離散数理工学 (2025 年度後学期)

第 6 回

低次元 (6)：二次曲線と楕円

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 11 月 25 日

最終更新：2025 年 11 月 26 日　07:19

今回の目標

今日の目標

二次曲線の特徴や性質を明らかにできる

- 二次曲線の分類
- 二次曲線と等距離線の関係

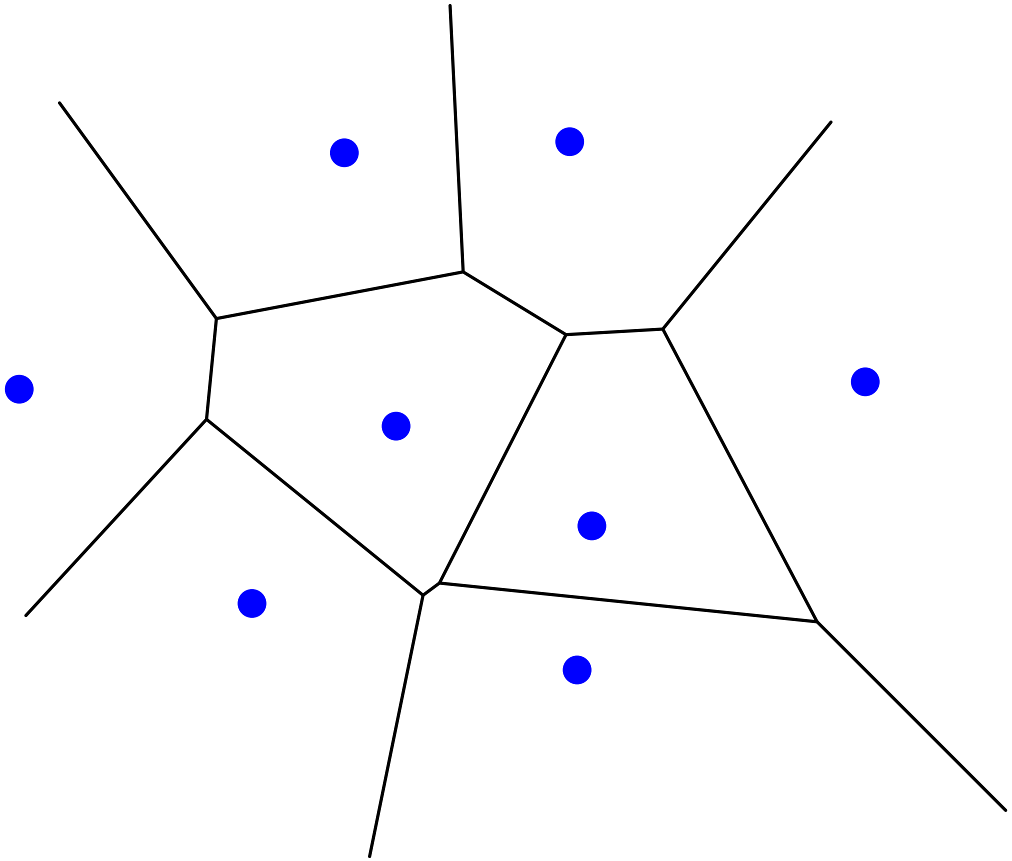
二次曲線を考えるとき，線形代数が重要な役割を果たす

教訓

線形代数は多項式に対しても役立つ

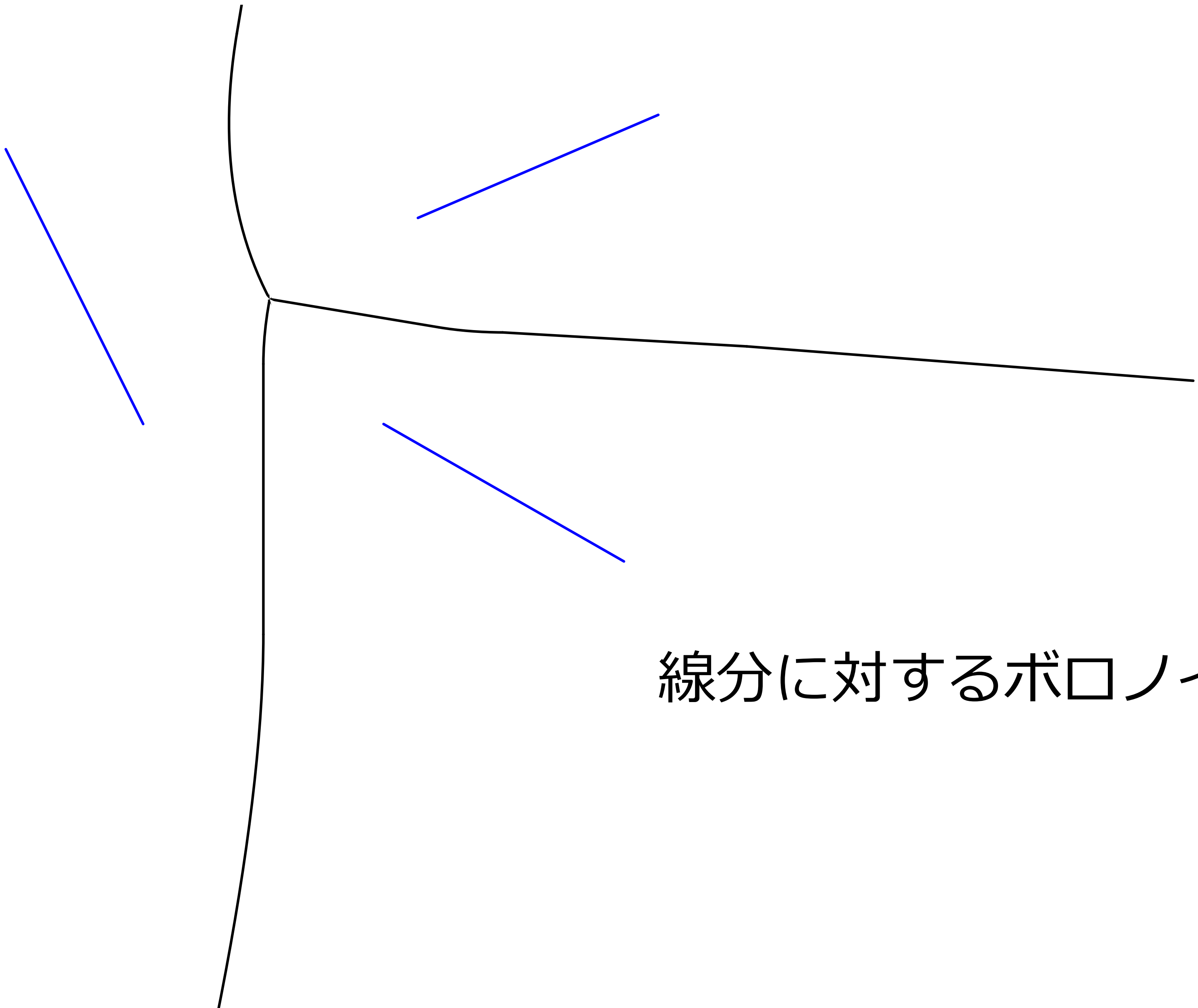
動機のひとつ：等距離線 (1)

ボロノイ図は等距離線から得られた



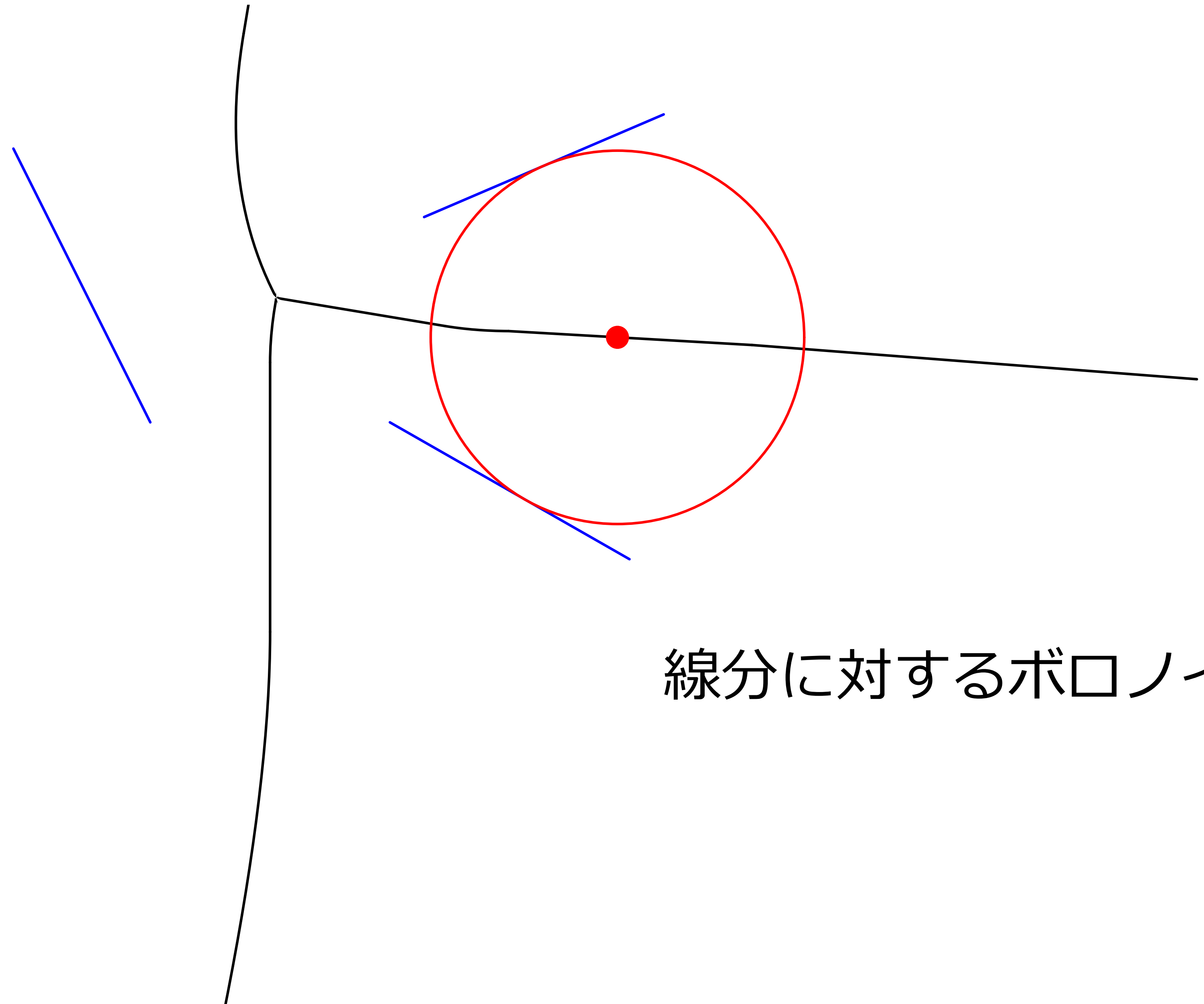
動機のひとつ：等距離線 (2)

他の図形に対してもボロノイ図を定義できる



線分に対するボロノイ図

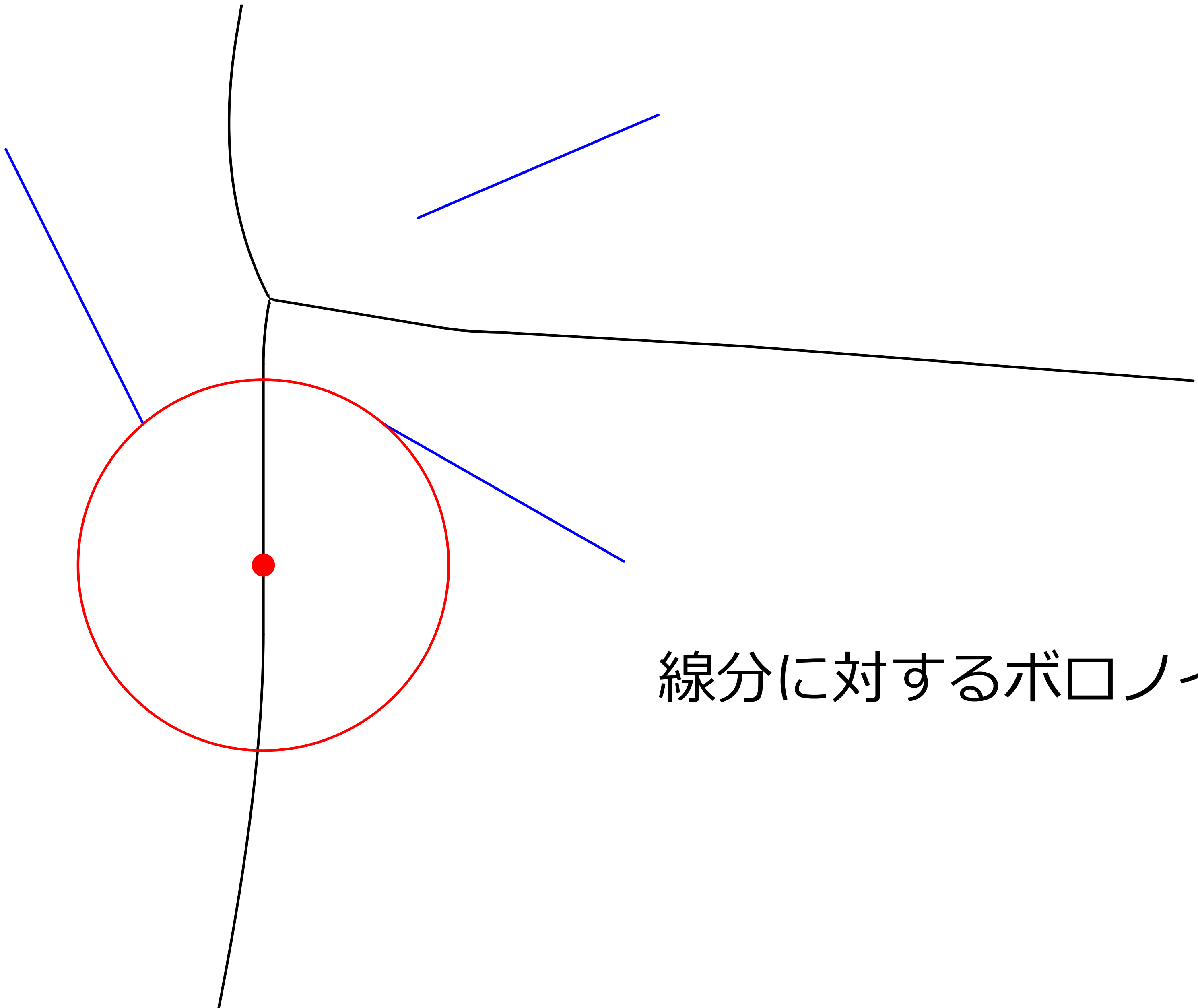
他の図形に対してもボロノイ図を定義できる



線分に対するボロノイ図

動機のひとつ：等距離線 (2)

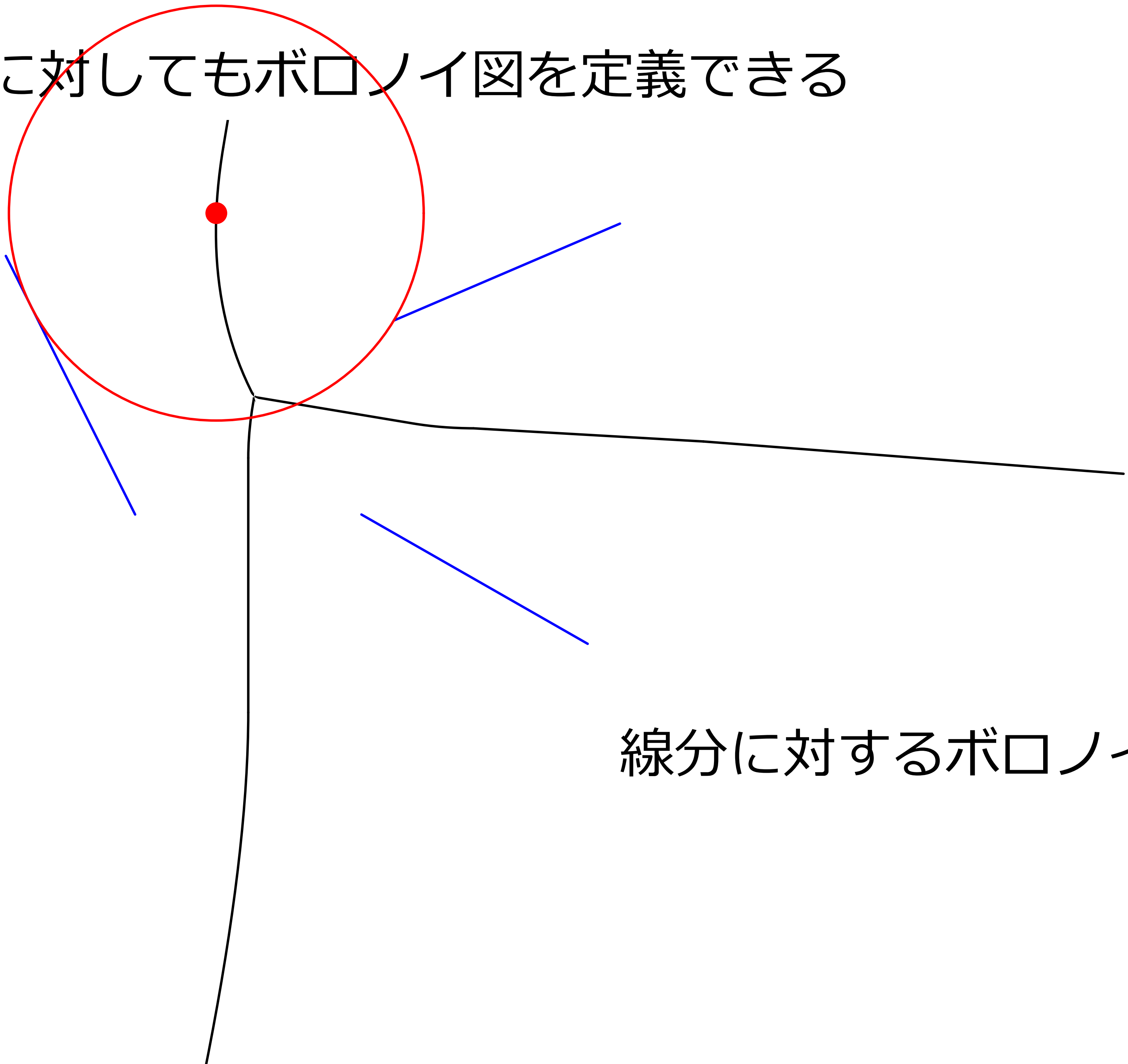
他の図形に対してもボロノイ図を定義できる



線分に対するボロノイ図

動機のひとつ：等距離線 (2)

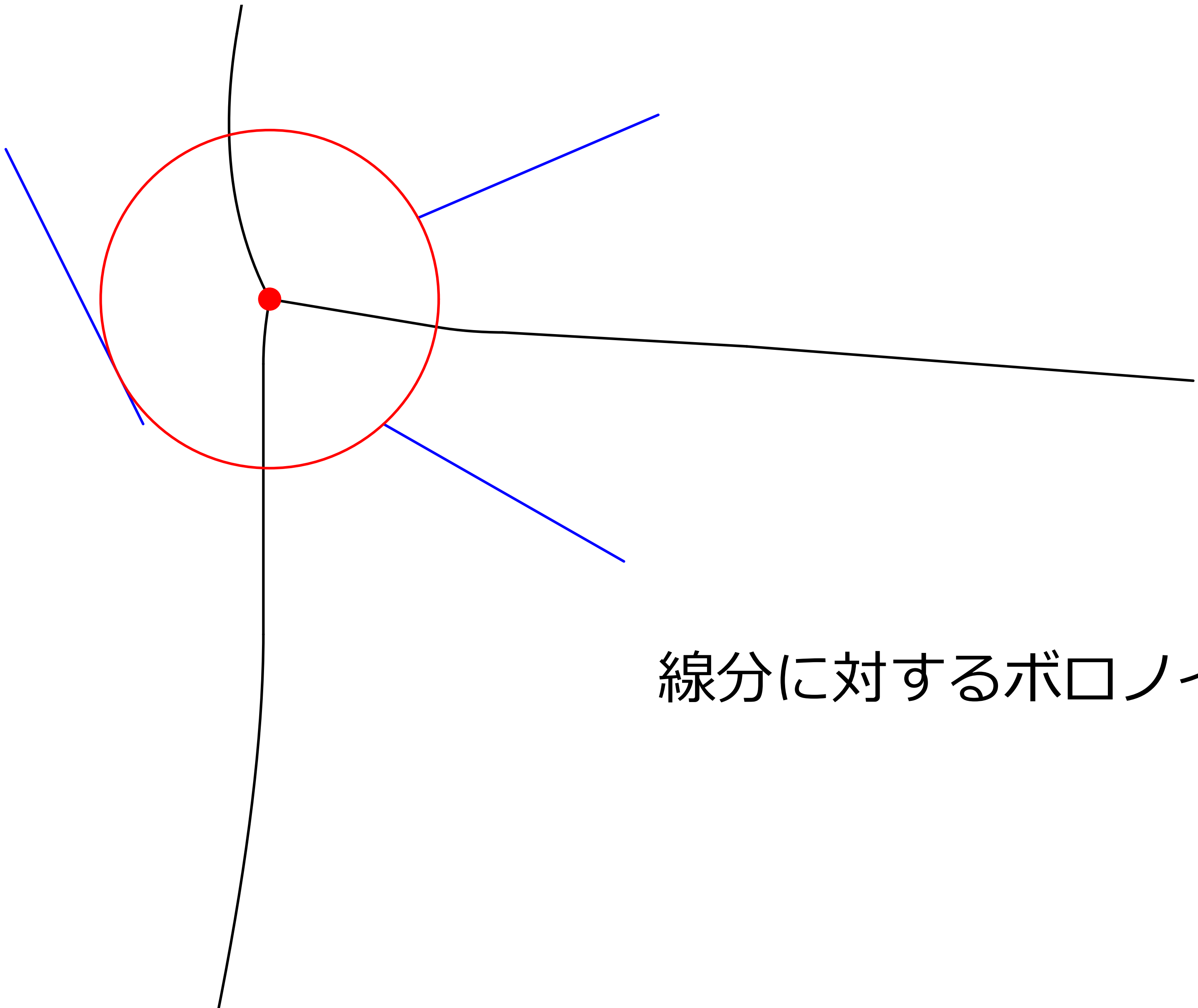
他の図形に対してもボロノイ図を定義できる



線分に対するボロノイ図

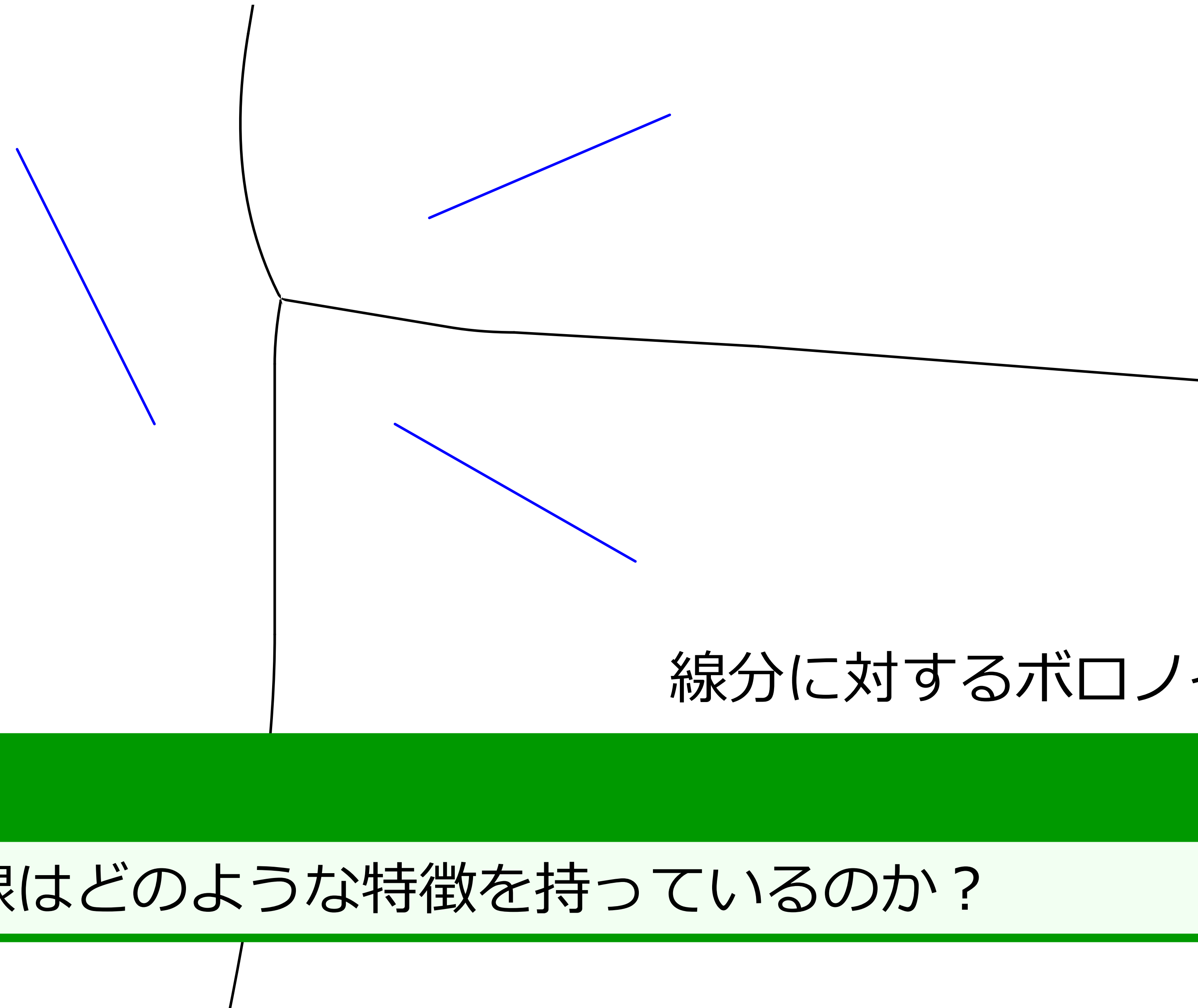
動機のひとつ：等距離線 (2)

他の図形に対してもボロノイ図を定義できる



線分に対するボロノイ図

他の図形に対してもボロノイ図を定義できる



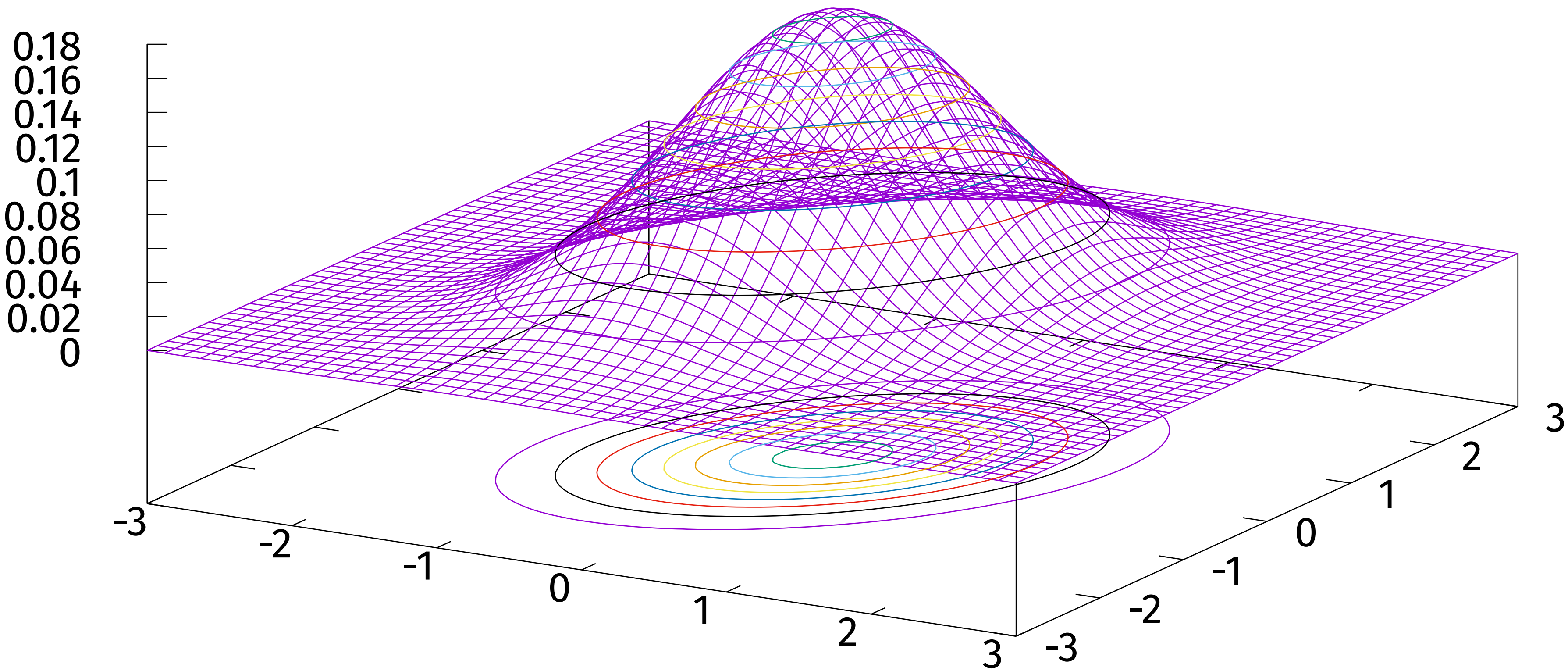
線分に対するボロノイ図

疑問

等距離線はどのような特徴を持っているのか？

動機のひとつ：2 変量正規分布

2 変量正規分布の確率密度関数の等高線は？

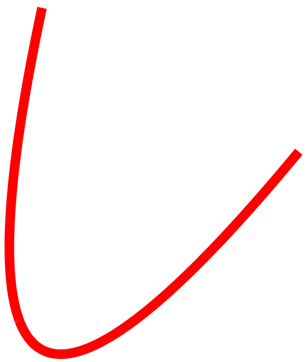


確率密度関数 $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\Sigma|}} \exp\left(-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}\right)$

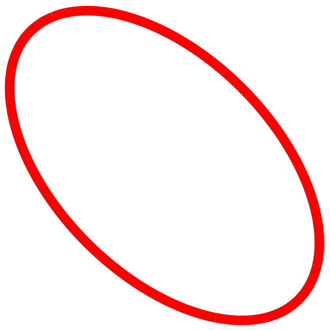
(Σ は分散共分散行列)

二次曲線の例

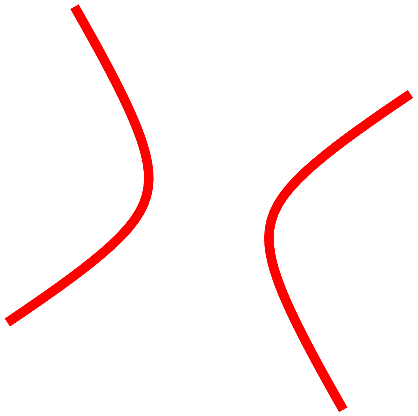
次のものはどれも二次曲線



放物線



楕円



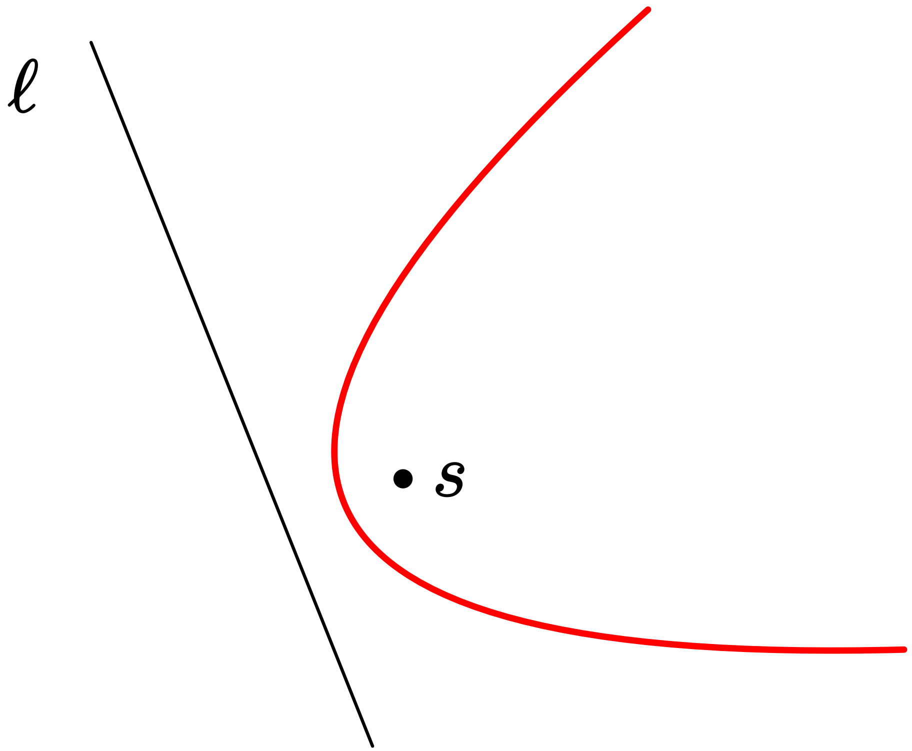
双曲線

目次

点 $s \in \mathbb{R}^2$，直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$

定義：放物線，焦点，準線

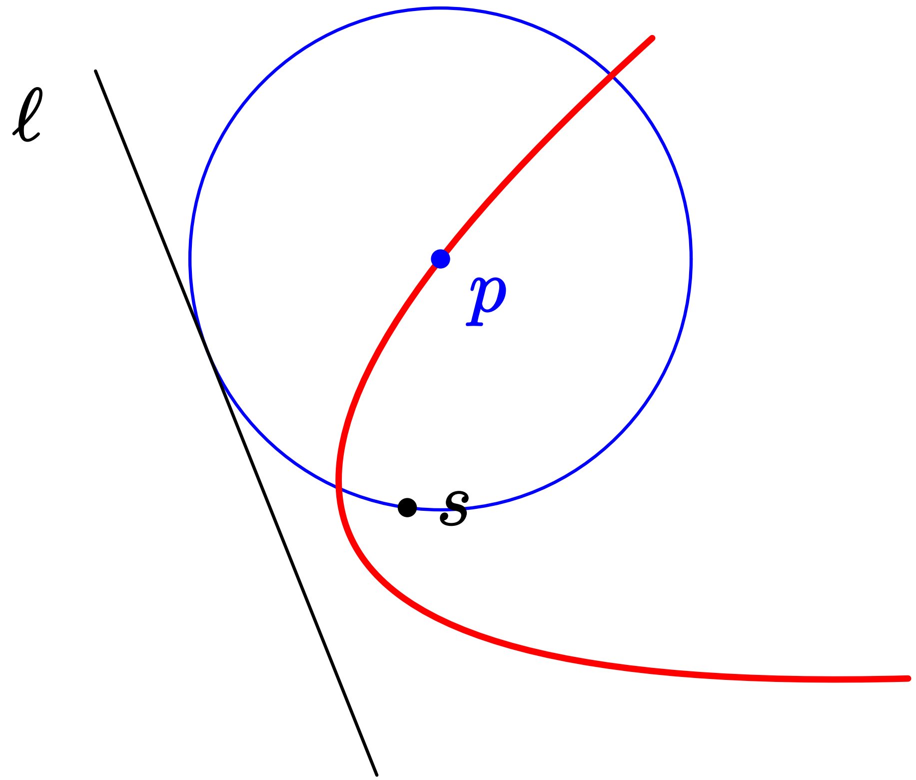
s を **焦点**，ℓ を **準線** とする **放物線** とは
s からの距離と ℓ からの距離が同じとなる点 p の集合



点 $s \in \mathbb{R}^2$，直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$

定義：放物線，焦点，準線

s を **焦点**，ℓ を **準線** とする **放物線** とは
s からの距離と ℓ からの距離が同じとなる点 p の集合

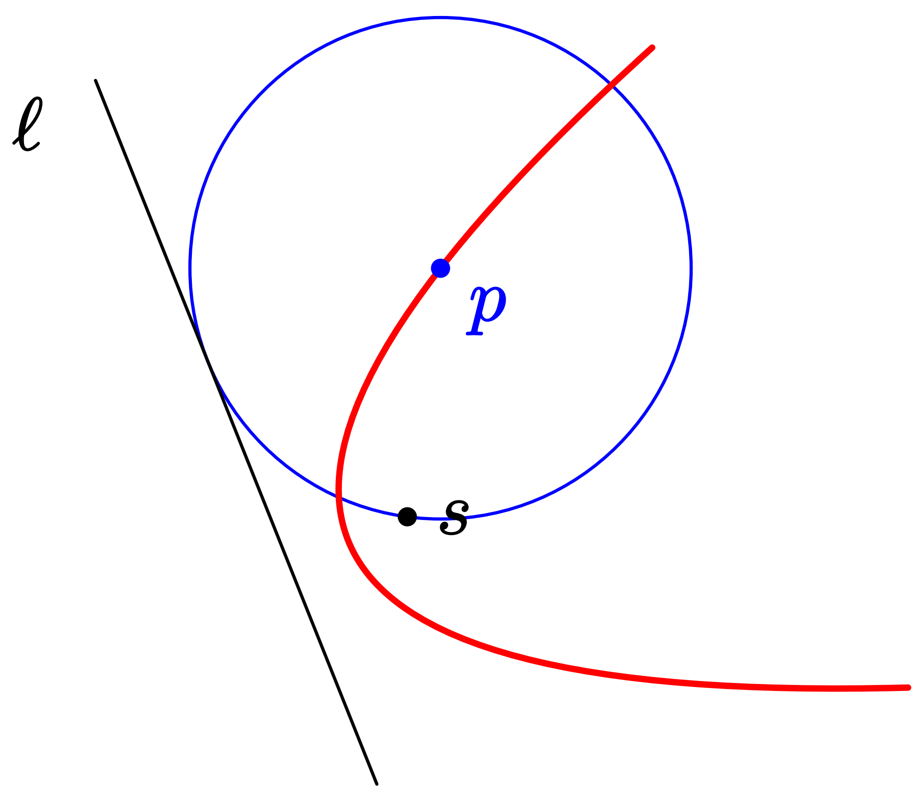


復習：放物線

点 $s \in \mathbb{R}^2$，直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$

定義：放物線，焦点，準線

s を **焦点**，ℓ を **準線** とする **放物線** とは
s からの距離と ℓ からの距離が同じとなる点 p の集合



つまり，放物線は

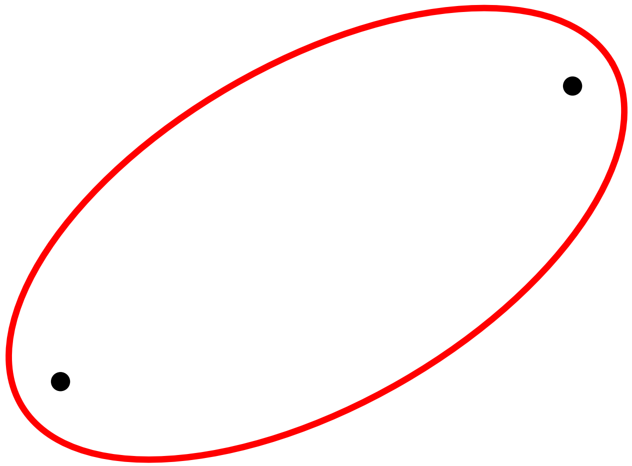
点と直線の等距離線

2 点 $s, t \in \mathbb{R}^2$，正実数 $c > 0$

定義：楕円，焦点

s, t を **焦点** とする **楕円** とは
s からの距離と t からの距離の和が c となる点 p の集合

$$\{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p - s\|_2 + \|p - t\|_2 = c\}$$



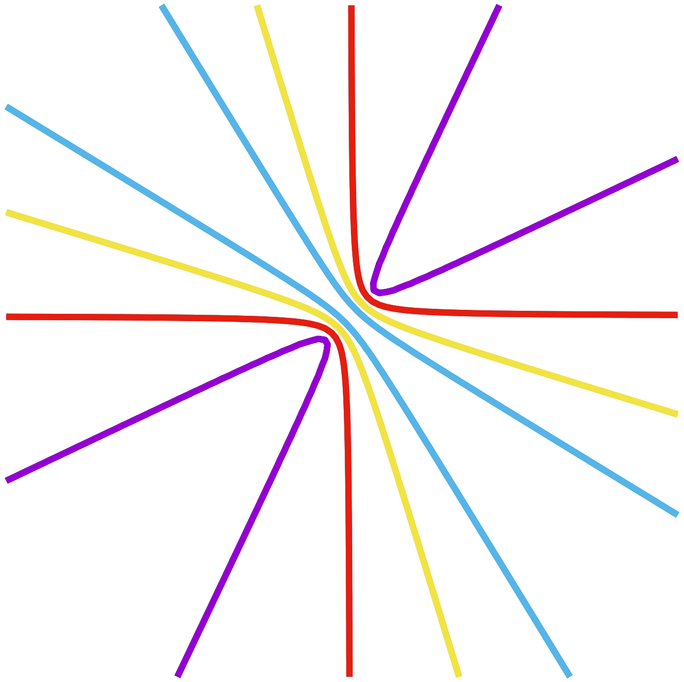
復習：双曲線

2 点 $s, t \in \mathbb{R}^2$，正実数 $c > 0$

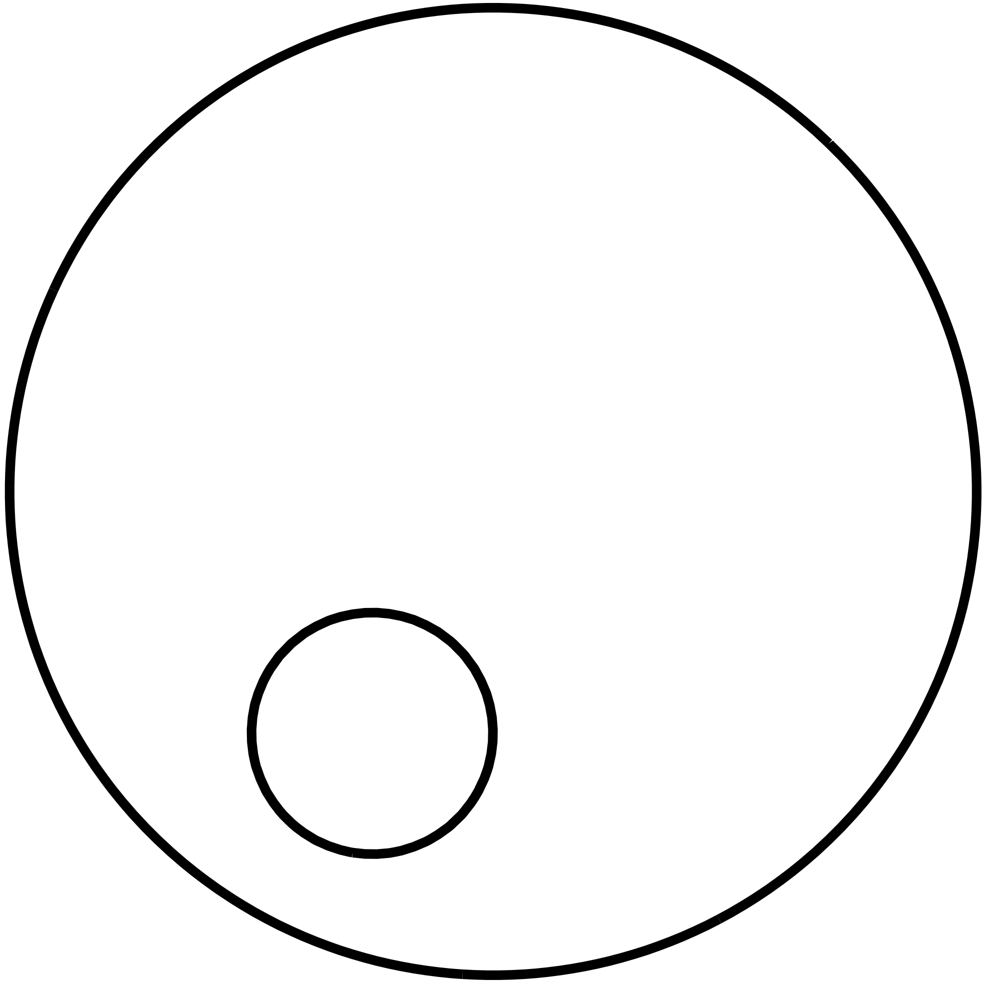
定義：双曲線，焦点

s, t を **焦点** とする **双曲線** とは
s からの距離と t からの距離の差が c となる点 p の集合

$$\{p \in \mathbb{R}^2 \mid |\|p - s\|_2 - \|p - t\|_2| = c\}$$

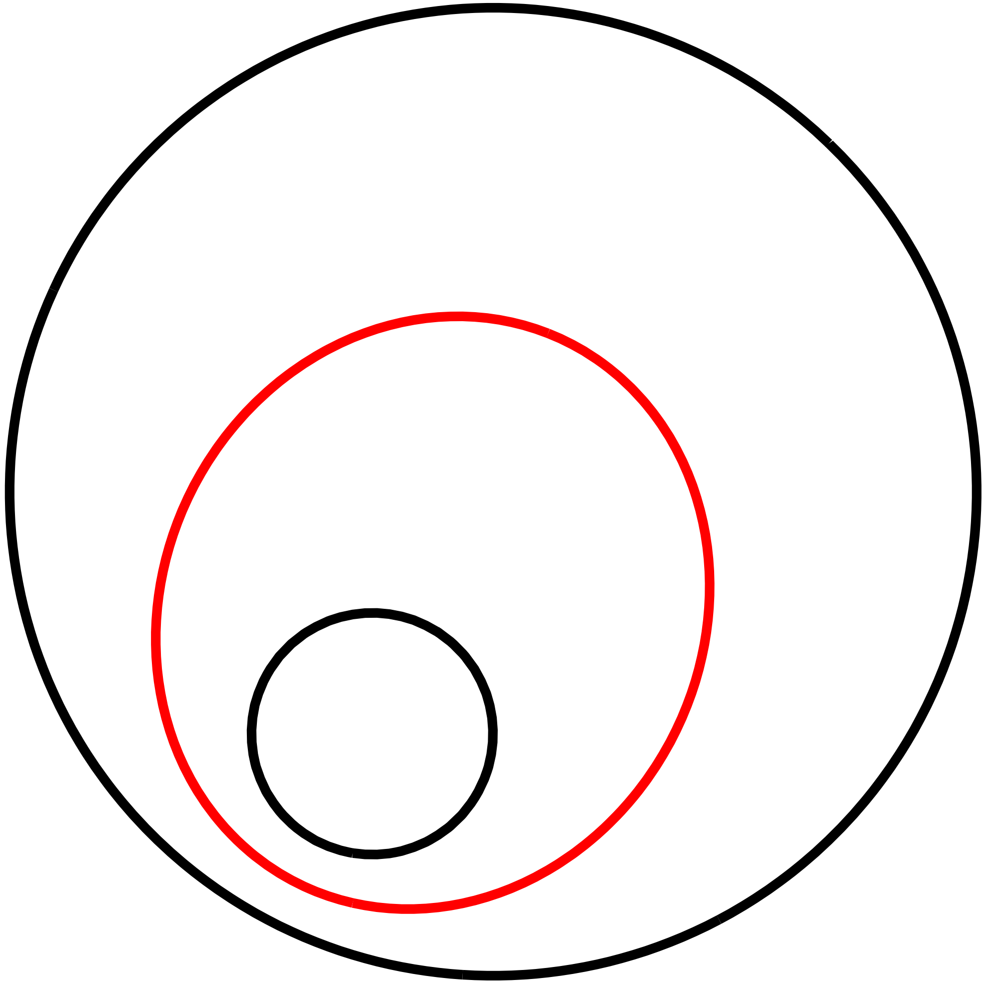


一方が他方の内側にある場合



円と円の等距離線 (1)：例

一方が他方の内側にある場合



円と円の等距離線 (1)

中心 c_1，半径 r_1 の円周 C_1；中心 c_2，半径 r_2 の円周 C_2

性質：円と円の等距離線

C_1 が C_2 に囲まれるとき
C_1 と C_2 の等距離線は，c_1, c_2 を焦点とする楕円

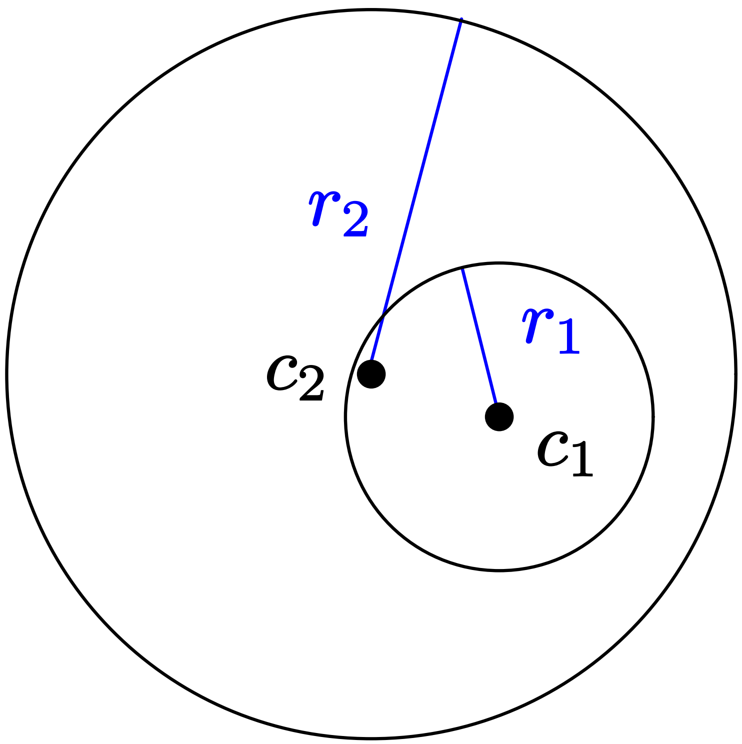
証明：p を等距離線上の点とすると，次が成り立つ

$$\|p - c_1\|_2 - r_1 = r_2 - \|p - c_2\|_2$$

したがって，

$$\|p - c_1\|_2 + \|p - c_2\|_2 = r_1 + r_2$$

この式を満たす p の軌跡は
c_1, c_2 を焦点とする楕円 □



円と円の等距離線 (1)

中心 c_1，半径 r_1 の円周 C_1；中心 c_2，半径 r_2 の円周 C_2

性質：円と円の等距離線

C_1 が C_2 に囲まれるとき
C_1 と C_2 の等距離線は，c_1, c_2 を焦点とする楕円

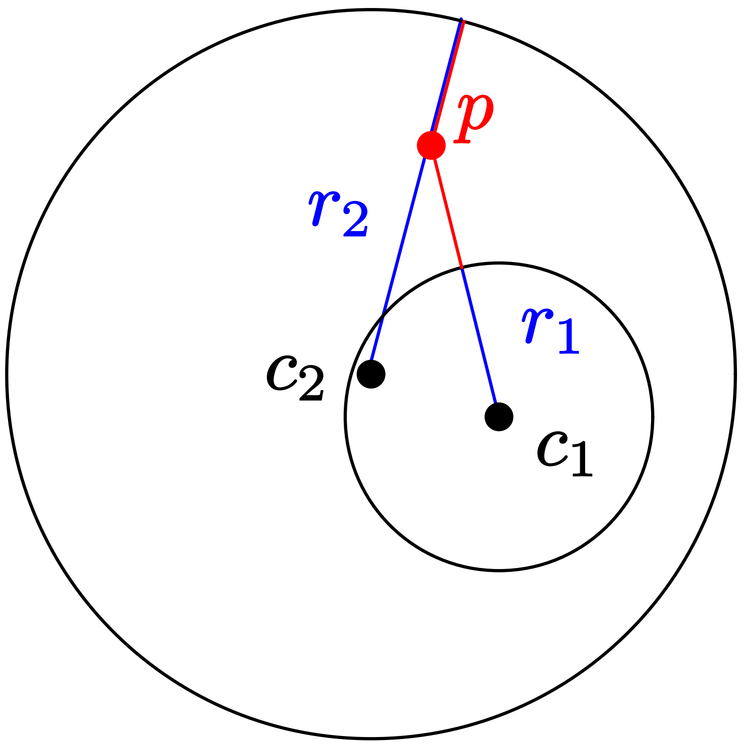
証明：p を等距離線上の点とすると，次が成り立つ

$$\|p - c_1\|_2 - r_1 = r_2 - \|p - c_2\|_2$$

したがって，

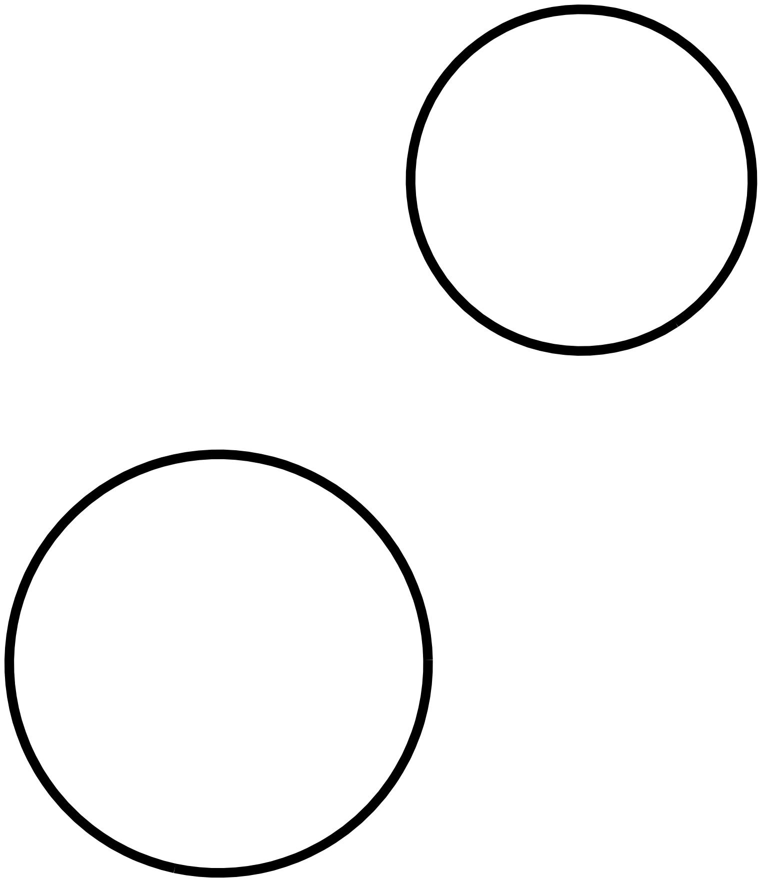
$$\|p - c_1\|_2 + \|p - c_2\|_2 = r_1 + r_2$$

この式を満たす p の軌跡は
c_1, c_2 を焦点とする楕円 $\square$



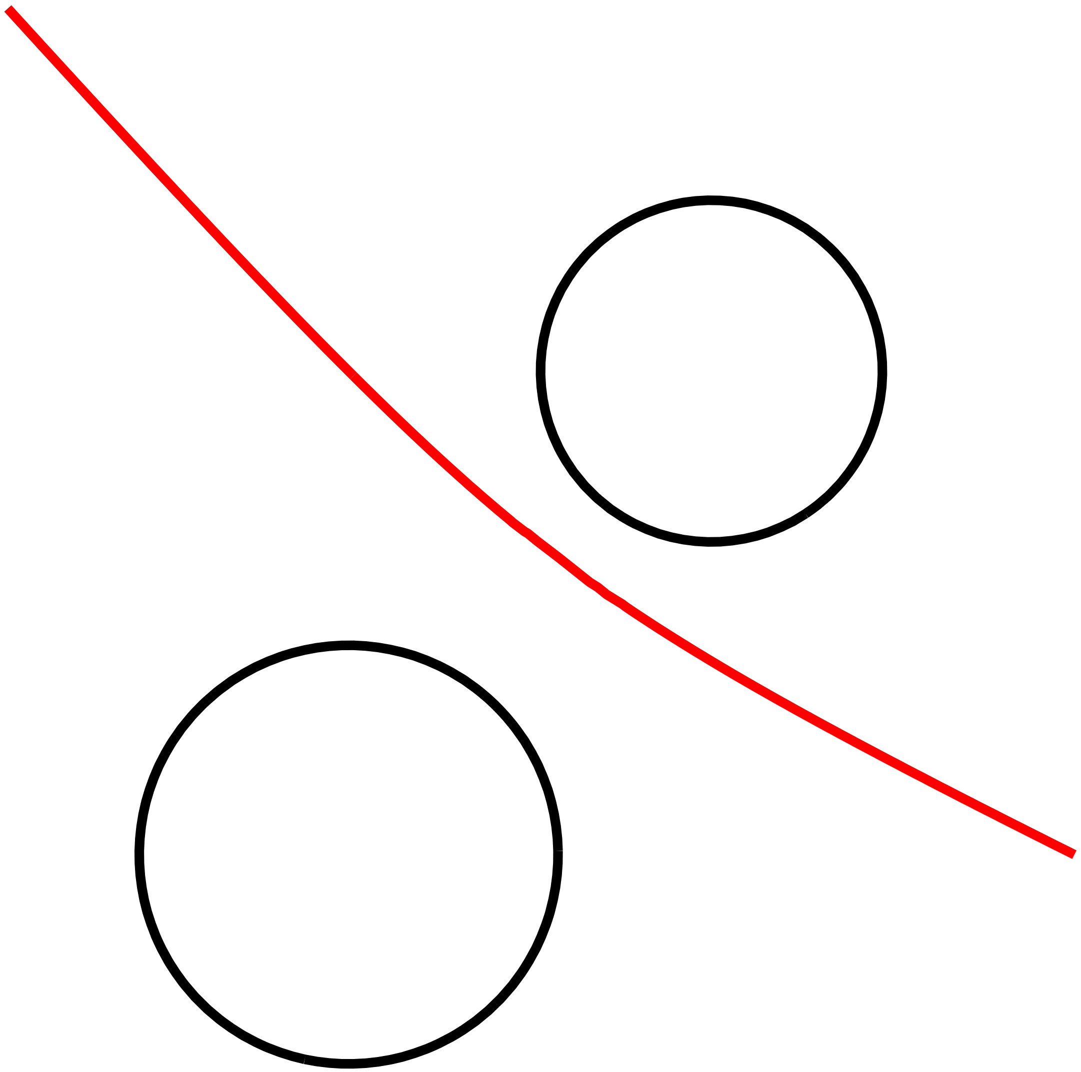
円と円の等距離線 (2)：例

一方が他方の外側にある場合



円と円の等距離線 (2)：例

一方が他方の外側にある場合



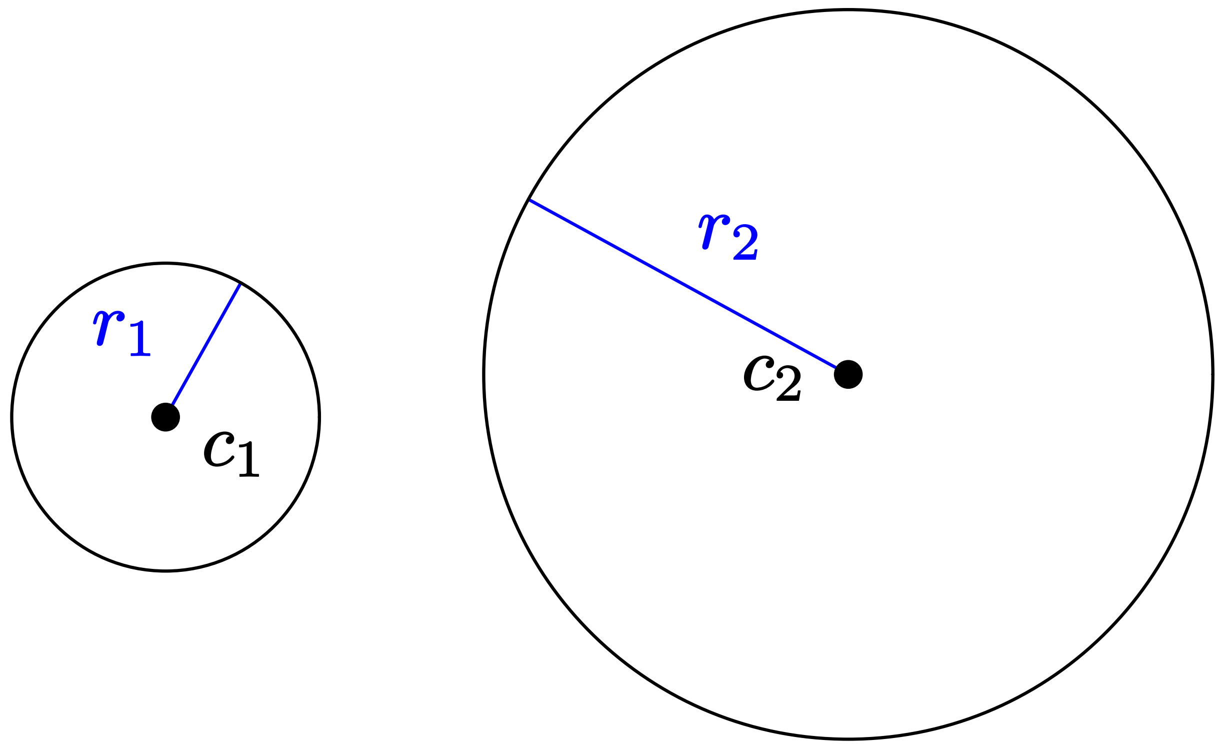
円と円の等距離線 (2)

中心 c_1，半径 r_1 の円周 C_1；中心 c_2，半径 r_2 の円周 C_2

性質：円と円の等距離線

C_1 と C_2 が互いを囲まず，交わらないとき
C_1 と C_2 の等距離線は，c_1, c_2 を焦点とする双曲線の一支

証明：演習問題



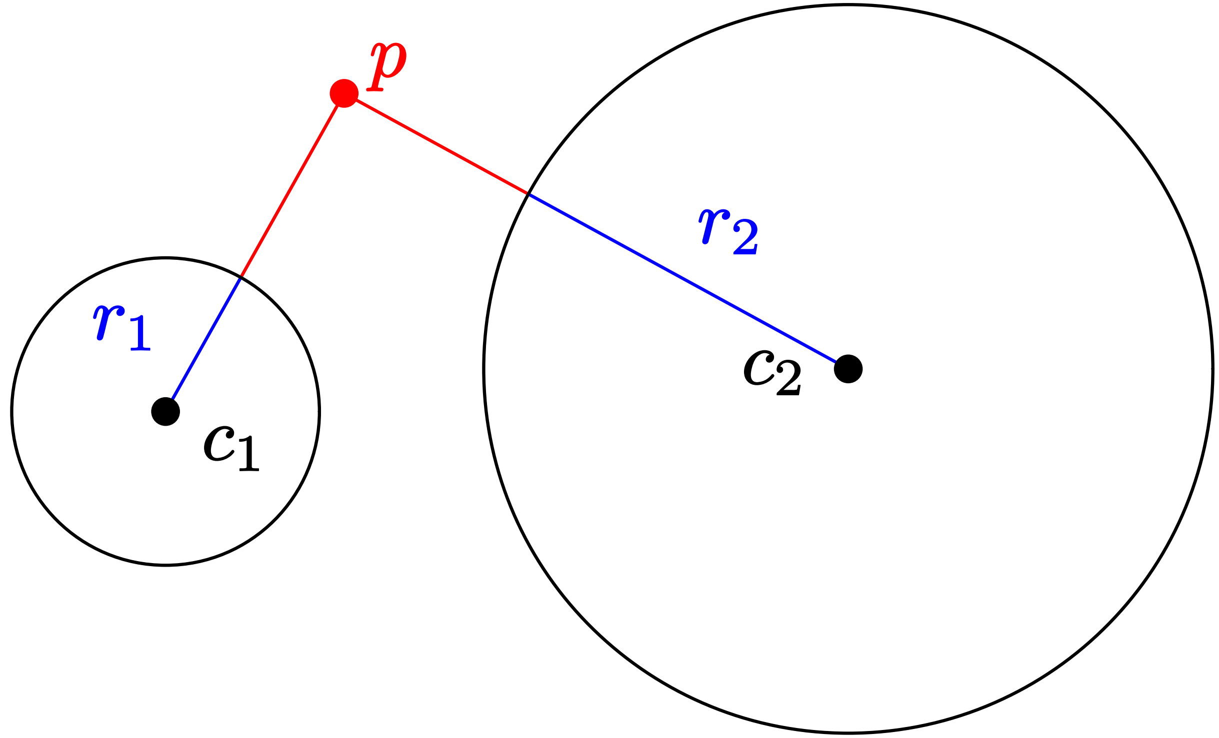
円と円の等距離線 (2)

中心 c_1, 半径 r_1 の円周 C_1 ; 中心 c_2, 半径 r_2 の円周 C_2

性質：円と円の等距離線

C_1 と C_2 が互いを囲まず，交わらないとき
C_1 と C_2 の等距離線は，c_1, c_2 を焦点とする双曲線の一支

証明：演習問題



目次

定義：二次曲線

二次曲線 とは，次で表される平面図形のこと

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

ただし，a, b, c, d, e, f は実定数

a, b, c, d, e, f の値によって，さまざまな図形となりうる

特徴的な二次曲線：円周

定義：二次曲線

二次曲線 とは，次で表される平面図形のこと

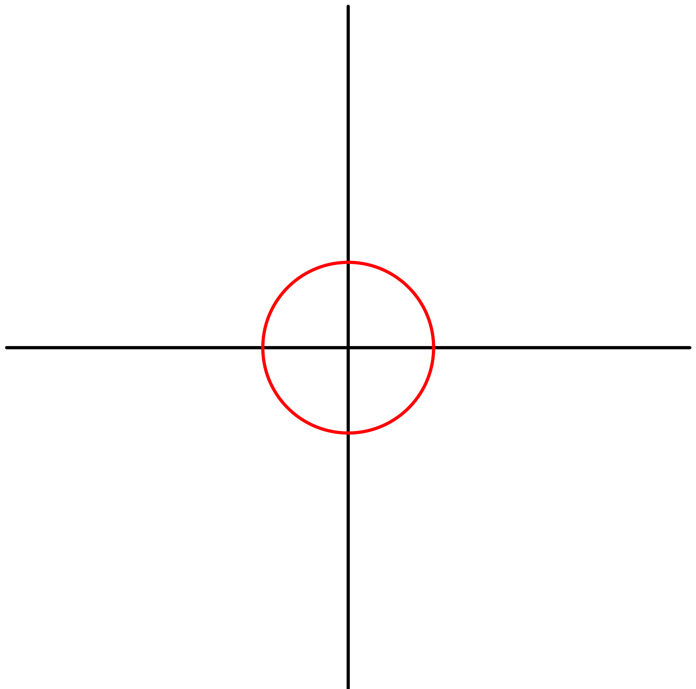
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

ただし，a, b, c, d, e, f は実定数

$a = 1, b = 0, c = 1, d = 0, e = 0, f = -1$ のとき，

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

これは 円周



定義：二次曲線

二次曲線 とは，次で表される平面図形のこと

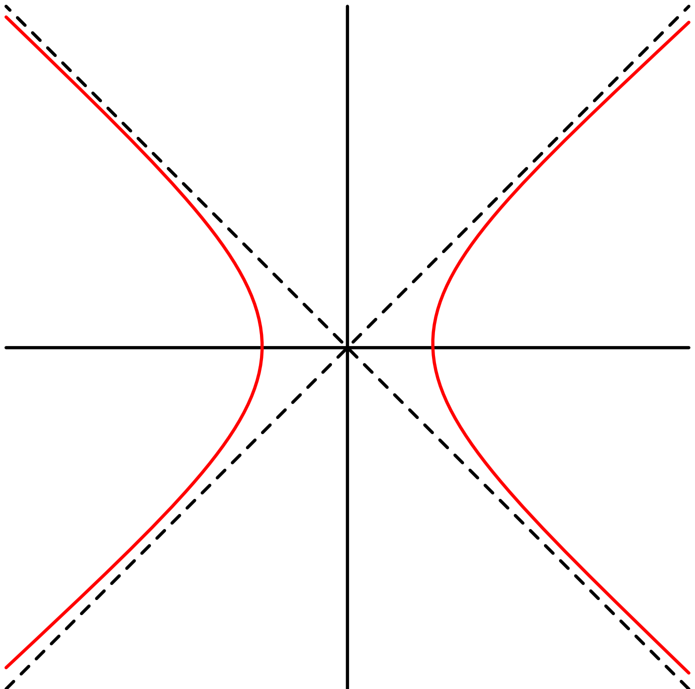
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

ただし，a, b, c, d, e, f は実定数

$a = 1, b = 0, c = -1, d = 0, e = 0, f = -1$ のとき，

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

これは 双曲線



特徴的な二次曲線：楕円

定義：二次曲線

二次曲線 とは，次で表される平面図形のこと

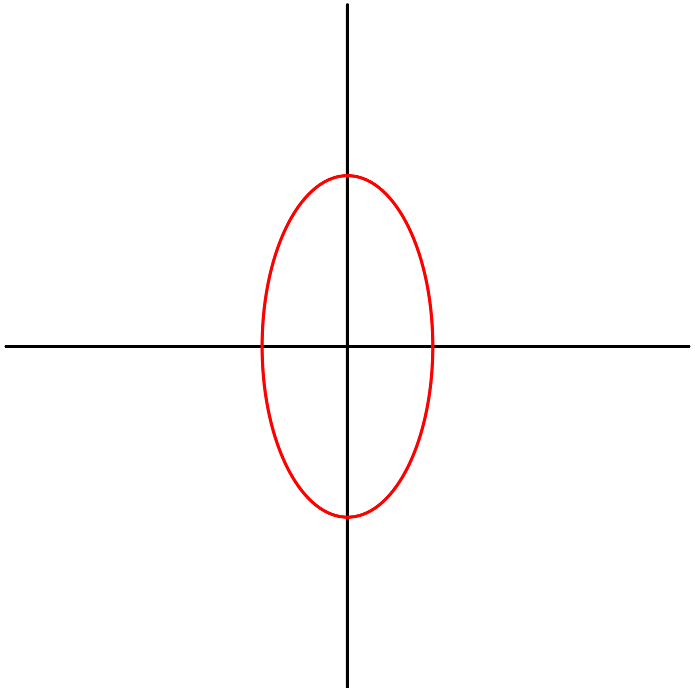
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\}$$

ただし，a,b,c,d,e,f は実定数

$a=4, b=0, c=1, d=0, e=0, f=-4$ のとき，

$$4x^2+y^2-4=0$$

これは 楕円



定義：二次曲線

二次曲線 とは，次で表される平面図形のこと

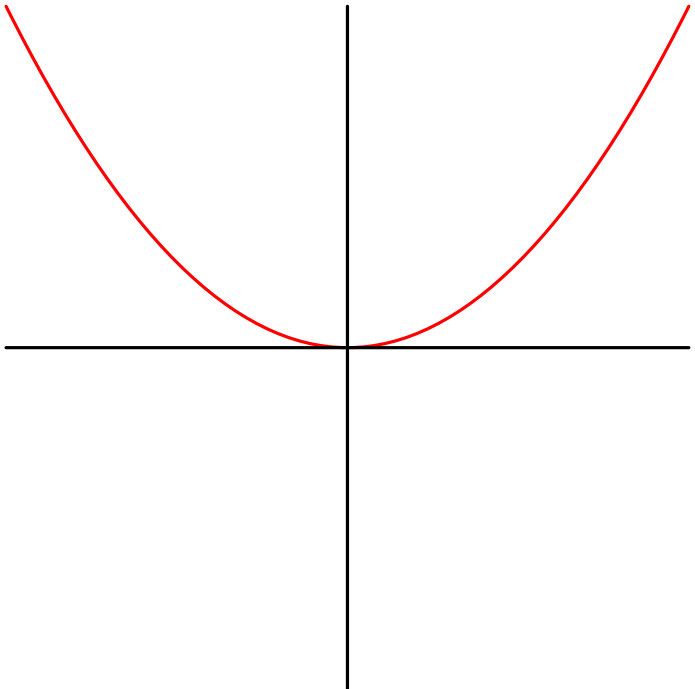
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

ただし，a, b, c, d, e, f は実定数

$a = 1, b = 0, c = 0, d = 0, e = -4, f = 0$ のとき，

$$x^2 - 4y = 0$$

これは 放物線



特徴的な二次曲線?：交わる 2 直線

定義：二次曲線

二次曲線 とは，次で表される平面図形のこと

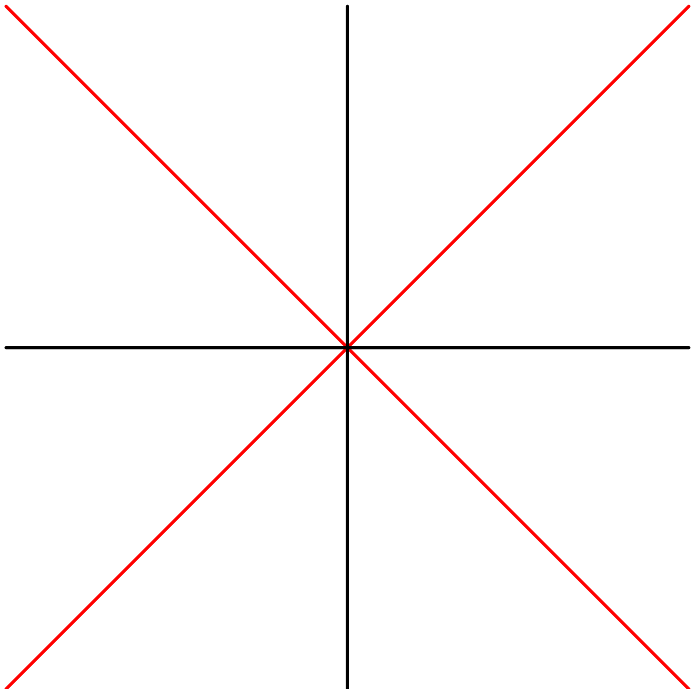
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

ただし，a, b, c, d, e, f は実定数

$a = 1, b = 0, c = -1, d = 0, e = 0, f = 0$ のとき，

$x^2 - y^2 = 0$

これは 交わる 2 直線



定義：二次曲線

二次曲線 とは，次で表される平面図形のこと

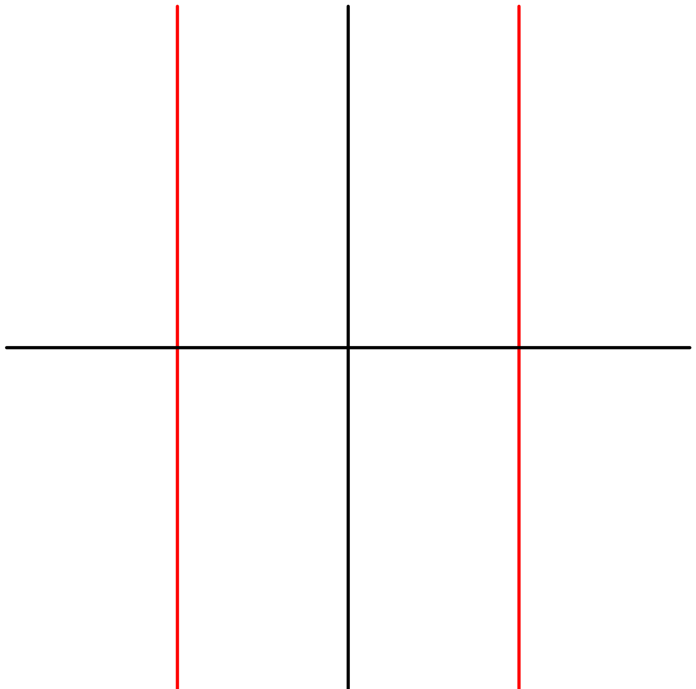
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

ただし，a, b, c, d, e, f は実定数

$a = 1, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0, f = -4$ のとき，

$$x^2 - 4 = 0$$

これは 平行な 2 直線



特徴的な二次曲線?：空集合

定義：二次曲線

二次曲線 とは，次で表される平面図形のこと

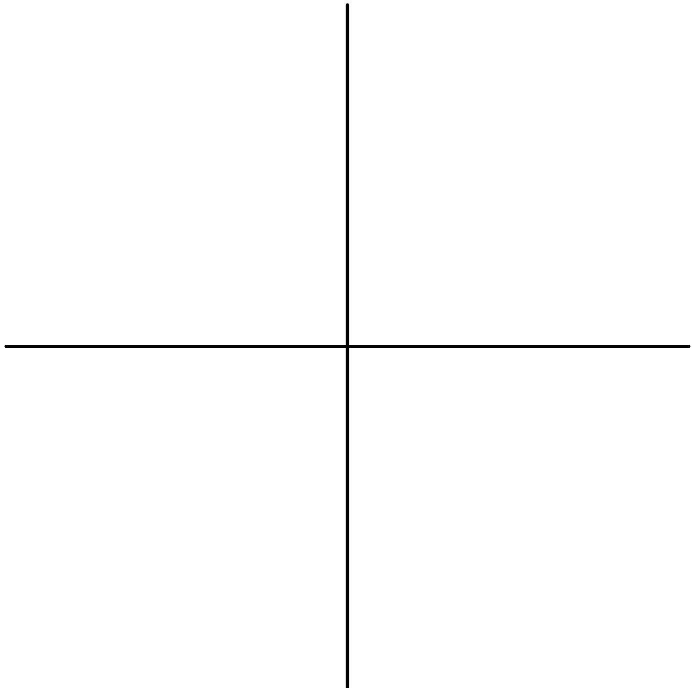
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

ただし，a, b, c, d, e, f は実定数

$a = 1, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0, f = 1$ のとき，

$$x^2 + 1 = 0$$

これは 空集合



二次曲線の分類

定義：二次曲線

二次曲線 とは，次で表される平面図形のこと

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

ただし，a, b, c, d, e, f は実定数

性質：二次曲線の分類

二次曲線は次のどれか

- 放物線
- 楕円
- 双曲線
- (2 直線)

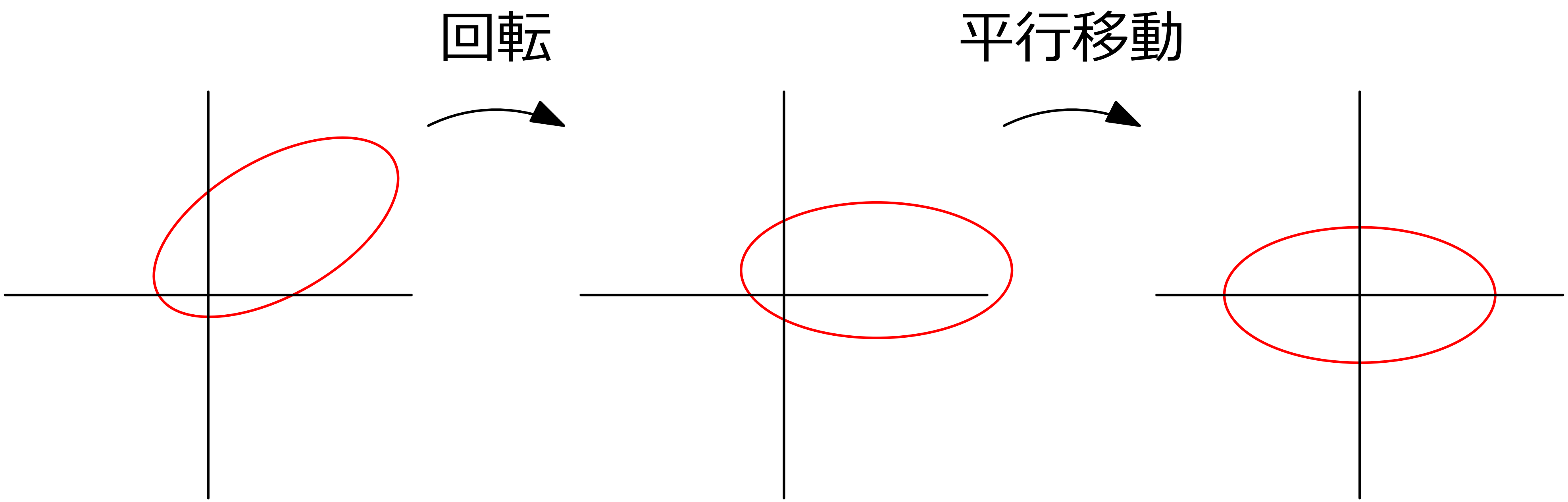
真の二次曲線

- (空集合)
- (1 点)

標準形への変換

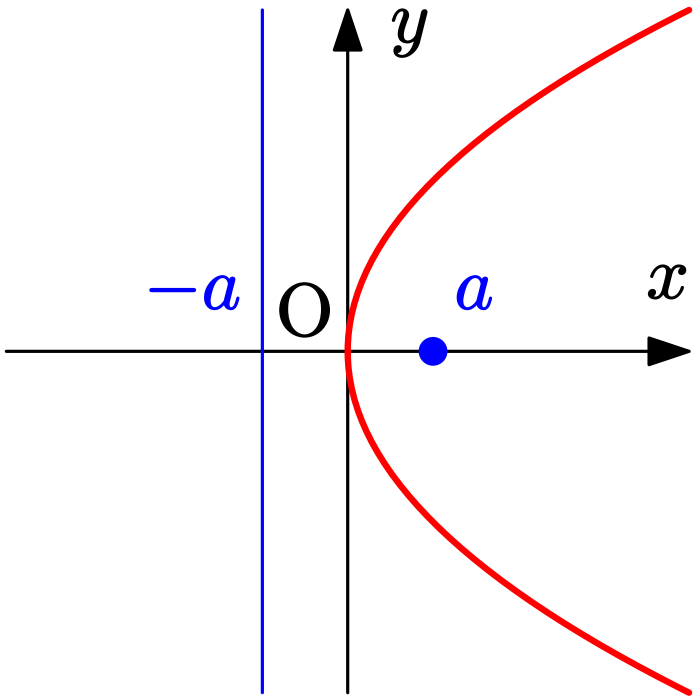
性質：標準形への変換

任意の $\left\{\begin{array}{c}\text{放物線}\\ \text{楕円}\\ \text{双曲線}\end{array}\right\}$ は回転と平行移動によって標準形に変換できる



復習：放物線の標準形

x 軸を軸とする場合



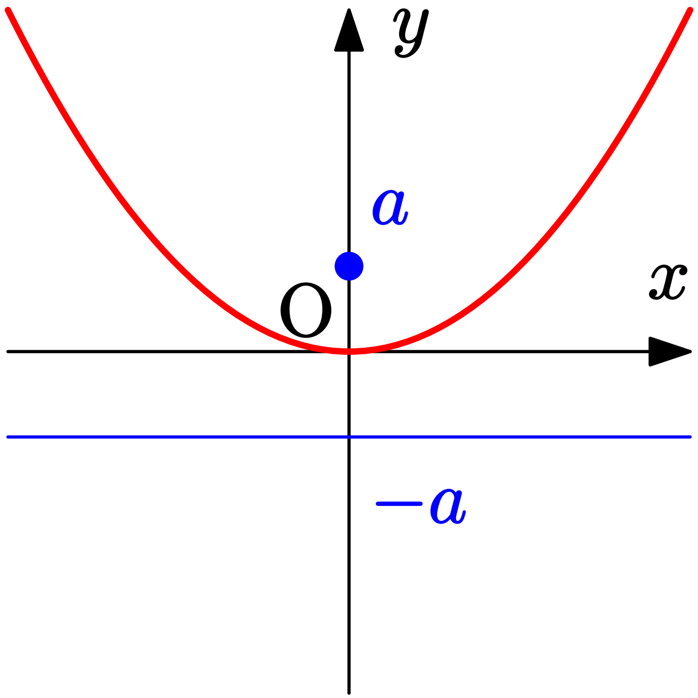
$y^2 - 4ax = 0$

焦点：$(a, 0)$

準線：$x = -a$

ただし，$a > 0$

y 軸を軸とする場合



$x^2 - 4ay = 0$

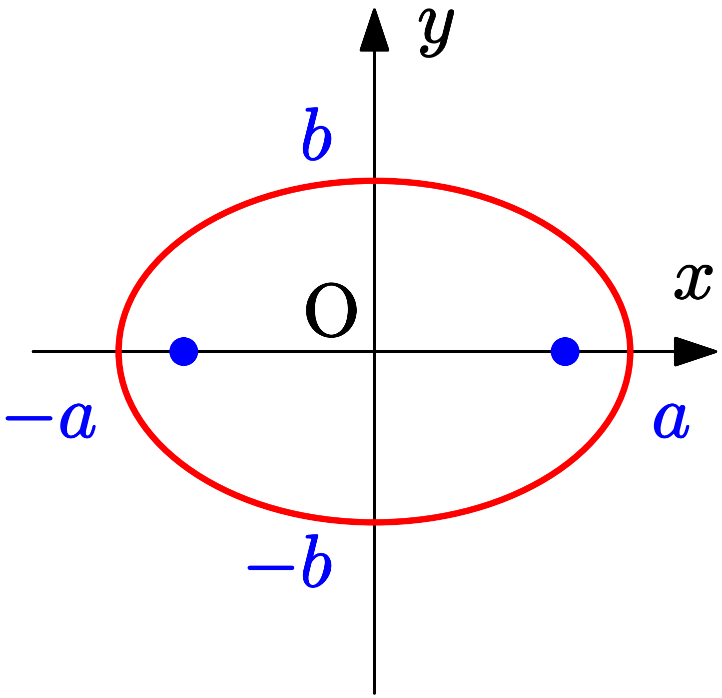
焦点：$(0, a)$

準線：$y = -a$

ただし，$a > 0$

復習：楕円の標準形

焦点が x 軸上にある場合

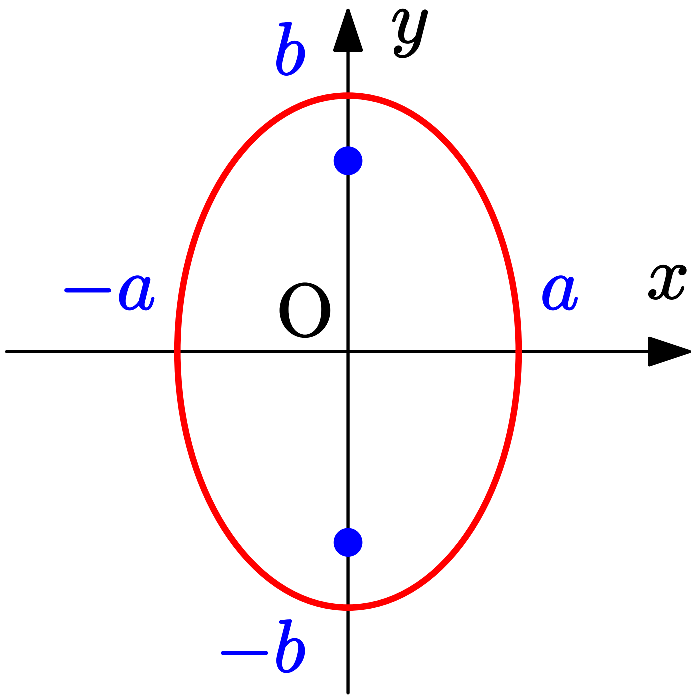


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

焦点：$(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

(ただし，$a>b>0$)

焦点が y 軸上にある場合

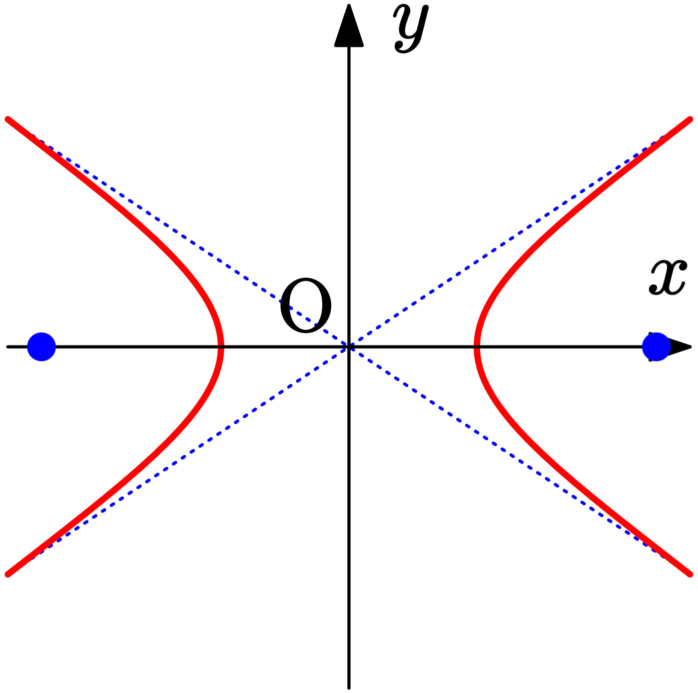


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

焦点：$(0, \pm\sqrt{b^2-a^2})$

(ただし，$b>a>0$)

焦点が x 軸上にある場合



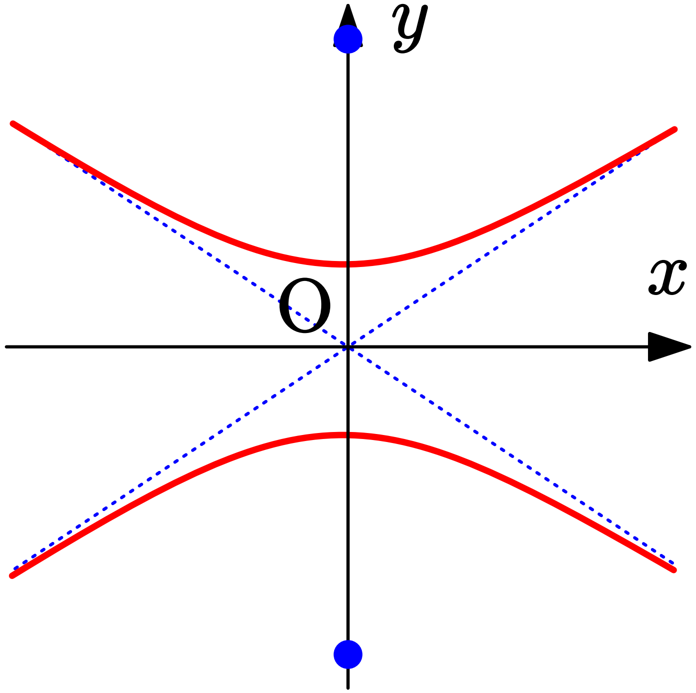
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

焦点：$(\pm\sqrt{a^2+b^2},0)$

漸近線：$\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$

(ただし，$a,b>0$)

焦点が y 軸上にある場合



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$$

焦点：$(0,\pm\sqrt{a^2+b^2})$

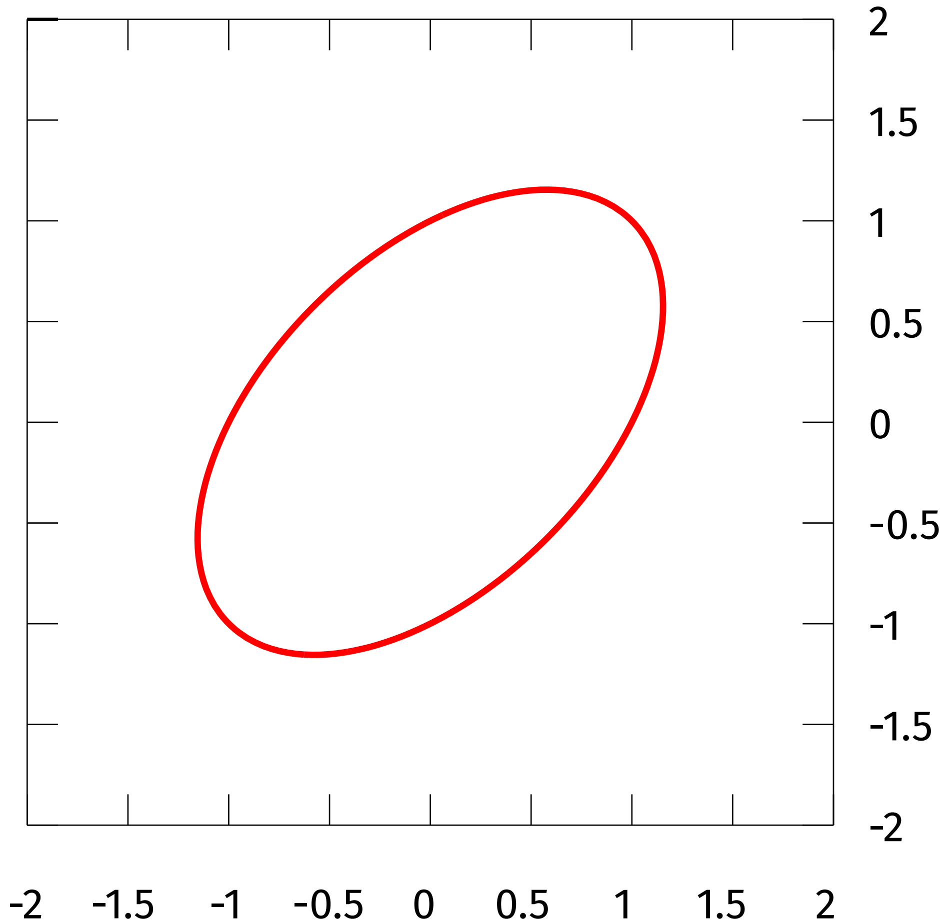
漸近線：$\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$

(ただし，$a,b>0$)

目次

例題 1

$F: x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$



- 本当に楕円か？
- 楕円ならば
  - 焦点は？

例題 1

$F: x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$

考え方

項「xy」を消す

$\boxed{1}$ ベクトル・行列を用いて書く

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{= A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0$$

<u>ポイント</u>：A が対称行列であるように書く

例1：固有値

$\boxed{2}$ 行列 A の固有値・固有ベクトルを求める

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>固有値の計算法</u>：固有方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ を解く

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1/2 \\ 1/2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 - (1/2)^2 = (\lambda - 3/2)(\lambda - 1/2)$$

$\therefore$ 固有方程式の解 (A の固有値) は $\lambda = 3/2, 1/2$

例 1：固有ベクトル (1)

$\boxed{2}$ 行列 A の固有値・固有ベクトルを求める

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>固有ベクトルの計算法</u>：$Av = \lambda v$ を満たす v を計算する

$\lambda = 3/2$ に対する固有ベクトルを $v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x/2 - y/2 = 0 \\ -x/2 - y/2 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{2}$　行列 A の固有値・固有ベクトルを求める

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>固有ベクトルの計算法</u>：$Av = \lambda v$ を満たす v を計算する

$\lambda = 3/2$ に対する固有ベクトルを $v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x/2 - y/2 = 0 \\ -x/2 - y/2 = 0 \end{cases}$$

長さが 1 となるものは，$v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

例 1：固有ベクトル (2)

$\boxed{2}$ 行列 A の固有値・固有ベクトルを求める

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

固有ベクトルの計算法：$Av = \lambda v$ を満たす v を計算する

$\lambda = 1/2$ に対する固有ベクトルを $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x/2 - y/2 = 0 \\ -x/2 + y/2 = 0 \end{cases}$$

例 1：固有ベクトル (2)

$\boxed{2}$ 行列 A の固有値・固有ベクトルを求める

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

固有ベクトルの計算法：$Av = \lambda v$ を満たす v を計算する

$\lambda = 1/2$ に対する固有ベクトルを $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x/2 - y/2 = 0 \\ -x/2 + y/2 = 0 \end{cases}$$

長さが 1 となるものは，$v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

実対称行列の固有ベクトルの性質

復習：固有ベクトルの直交性 (2 次実対称の場合)

2 次実対称行列 A が異なる固有値 λ_1, λ_2 を持つ $\Rightarrow$
λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は直交する

証明：$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2 = 0$ が言えればよい

- $(A\boldsymbol{v}_1)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2 = (\lambda_1 \boldsymbol{v}_1)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2$
- $$\begin{aligned}(A\boldsymbol{v}_1)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2 &= (\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}) \boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} A) \boldsymbol{v}_2 \\ &= \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} (A \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} (\lambda_2 \boldsymbol{v}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2\end{aligned}$$
- したがって，$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2$
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なので，$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2 = 0$ $\square$

実対称行列の固有ベクトルの性質：帰結

復習：固有ベクトルの直交性 (2 次実対称の場合)

2 次実対称行列 A が異なる固有値 λ_1, λ_2 を持つ $\Rightarrow$
λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は直交する

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の長さが 1 で，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}$ とすると

$$P^{\mathrm{T}} P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$

$\boxed{3}$　行列 A を対角化する

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>対角化の方法</u>：$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ とすると

$$AP = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}v_1 & \frac{1}{2}v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

したがって，$A = P\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} P^{-1} = P\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} P^{\mathrm{T}}$

例1：回転

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0$$

$$A = P \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} P^{\mathrm{T}}, \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0$$

例 1：回転

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0$$

$$A = P \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} P^{\mathrm{T}}, \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0$$

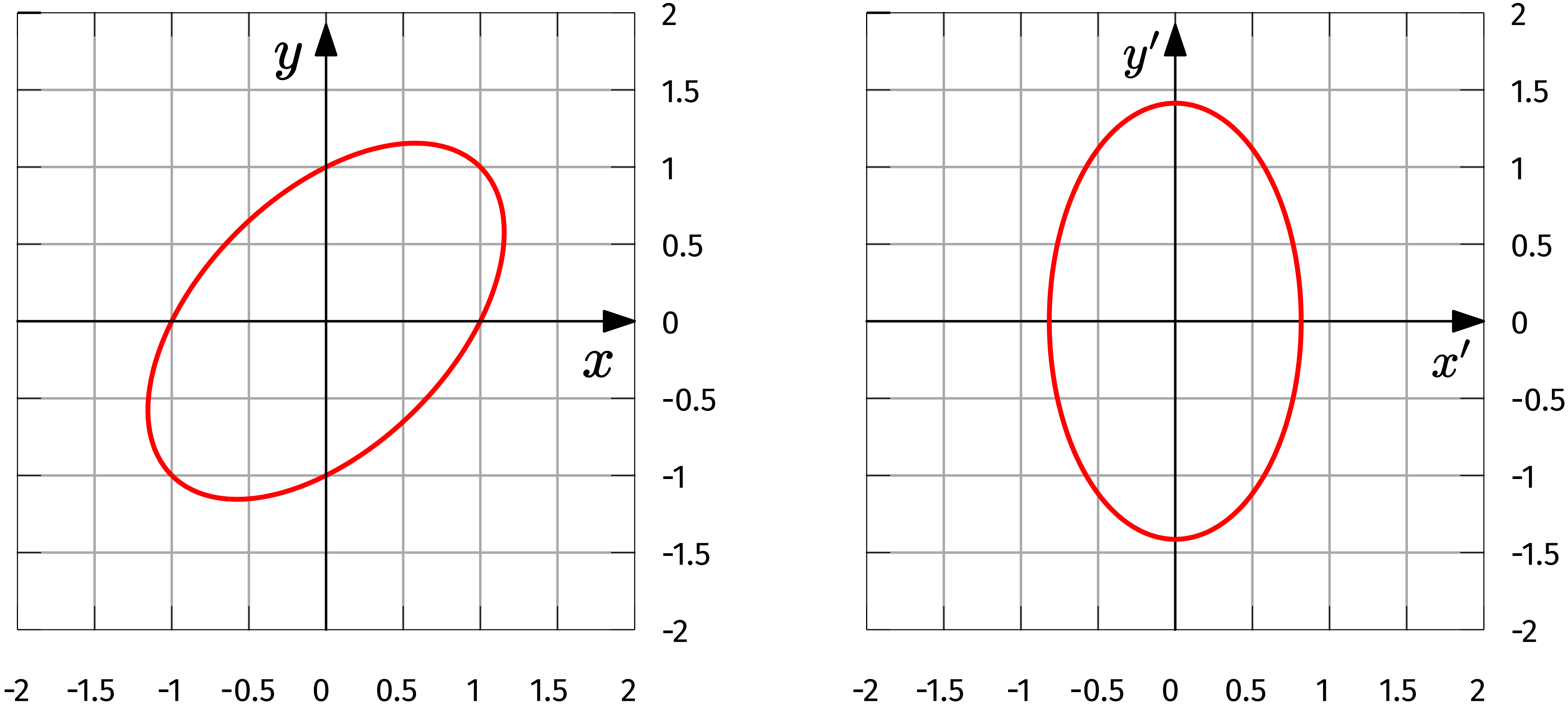
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 1 = 0 \qquad \left(\frac{3}{2} x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 - 1 = 0 \right)$$

例 1：回転 (図)

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

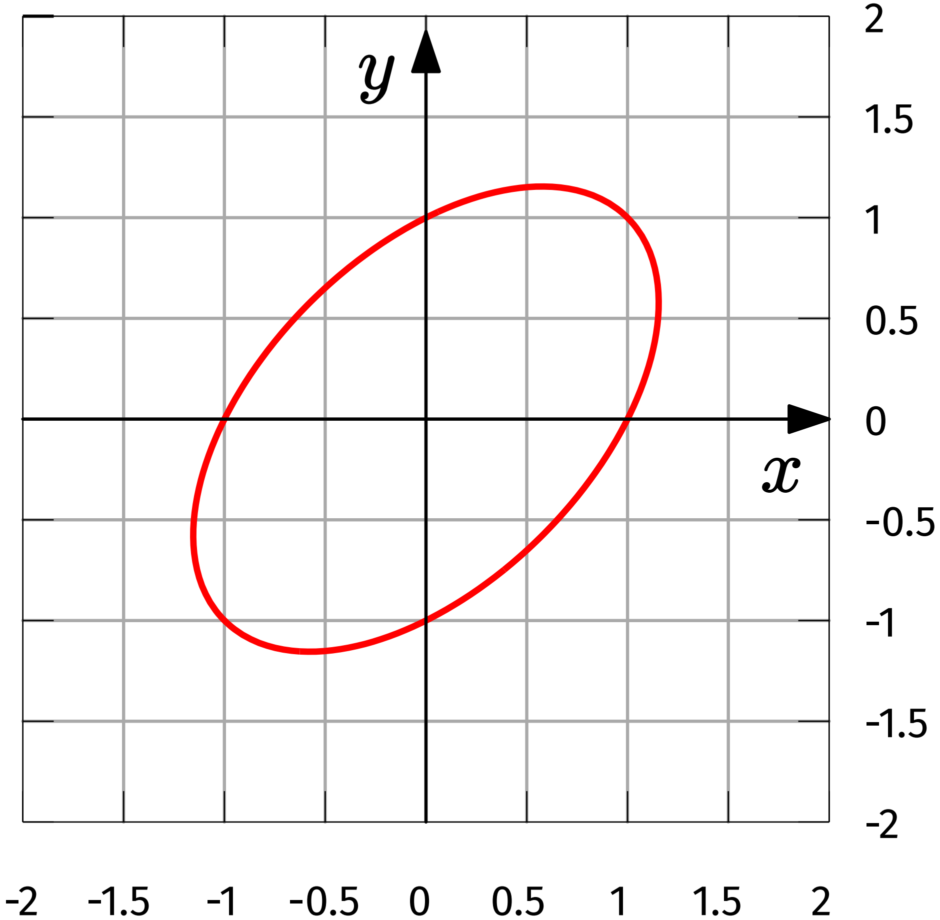


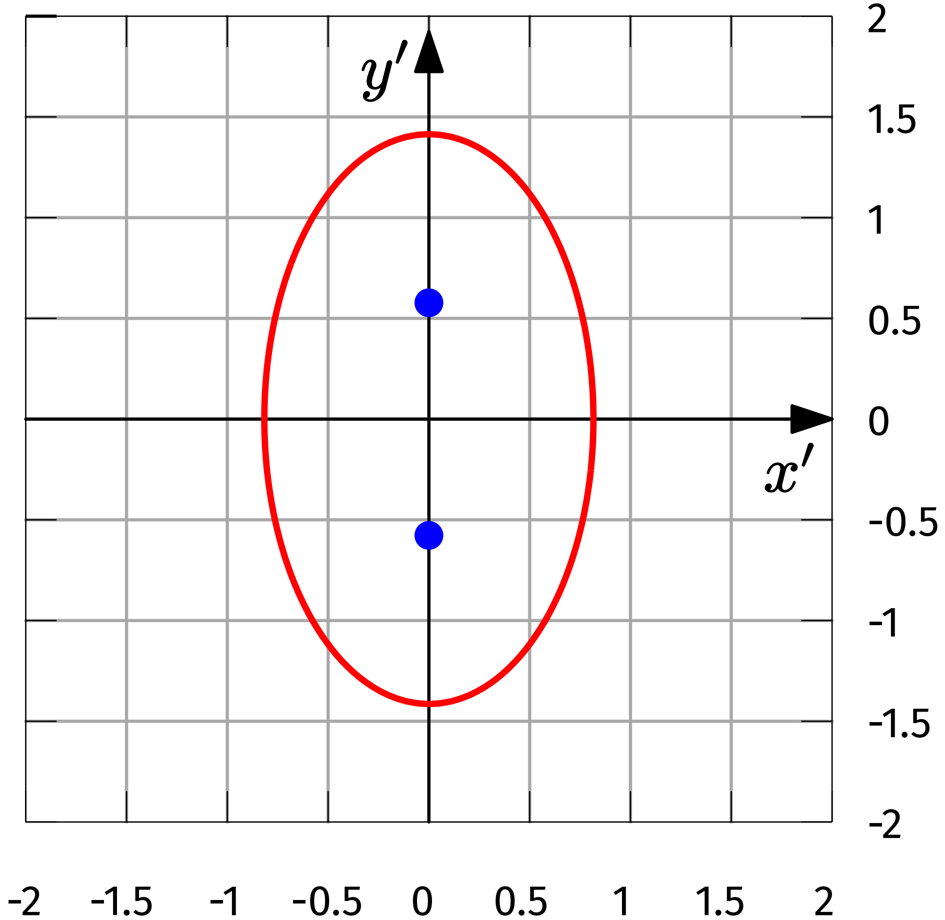
例 1：回転 (図)

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

焦点 $(0, \pm 2/\sqrt{3})$

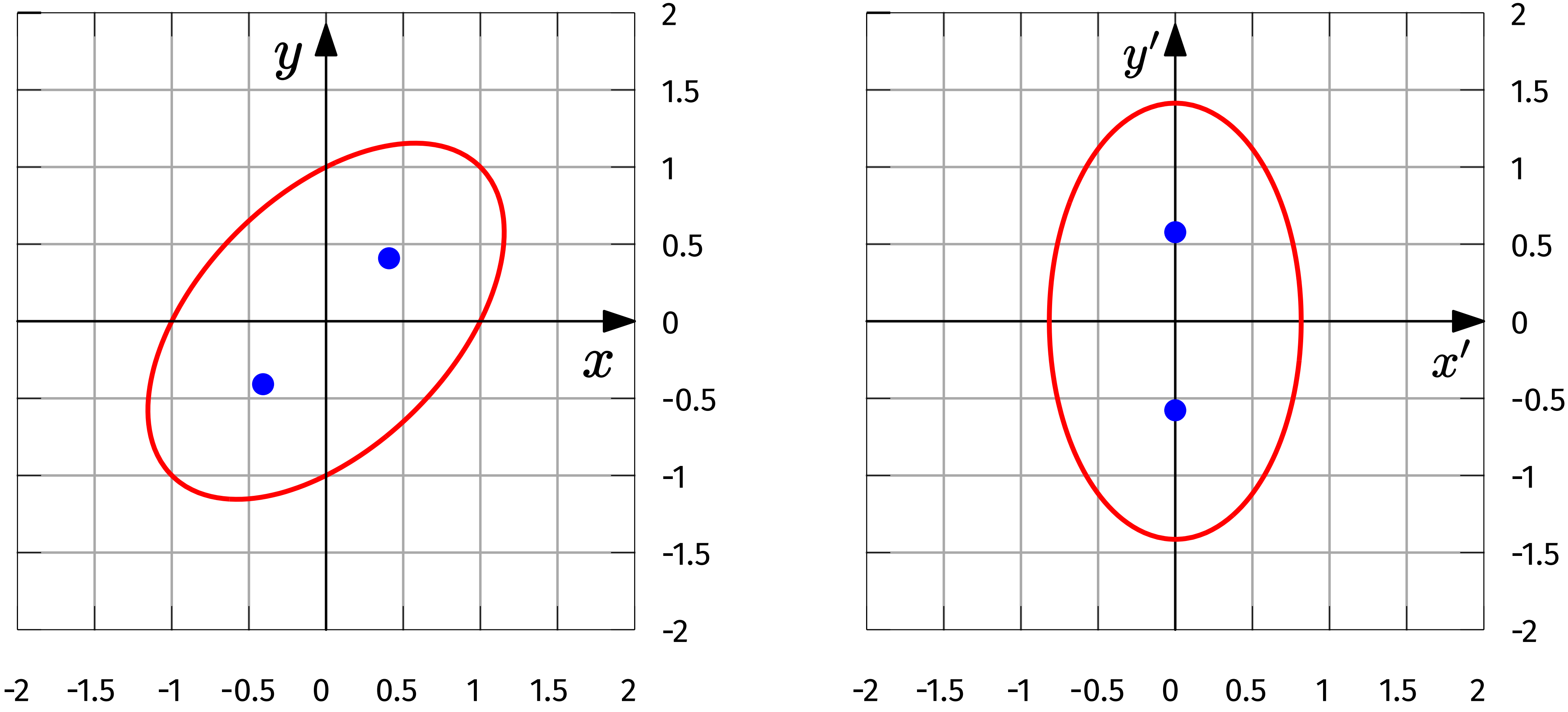




例1：回転 (図)

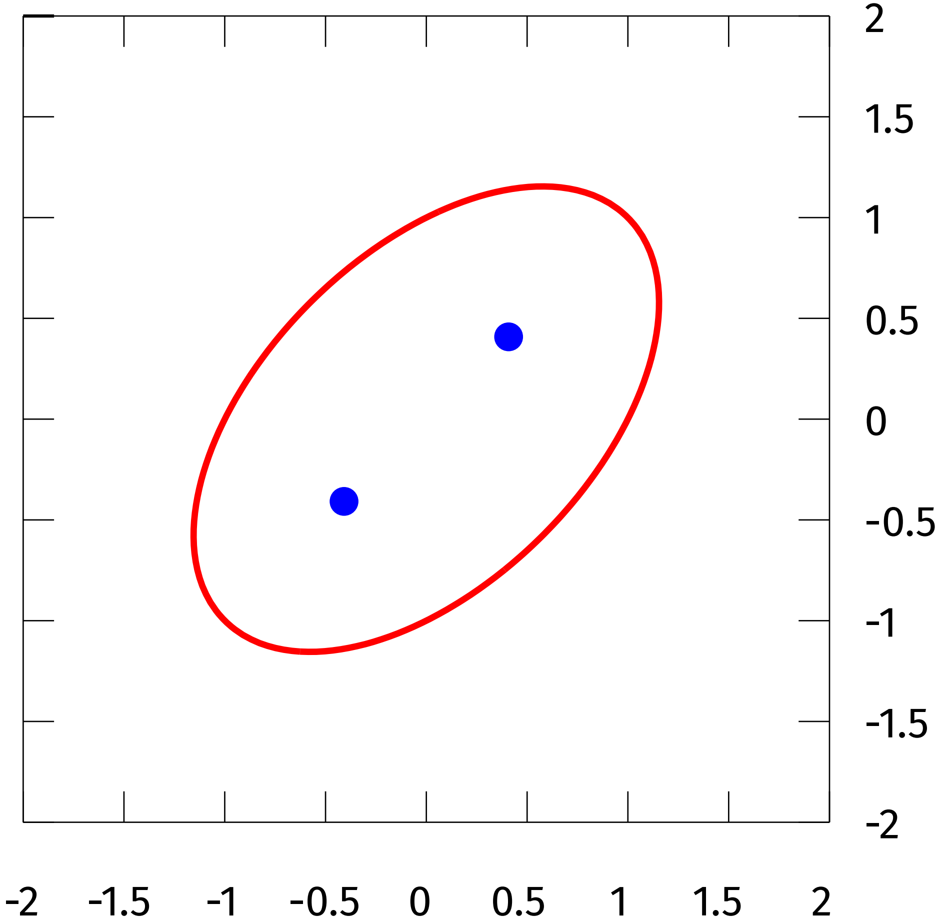
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 1 = 0$$

焦点 $(\pm\sqrt{6}/3, \pm\sqrt{6}/3)$ (複号同順) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 焦点 $(0, \pm 2/\sqrt{3})$



例題 1

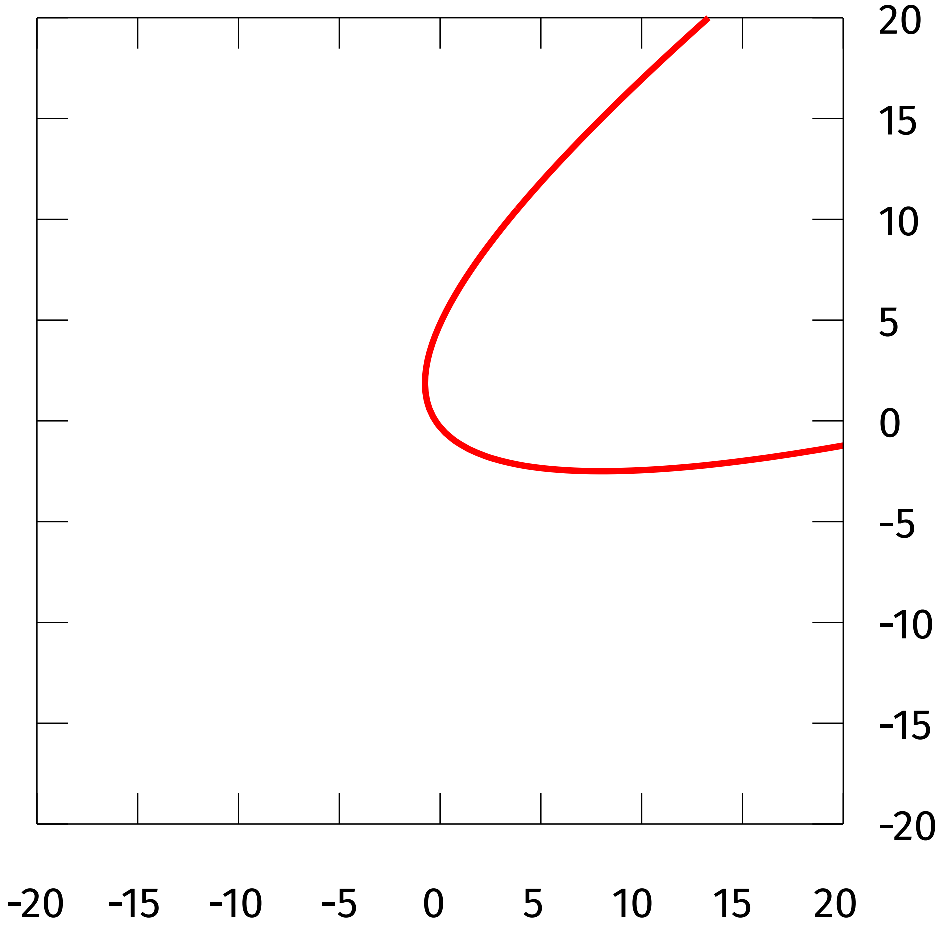
$F: x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$



- F は楕円の方程式
- 焦点は $(\pm\sqrt{6}/3, \pm\sqrt{6}/3)$ (複号同順)

例題 2

$$F: x^2 - 4xy + 4y^2 - 26x - 18y - 6 = 0$$



- 本当に放物線か？
- 放物線ならば
  - 焦点は？
  - 準線は？

例 2：ベクトルと行列

例題 2

$F: x^2 - 4xy + 4y^2 - 26x - 18y - 6 = 0$

$\boxed{1}$ ベクトル・行列を用いて書く

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -26 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0$$

$\boxed{2}$ 行列 A の固有値・固有ベクトルを求める

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>固有値の計算法</u>：固有方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ を解く

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 4 = \lambda(\lambda - 5)$$

$\therefore$ 固有方程式の解 (A の固有値) は $\lambda = 5, 0$

例 2：固有ベクトル (1)

$\boxed{2}$ 行列 A の固有値・固有ベクトルを求める

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>固有ベクトルの計算法</u>：$Av = \lambda v$ を満たす v を計算する

$\lambda = 5$ に対する固有ベクトルを $v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

長さが 1 となるものは，$v_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

例 2：固有ベクトル (2)

$\boxed{2}$　行列 A の固有値・固有ベクトルを求める

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

固有ベクトルの計算法：$Av = \lambda v$ を満たす v を計算する

$\lambda = 0$ に対する固有ベクトルを $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

長さが 1 となるものは，$v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ 行列 A を対角化する

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>対角化の方法</u>：$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ とすると

$$AP = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5v_1 & 0v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

したがって，$A = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{\mathrm{T}}$

例 2：回転

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -26 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0$$

$$A = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{\mathrm{T}}, \quad P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -26 & -18 \end{bmatrix} P P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0$$

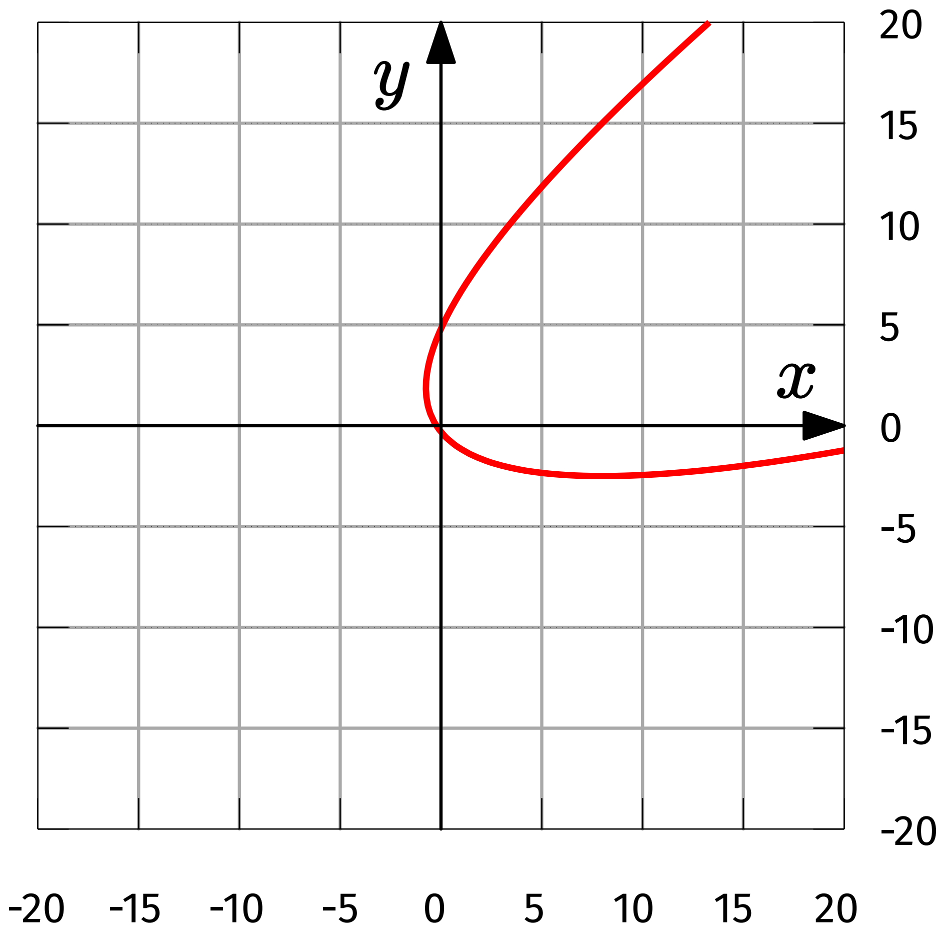
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

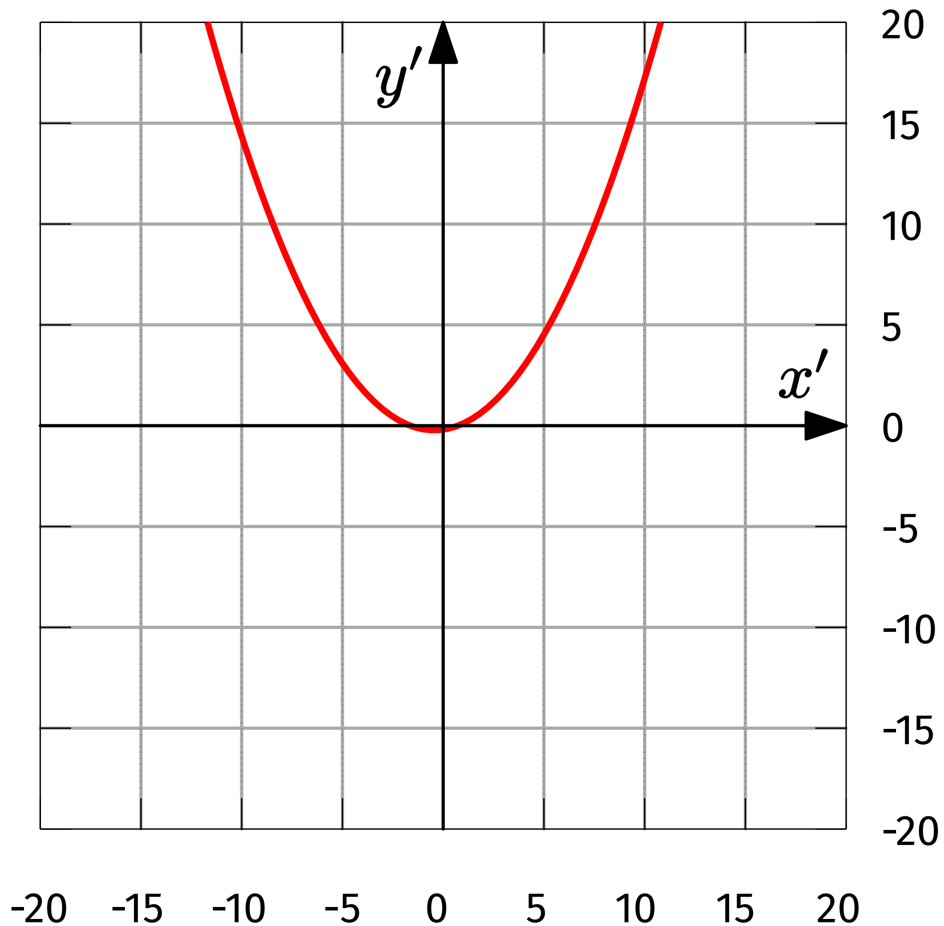
$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/\sqrt{5} & -70/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 6 = 0$$

例 2：回転 (図)

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -26 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/\sqrt{5} & -70/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 6 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$





例 2：平行移動

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/\sqrt{5} & -70/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 6 = 0$$

$$\text{左辺} = 5x'^2 + 10x'/\sqrt{5} - 70y'/\sqrt{5} - 6$$

$$y' = \frac{\sqrt{5}}{14}x'^2 + \frac{1}{7}x' - \frac{3}{7\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{14}\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

例 2：平行移動

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/\sqrt{5} & -70/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 6 = 0$$

$$\downarrow \quad \text{左辺} = 5x'^2 + 10x'/\sqrt{5} - 70y'/\sqrt{5} - 6$$

$$y' = \frac{\sqrt{5}}{14}x'^2 + \frac{1}{7}x' - \frac{3}{7\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{14}\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

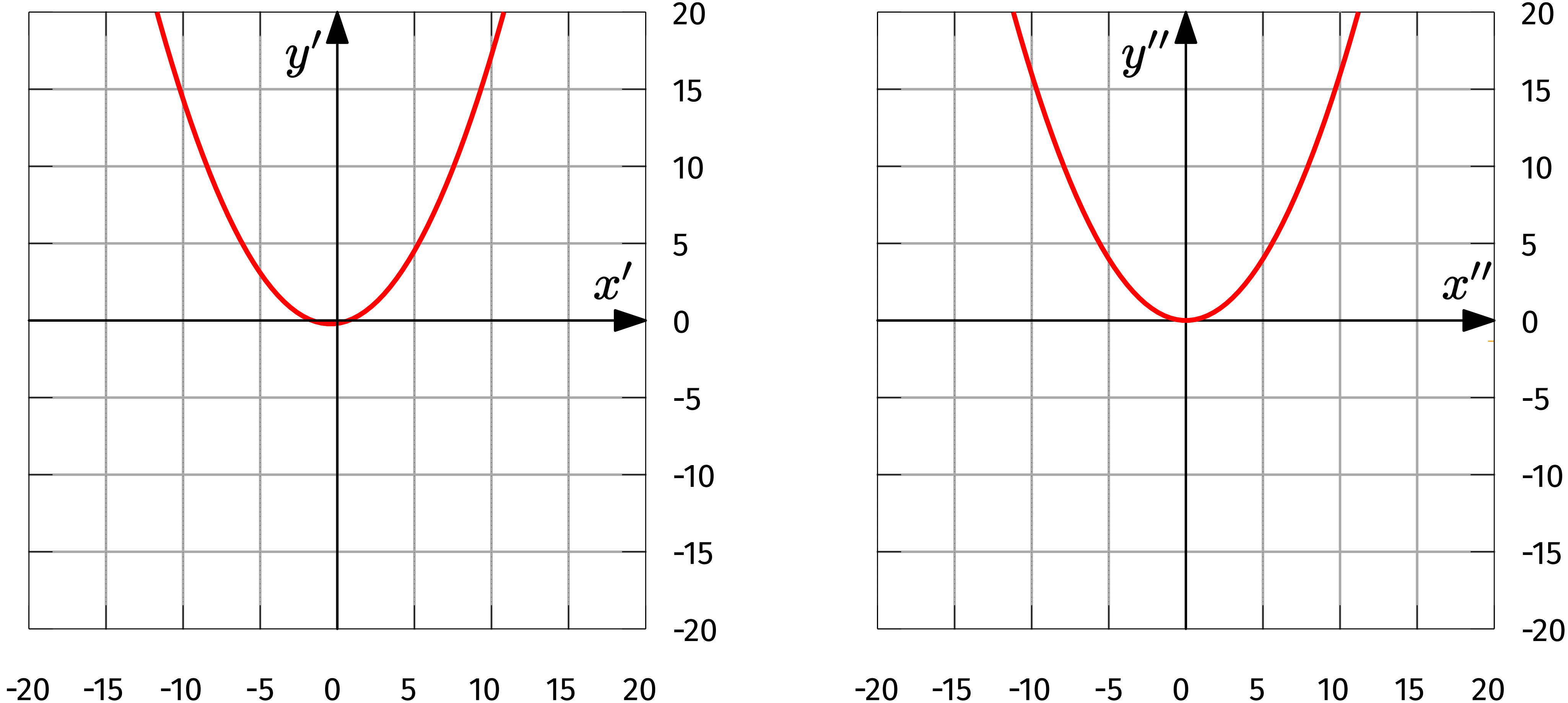
$$\downarrow \quad x'' = x' + 1/\sqrt{5}, y'' = y' + 1/(2\sqrt{5})$$

$$y'' = \frac{\sqrt{5}}{14}x''^2$$

例 2：平行移動 (図)

$$y' = \frac{\sqrt{5}}{14}x'^2 + \frac{1}{7}x' - \frac{3}{7\sqrt{5}} \longrightarrow y'' = \frac{\sqrt{5}}{14}x''^2$$

$$x'' = x' + 1/\sqrt{5}$$
$$y'' = y' + 1/(2\sqrt{5})$$



例 2：平行移動 (図)

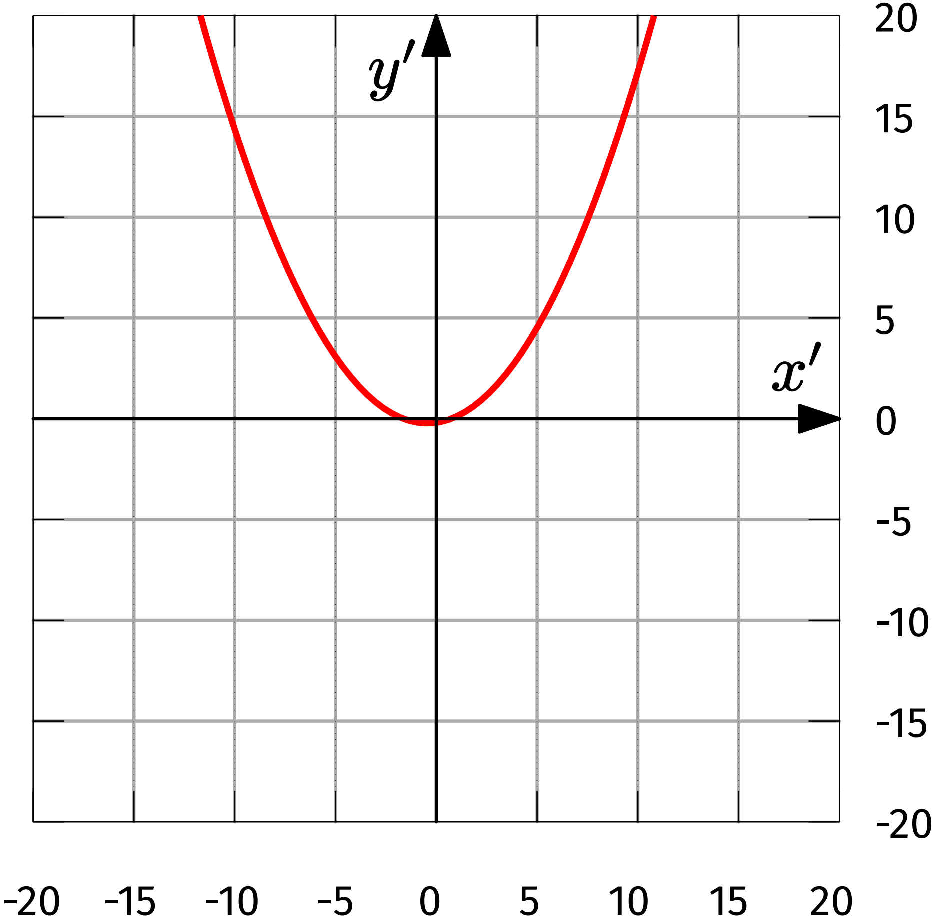
$$y' = \frac{\sqrt{5}}{14}x'^2 + \frac{1}{7}x' - \frac{3}{7\sqrt{5}} \longrightarrow y'' = \frac{\sqrt{5}}{14}x''^2$$

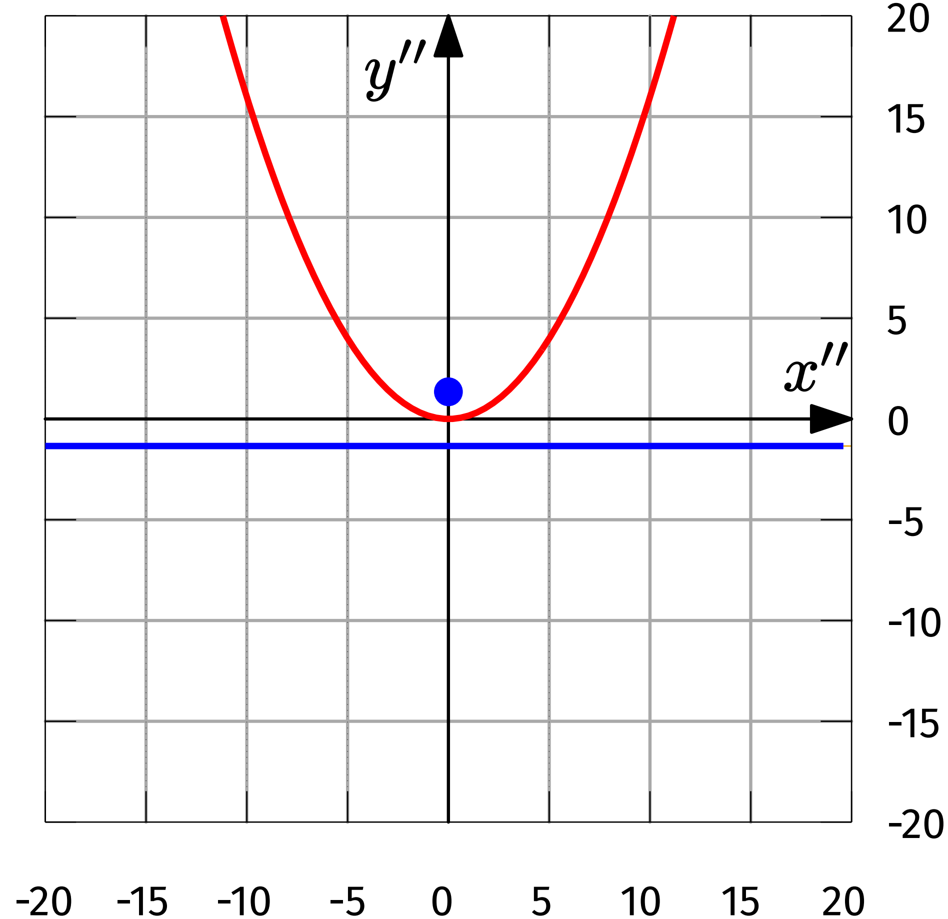
$x'' = x' + 1/\sqrt{5}$

$y'' = y' + 1/(2\sqrt{5})$

焦点 $(0, 7/(2\sqrt{5}))$

準線 $y'' = -7/(2\sqrt{5})$





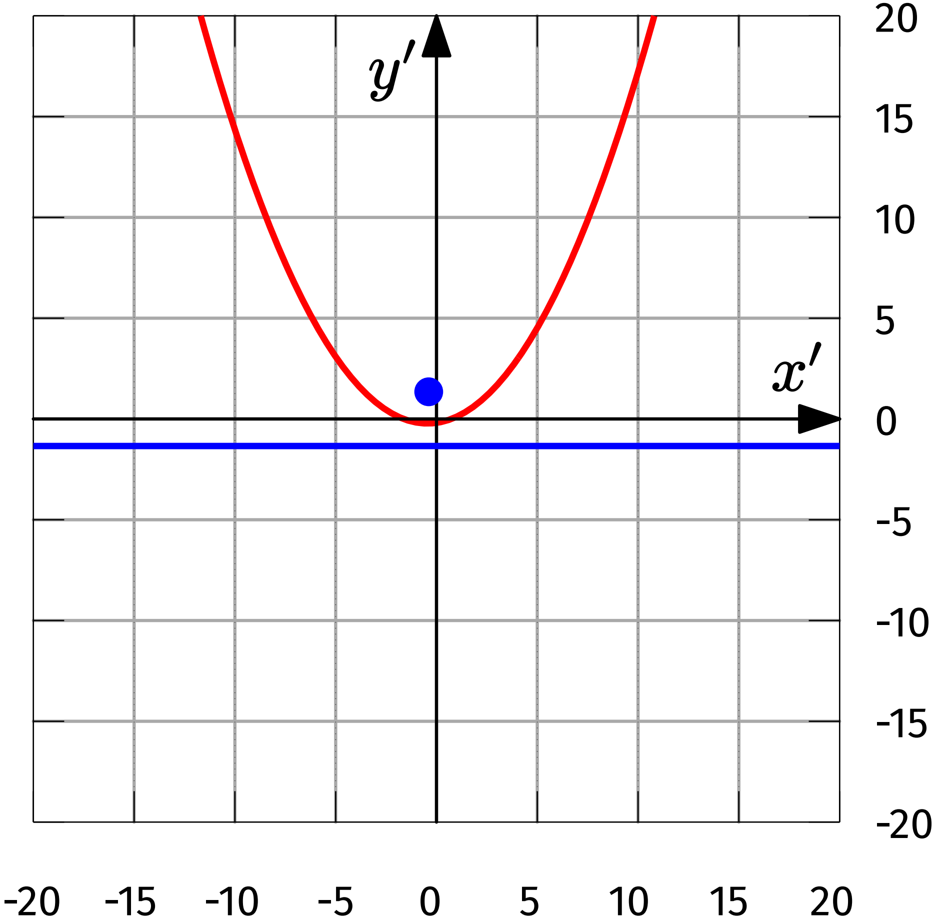
例 2：平行移動 (図)

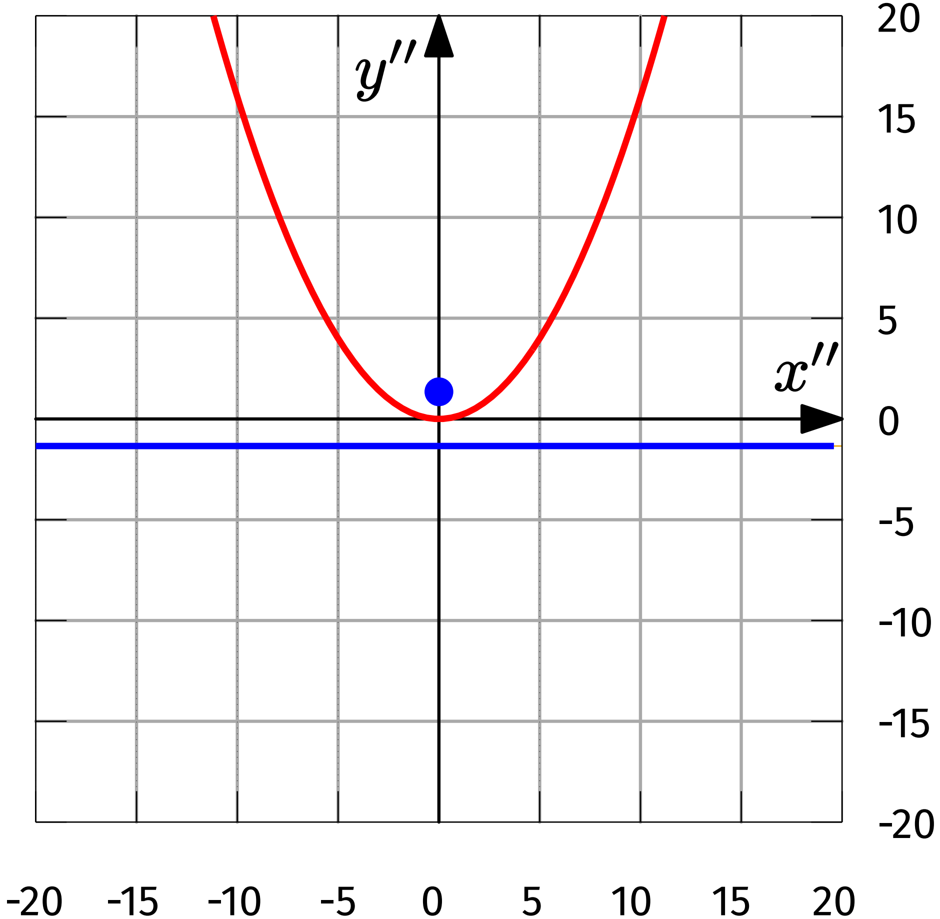
$$y' = \frac{\sqrt{5}}{14}x'^2 + \frac{1}{7}x' - \frac{3}{7\sqrt{5}} \longrightarrow y'' = \frac{\sqrt{5}}{14}x''^2$$

焦点 $(-1/\sqrt{5}, 3/\sqrt{5})$
準線 $y' = -4/\sqrt{5}$

$x'' = x' + 1/\sqrt{5}$
$y'' = y' + 1/(2\sqrt{5})$

焦点 $(0, 7/(2\sqrt{5}))$
準線 $y'' = -7/(2\sqrt{5})$



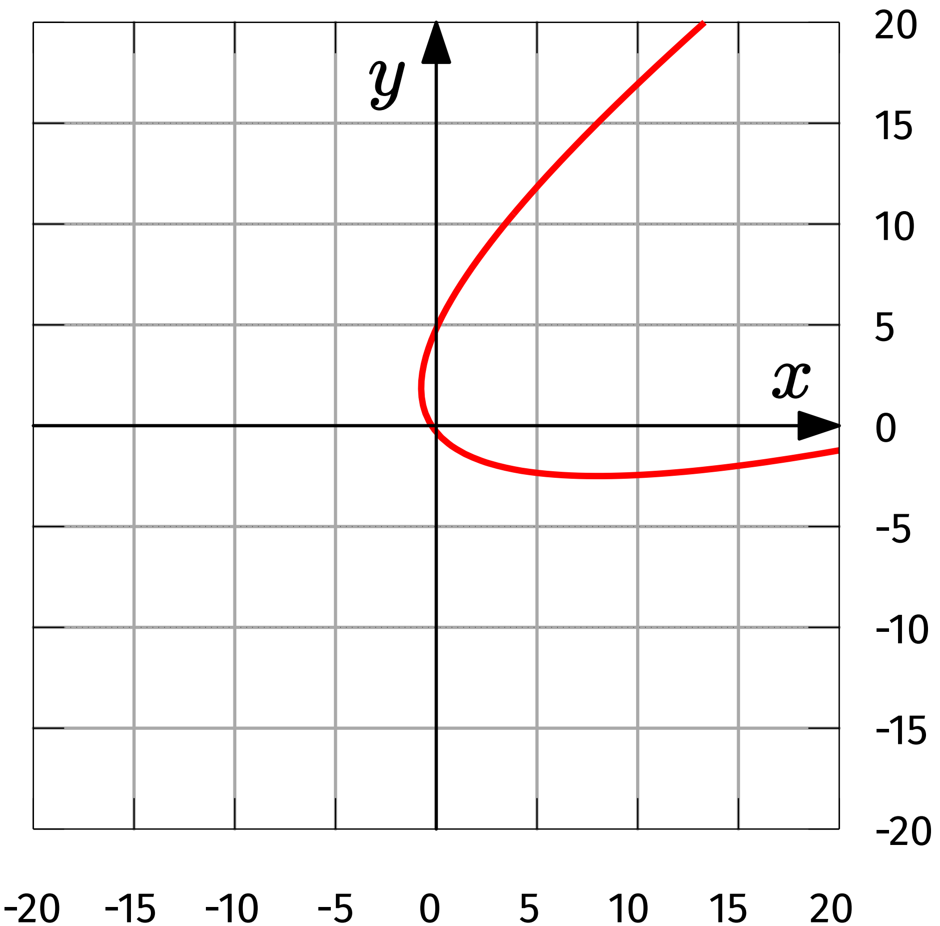


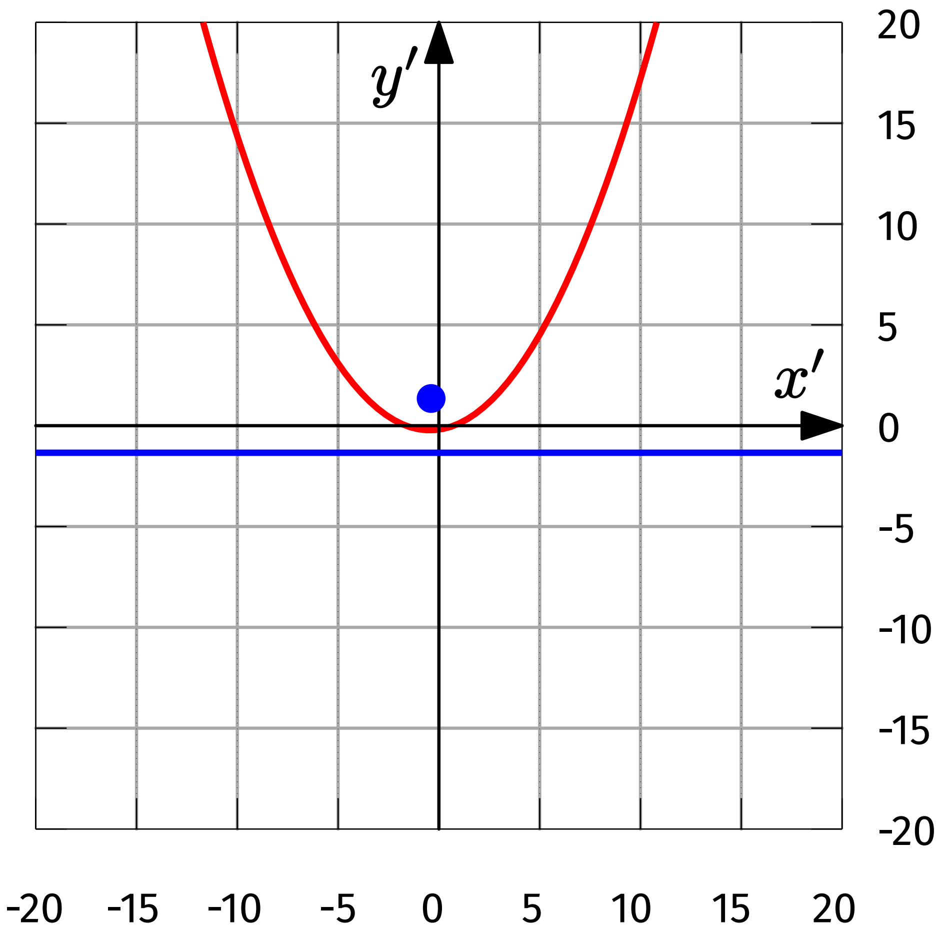
$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-26 & -18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}-6=0 \longrightarrow \begin{bmatrix}x' & y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10/\sqrt{5} & -70/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}-6=0$$

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

焦点 $(-1/\sqrt{5}, 3/\sqrt{5})$

準線 $y' = -4/\sqrt{5}$



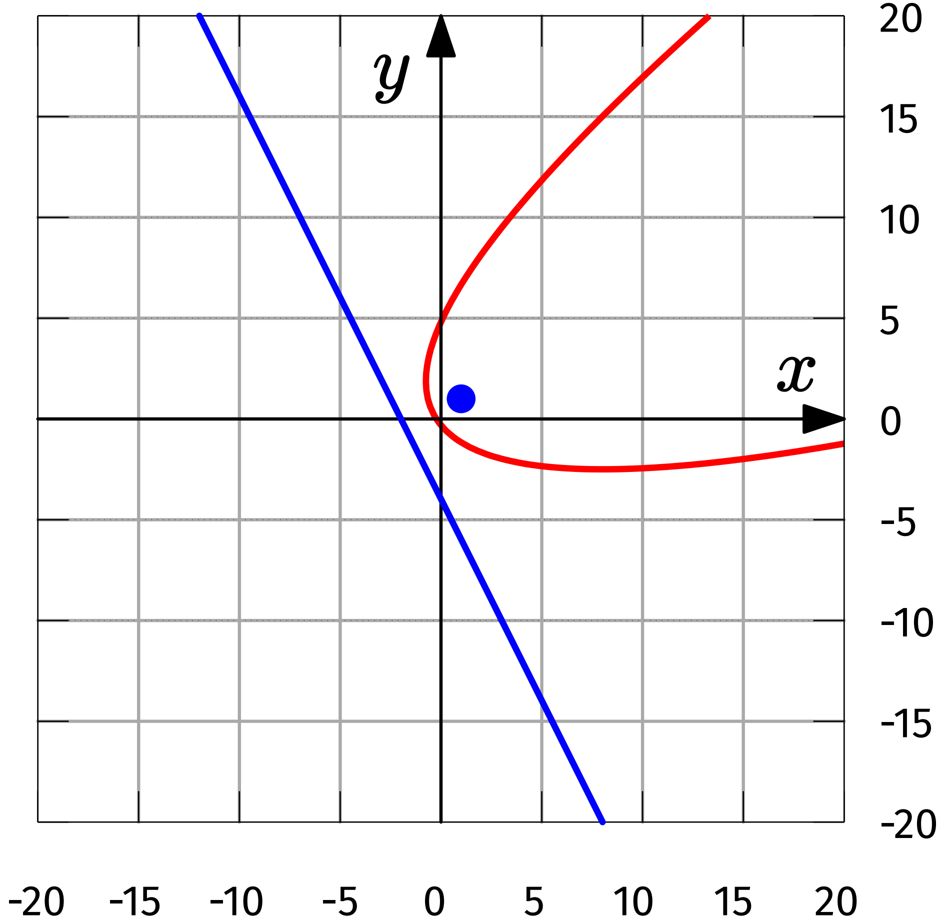


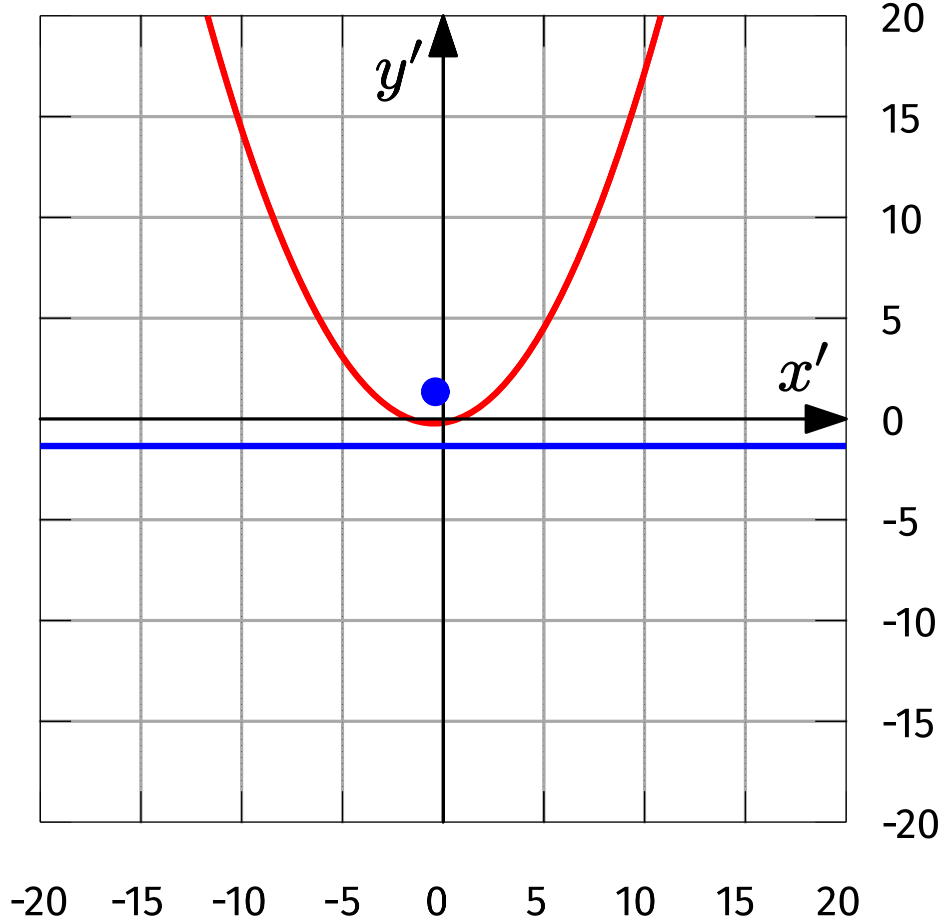
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -26 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/\sqrt{5} & -70/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 6 = 0$$

焦点 $(1, 1)$
準線 $2x + y = -4$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

焦点 $(-1/\sqrt{5}, 3/\sqrt{5})$
準線 $y' = -4/\sqrt{5}$

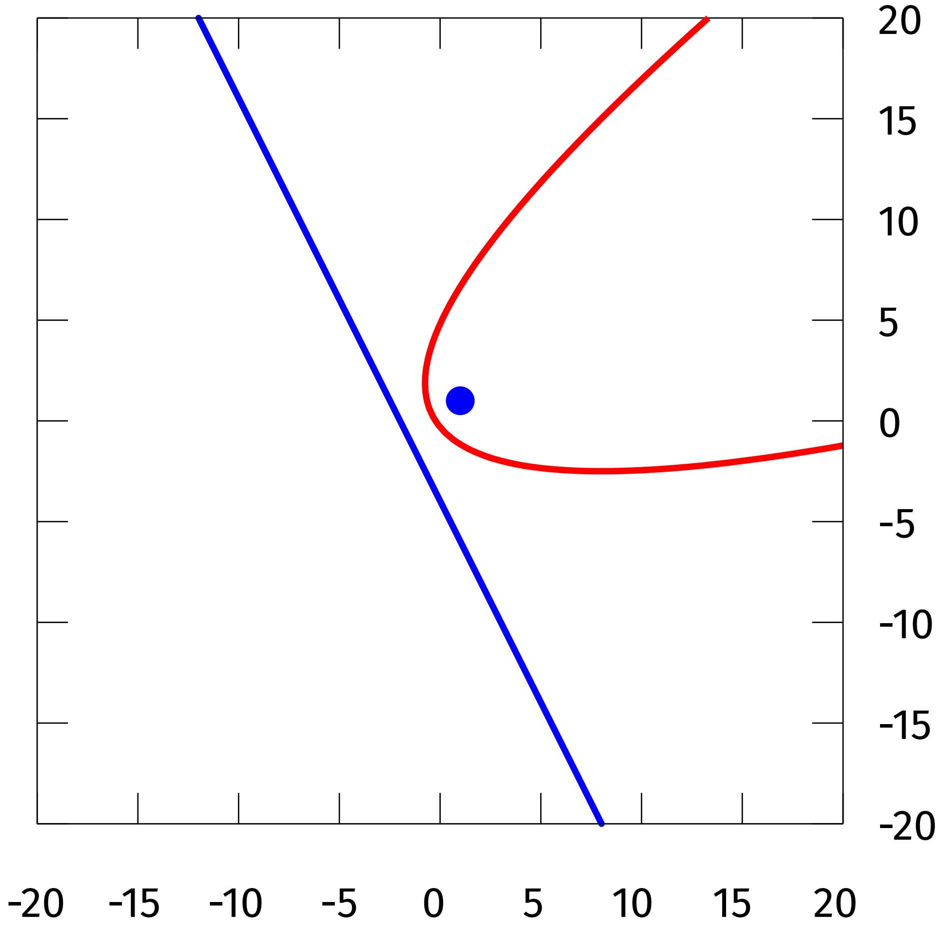




例2：まとめ

例題 2

$$F: x^2 - 4xy + 4y^2 - 26x - 18y - 6 = 0$$



- F は放物線の方程式
- 焦点は $(1, 1)$
- 準線は $2x + y = -4$

第 6 回のまとめ

今日の目標

二次曲線の特徴や性質を明らかにできる

- 二次曲線の分類
- 二次曲線と等距離線の関係

二次曲線を考えるとき，線形代数が重要な役割を果たす

教訓

線形代数は多項式に対しても役立つ