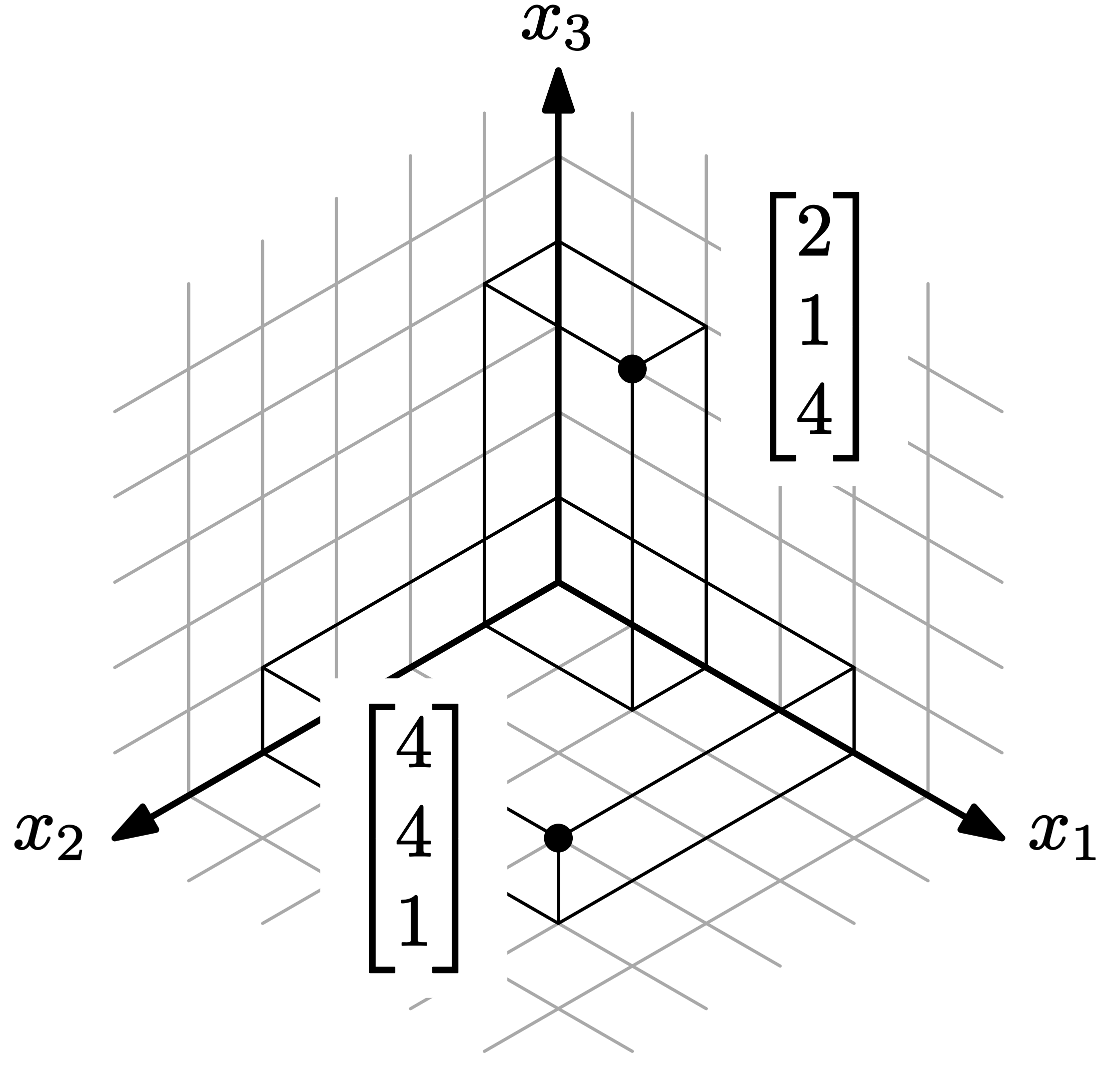
(微分・積分も重要だが，この授業では扱わない)

目次

$\mathbb{R}^d$ の点は実ベクトル (列ベクトル) として表す

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

$d = 3$ のとき



線形部分空間

実行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$

定義 (または性質)：線形部分空間

次は $\mathbb{R}^d$ の線形部分空間

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

$\mathbb{R}^d$ の線形部分空間は必ずこの形式で書ける

これは，**A の零空間** $(N(A))$ や **A の核** $(\ker(A))$ と呼ばれる

つまり，$N(A) = \ker(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$

このとき，$N(A)$ の次元は $d - \mathrm{rank}(A)$ で定まる

線形部分空間

実行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$

定義 (または性質)：線形部分空間

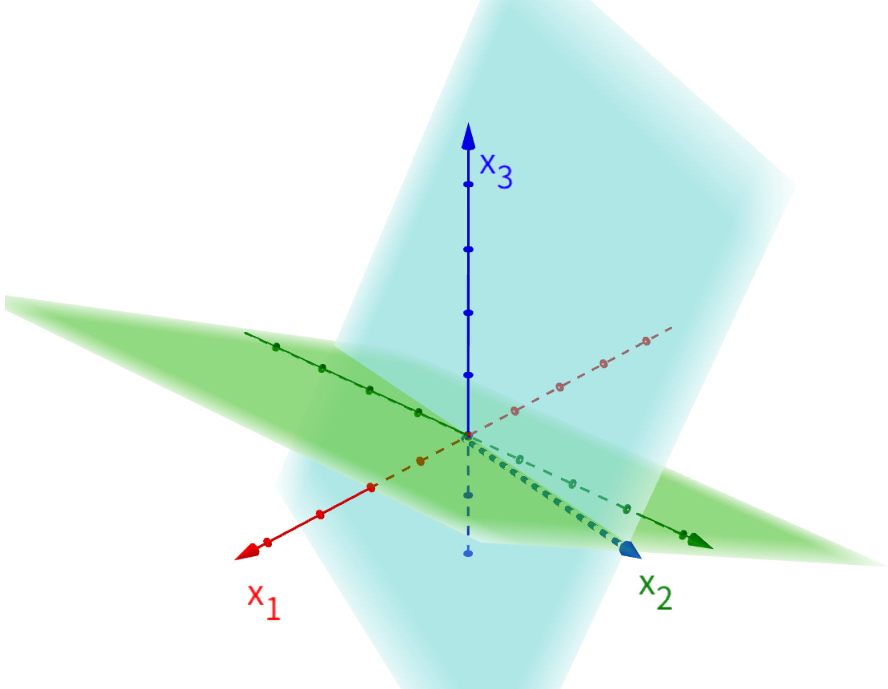
次は $\mathbb{R}^d$ の線形部分空間

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

$\mathbb{R}^d$ の線形部分空間は必ずこの形式で書ける

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ のとき

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$



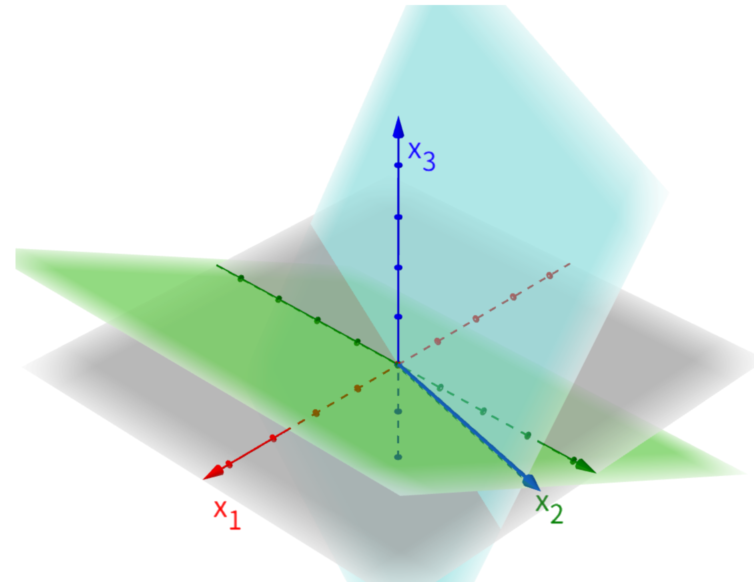
線形部分空間：例 1

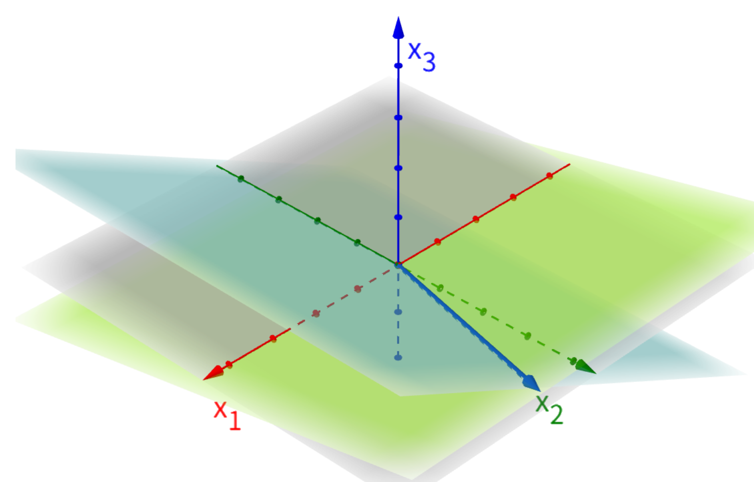
$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ のとき

$$Ax = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

↓ 行基本変形

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

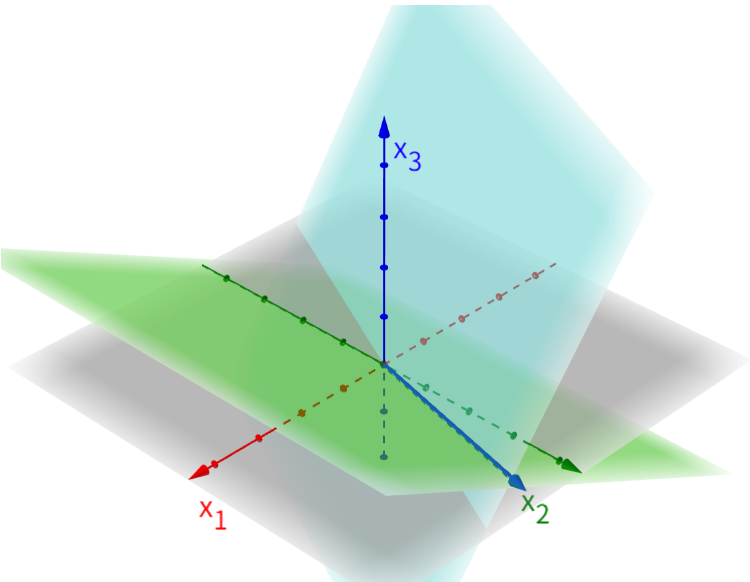




線形部分空間：例 1

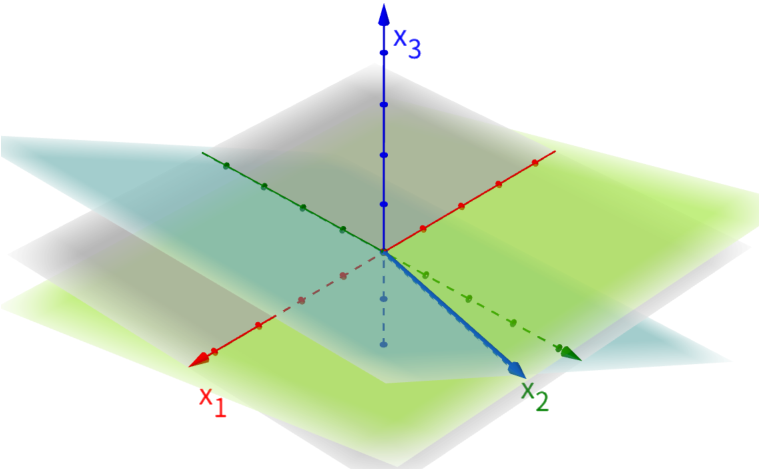
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$ のとき

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$



$\downarrow$ 行基本変形

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$



$$\mathrm{rank}(A) = 2$$

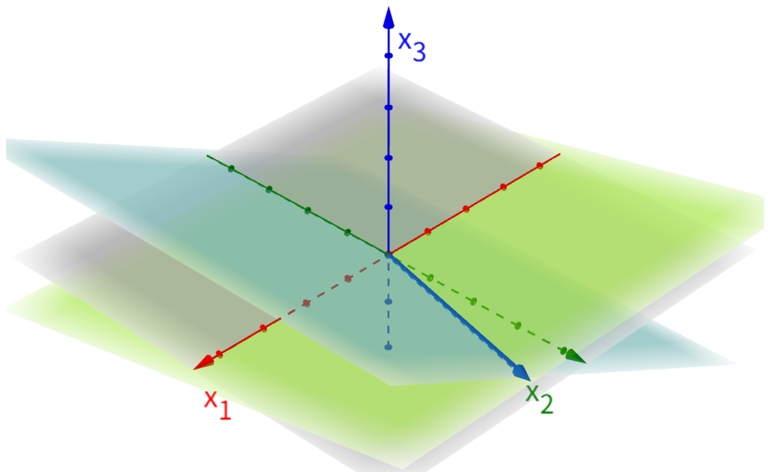
$$\rightsquigarrow \therefore \dim(N(A)) = d - \mathrm{rank}(A) \\ = 1$$

線形部分空間：例1(続)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$ のとき

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\dim(N(A)) = 1$$



$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 2t \\ 5t \\ t \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

原点を通る直線

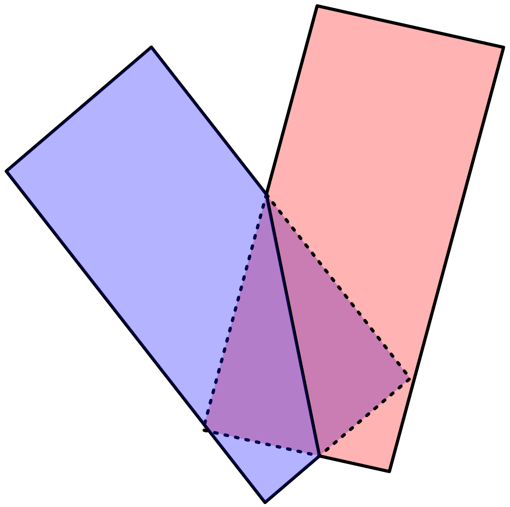
$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ は $N(A)$ の基底

注：検算

注意：線形部分空間は 必ず 原点を通る

線形部分空間：例 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$ のとき



$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

行基本変形

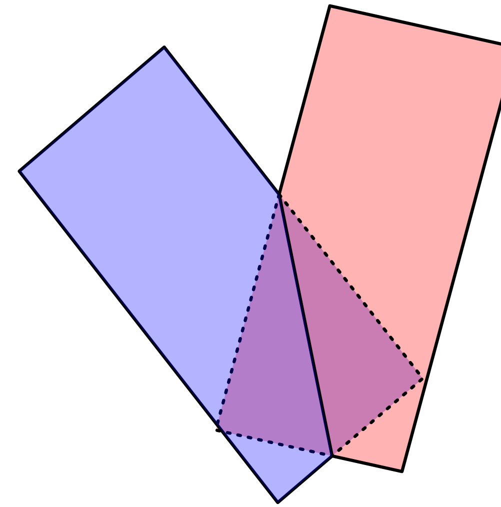
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - \frac{3}{2}x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{rank}(A) = 2$$

$$\rightsquigarrow \therefore \dim(N(A)) = d - \mathrm{rank}(A) \\ = 3$$

線形部分空間：例 2 (続)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$ のとき



$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - \frac{3}{2}x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\dim(N(A)) = 3$$

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} s - 2t - 4u \\ -2s + t + \frac{3}{2}u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} \middle| \, s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} s - 2t - 4u \\ -2s + t + \frac{3}{2}u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} \middle| \, s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

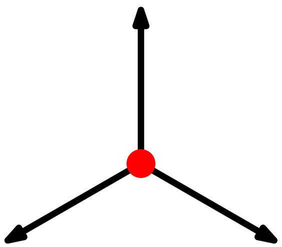
$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$ は $N(A)$ の基底

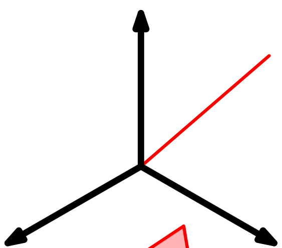
<u>注</u>：検算

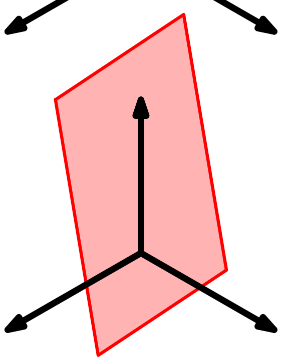
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

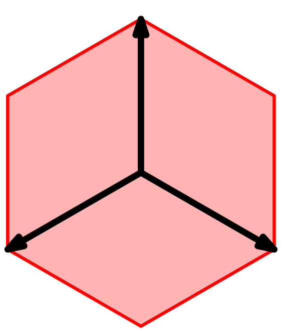
線形部分空間：$d = 3$ の場合

次元

0  原点 (だけから成る集合)

1  原点を通る直線

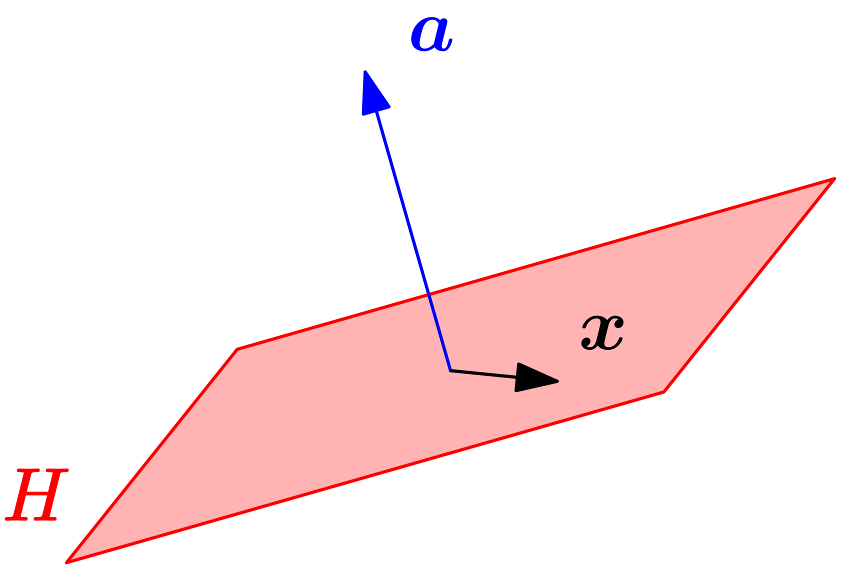
2  原点を通る平面

3  全体空間 $\mathbb{R}^3$

法線ベクトル

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d - \{\boldsymbol{0}\}$ に対して，次は次元 $d-1$ の線形部分空間

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0\}$$



$\boldsymbol{a}$ を H の **法線ベクトル** と呼ぶ

ベクトルの集合 $V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：線形包

V の **線形包** とは，次の集合

$$\mathrm{lin}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{v}_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, m\} \right\}$$

V の張る線形部分空間とも言う

つまり，V の線形包は V のベクトルの線形結合全体の集合

重要な性質：線形包は線形部分空間

（例えば，$N(A)$ の基底を V とすればよい）

線形包：有限集合ではない場合

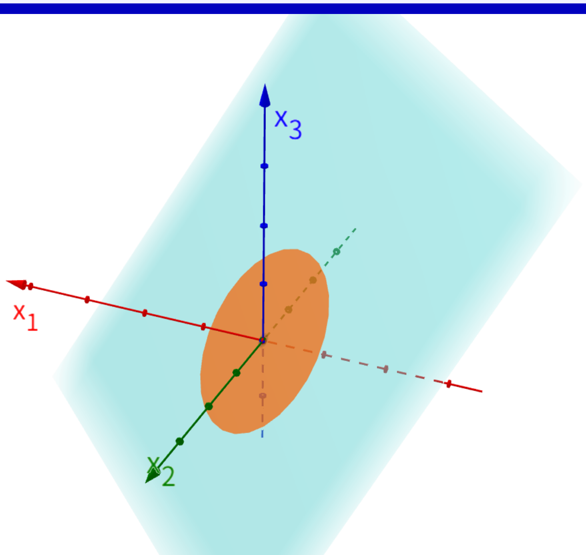
ベクトルの集合 $V \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：線形包

V の **線形包** とは，次の集合

$$\mathrm{lin}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i \,\middle|\, v_i \in V, \lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, d\} \right\}$$

V の張る線形部分空間とも言う



目次

定義：アフィン部分空間

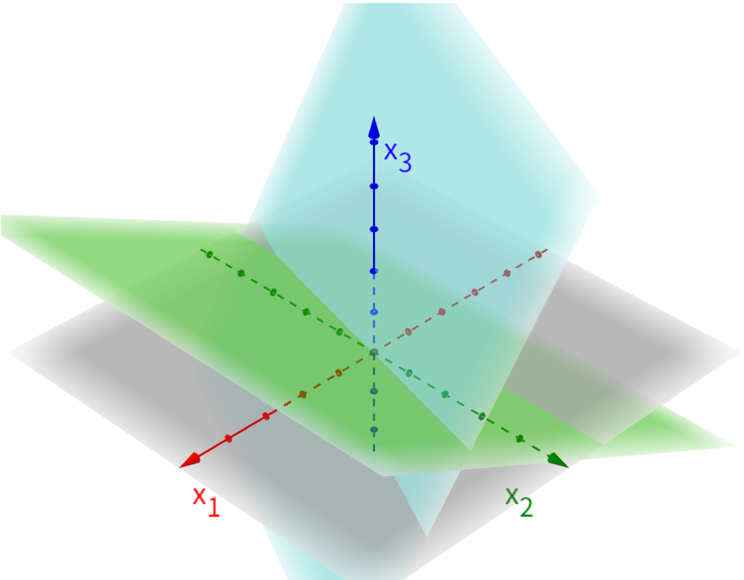
$\mathbb{R}^d$ の **アフィン部分空間** とは次のように書ける集合

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

ここで，$A \in \mathbb{R}^{m \times d}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$m$ は正整数である

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{のとき}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

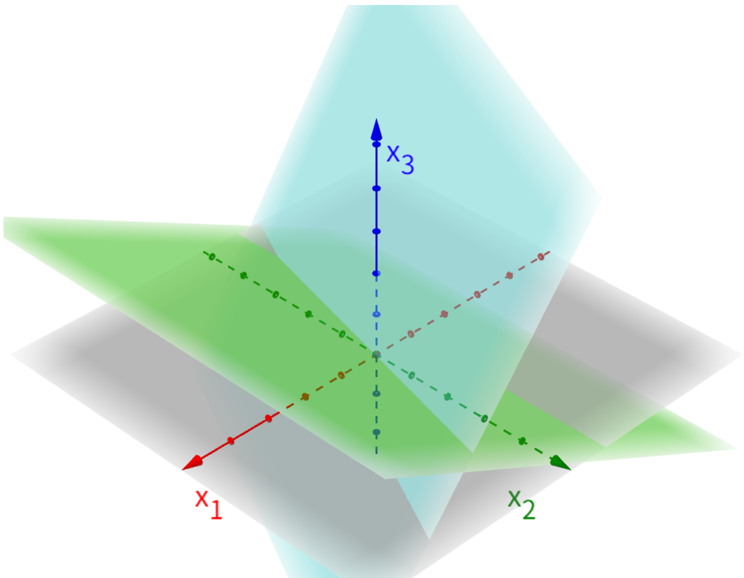


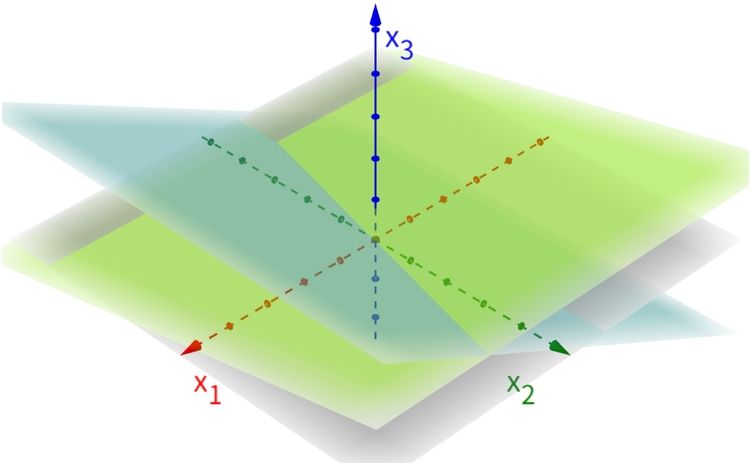
アフィン部分空間：例

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \text{行基本変形} \qquad\qquad \Big\downarrow \text{行基本変形}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

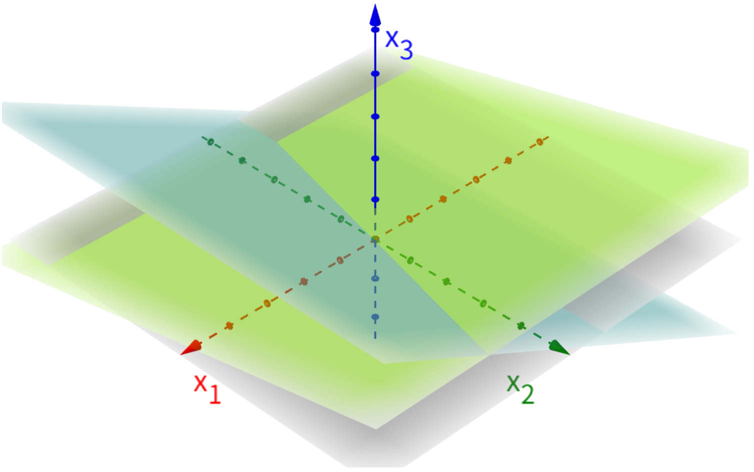




$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

このアフィン部分空間の次元 $= 1$



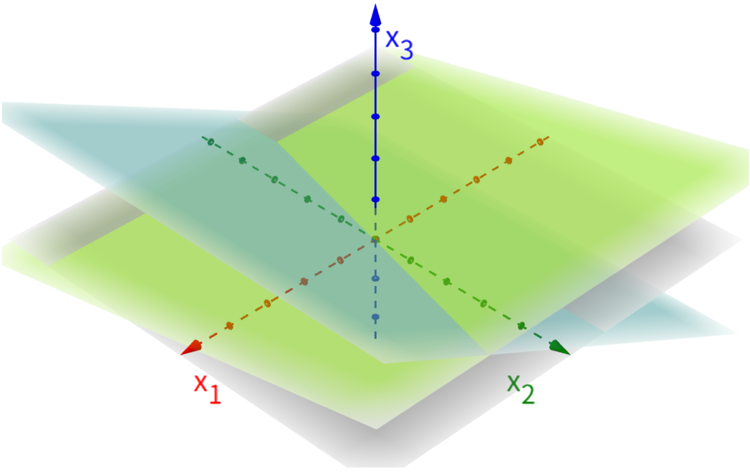
アフィン部分空間：例 (続)

$$
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}\colon \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{平行移動を表すベクトル}} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{N(A)\text{ の基底}}
$$

注：検算

このアフィン部分空間の次元 $= 1$



アフィン部分空間と線形部分空間

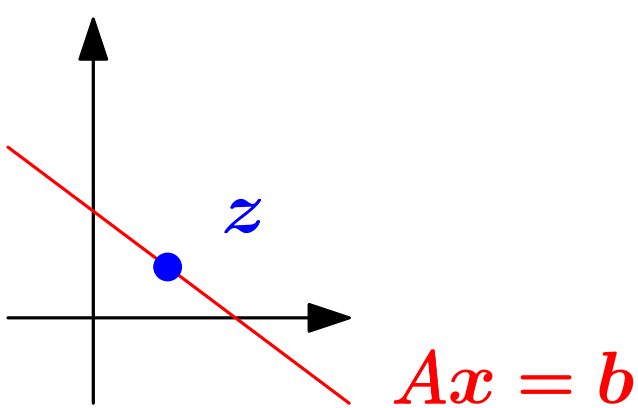
性質：アフィン部分空間は線形部分空間の平行移動

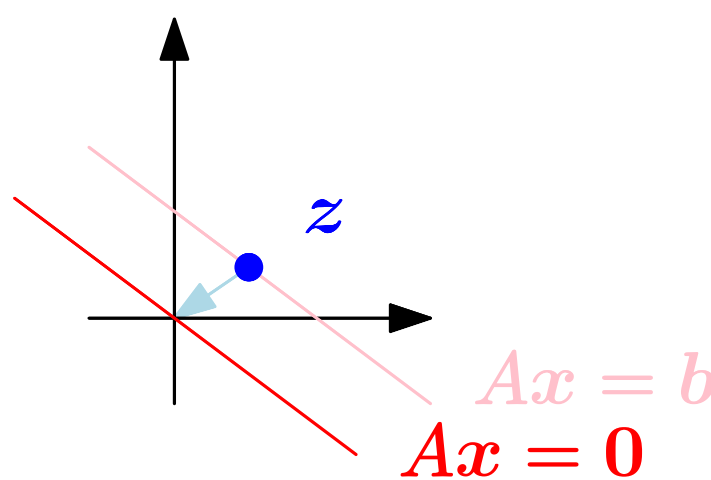
非空なアフィン部分空間は
ある線形部分空間を平行移動させたもの

証明：$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解の 1 つを $\boldsymbol{z}$ とすると

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Az} \quad \therefore\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0} \qquad \square$$





アフィン部分空間：注意

定義：アフィン部分空間 (再掲)

$\mathbb{R}^d$ の **アフィン部分空間** とは次のように書ける集合

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

ここで，$A \in \mathbb{R}^{m \times d}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$m$ は正整数である

注意：$A, \boldsymbol{b}$ によっては，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在しないかも

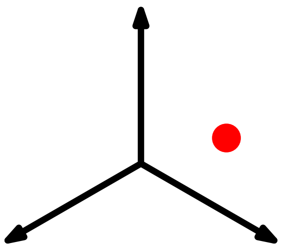
性質：$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A\ \boldsymbol{b}])$

補足：つまり，空集合 $\emptyset$ も $\mathbb{R}^d$ のアフィン部分空間

アフィン部分空間：$d = 3$ の場合

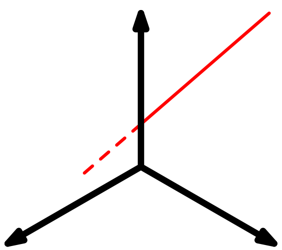
次元

0



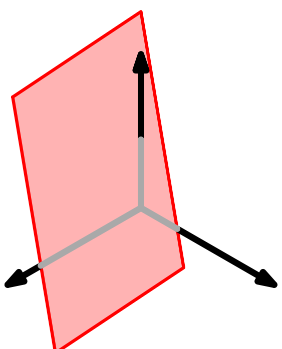
1 つの点 (だけから成る集合)

1



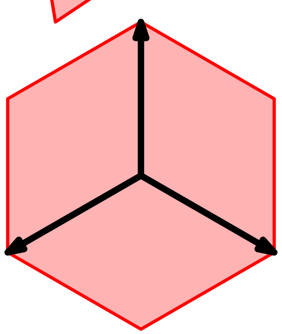
直線

2



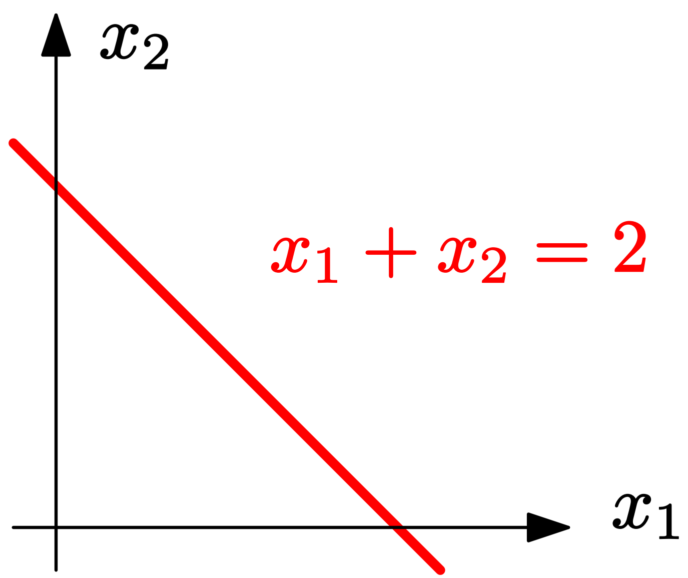
平面

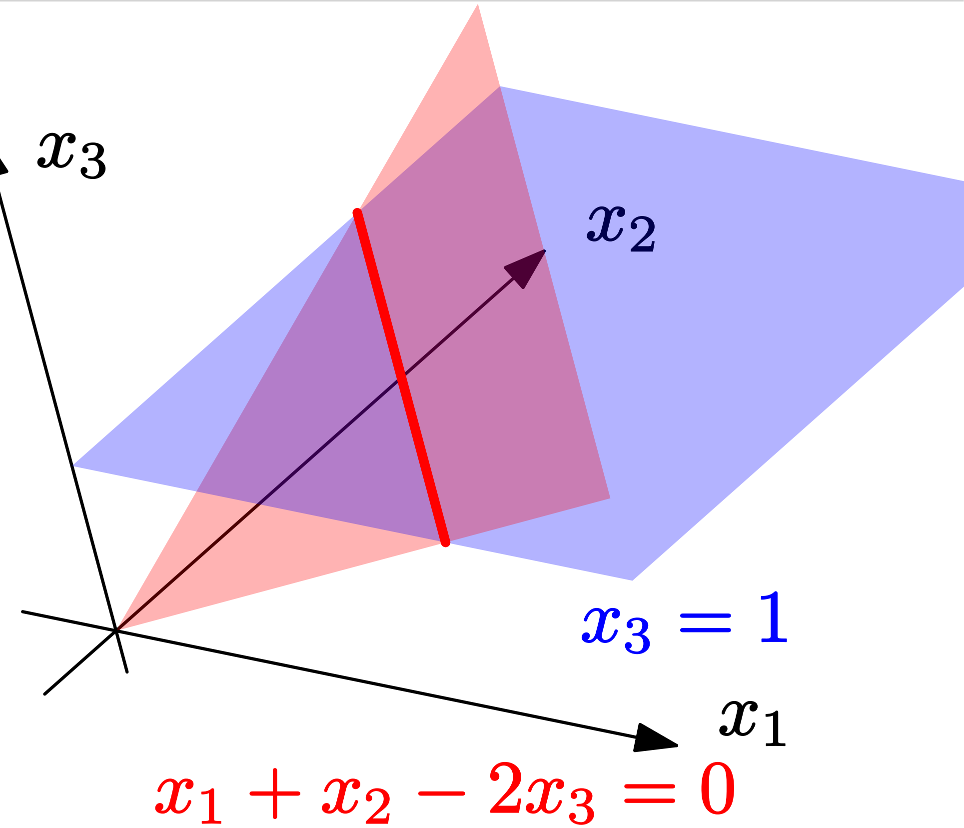
3



全体空間 $\mathbb{R}^3$

アフィン部分空間の埋め込み





$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{A} \ \ -\boldsymbol{b}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{A} \ \ -\boldsymbol{b}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_{d+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}, x_{d+1} = 1$$

アフィン結合

点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}^d$

定義：アフィン結合

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ の **アフィン結合** とは,
線形結合 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i$ で, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ を満たすもののこと

性質：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ が $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ のアフィン結合

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ が } \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_m \\ 1 \end{bmatrix} \text{ の線形結合}$$

点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}^d$

定義：アフィン結合

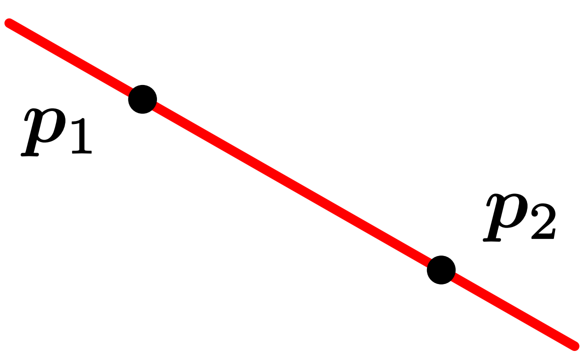
$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ の **アフィン結合** とは，

線形結合 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i$ で，$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ を満たすもののこと

性質：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ が $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ のアフィン結合

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ が } \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_m \\ 1 \end{bmatrix} \text{ の線形結合}$$

例：$d = 2$ のとき



アフィン包

点の集合 $P = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：アフィン包

P の **アフィン包** とは，次の集合

$$\mathrm{aff}(P) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{p}_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

P の張るアフィン部分空間とも言う

直感：アフィン包はアフィン結合全体の集合

重要な性質：アフィン包はアフィン部分空間

アフィン包：例

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ のとき,

$P = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4\}$ のアフィン包を $\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ の形で表せ

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ のとき,

$P = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4\}$ のアフィン包を $\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ の形で表せ

(1) $\mathrm{aff}(P)$ の次元を求める

$$\boldsymbol{x} \in \mathrm{aff}(P) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{lin}\left(\underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}_{= P'}\right)$$

$$\therefore \quad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ として，$\mathrm{rank}(B)$ を知りたい

アフィン包：例 (続)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \operatorname{rank}(B) = 3$$

$$\therefore \dim \operatorname{lin}(P') = 3$$

$$\therefore \dim \operatorname{aff}(P) = 2$$

特に, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_3 \\ 1 \end{bmatrix}$ が線形独立

アフィン包：例 (続)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \operatorname{rank}(B) = 3$$

$$\therefore \dim \operatorname{lin}(P') = 3$$

$$\therefore \dim \operatorname{aff}(P) = 2$$

特に，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_3 \\ 1 \end{bmatrix}$ が線形独立

$\operatorname{aff}(P) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ であるためには，

$\operatorname{rank}(A) = d - \dim \operatorname{aff}(P) = 1$ でないといけない

$\boxed{\text{(2) } A, \boldsymbol{b} \text{ を求める}}$ rank $A = 1$ なので,

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = b$ としてよい

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ はアフィン包の点なので,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

アフィン包：例 (続 3)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \text{列基本変形}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\}$$

<u>注</u>：検算

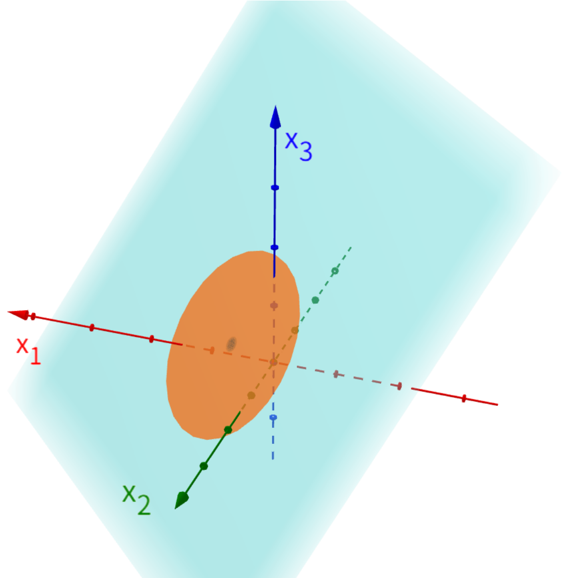
アフィン包：有限集合でない場合

点の集合 $P \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：アフィン包

P の **アフィン包** とは，次の集合

$$\mathrm{aff}(P) = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \boldsymbol{p}_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{p}_i \in P, \lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, d+1\}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



超平面

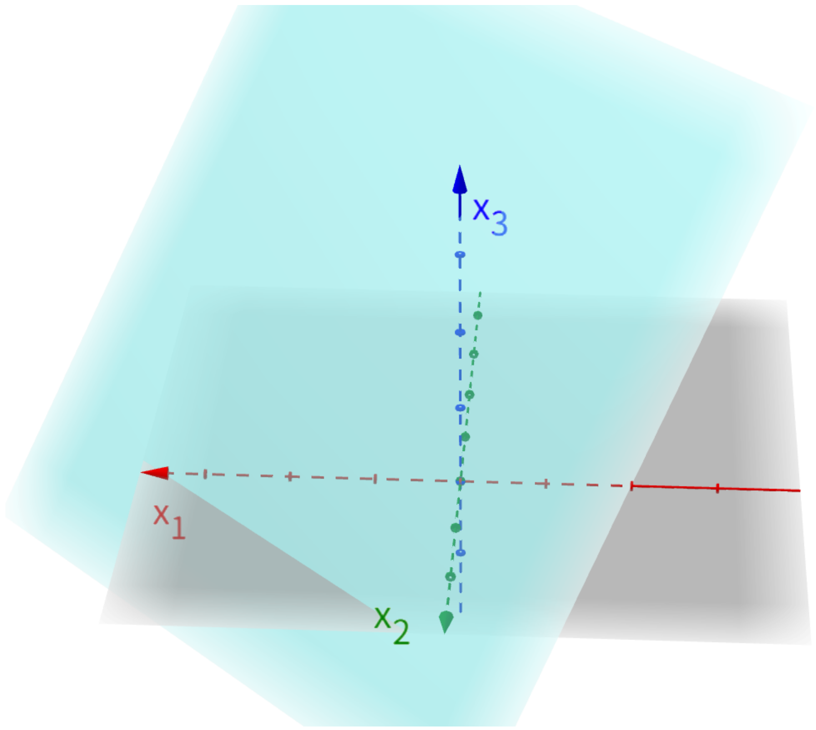
定義：超平面

$X \subseteq \mathbb{R}^d$ が **超平面** であるとは次で書ける集合のこと

$$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b\}$$

ここで，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d - \{\boldsymbol{0}\}$，$b \in \mathbb{R}$

つまり，次元 $d-1$ のアフィン部分空間

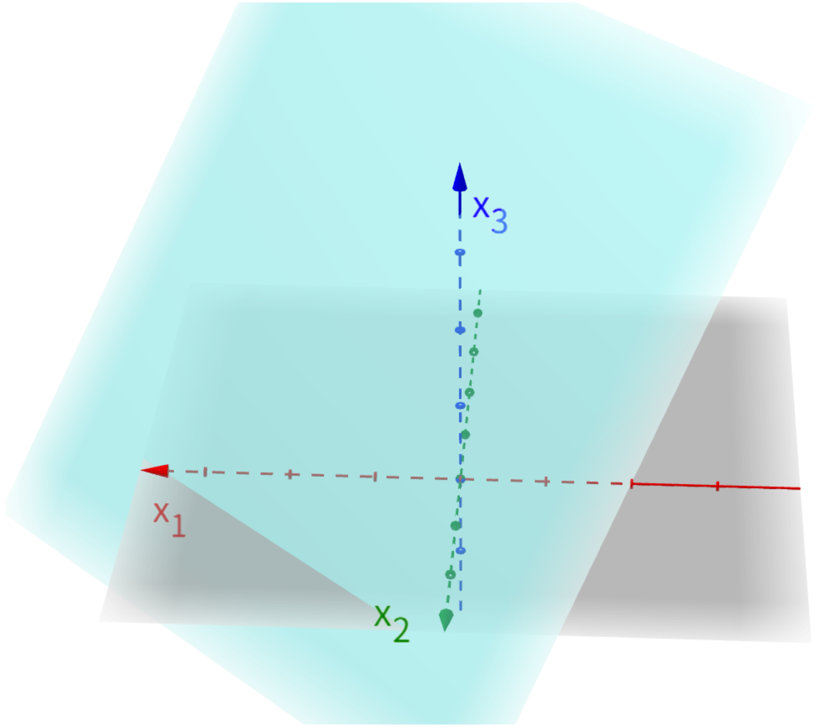


例：$x_1 + x_2 + x_3 = 7$

半空間

超平面 $X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b\}$ に対して

- $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le b\}$ は X が定める **閉半空間**
- $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < b\}$ は X が定める **開半空間**



例：$x_1 + x_2 + x_3 \le 7$

目次

球体と球面

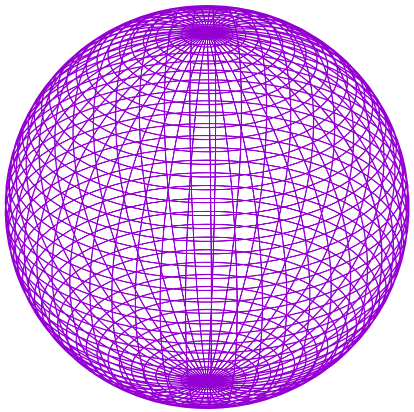
点 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$，正の実数 $r > 0$

- $\boldsymbol{c}$ を中心とする半径 r の d **次元球体** とは，次の集合

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - c_i)^2} \leq r \right\}$$

- $\boldsymbol{c}$ を中心とする半径 r の $d-1$ **次元球面** とは，次の集合

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - c_i)^2} = r \right\}$$



開集合と閉集合

定義：開集合と閉集合

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ が

- $\mathbb{R}^d$ の **開集合** であるとは，任意の点 $\boldsymbol{x} \in X$ に対して，$\boldsymbol{x}$ を中心とする d 次元開球体 B で，$B \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- $\mathbb{R}^d$ の **閉集合** であるとは，補集合 $\mathbb{R}^d - X$ が開集合であること

- $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$ を中心とする半径 $r > 0$ の **d 次元開球体** とは，次の集合

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - c_i)^2} < r \right\}$$

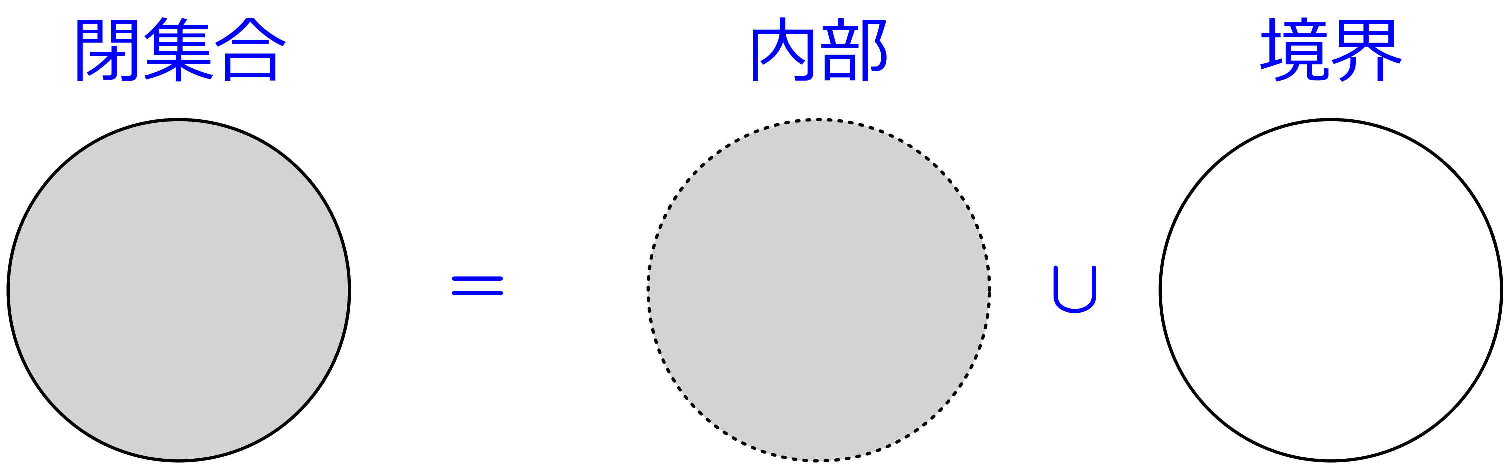
内部と境界

定義：内点，内部

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，

- 点 $x \in X$ が X の **内点** であるとは，
  x を中心とする d 次元開球体 B で
  $B \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- X の **内部** とは，X の内点全体の集合のこと

閉集合の **境界** とは，その内点ではない点全体の集合



相対的内部

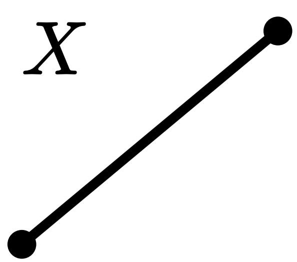
定義：相対的内点，相対的内部

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，

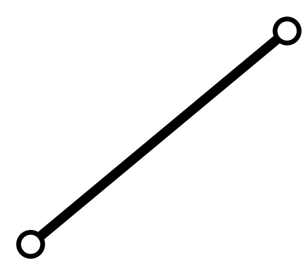
- 点 $x \in X$ が X の **相対的内点** であるとは，
  x を中心とする d 次元開球体 B で
  $B \cap \mathrm{aff}(X) \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- X の **相対的内部** とは，X の相対的内点全体のこと

例：$d = 2$ のとき

X



の相対的内部は



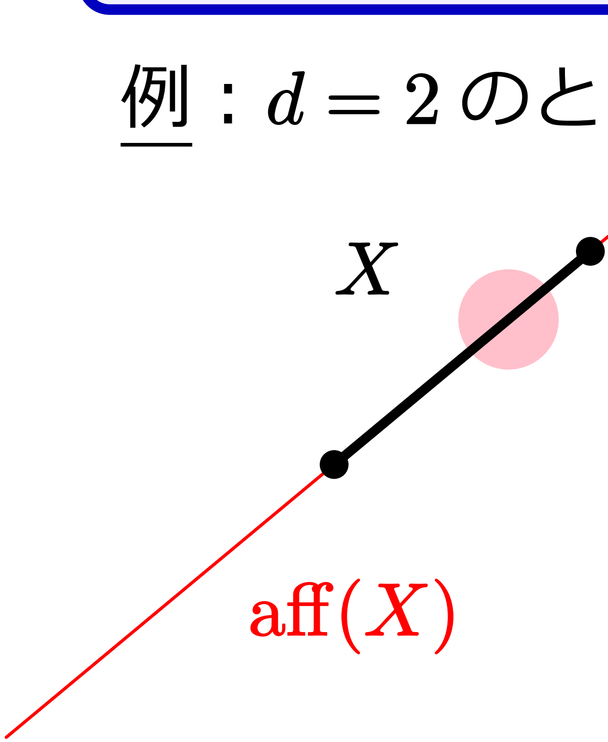
相対的内部

定義：相対的内点，相対的内部

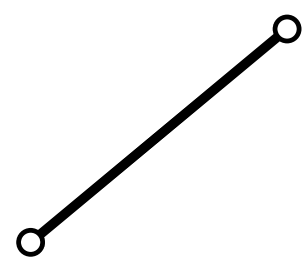
集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，

- 点 $x \in X$ が X の **相対的内点** であるとは，
  x を中心とする d 次元開球体 B で
  $B \cap \mathrm{aff}(X) \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- X の **相対的内部** とは，X の相対的内点全体のこと

例：$d = 2$ のとき



の相対的内部は



有界と非有界

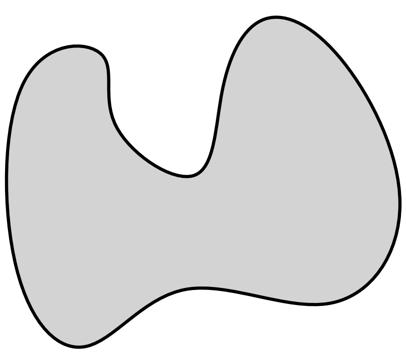
定義：有界性と非有界性

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ が

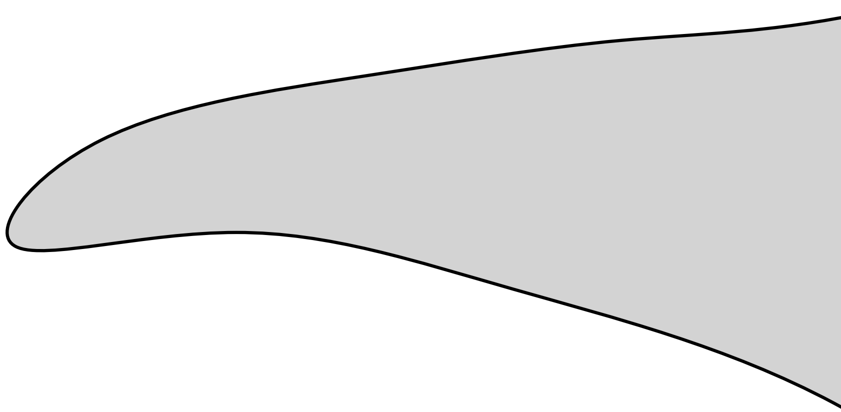
- **有界** であるとは，ある d 次元球体 B が存在して，$X \subseteq B$ を満たすこと
- **非有界** であるとは，有界ではないこと

有界閉集合を **コンパクト** であるということがある

有界な集合の例



非有界な集合の例



目次

凸集合

$X \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：凸集合

X が **凸集合** であるとは，次を満たすこと

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in X$$

直感：2 点 $\in X \Rightarrow$ その 2 点を結ぶ線分 $\subseteq X$

凸集合である

凸集合ではない

注：凹集合とは言わない

凸集合

$X \subseteq \mathbb{R}^d$

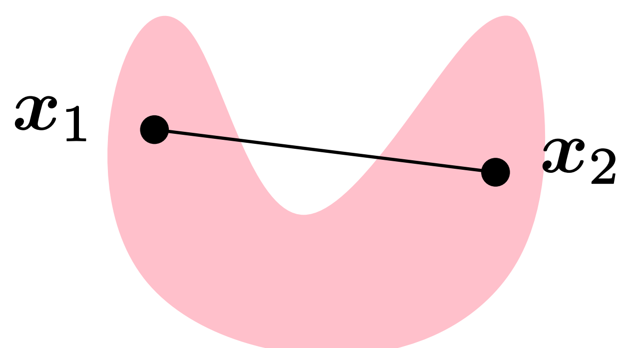
定義：凸集合

X が **凸集合** であるとは，次を満たすこと

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X,\ \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in X$$

直感：2 点 $\in X \Rightarrow$ その 2 点を結ぶ線分 $\subseteq X$

凸集合である



凸集合ではない

注：凹集合とは言わない

凸集合

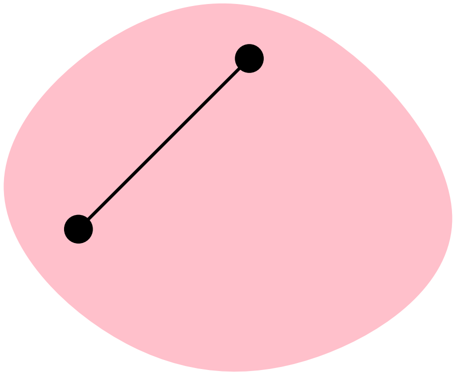
$X \subseteq \mathbb{R}^d$

定義：凸集合

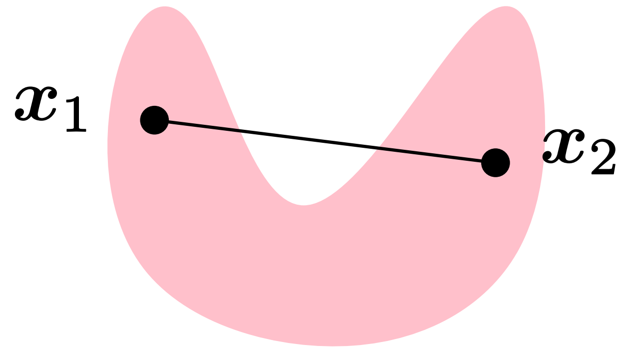
X が **凸集合** であるとは，次を満たすこと

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in X$$

直感：2 点 $\in X \Rightarrow$ その 2 点を結ぶ線分 $\subseteq X$



凸集合である



凸集合ではない

注：凹集合とは言わない

凸集合の例：アフィン部分空間

性質：$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ は凸集合

- $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X, \lambda \in [0,1]$ とする
- 目標：$\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in X$ を示す
- $$\begin{aligned} A(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) &= \lambda A\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)A\boldsymbol{x}_2 \\ &= \lambda \boldsymbol{b} + (1-\lambda)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$
- $\therefore \lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in X$ $\square$

性質：$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le b\}$ は凸集合

- $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X, \lambda \in [0, 1]$ とする
- 目標：$\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in X$ を示す
- $$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) &= \lambda\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 \\ &\le \lambda b + (1-\lambda)b = b\end{aligned}$$
- $\therefore \lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \in X$ $\square$

凸集合の例：球体

性質：$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \leq 1 \right\}$ は凸集合

- $x_1, x_2 \in B$, $\lambda \in [0,1]$ とする
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} (\lambda x_{1,i} + (1-\lambda) x_{2,i})^2$

$$= \sum_{i=1}^{d} (\lambda^2 x_{1,i}^2 + (1-\lambda)^2 x_{2,i}^2 + 2\lambda(1-\lambda) x_{1,i} x_{2,i})$$

$$= \lambda^2 \sum_{i=1}^{d} x_{1,i}^2 + (1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^{d} x_{2,i}^2 + 2\lambda(1-\lambda) \sum_{i=1}^{d} x_{1,i} x_{2,i}$$

凸集合の例：球体

性質：$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \leq 1 \right\}$ は凸集合

- $x_1, x_2 \in B$, $\lambda \in [0,1]$ とする
- $\sum_{i=1}^{d} (\lambda x_{1,i} + (1-\lambda) x_{2,i})^2$

$$= \sum_{i=1}^{d} (\lambda^2 x_{1,i}^2 + (1-\lambda)^2 x_{2,i}^2 + 2\lambda(1-\lambda) x_{1,i} x_{2,i})$$

$$= \lambda^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_{1,i}^2}_{\leq 1} + (1-\lambda)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_{2,i}^2}_{\leq 1} + 2\lambda(1-\lambda) \underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_{1,i} x_{2,i}}_{\leq 1}$$

$$\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) = (\lambda + (1-\lambda))^2 = 1$$

- $\therefore \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in B$ $\square$

性質：コーシー・シュワルツの不等式

任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\left(\sum_{i=1}^{d} x_{1,i} x_{2,i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{d} x_{1,i}^2 \sum_{i=1}^{d} x_{2,i}^2$$

証明：演習問題

(ヒント：$\displaystyle\sum_{i=1}^{d}(x_{1,i}t + x_{2,i})^2$ を t に関する二次式だと見なし，

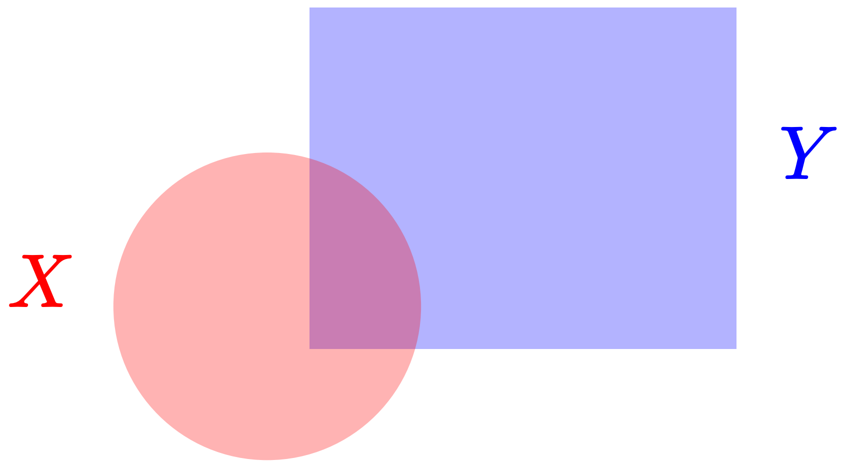
判別式を考えてみよ)

$X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$

性質：凸集合の共通部分は凸集合

X, Y が凸集合 $\Rightarrow X \cap Y$ は凸集合

証明：演習問題



注意：X, Y が凸集合でも，$X \cup Y$ が凸集合とは限らない

今日のまとめ

今日の目標

高次元の物体をベクトルや行列を使って取り扱えるようになる

- 線形部分空間，アフィン部分空間，超平面，半空間
- 球面，球体
- 凸集合

高次元の物体を扱うとき，線形代数が重要な役割を果たす

(微分・積分も重要だが，この授業では扱わない)