離散数理工学 (2025 年度後学期)

第 5 回

低次元 (5)：多角形内の距離

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 11 月 18 日

最終更新：2025 年 11 月 10 日　09:49

今回の目標

今日の目標

多角形の中の距離を扱えるようになる

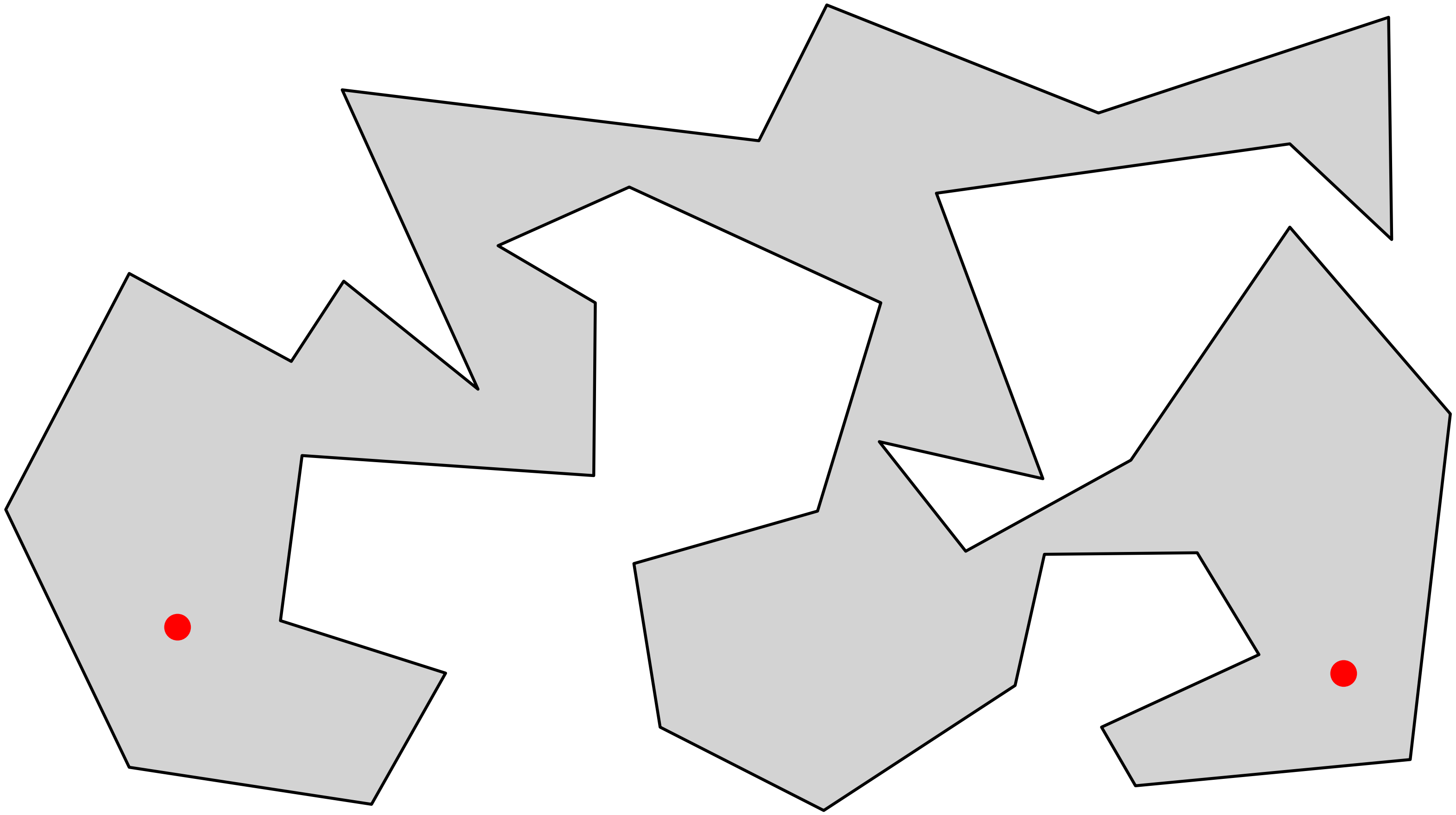
- 可視性，可視領域，可視グラフ
- 多角形領域における等距離線

教訓

障害物によって，距離の扱いが大きく変わる

典型的な問題：最短路問題

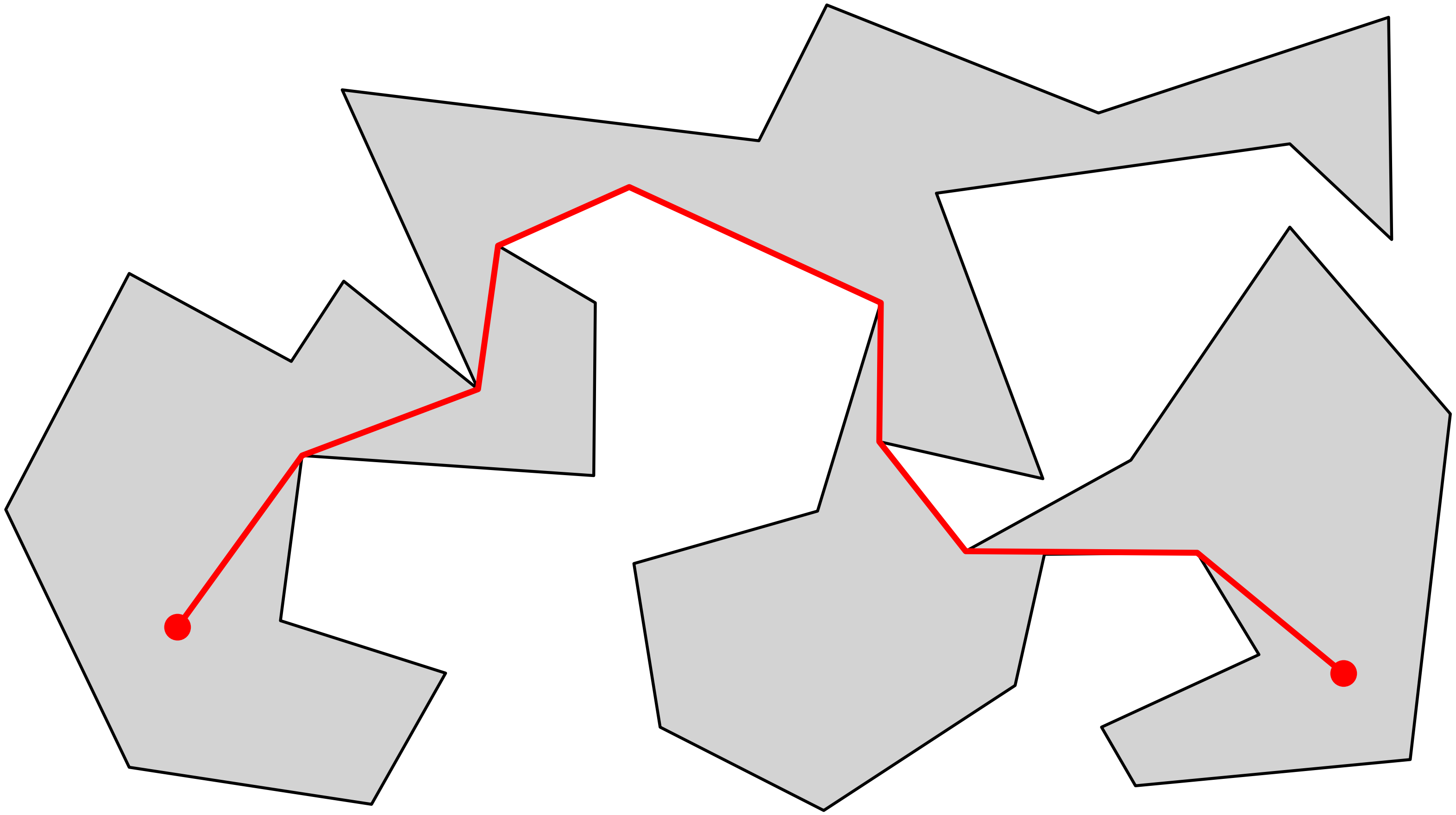
赤点の間の最短路は何か？



典型的な応用先：ロボット動作計画

典型的な問題：最短路問題

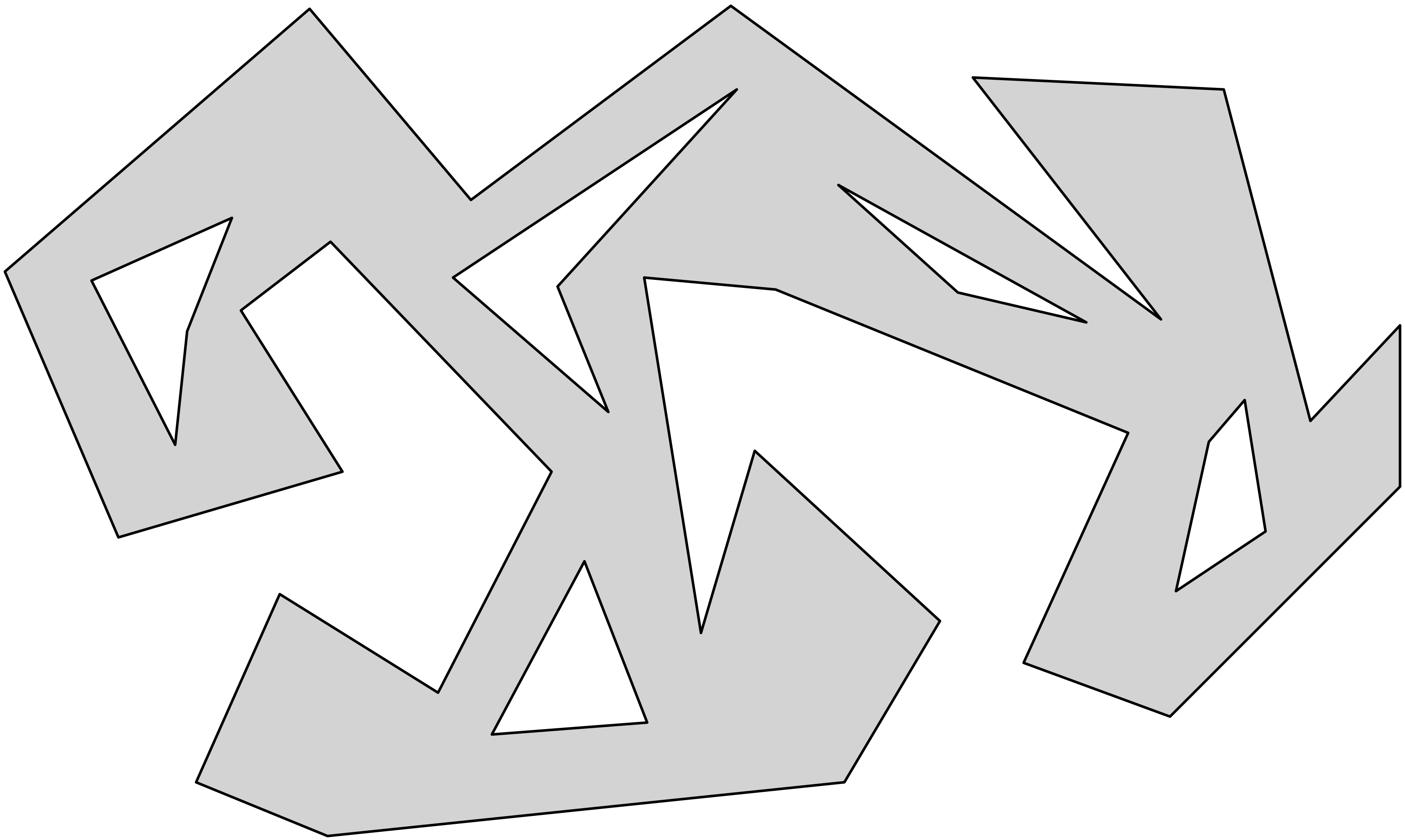
赤点の間の最短路は何か？



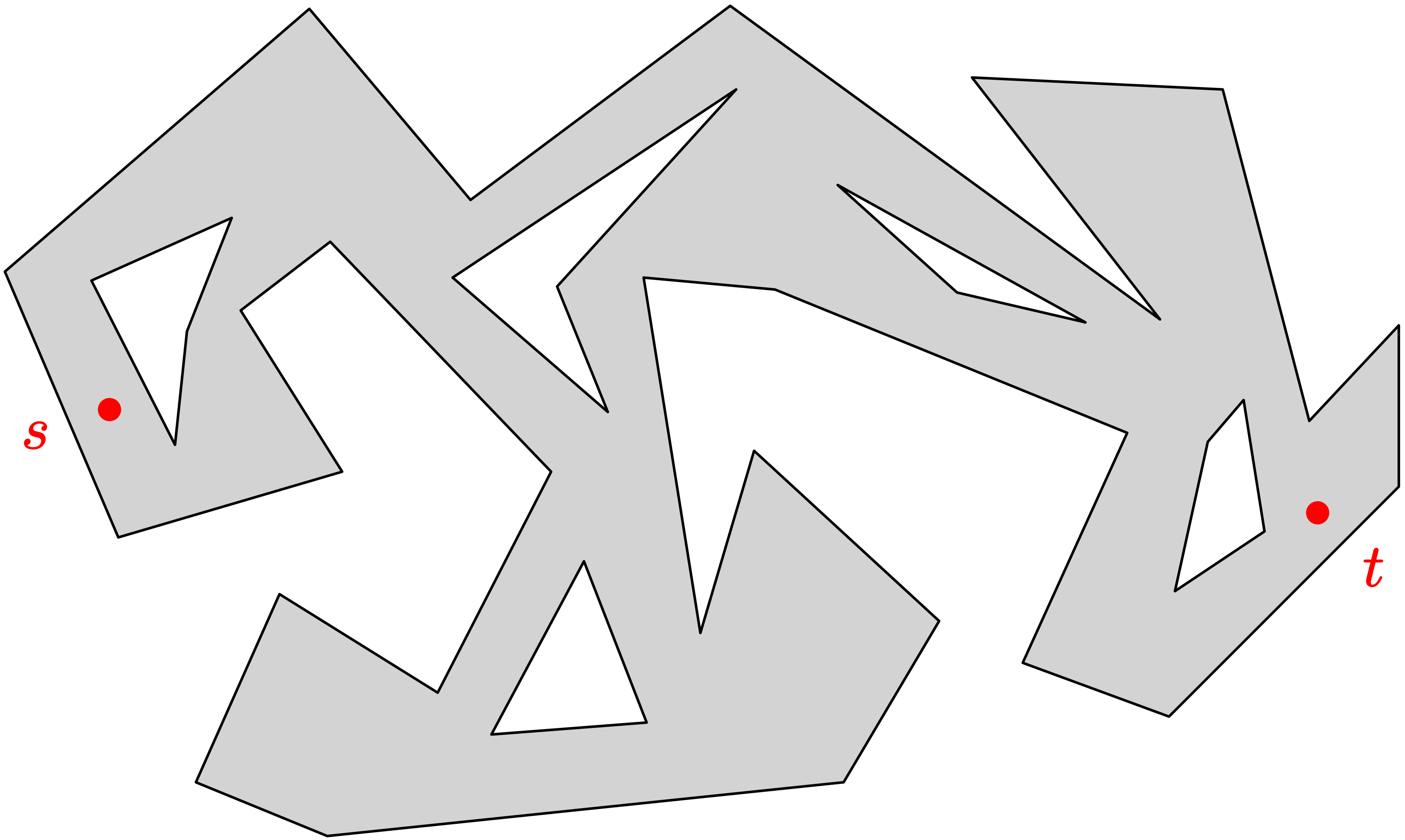
典型的な応用先：ロボット動作計画

目次

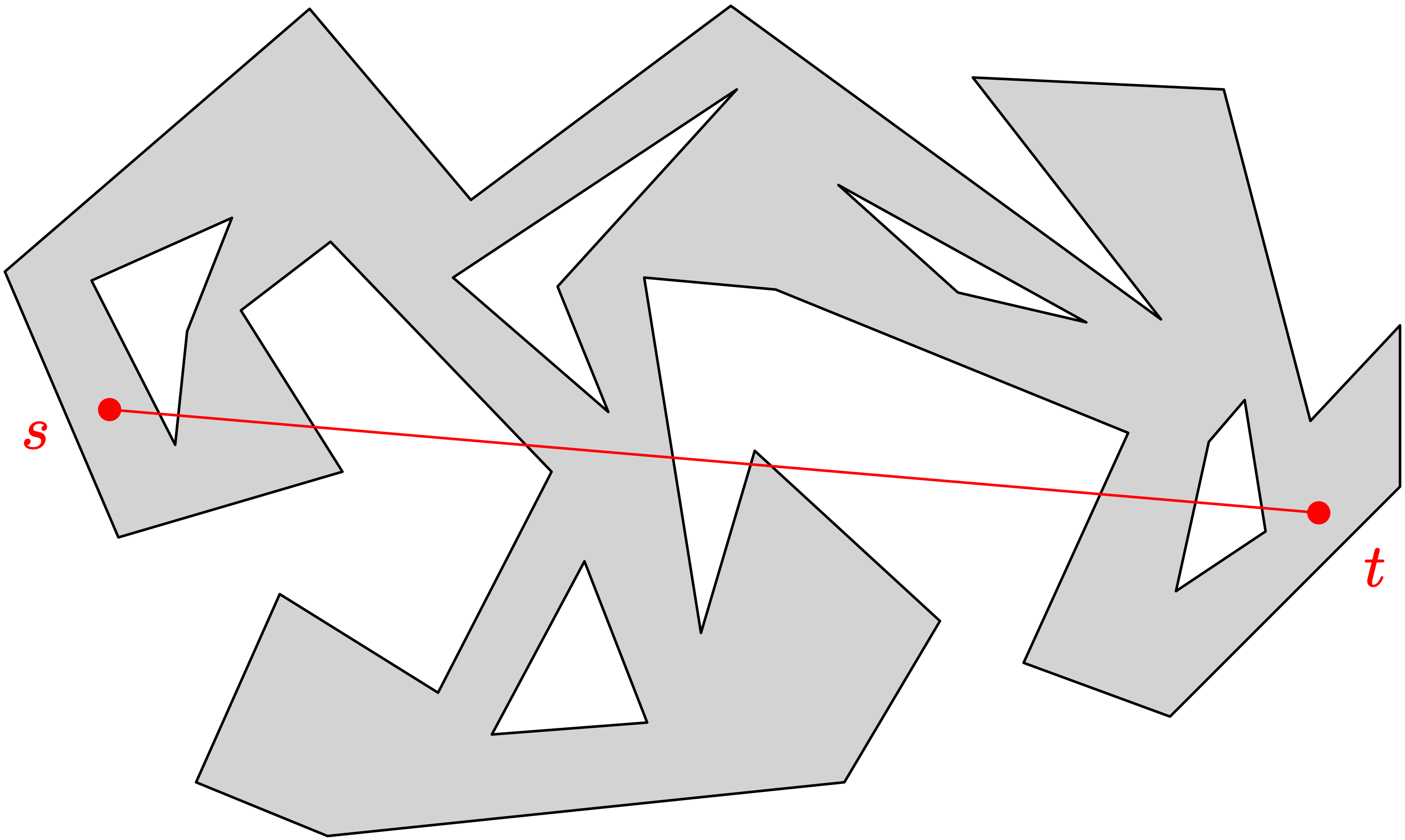
多角形内の最短路：例



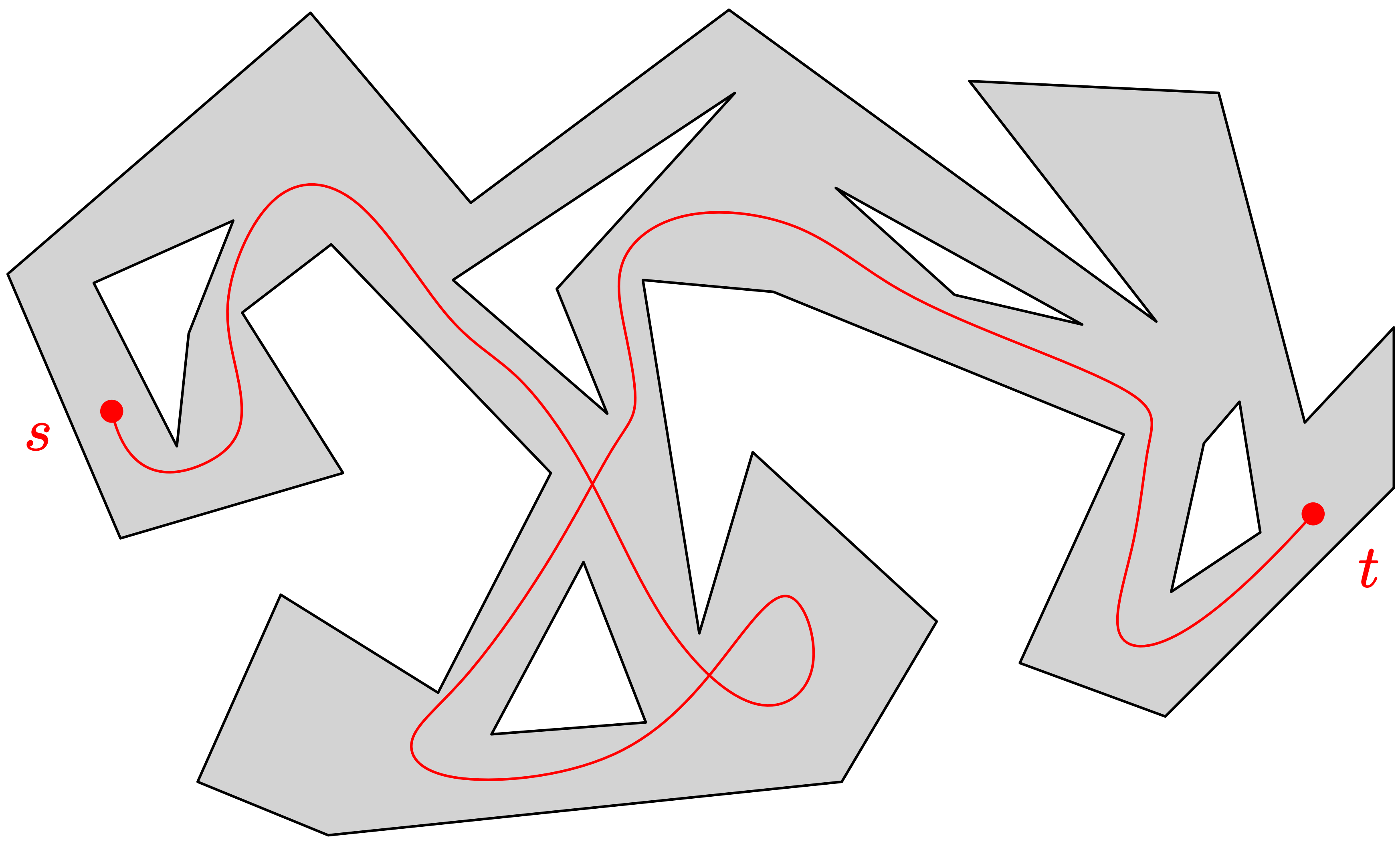
多角形内の最短路：例



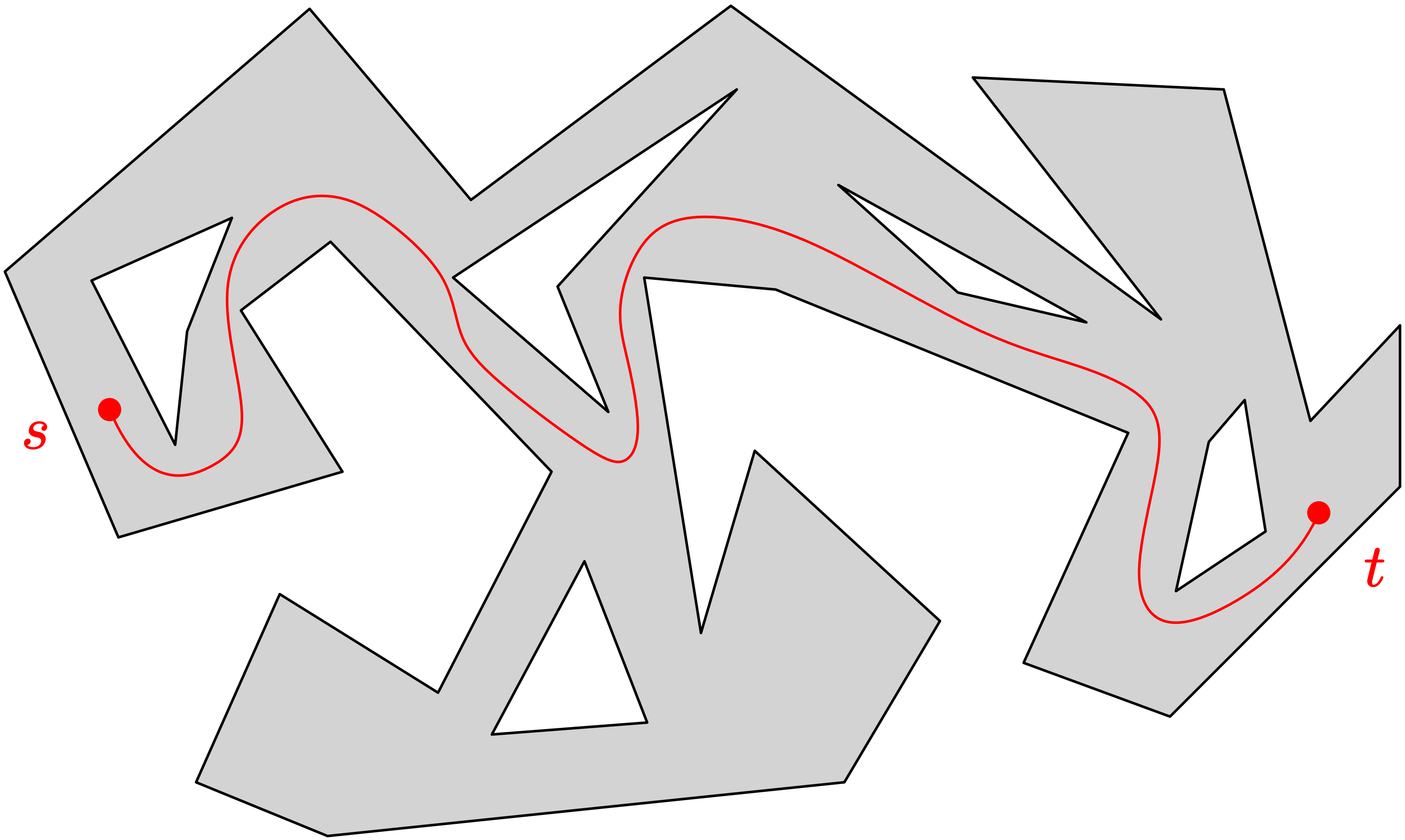
多角形内の最短路：例



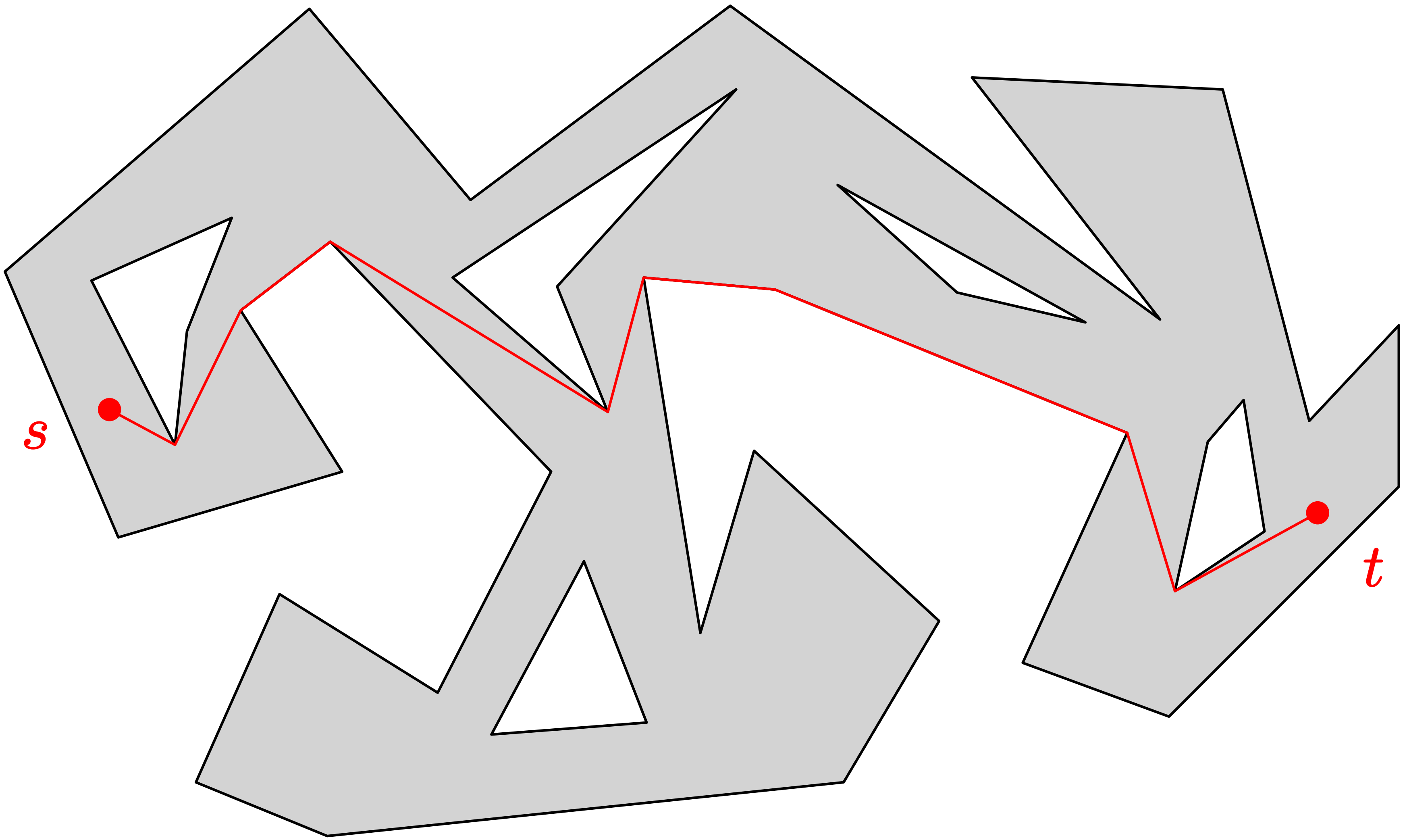
多角形内の最短路：例



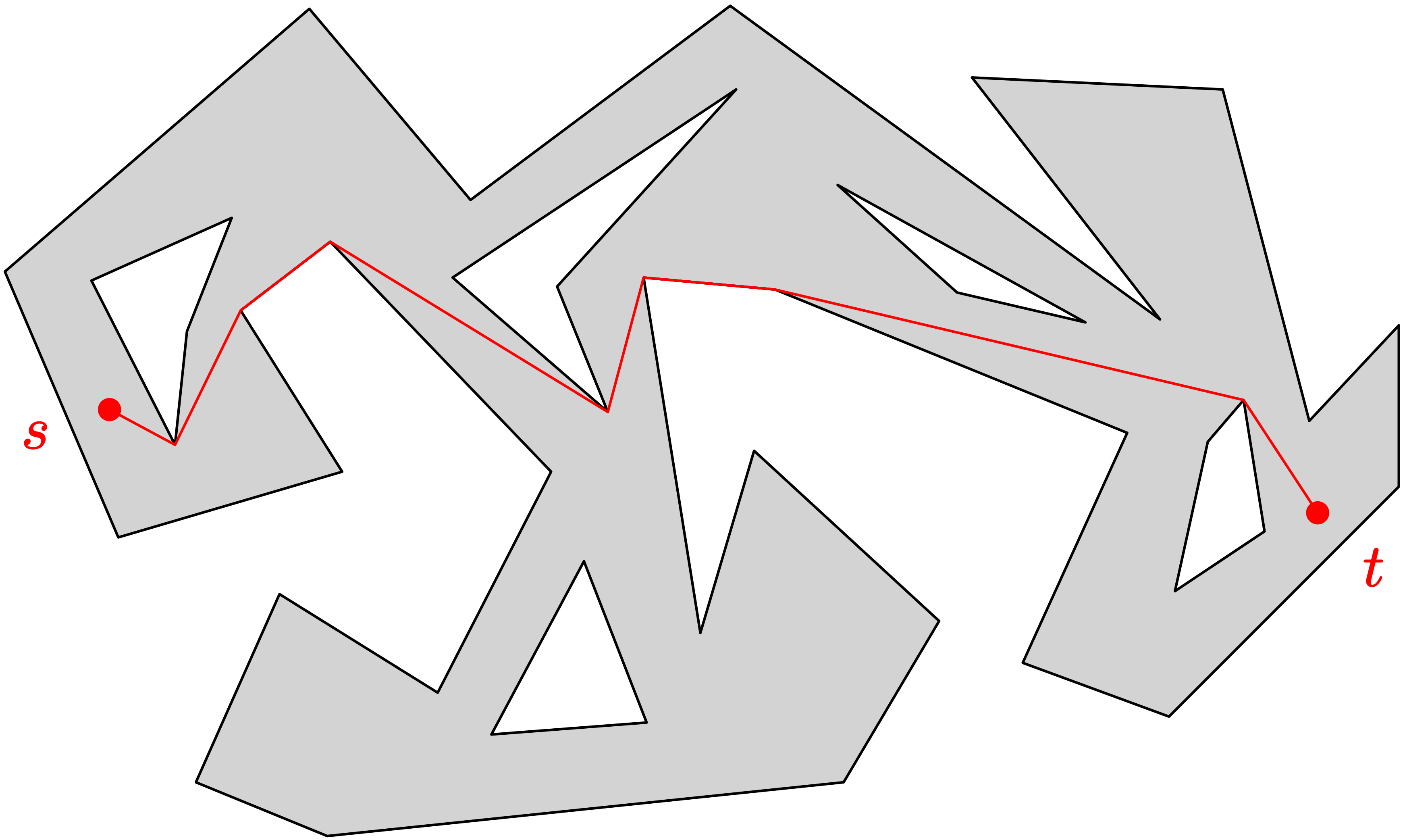
多角形内の最短路：例



多角形内の最短路：例



多角形内の最短路：例



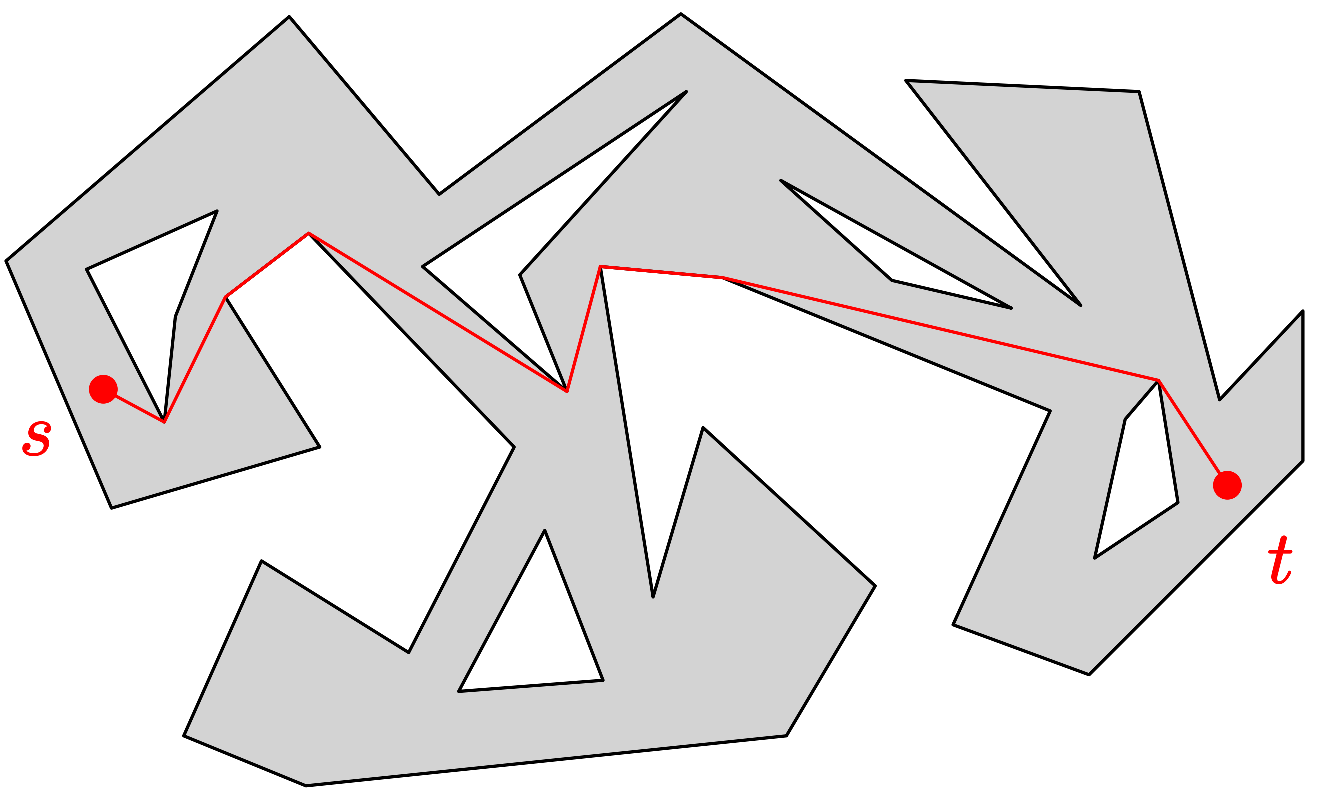
多角形内の最短路を 測地線 と呼ぶことがある

多角形内の最短路

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, 2 点 $s, t \in P$

性質：多角形内の最短路

s, t を結ぶ P 内の最短路は,
端点を s, t か P の頂点とする
有限個の線分をつないだ曲線である

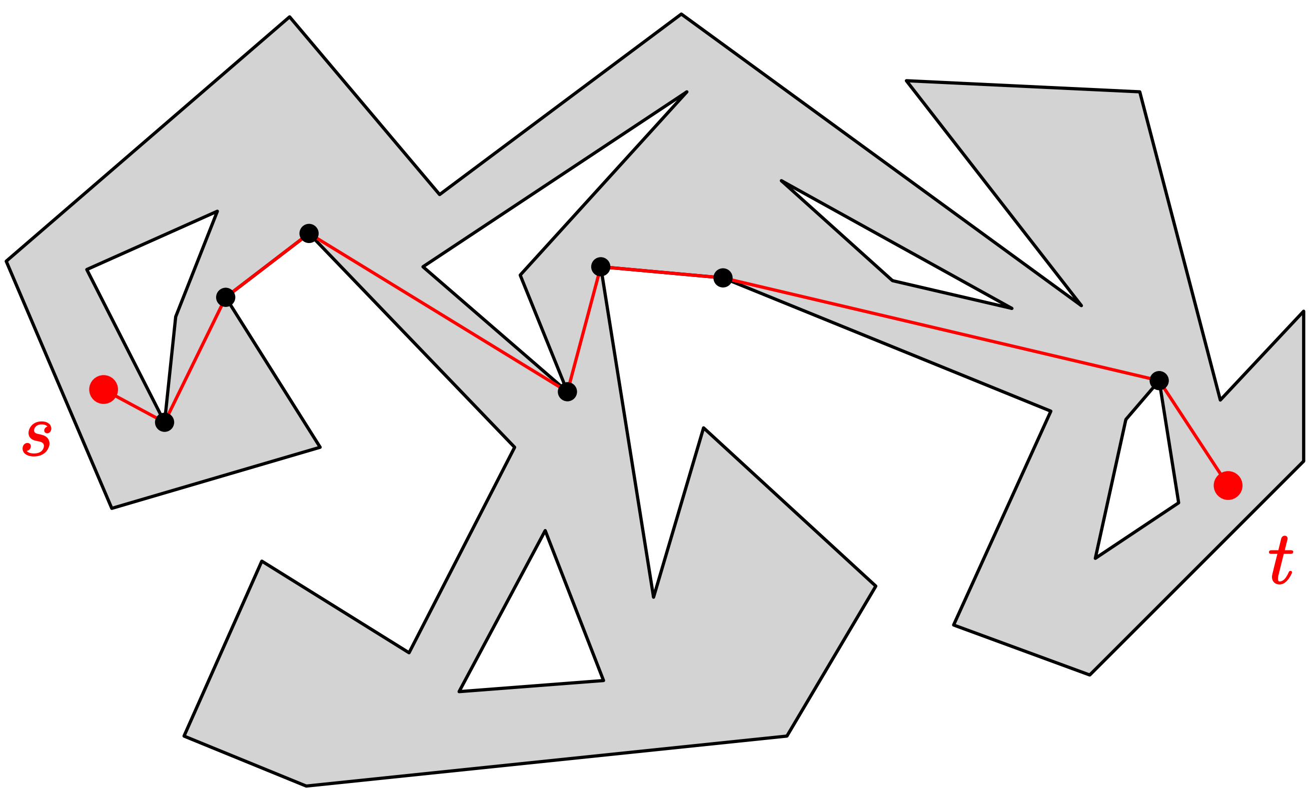


多角形内の最短路

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, 2 点 $s, t \in P$

性質：多角形内の最短路

s, t を結ぶ P 内の最短路は,
端点を s, t か P の頂点とする
有限個の線分をつないだ曲線である

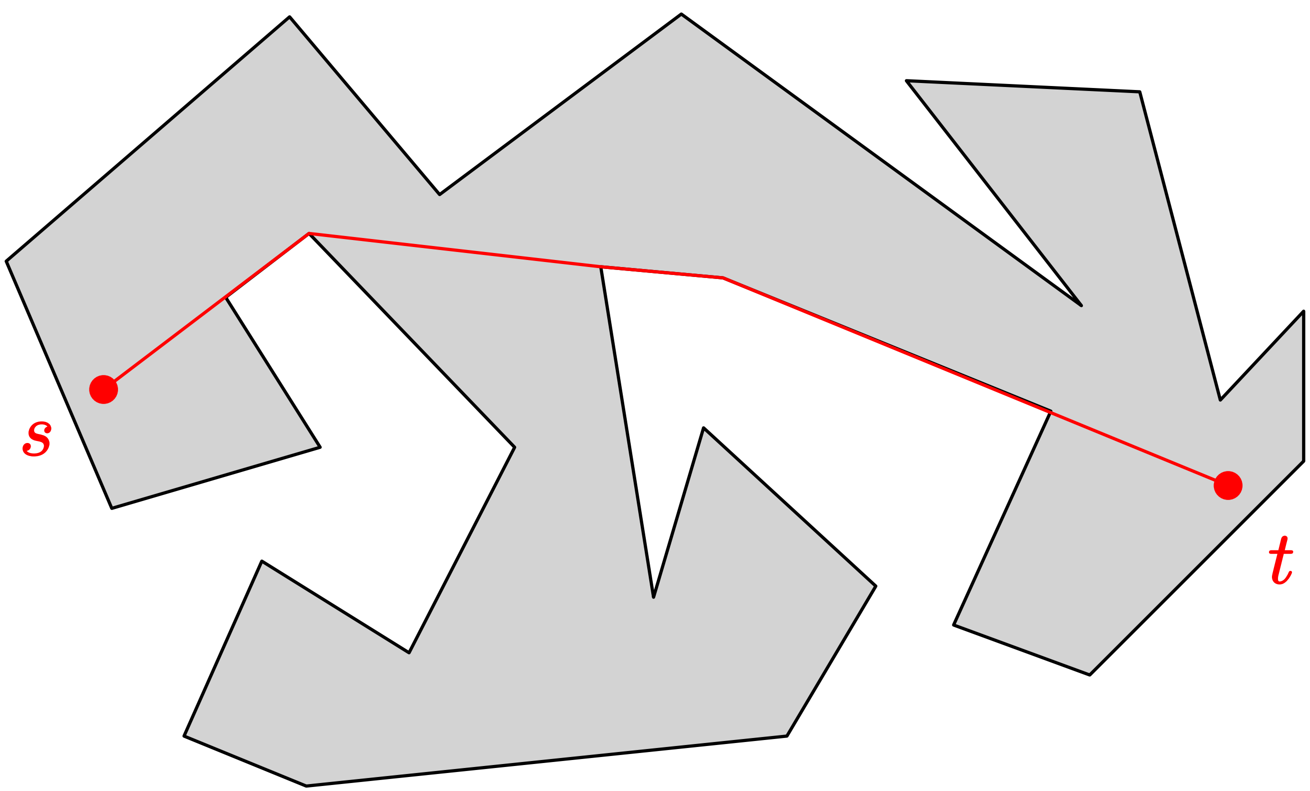


最短路の一意性

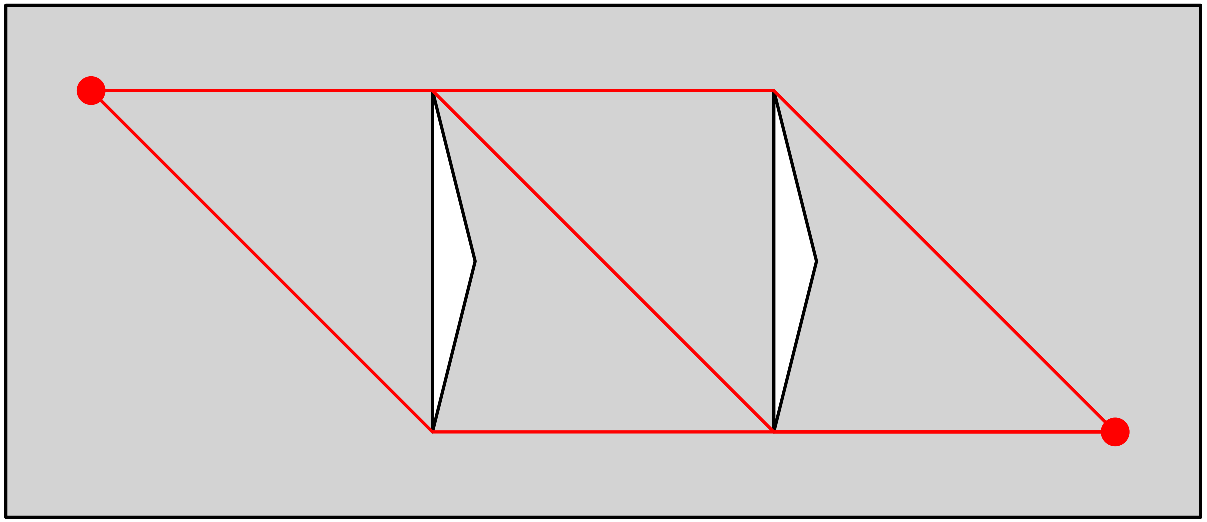
単純多角形 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, 2 点 $s, t \in P$

性質：多角形内の最短路

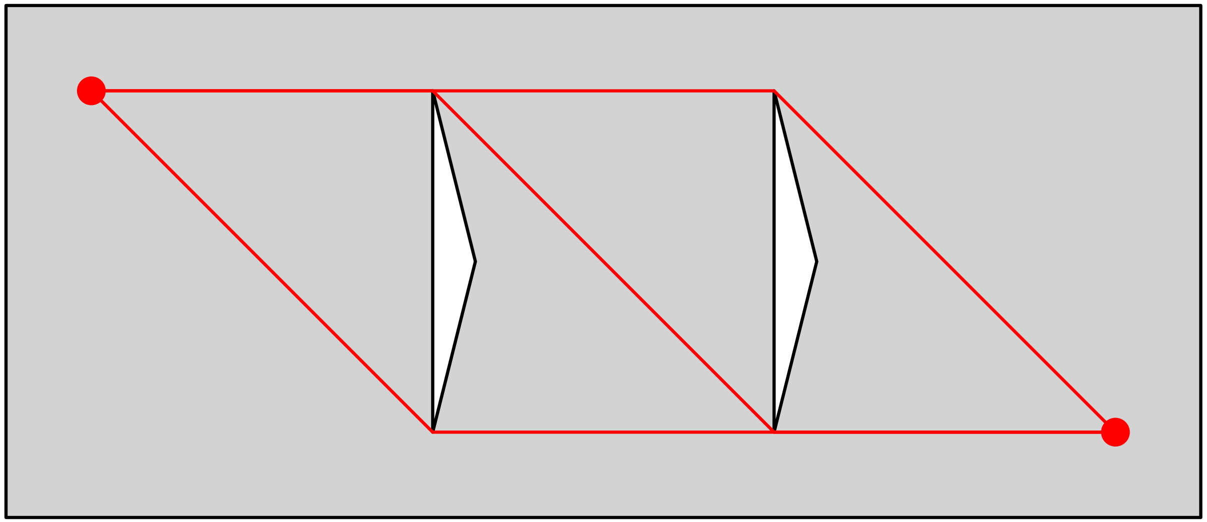
s, t を結ぶ P 内の最短路は一意
(ただ一つしか存在しない)



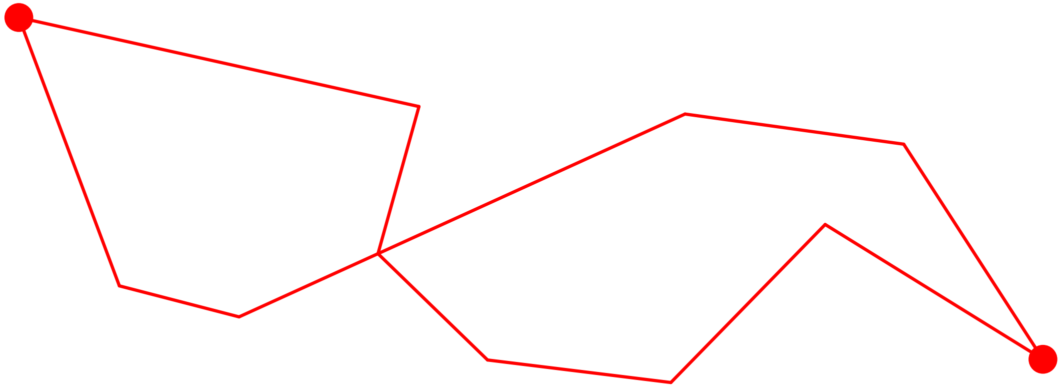
最短路の一意性：考え方



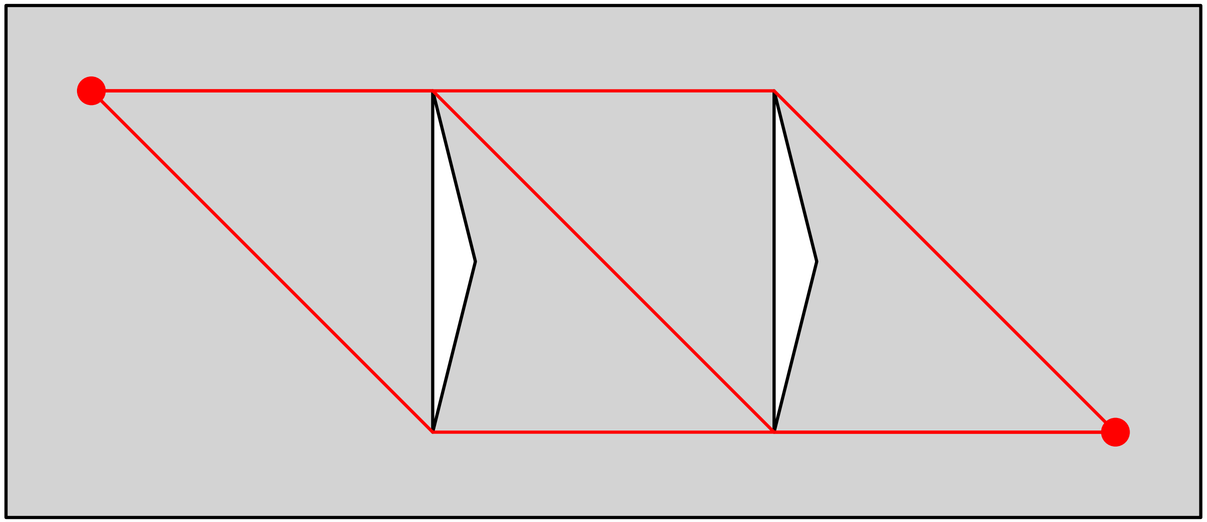
最短路の一意性：考え方



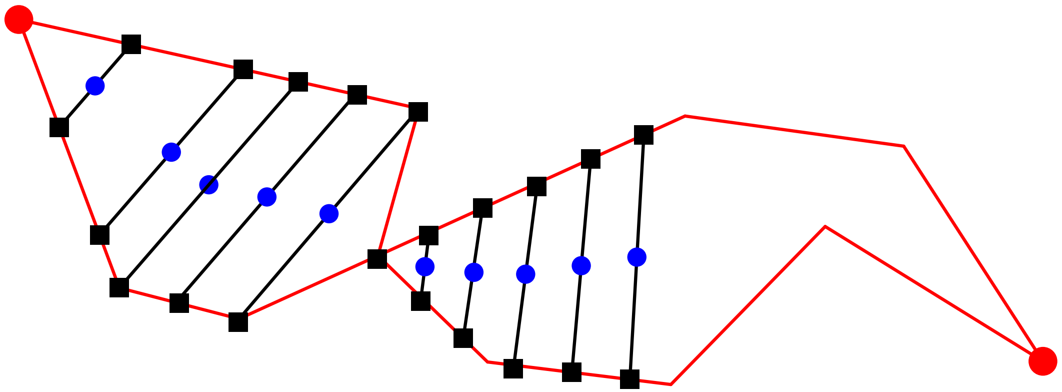
穴がないとき…



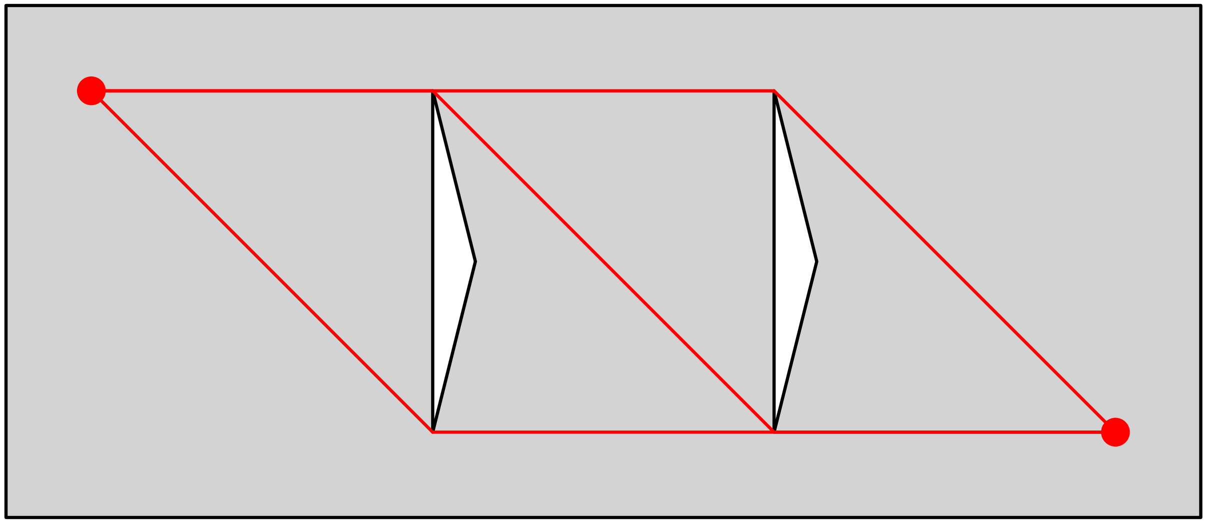
最短路の一意性：考え方



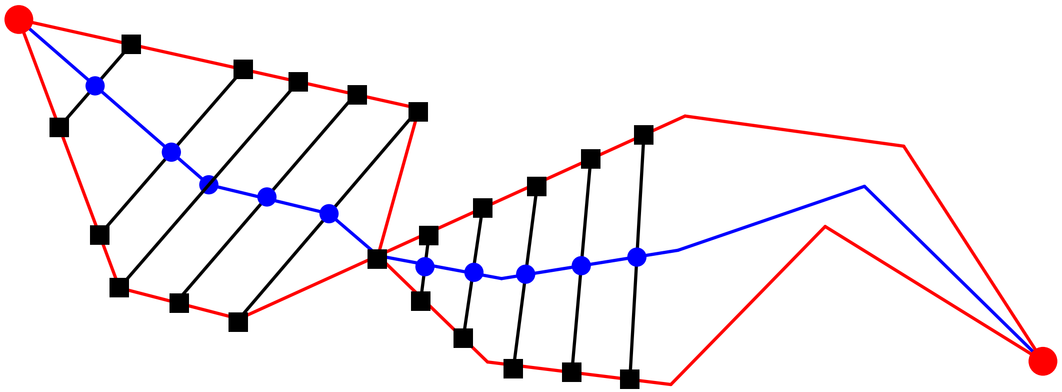
穴がないとき…



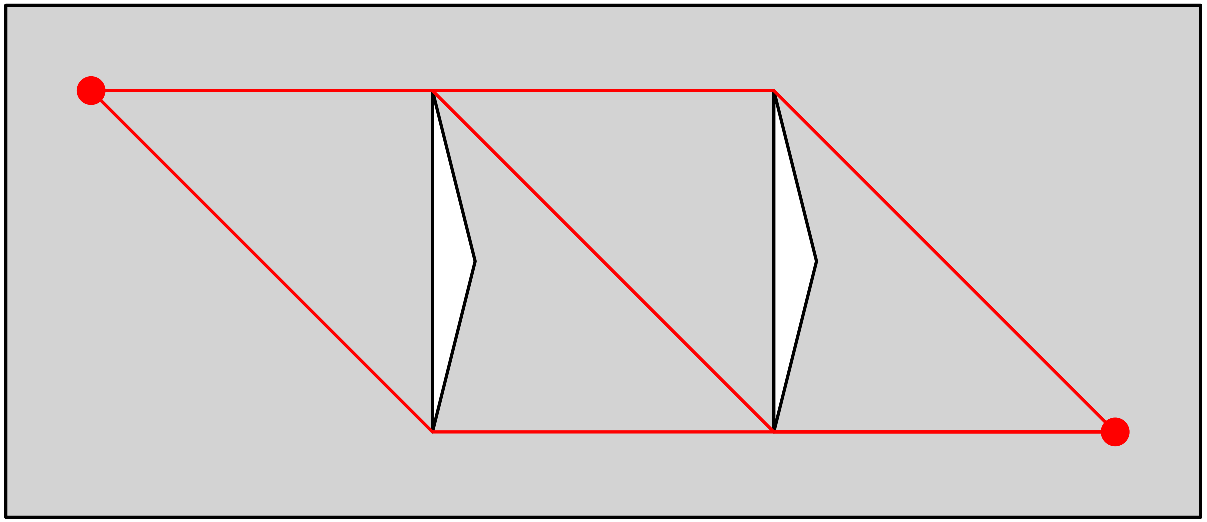
最短路の一意性：考え方



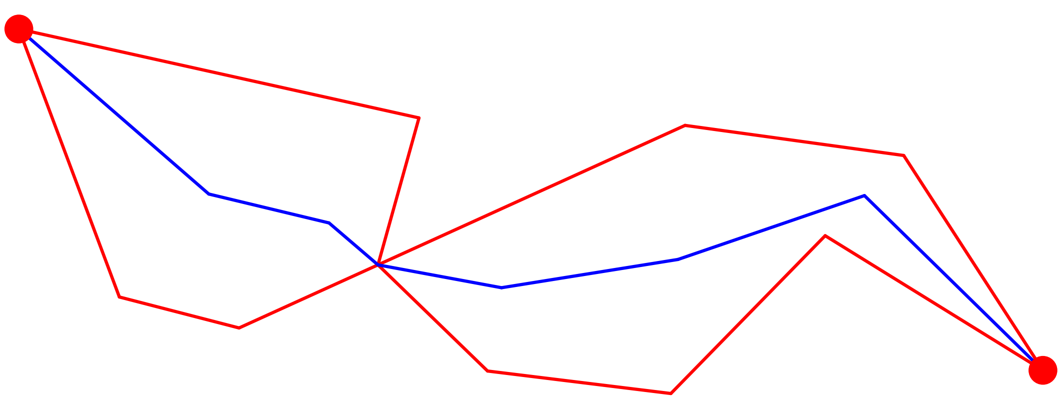
穴がないとき…



最短路の一意性：考え方



穴がないとき…　この青い経路も多角形に入っている



ノルムの性質：三角不等式

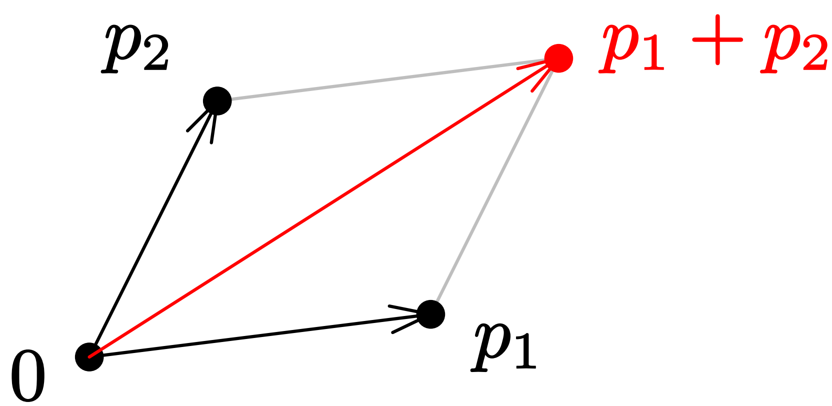
復習：$p = (x, y)$ に対して，$\|p\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

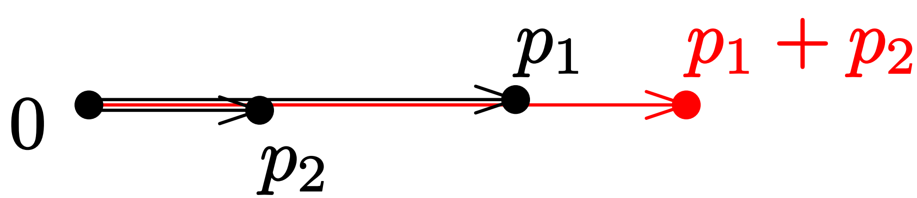
性質：三角不等式

任意の $p_1 = (x_1, y_2), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\|p_1 + p_2\|_2 \leq \|p_1\|_2 + \|p_2\|_2$$

等号成立 $\Leftrightarrow \exists\, t \geq 0 \colon p_1 = t\, p_2$





ノルムの性質：三角不等式

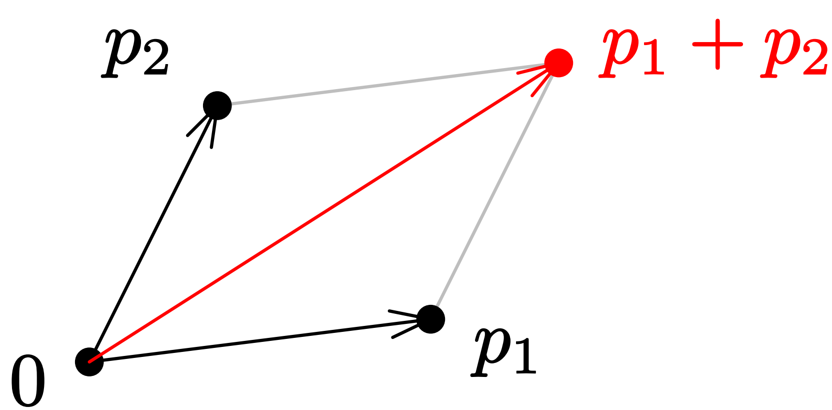
復習：$p=(x,y)$ に対して，$\|p\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$

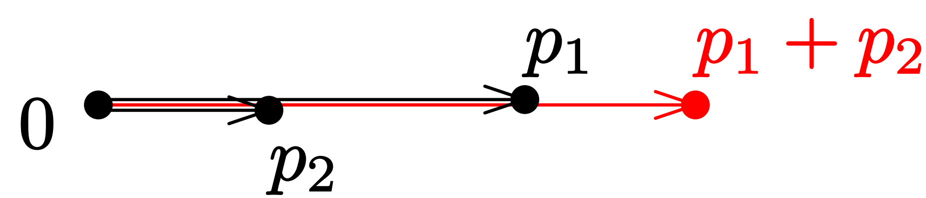
性質：三角不等式

任意の $p_1=(x_1,y_2), p_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\|p_1+p_2\|_2\le\|p_1\|_2+\|p_2\|_2$$

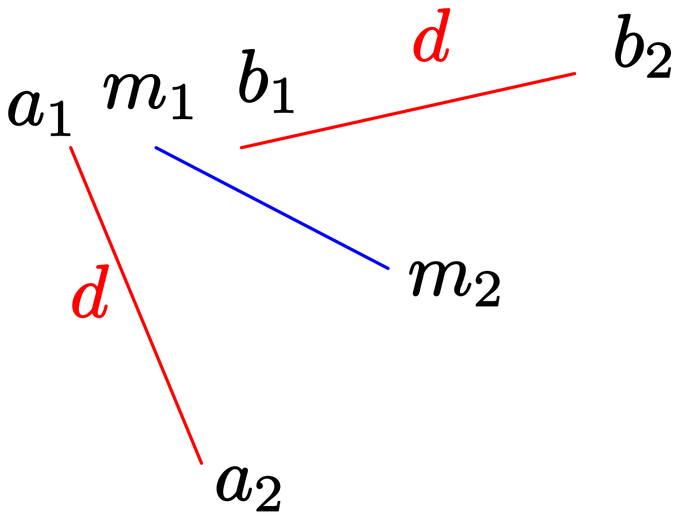
等号成立 $\Leftrightarrow \exists\, t\ge 0\colon p_1=t\,p_2$





証明 (ヒント)：コーシー・シュワルツの不等式を使う

最短路の一意性：証明

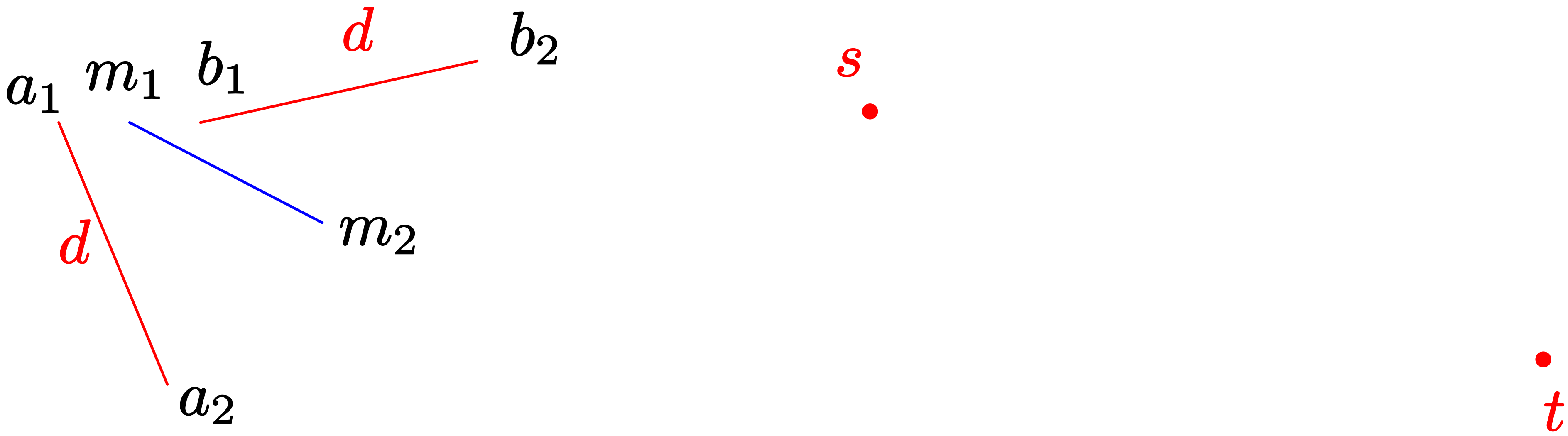


$$
\begin{aligned}
\|m_1 - m_2\|_2 &= \|(a_1 + b_1)/2 - (a_2 + b_2)/2\|_2 \\
&= \|(a_1 - a_2)/2 + (b_1 - b_2)/2\|_2 \\
&\le \|(a_1 - a_2)/2\|_2 + \|(b_1 - b_2)/2\|_2 \\
&= \|a_1 - a_2\|_2/2 + \|b_1 - b_2\|_2/2 \\
&= d/2 + d/2 = d
\end{aligned}
$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{a_1 a_2}$ と $\overrightarrow{b_1 b_2}$ が (同じ向きで) 平行

(等号成立しないと，青の経路の方が短くなり，矛盾)

最短路の一意性：証明

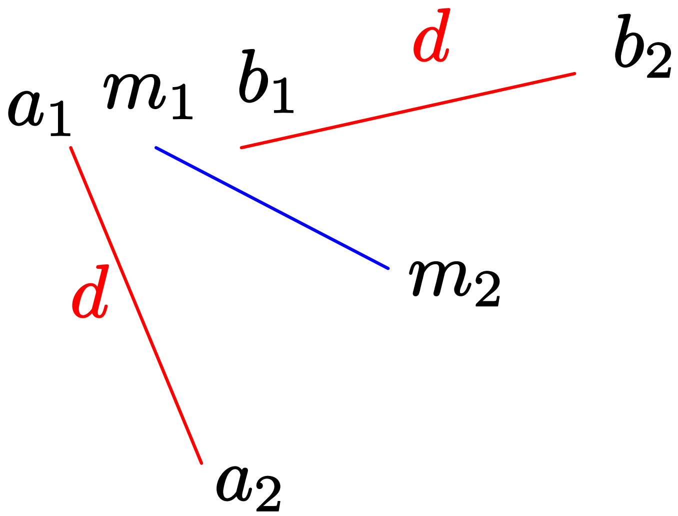


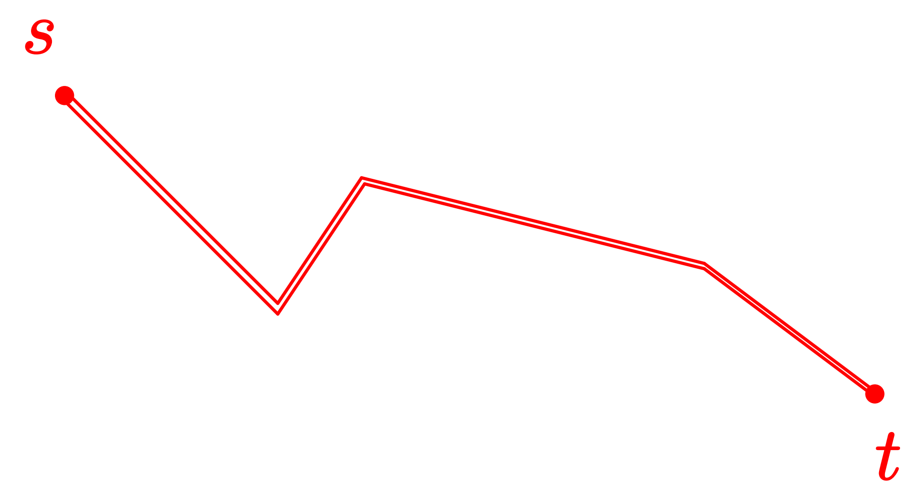
$$
\begin{aligned}
\|m_1 - m_2\|_2 &= \|(a_1 + b_1)/2 - (a_2 + b_2)/2\|_2 \\
&= \|(a_1 - a_2)/2 + (b_1 - b_2)/2\|_2 \\
&\le \|(a_1 - a_2)/2\|_2 + \|(b_1 - b_2)/2\|_2 \\
&= \|a_1 - a_2\|_2/2 + \|b_1 - b_2\|_2/2 \\
&= d/2 + d/2 = d
\end{aligned}
$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{a_1 a_2}$ と $\overrightarrow{b_1 b_2}$ が (同じ向きで) 平行

(等号成立しないと，青の経路の方が短くなり，矛盾)

最短路の一意性：証明





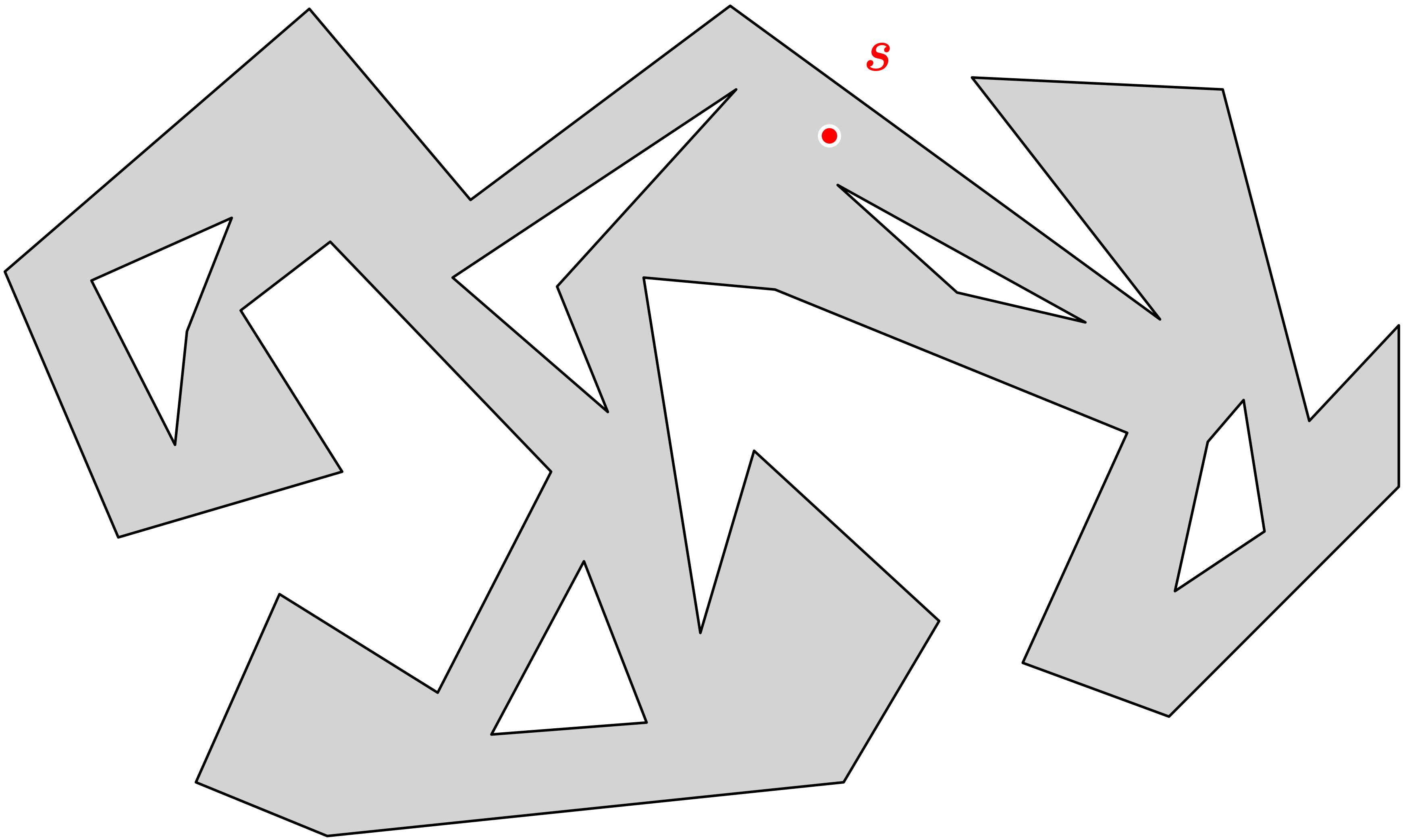
$$
\begin{aligned}
\|m_1 - m_2\|_2 &= \|(a_1 + b_1)/2 - (a_2 + b_2)/2\|_2 \\
&= \|(a_1 - a_2)/2 + (b_1 - b_2)/2\|_2 \\
&\leq \|(a_1 - a_2)/2\|_2 + \|(b_1 - b_2)/2\|_2 \\
&= \|a_1 - a_2\|_2/2 + \|b_1 - b_2\|_2/2 \\
&= d/2 + d/2 = d
\end{aligned}
$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{a_1 a_2}$ と $\overrightarrow{b_1 b_2}$ が (同じ向きで) 平行

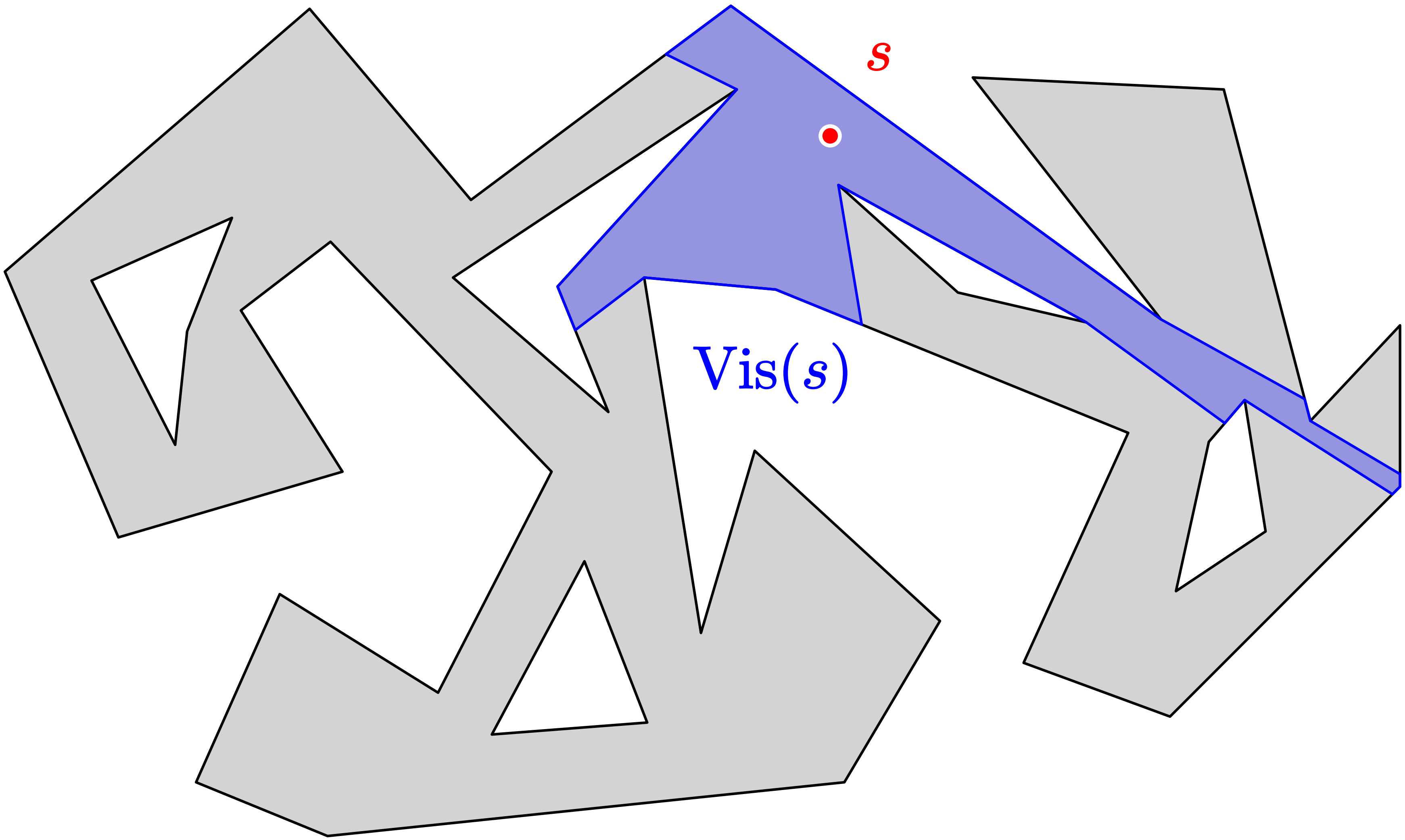
(等号成立しないと，青の経路の方が短くなり，矛盾)

目次

可視領域：例

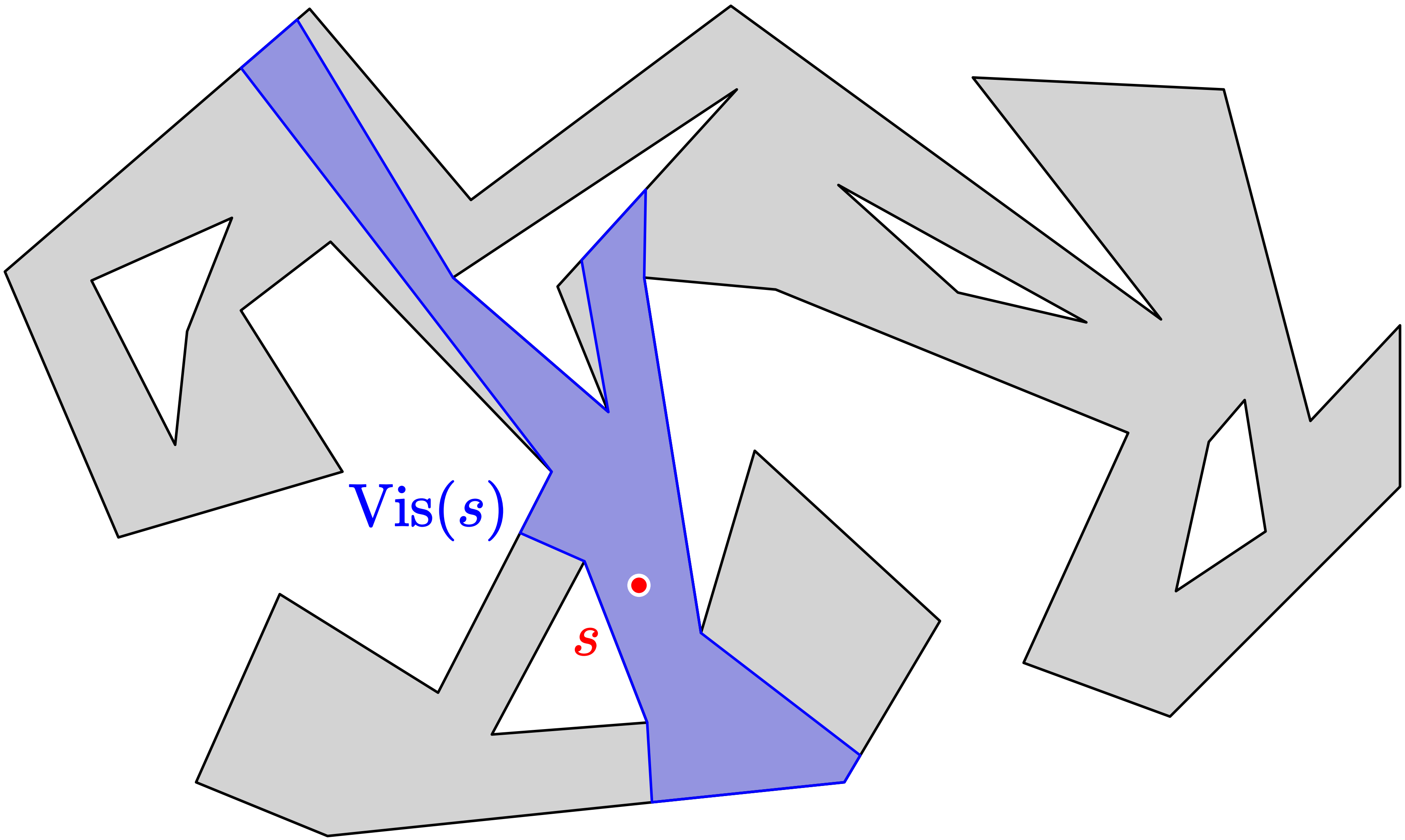


可視領域：例



s から曲がらずに到達できる点全体の集合
$= s$ から見える点全体の集合

可視領域：例



s から曲がらずに到達できる点全体の集合
$= s$ から見える点全体の集合

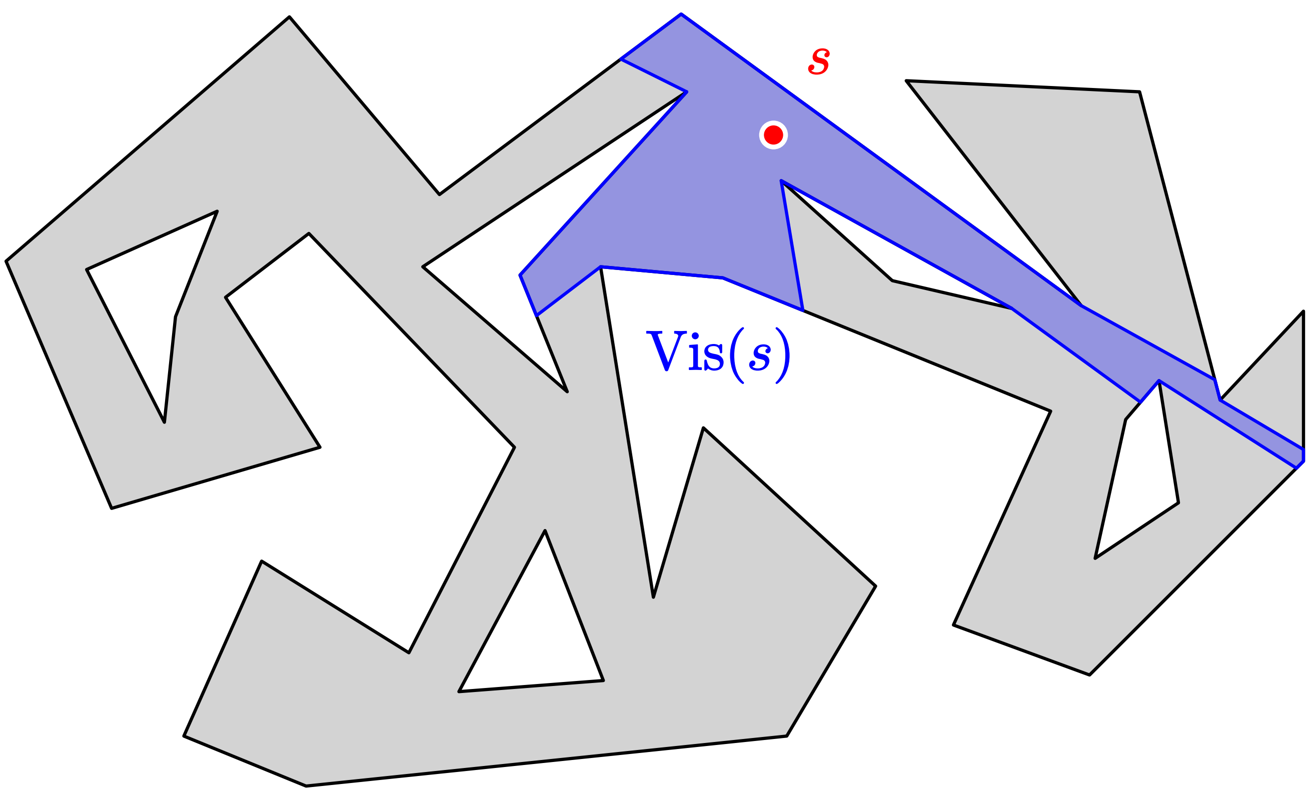
可視領域：定義

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $s \in P$

定義：可視領域 (可視性領域)

P における s の **可視領域** とは，次の集合

$$\mathrm{Vis}(s) = \{p \in P \mid \overline{sp} \subseteq P\}$$

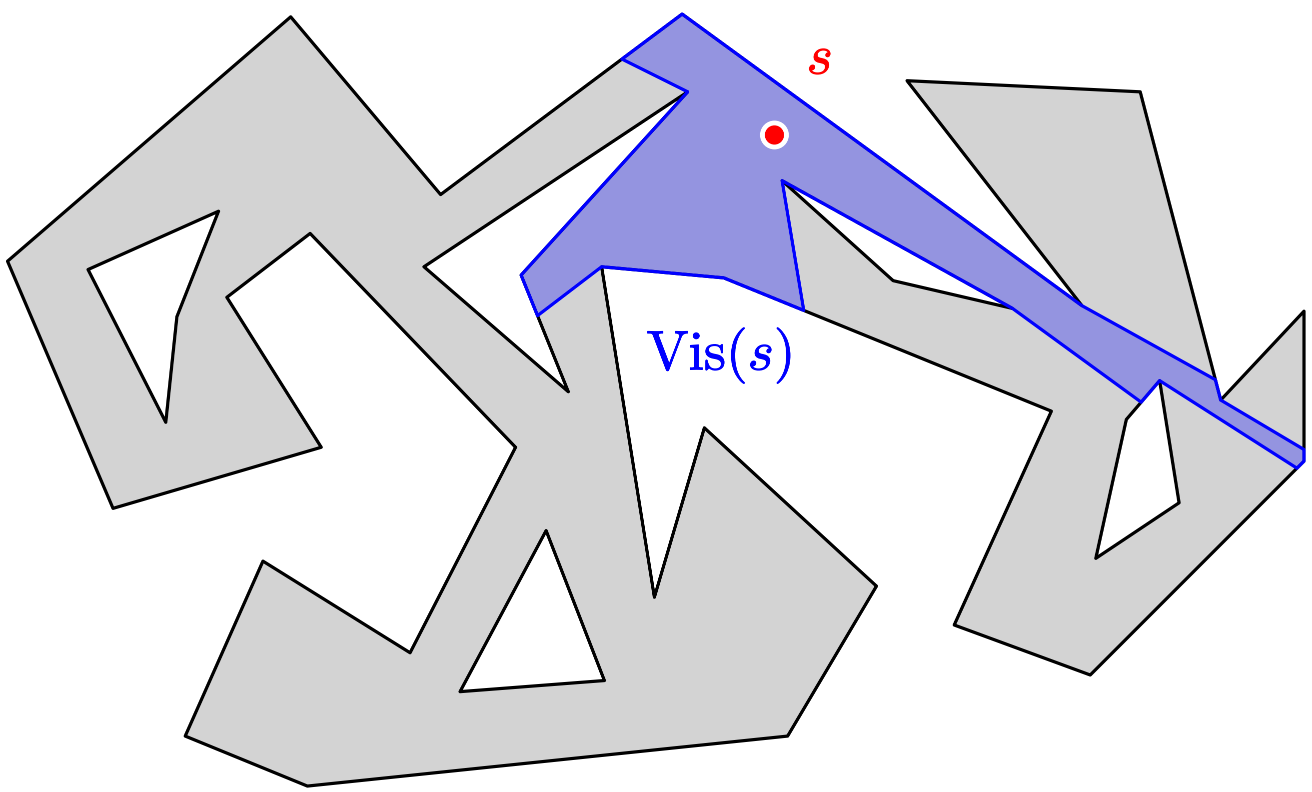


可視領域は単純多角形

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2, \ s \in P$

性質：可視領域は単純多角形

可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ は単純多角形である

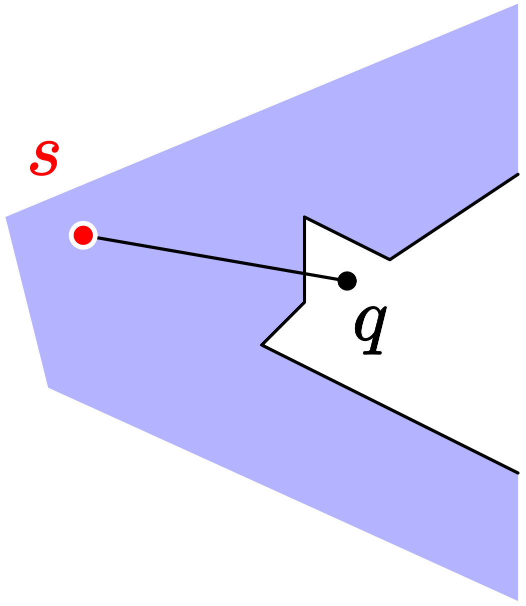


可視領域は単純多角形：証明

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $s \in P$

性質：可視領域は単純多角形

可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ は単純多角形である



<u>証明</u>：$q \notin \mathrm{Vis}(s)$ とする

- 可視領域の定義より，$\overline{sq} \not\subseteq P$
- $\overline{sq}$ を延ばして線分 $\overline{sq'}$ を作ると，$\overline{sq} \subseteq \overline{sq'}$ なので，$\overline{sq'} \not\subseteq P$
- $\therefore q' \notin \mathrm{Vis}(s)$
- $\therefore q'$ はいくらでも遠くにとれるので，q は穴に含まれない

$\square$

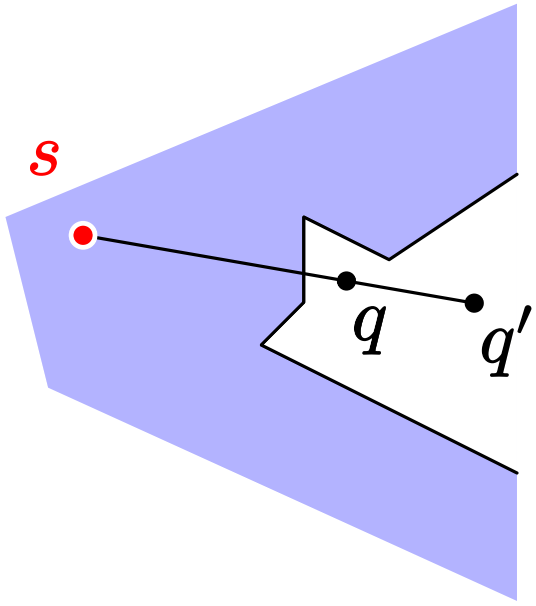
多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $s \in P$

性質：可視領域は単純多角形

可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ は単純多角形である

証明：$q \notin \mathrm{Vis}(s)$ とする

- 可視領域の定義より，$\overline{sq} \not\subseteq P$
- $\overline{sq}$ を延ばして線分 $\overline{sq'}$ を作ると，$\overline{sq} \subseteq \overline{sq'}$ なので，$\overline{sq'} \not\subseteq P$
- $\therefore q' \notin \mathrm{Vis}(s)$
- $\therefore q'$ はいくらでも遠くにとれるので，q は穴に含まれない

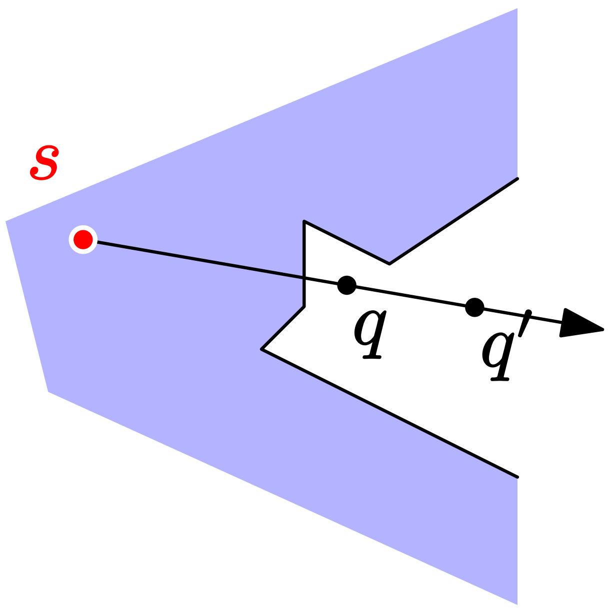


$\square$

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2, \ s \in P$

性質：可視領域は単純多角形

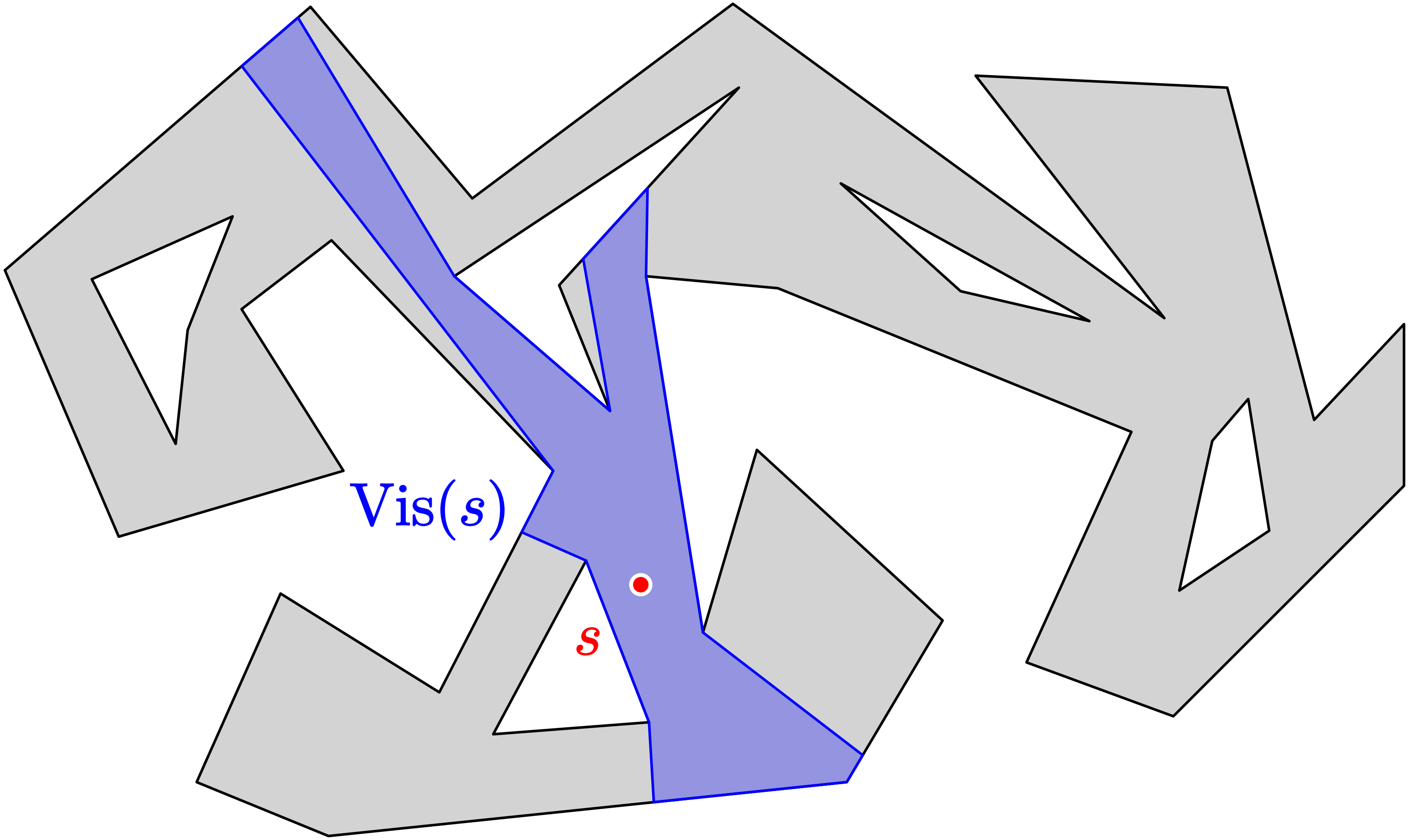
可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ は単純多角形である



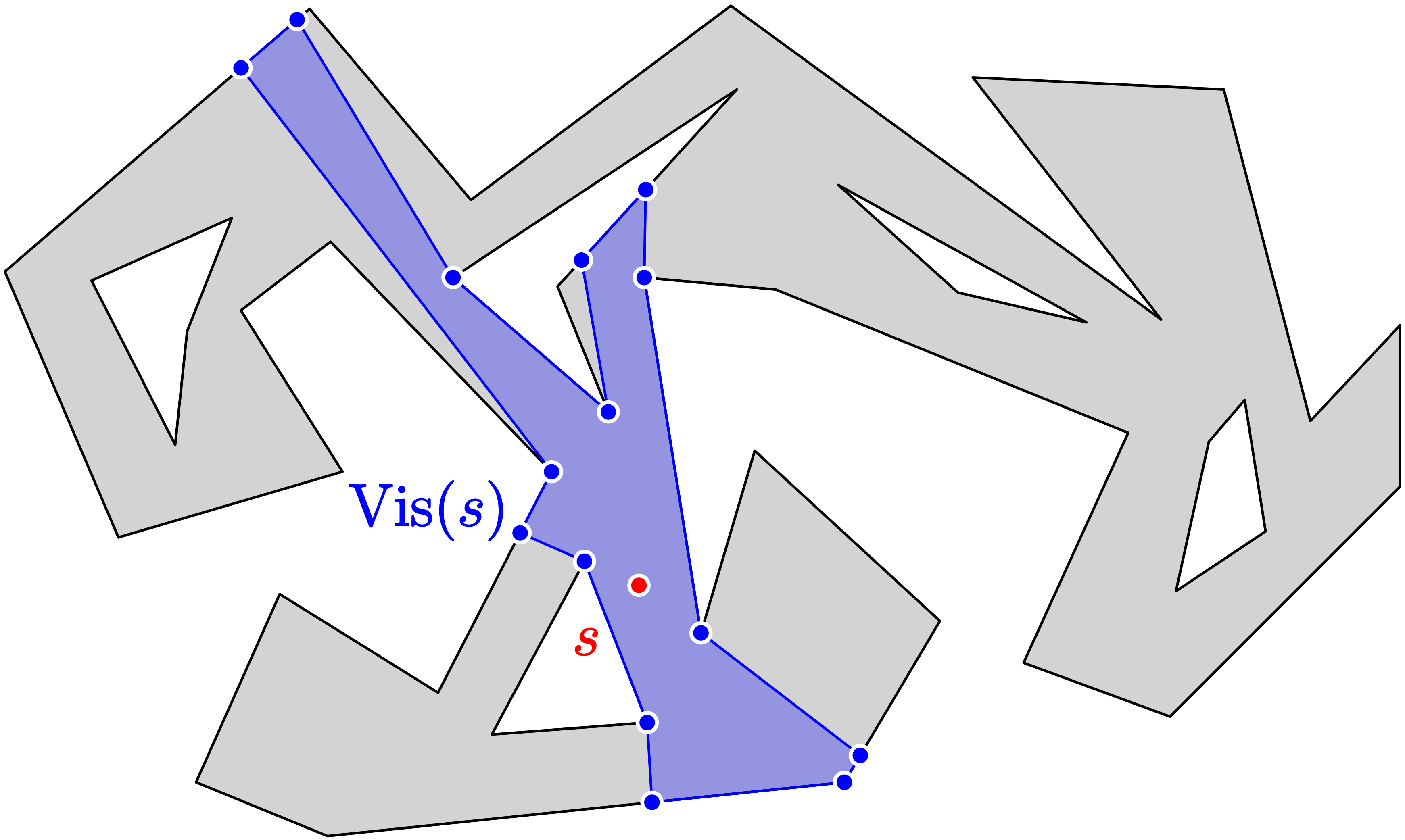
証明：$q \notin \mathrm{Vis}(s)$ とする

- 可視領域の定義より，$\overline{sq} \not\subseteq P$
- $\overline{sq}$ を延ばして線分 $\overline{sq'}$ を作ると，
  $\overline{sq} \subseteq \overline{sq'}$ なので，$\overline{sq'} \not\subseteq P$
- $\therefore q' \notin \mathrm{Vis}(s)$
- $\therefore q'$ はいくらでも遠くにとれるので，
  q は穴に含まれない $\square$

可視領域の頂点数：例

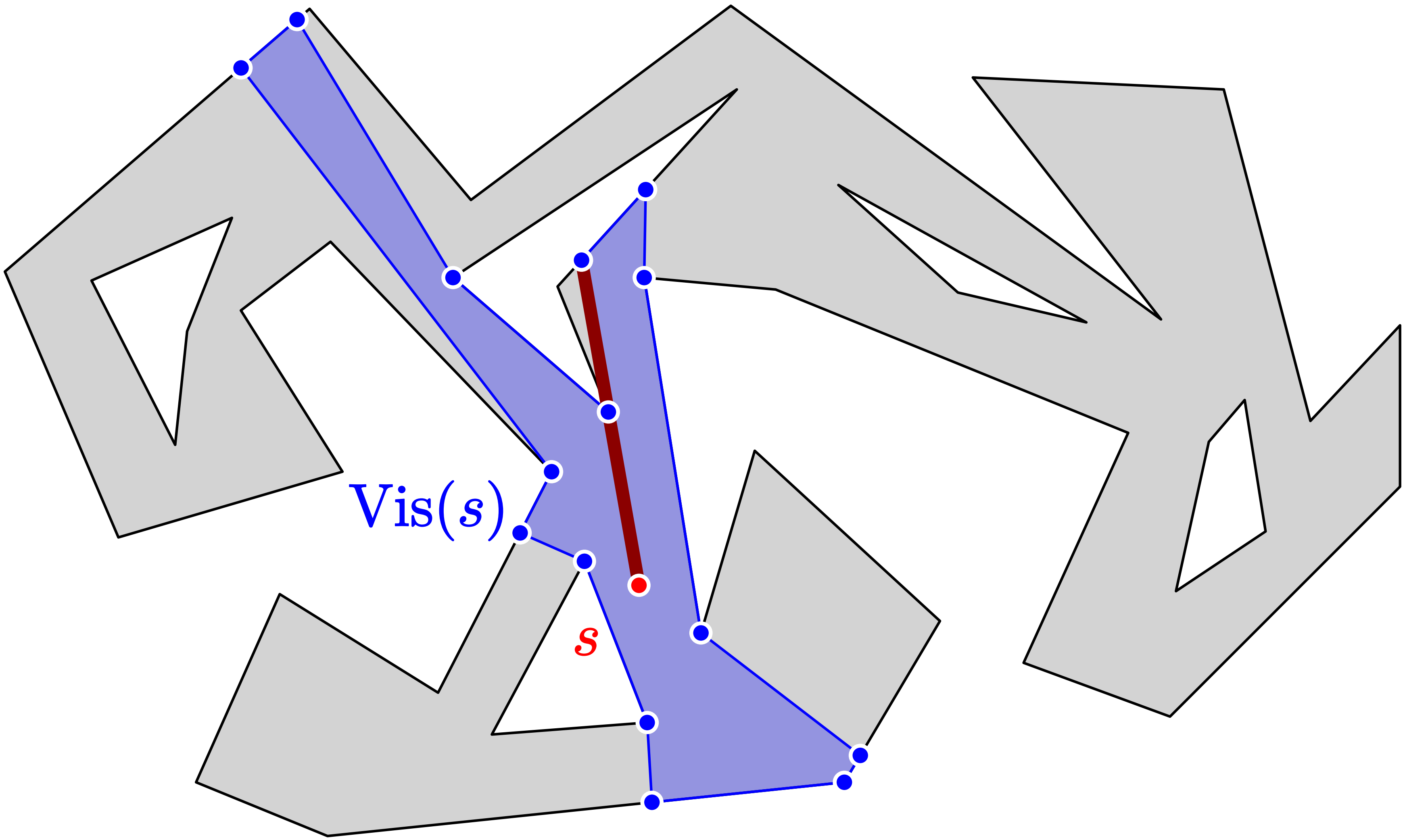


可視領域の頂点数：例



$\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数 $= 15$　　　多角形領域の頂点数 $= 46$

可視領域の頂点数：例



$\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数 $= 15$

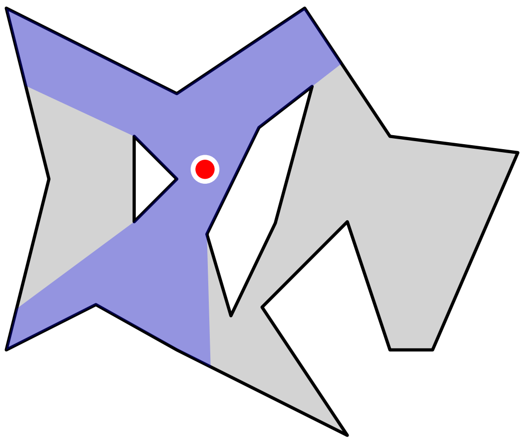
多角形領域の頂点数 $= 46$

可視領域の頂点数

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $s \in P$, $n = P$ の頂点数

性質：可視領域の頂点数

可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数 $\leq 2n$



証明：$\mathrm{Vis}(s)$ には 2 種類の頂点がある

(1) P の頂点であるもの
- その数 $\leq n$

(2) P の頂点ではないもの
- そのような頂点 v に対して，$\overline{sv}$ は P の頂点を含み
  そのような P の頂点は v によって異なる
- $\therefore$ そのような頂点の数 $\leq n$

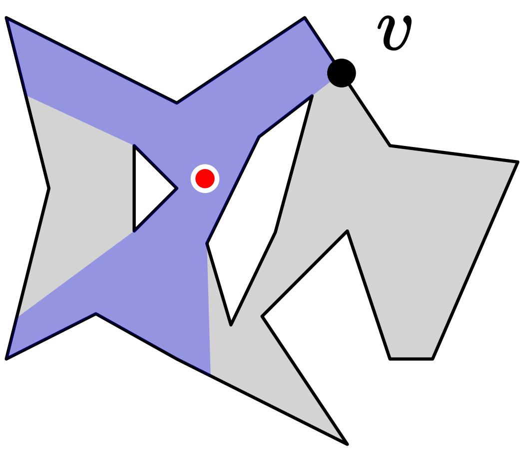
合わせて，$\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数 $\leq 2n$ $\square$

可視領域の頂点数

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $s \in P$, $n = P$ の頂点数

性質：可視領域の頂点数

可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数 $\leq 2n$



証明：$\mathrm{Vis}(s)$ には 2 種類の頂点がある

(1) P の頂点であるもの
- その数 $\leq n$

(2) P の頂点ではないもの
- そのような頂点 v に対して，$\overline{sv}$ は P の頂点を含み
  そのような P の頂点は v によって異なる
- $\therefore$ そのような頂点の数 $\leq n$

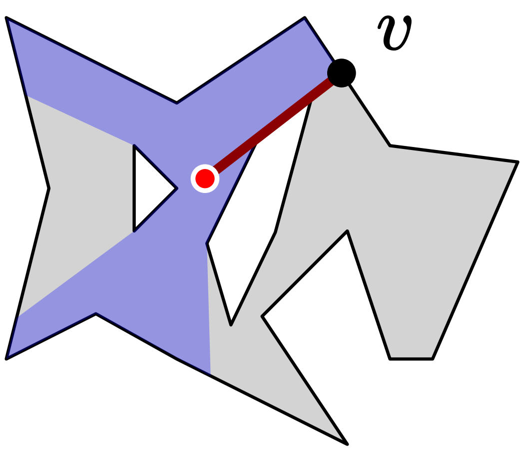
合わせて，$\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数 $\leq 2n$ $\square$

可視領域の頂点数

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $s \in P$, $n = P$ の頂点数

性質：可視領域の頂点数

可視領域 $\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数 $\leq 2n$



証明：$\mathrm{Vis}(s)$ には 2 種類の頂点がある

(1) P の頂点であるもの

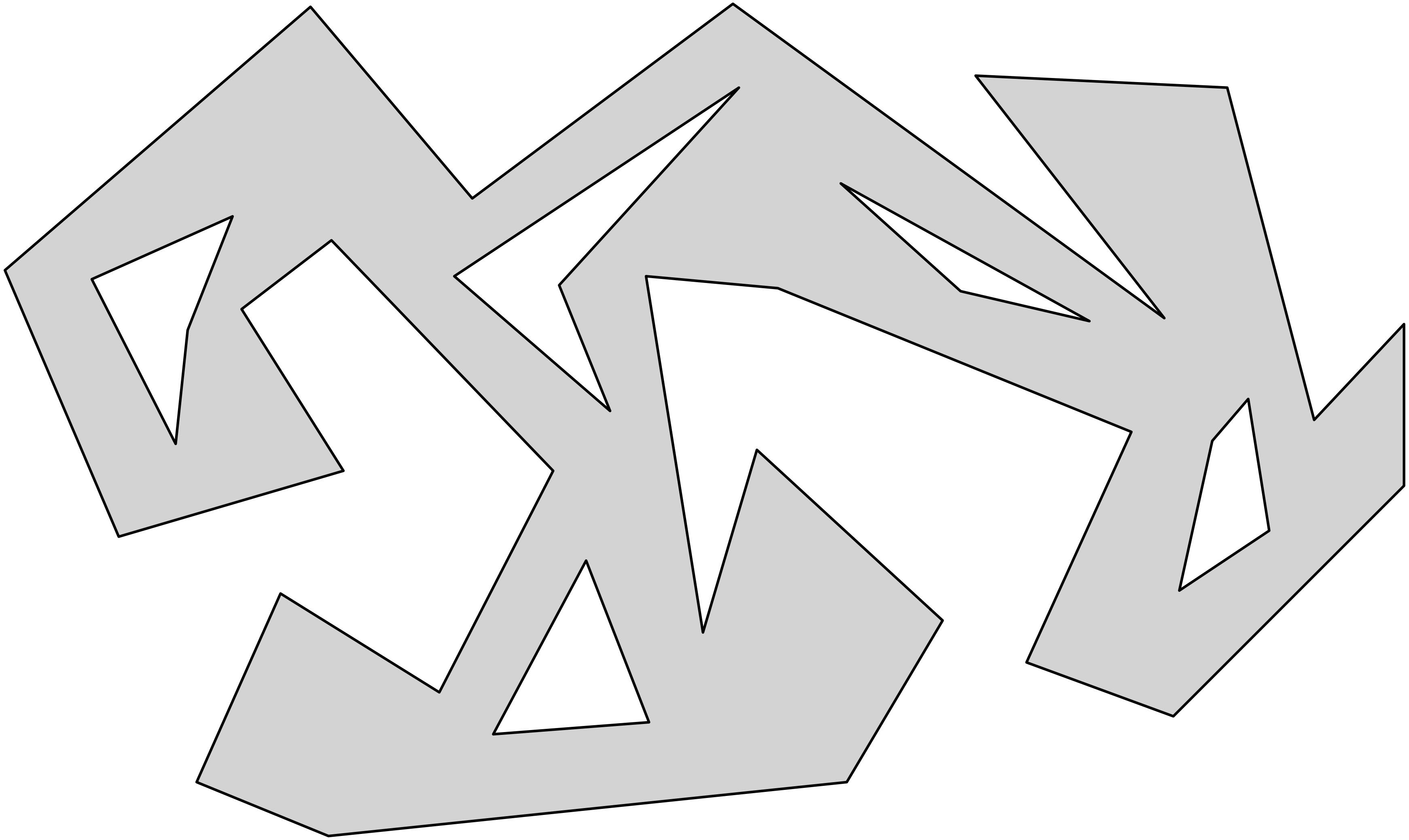
- その数 $\leq n$

(2) P の頂点ではないもの

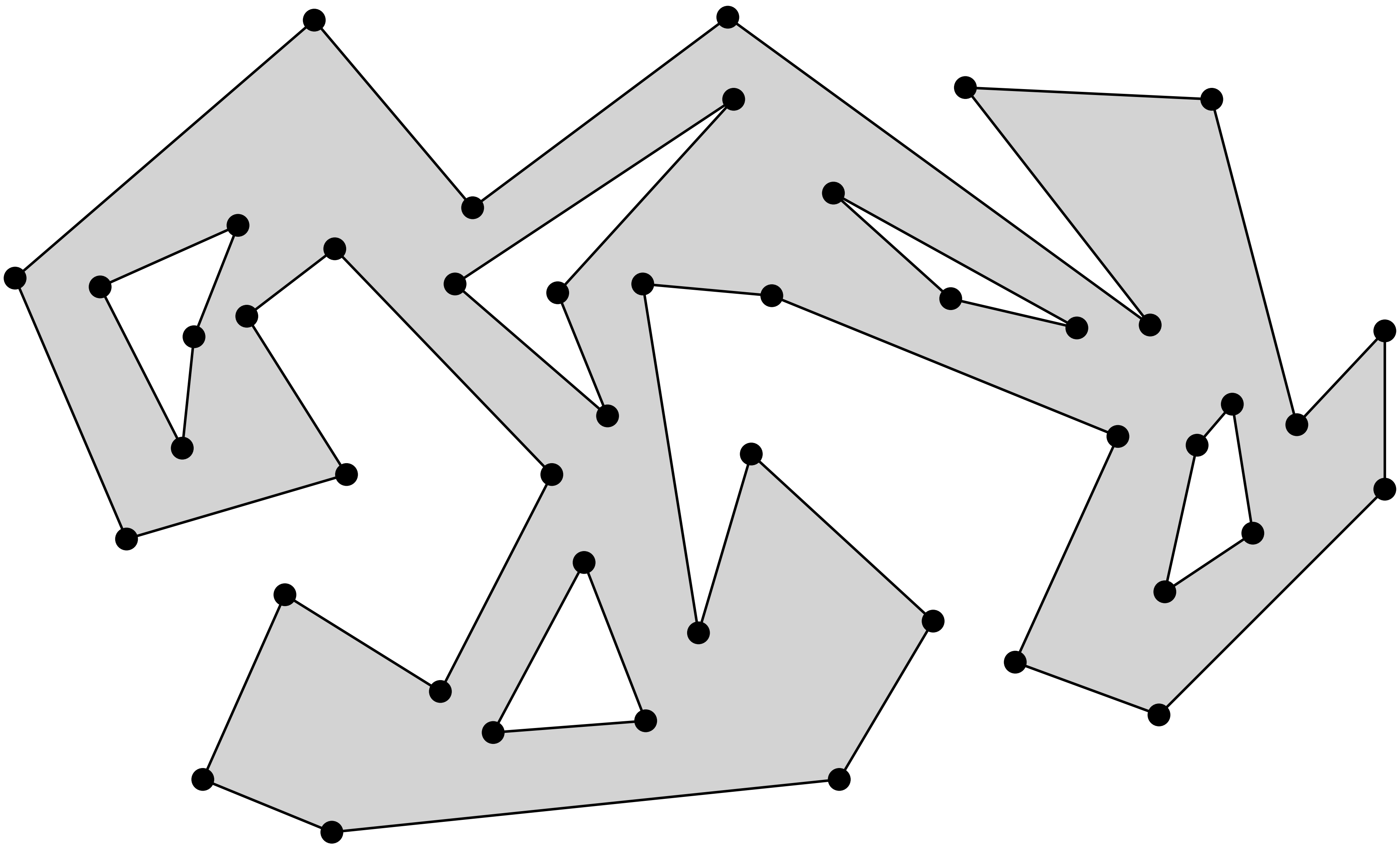
- そのような頂点 v に対して，$\overline{sv}$ は P の頂点を含み
  そのような P の頂点は v によって異なる
- $\therefore$ そのような頂点の数 $\leq n$

合わせて，$\mathrm{Vis}(s)$ の頂点数 $\leq 2n$ $\square$

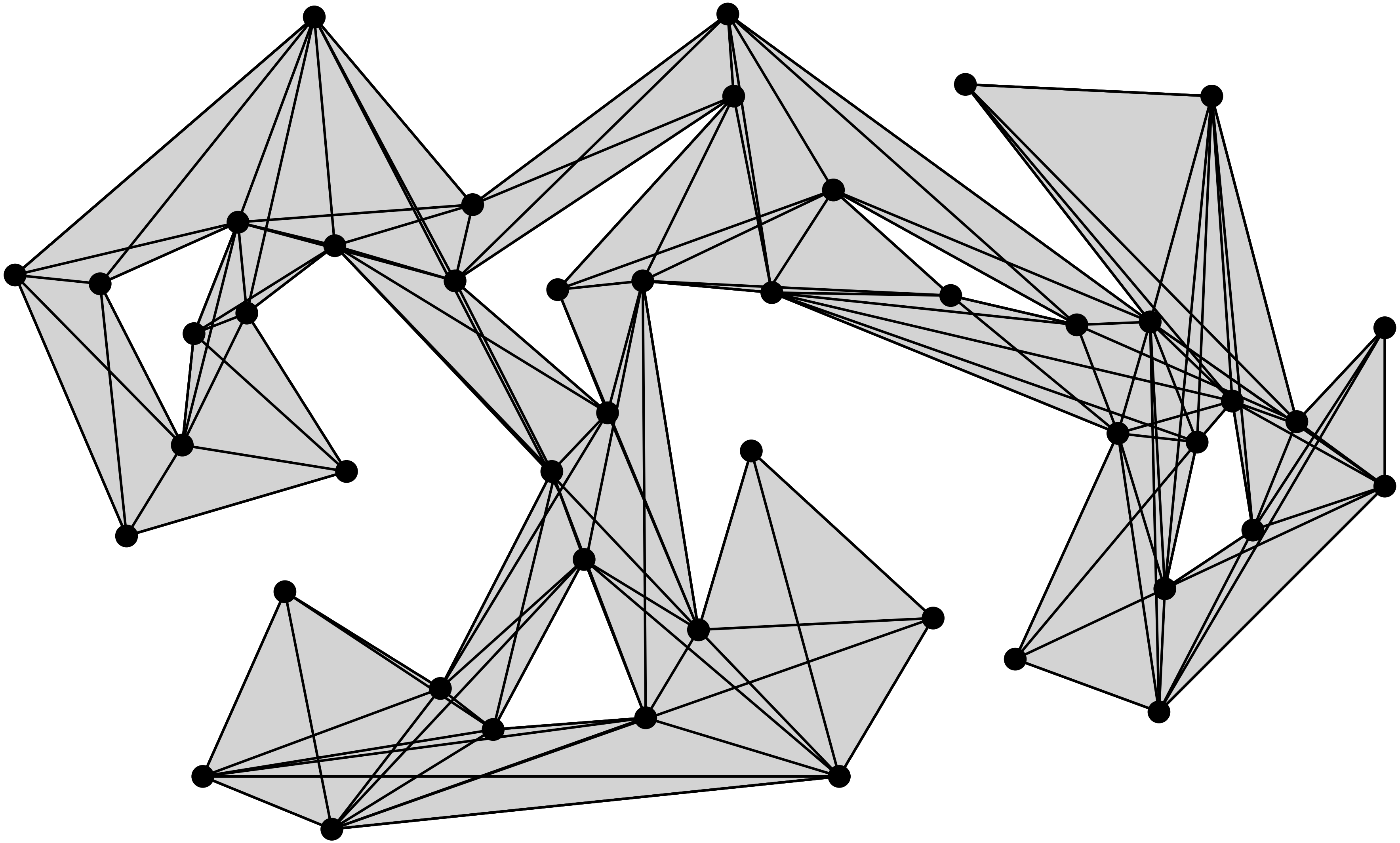
可視グラフ：例



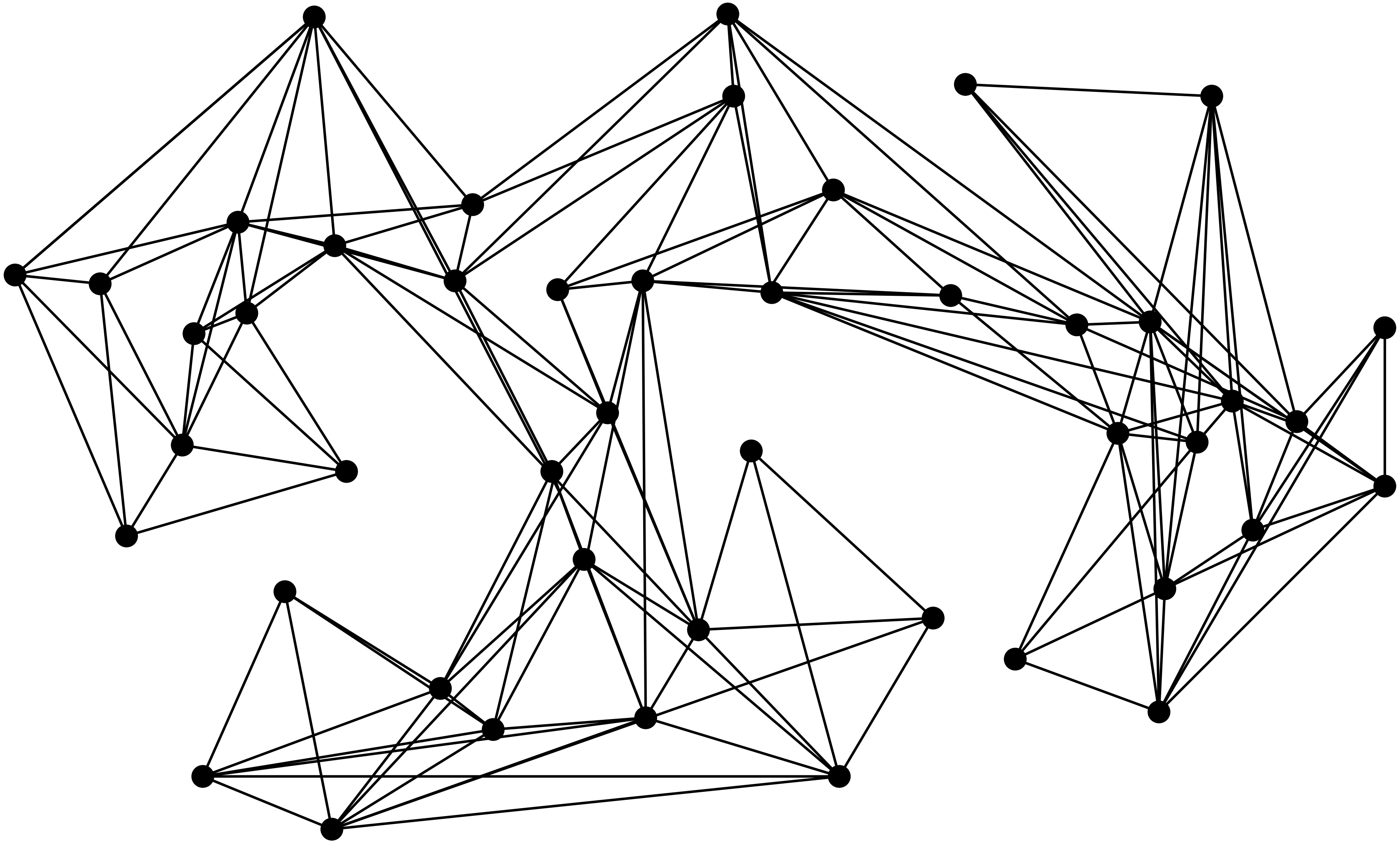
可視グラフ：例



可視グラフ：例



可視グラフ：例



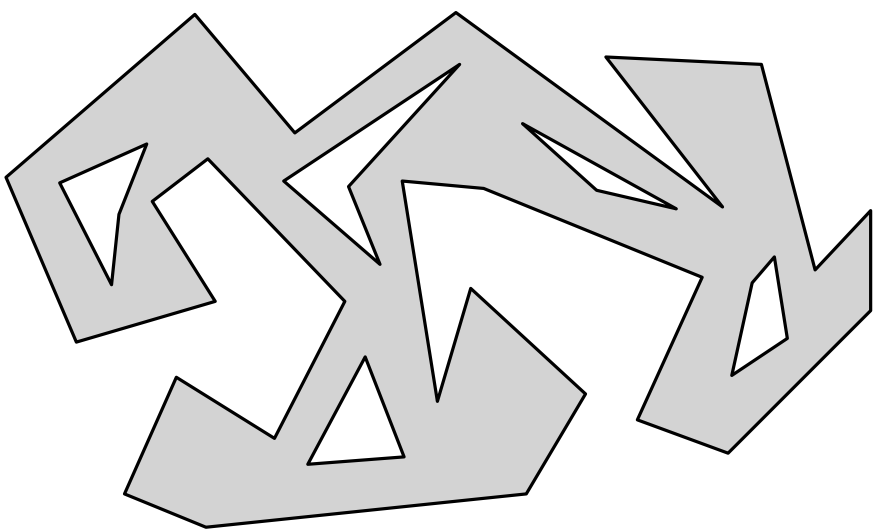
可視グラフ

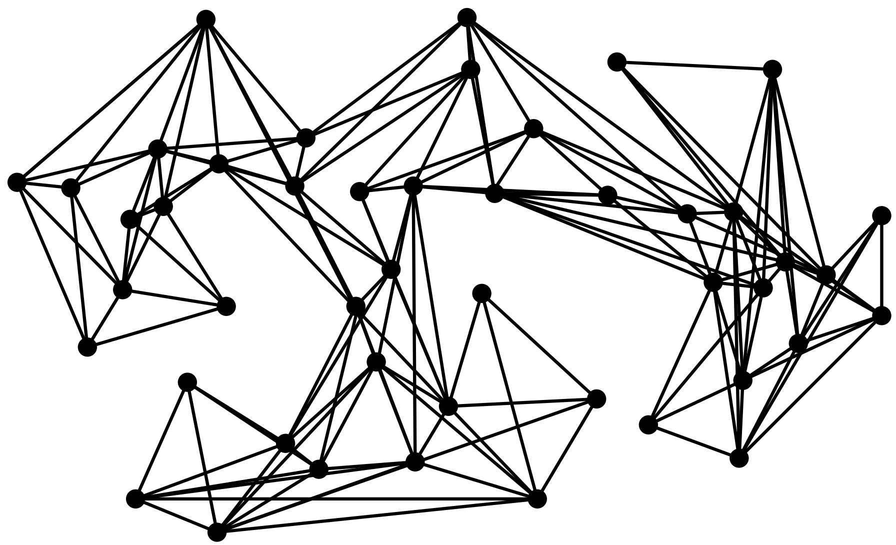
多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$

定義：可視グラフ (可視性グラフ)

P の **可視グラフ** とは, 次のような幾何グラフ $G = (V, E)$

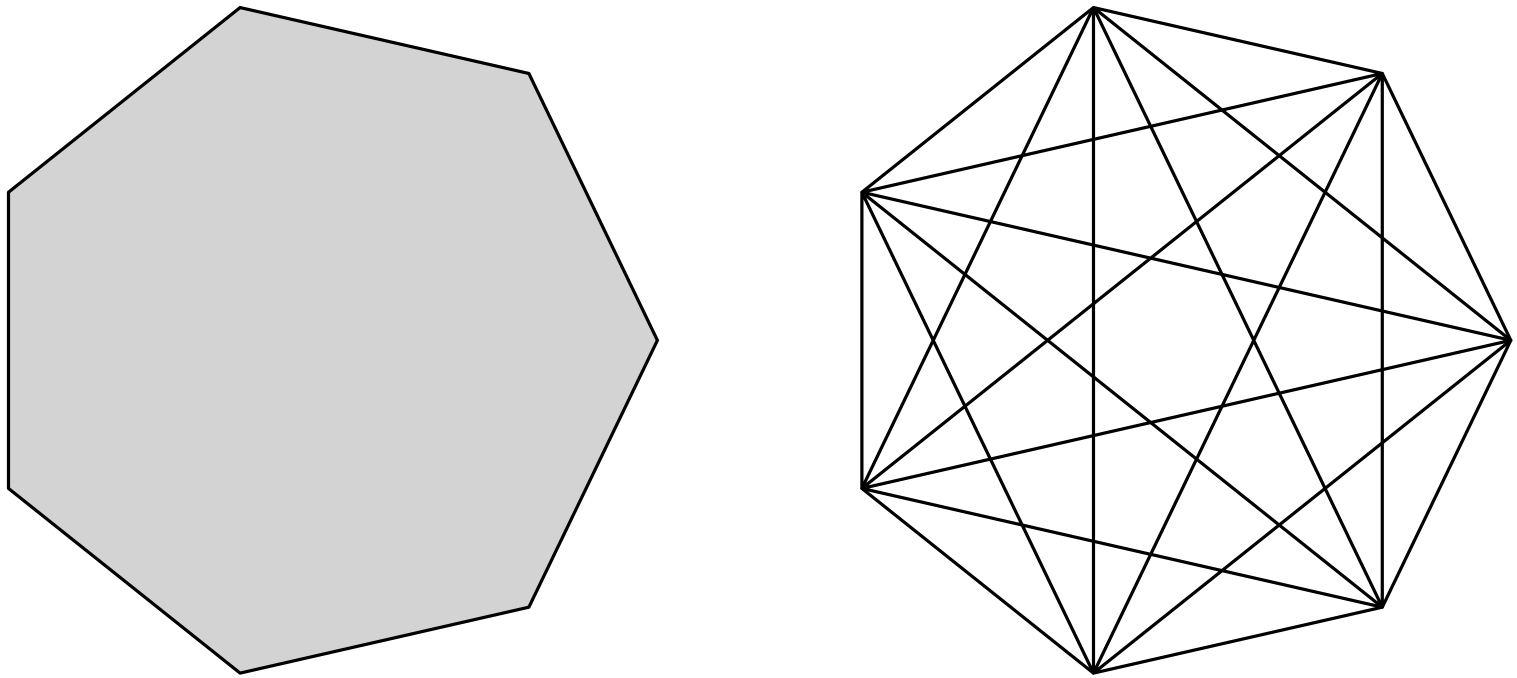
- $v \in V \Leftrightarrow v$ は P の頂点
- $\overline{uv} \in E \Leftrightarrow \overline{uv} \subseteq P$



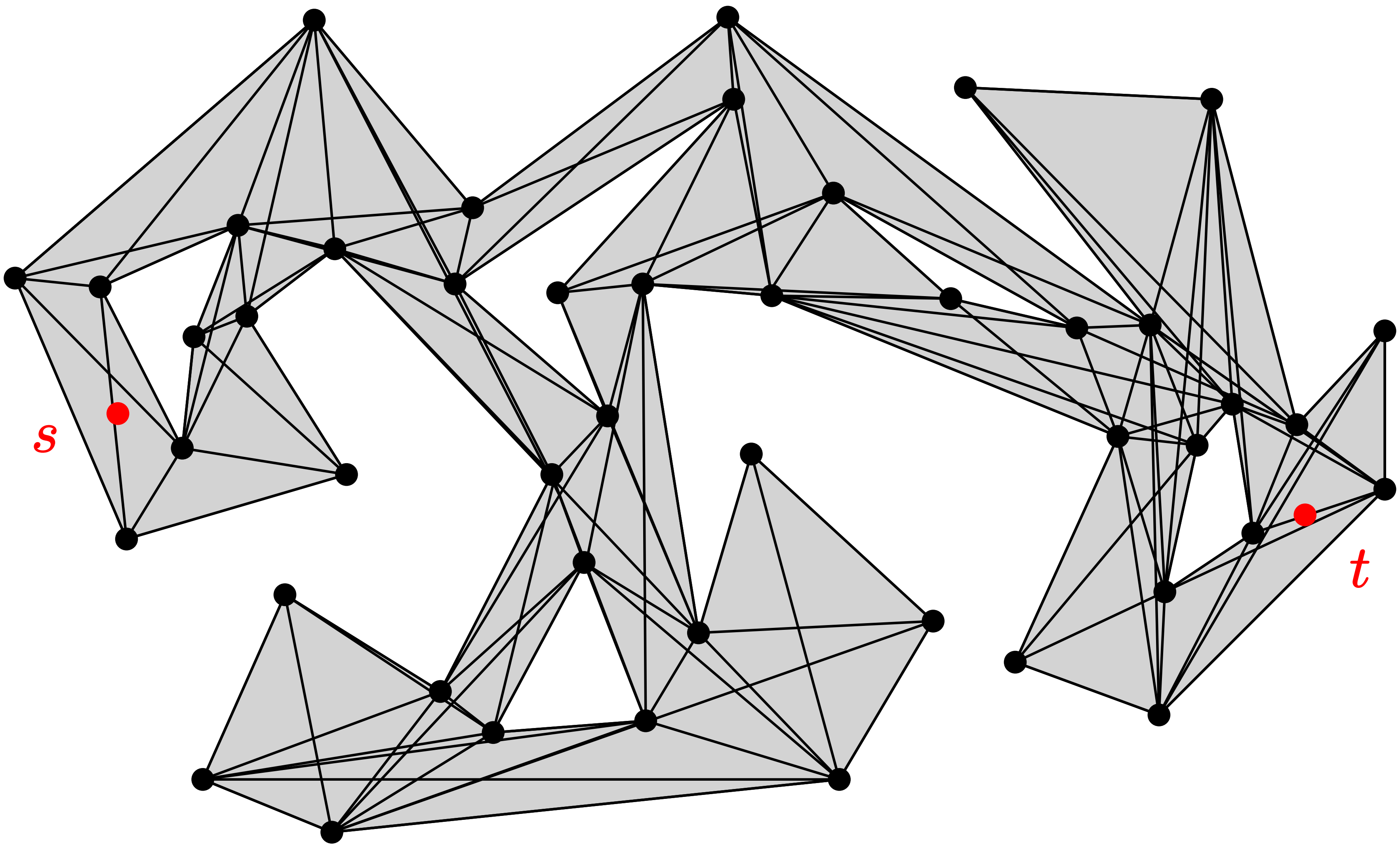


可視グラフの辺の数

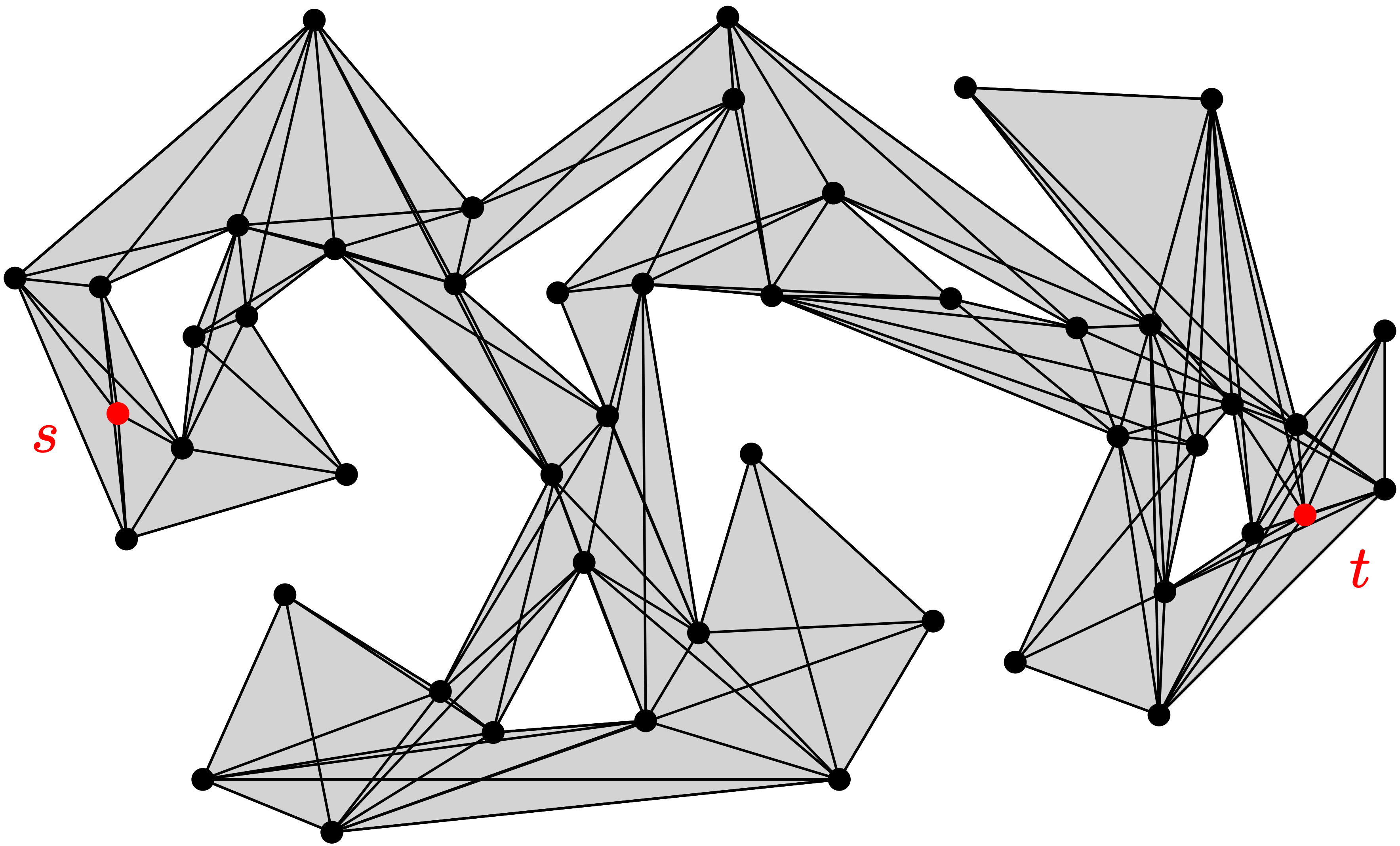
$$\text{頂点数} = n \Rightarrow \text{辺数} \leq \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$



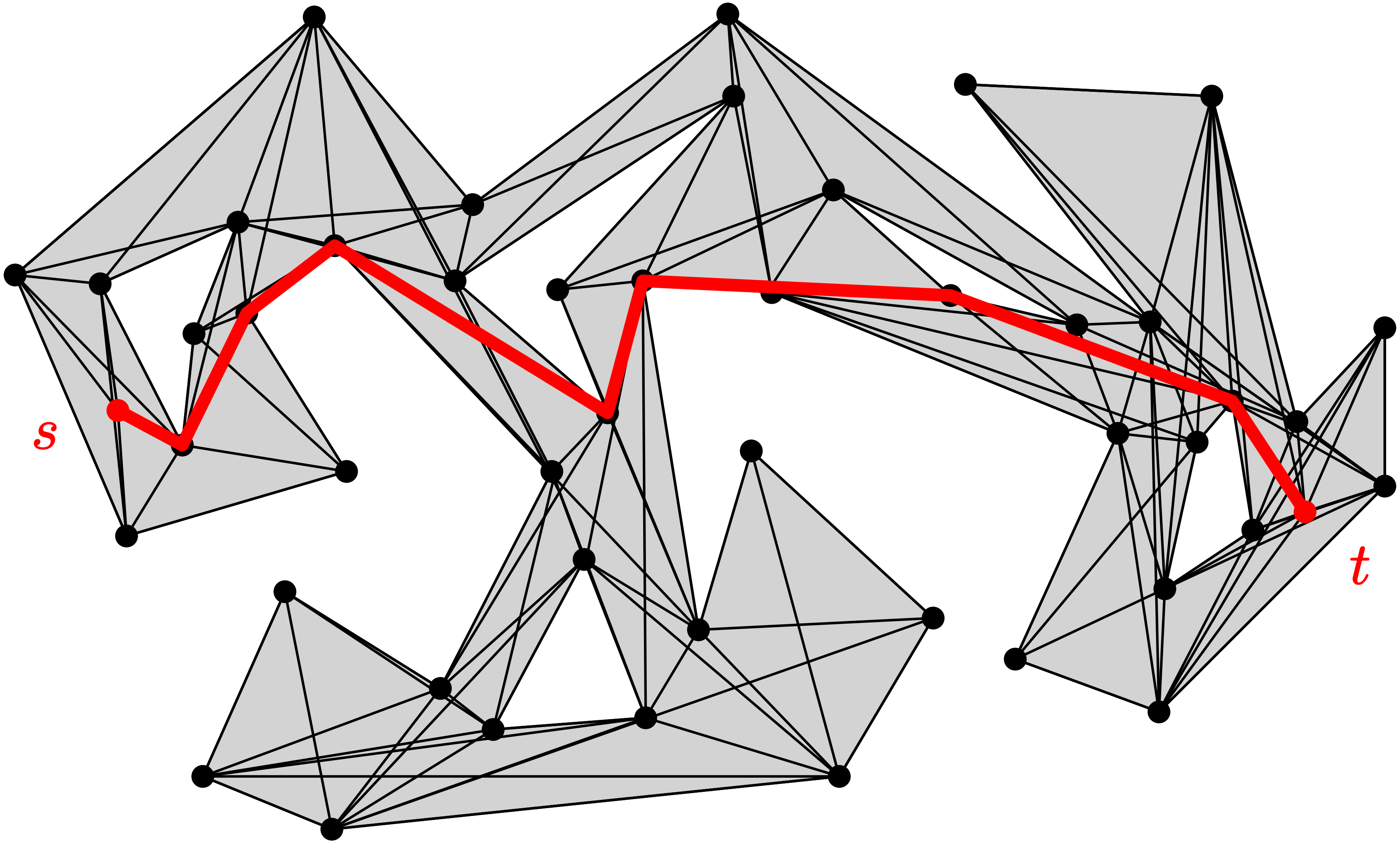
可視グラフと最短路問題



可視グラフと最短路問題



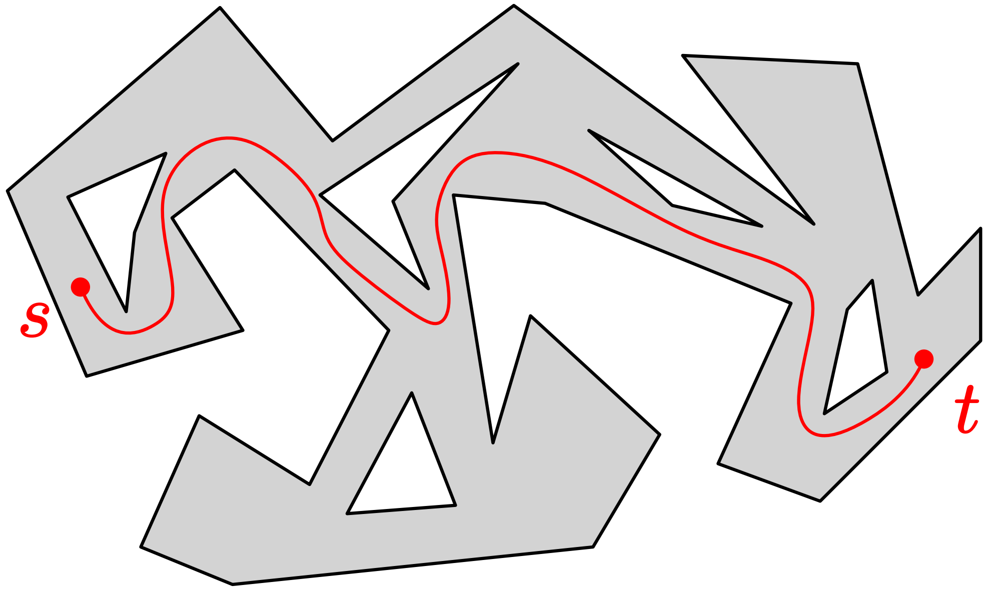
可視グラフと最短路問題



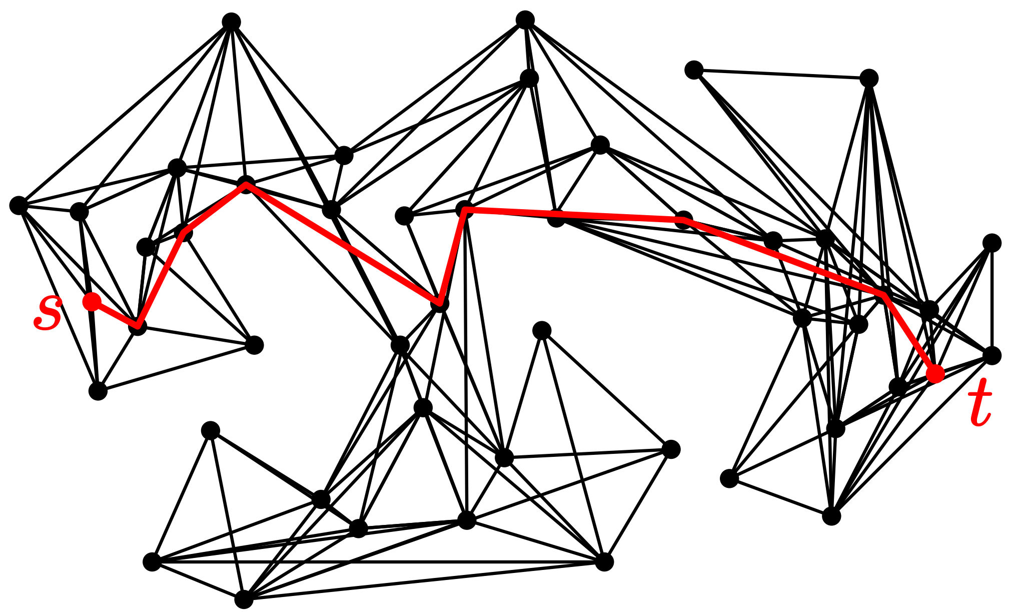
辺の長さ = 線分の長さ (ユークリッド長)

$\rightsquigarrow$ ダイクストラ法などで，最短路問題を解ける

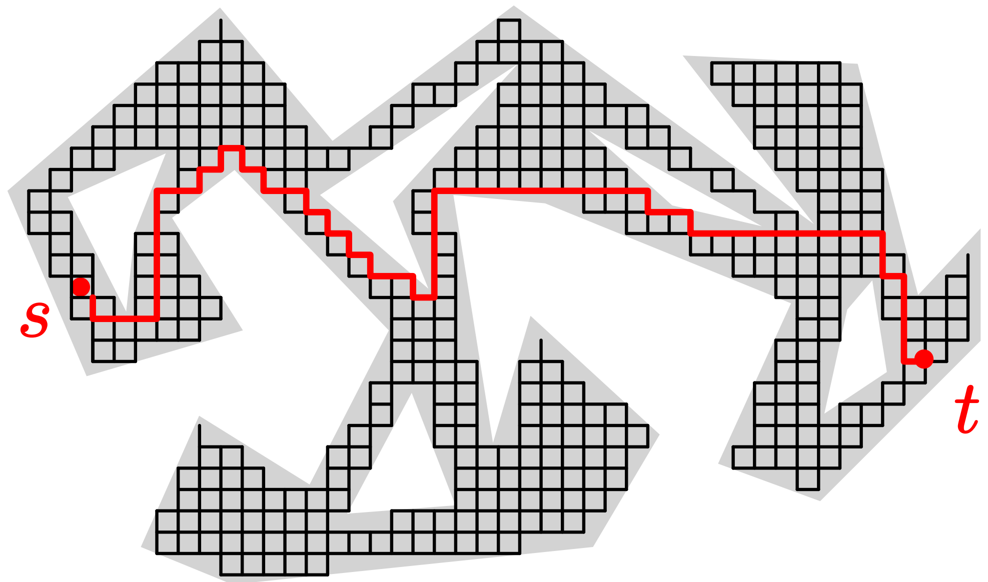
多角形内の最短路問題は
本来 連続的な問題



解決方法：組合せ化

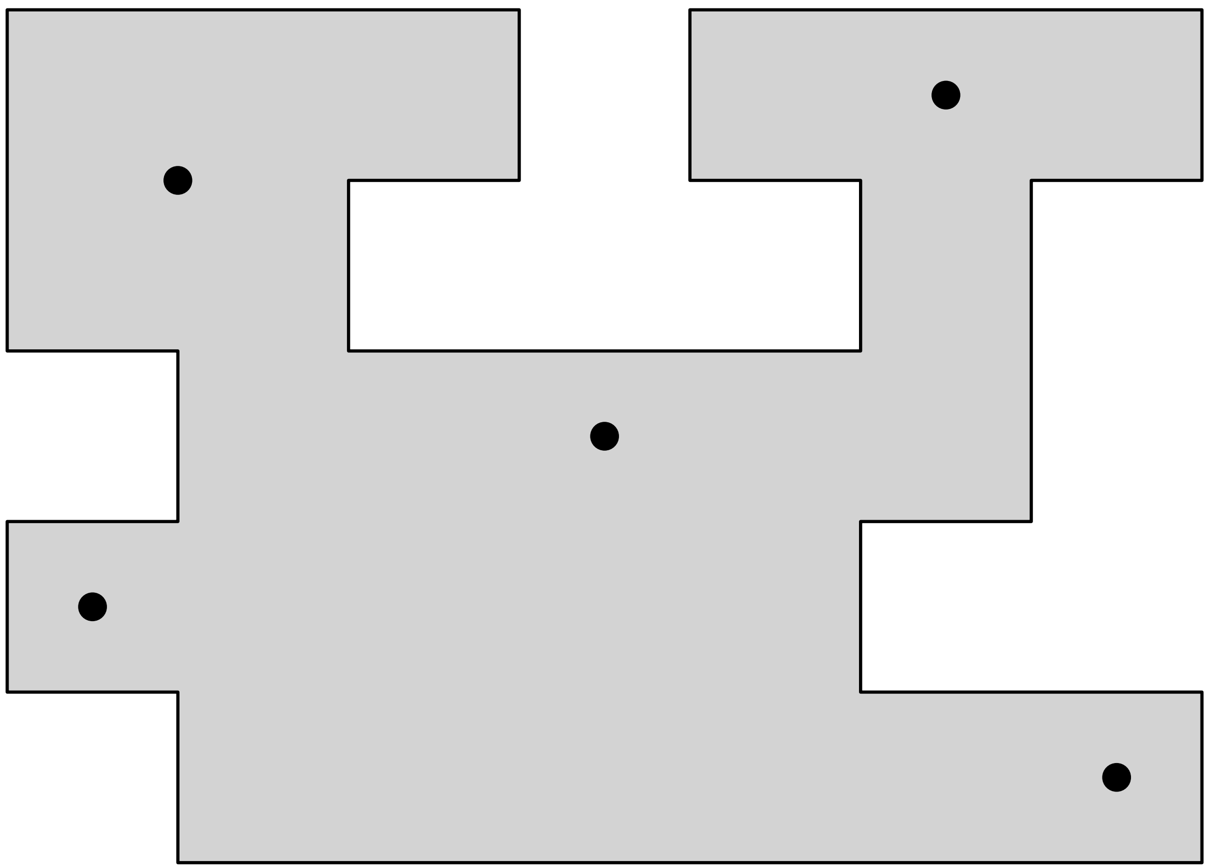


解決方法：離散化

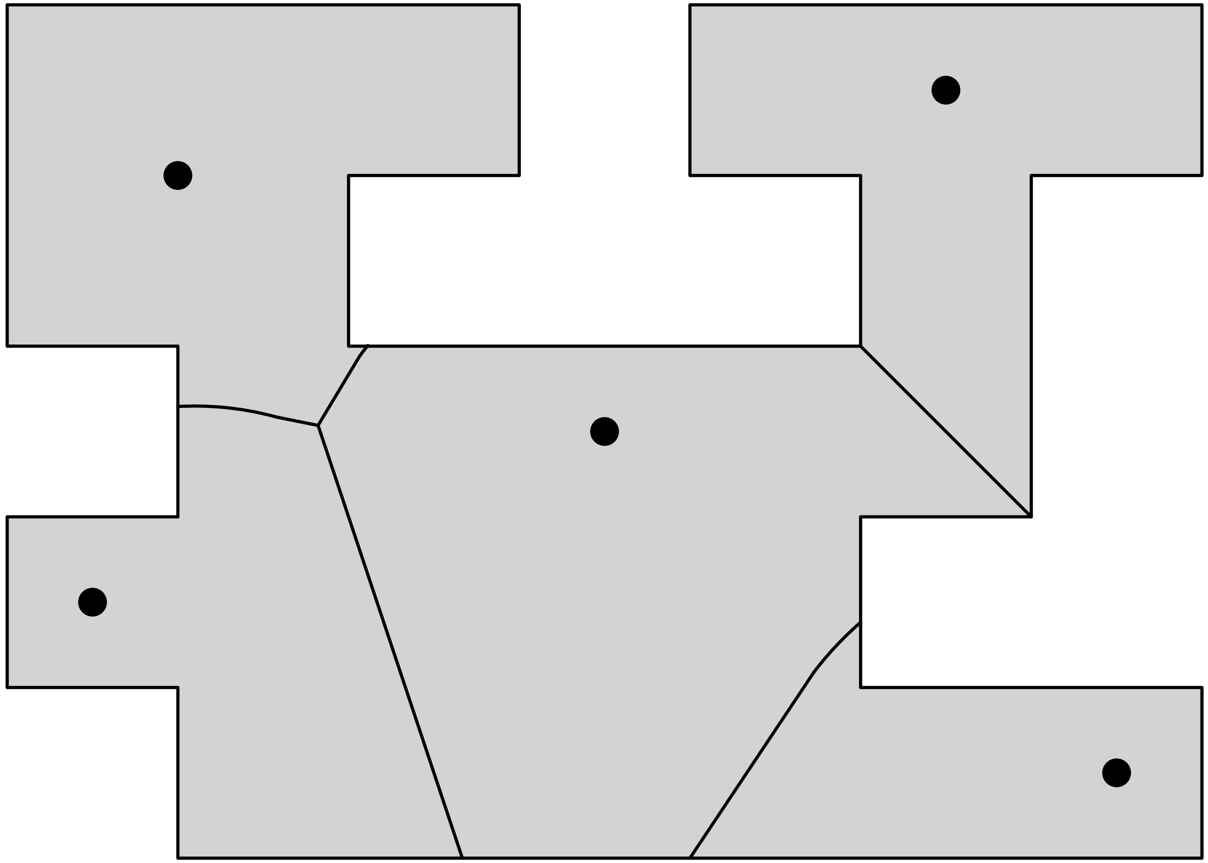


目次

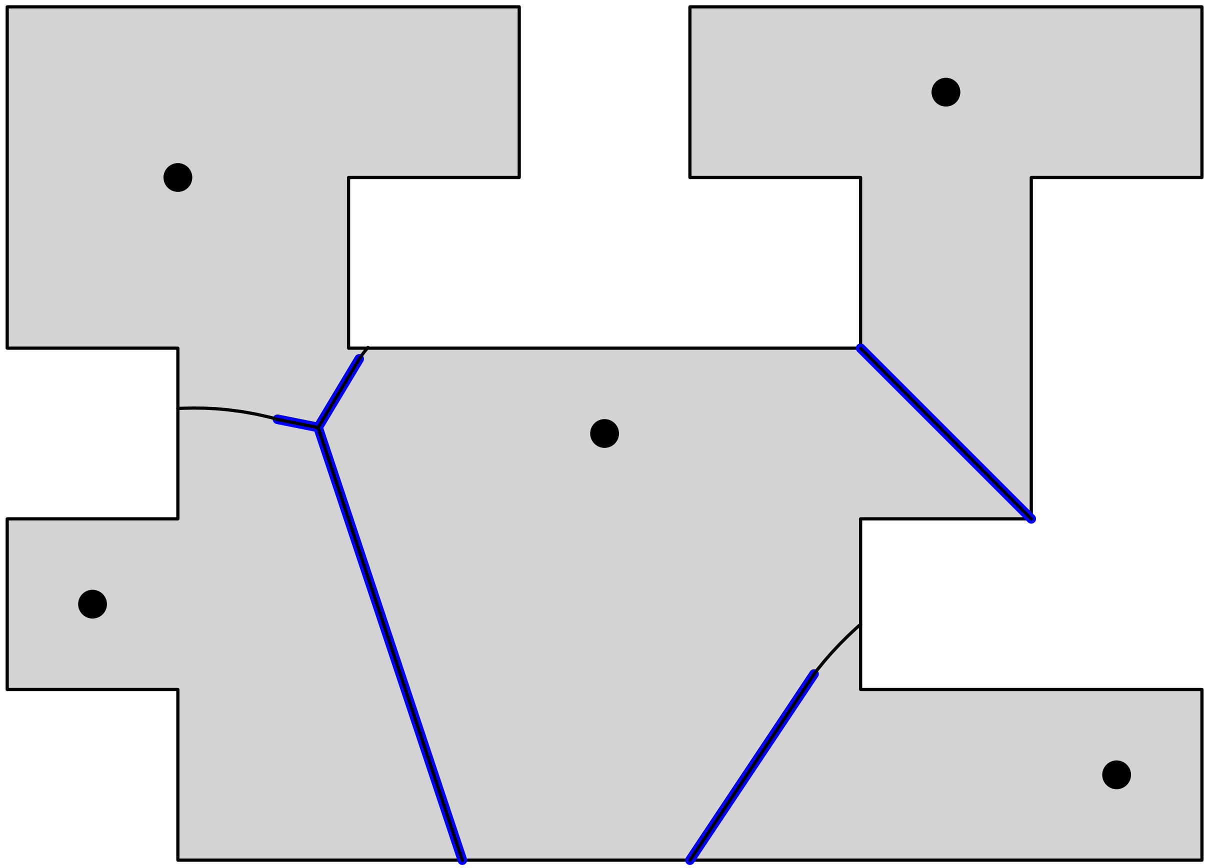
多角形内のボロノイ図



多角形内のボロノイ図

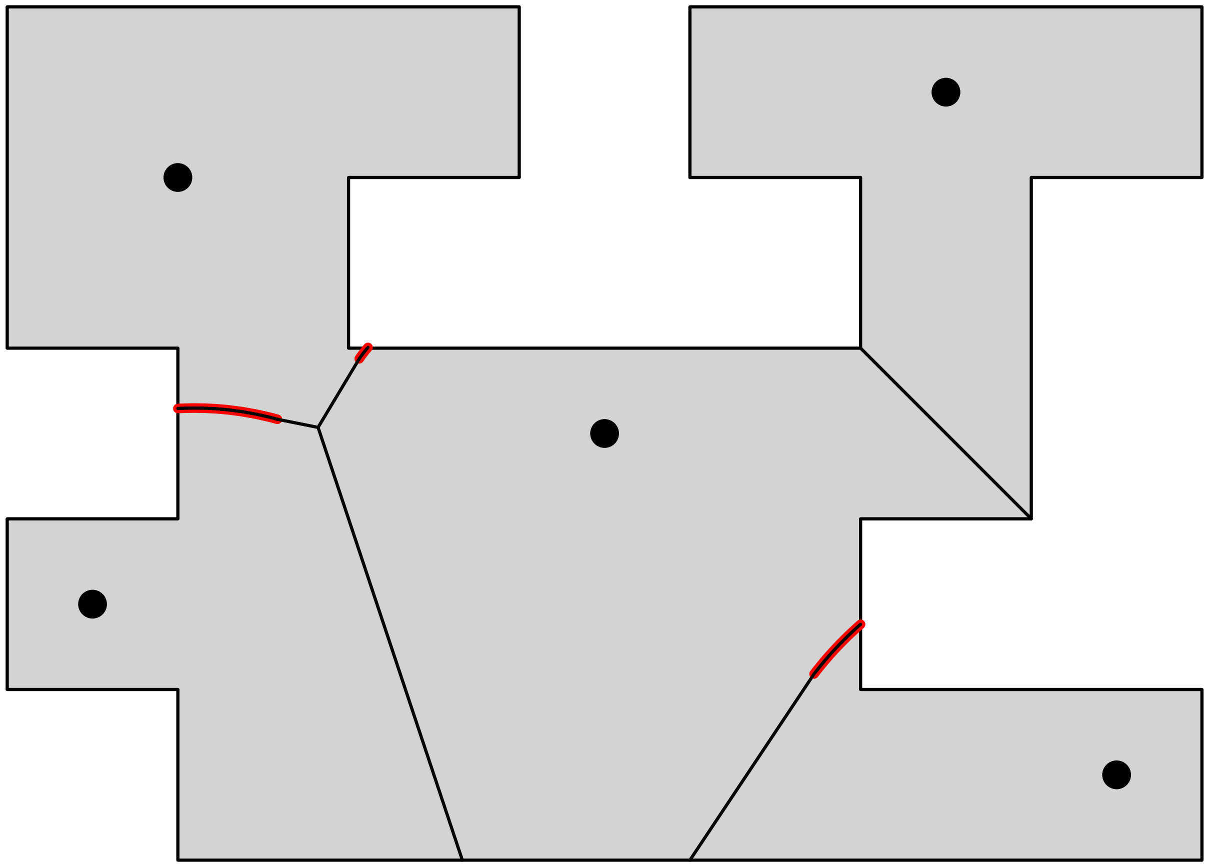


多角形内のボロノイ図



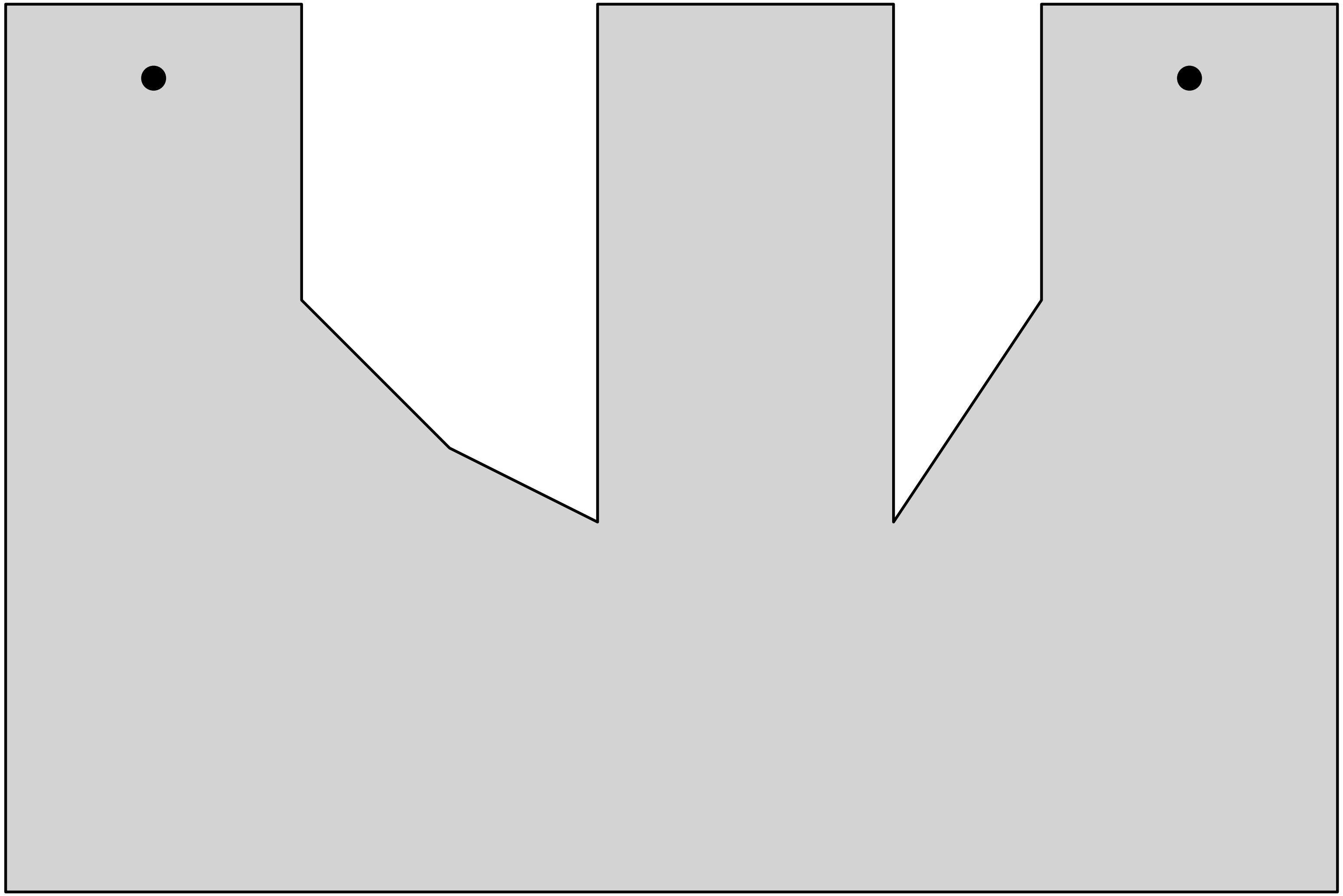
直線的な部分

多角形内のボロノイ図



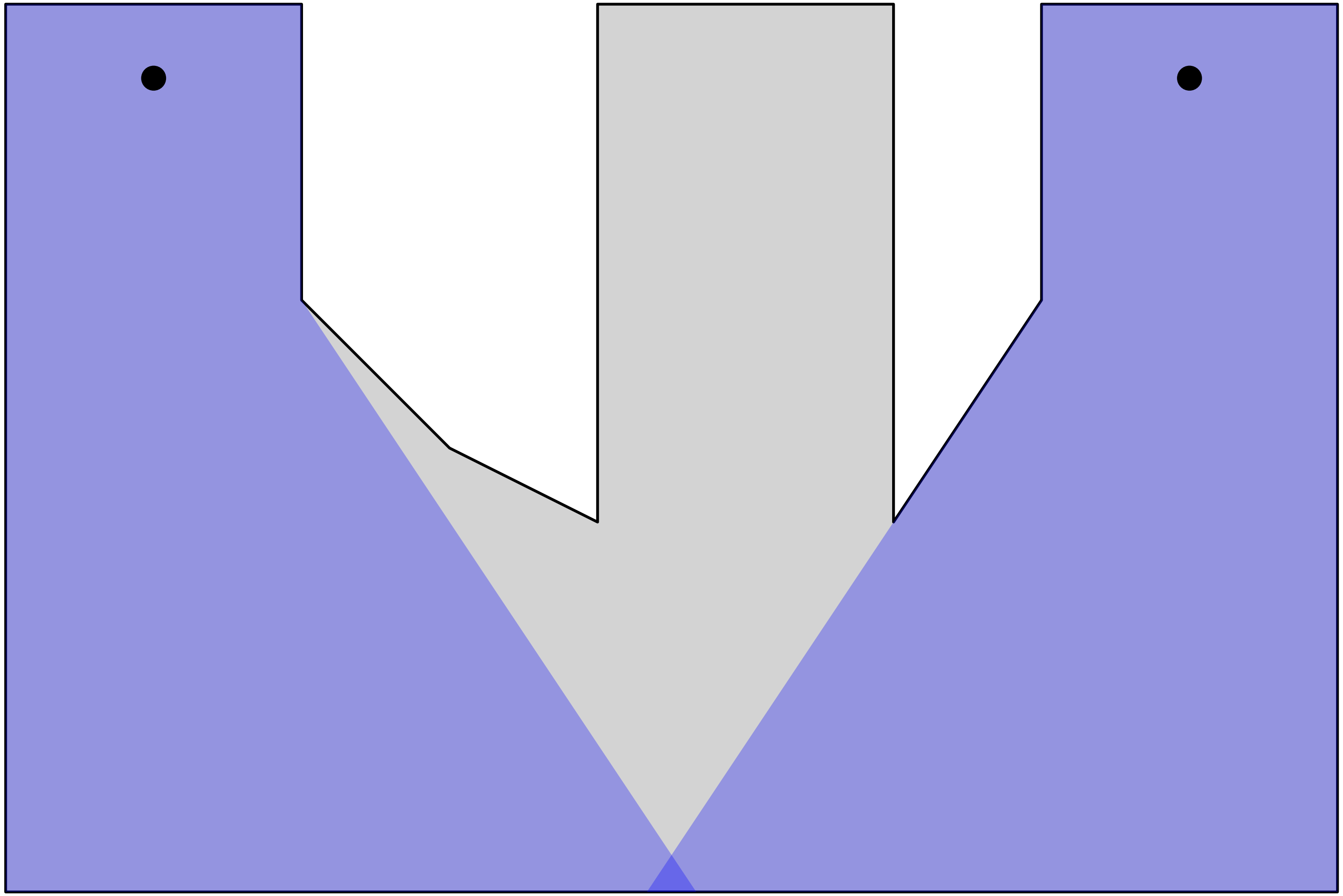
曲線的な部分

多角形内の 2 点の等距離線：例



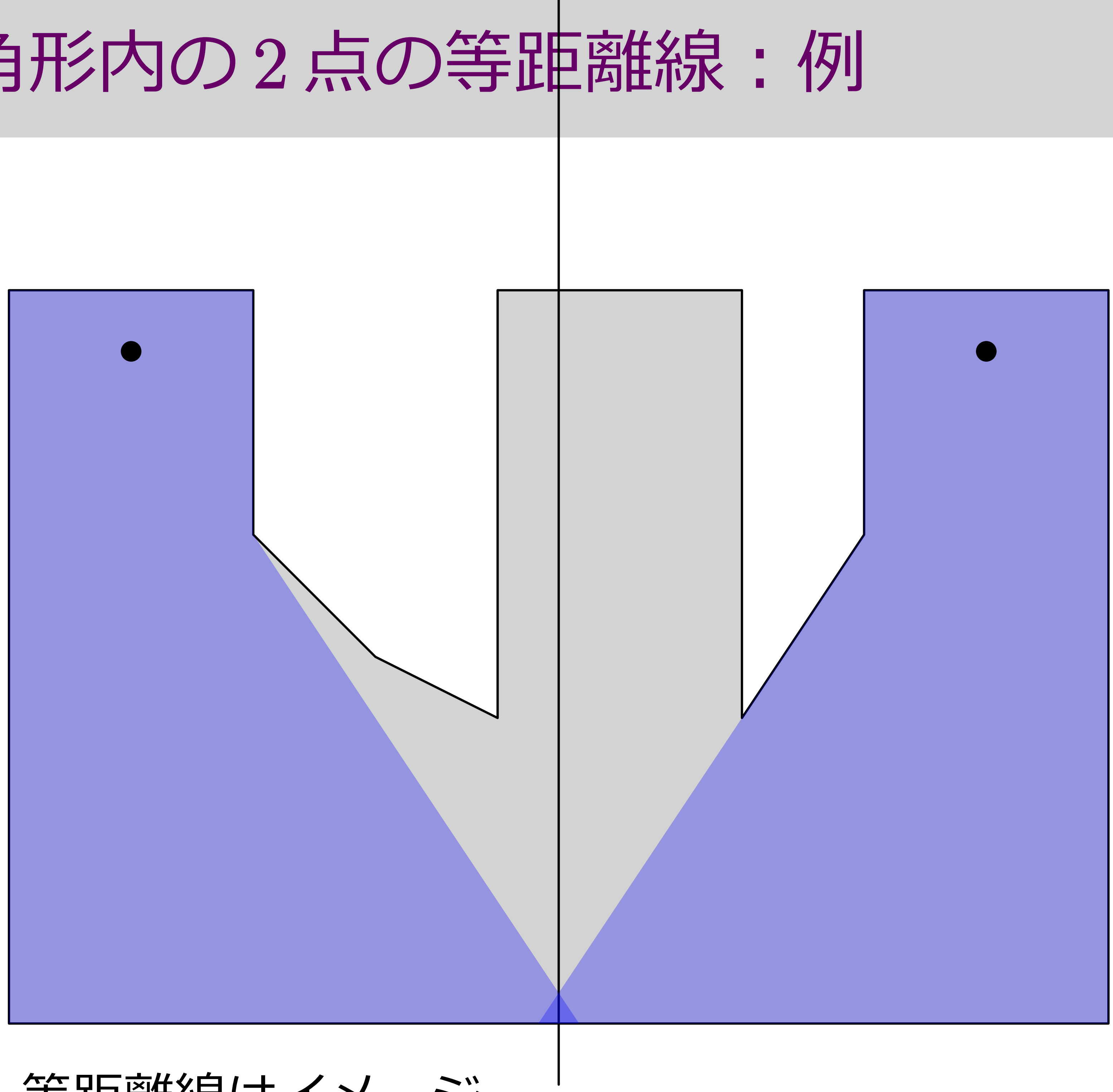
注：等距離線はイメージ

多角形内の 2 点の等距離線：例



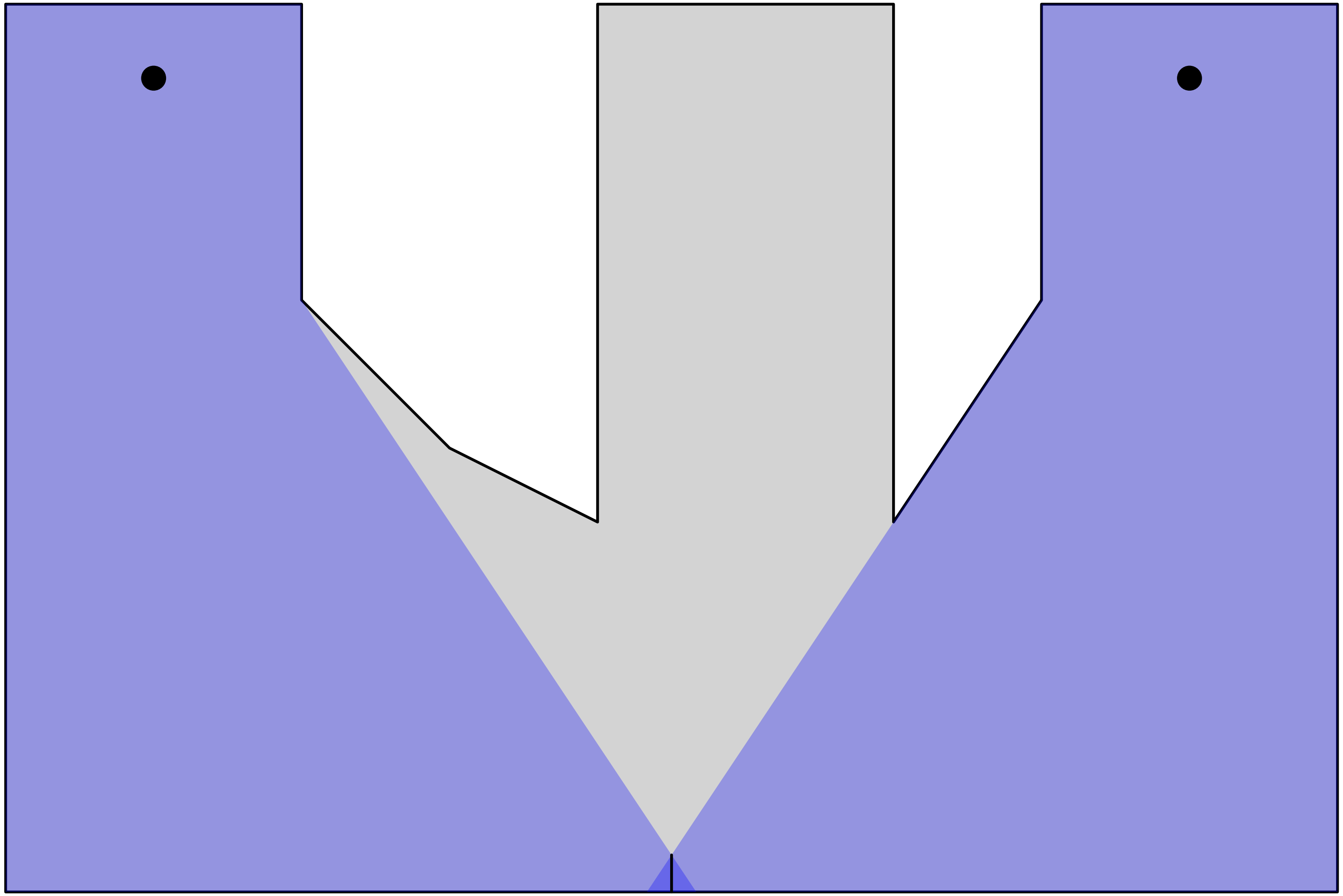
注：等距離線はイメージ

多角形内の 2 点の等距離線：例



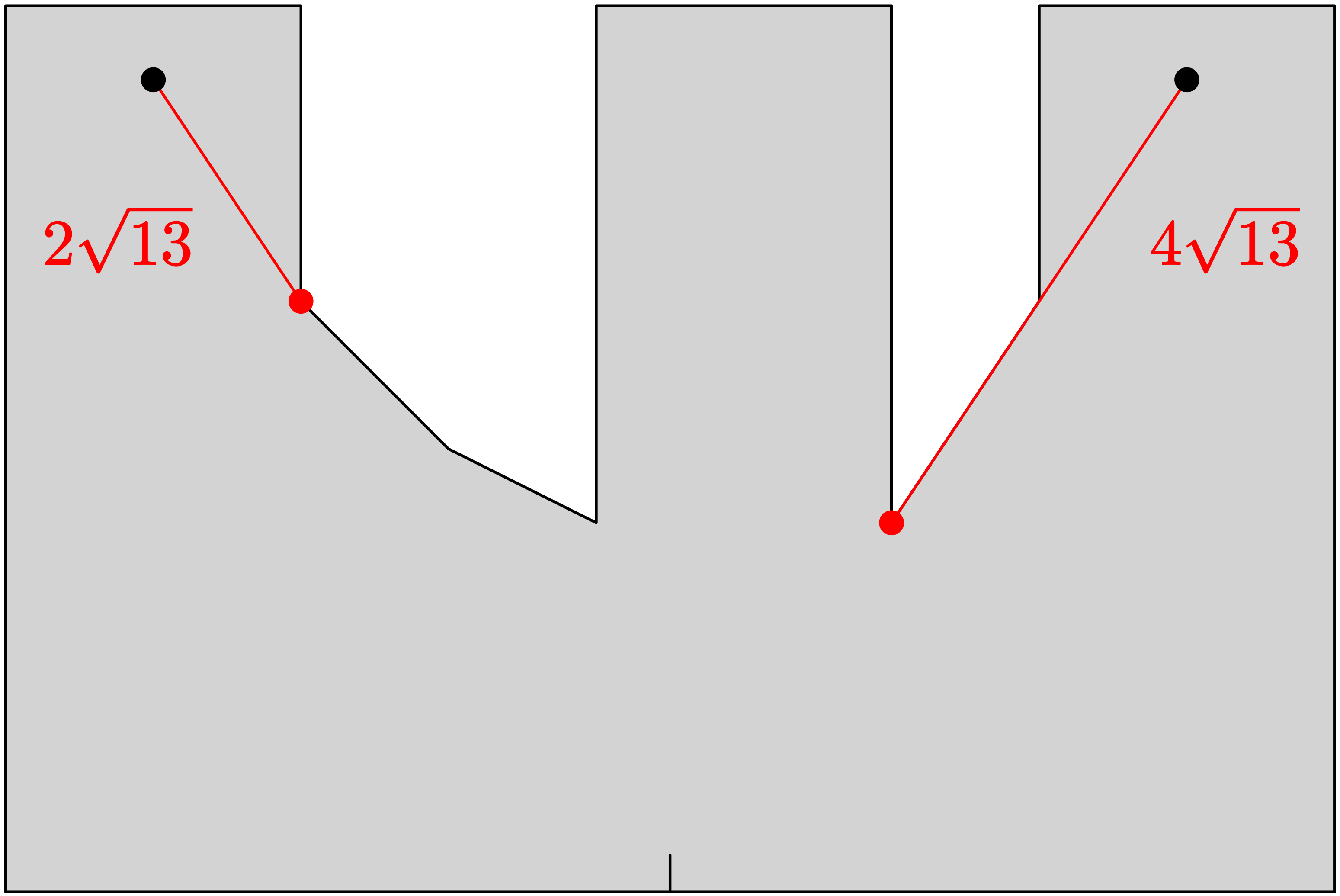
注：等距離線はイメージ

多角形内の 2 点の等距離線：例



注：等距離線はイメージ

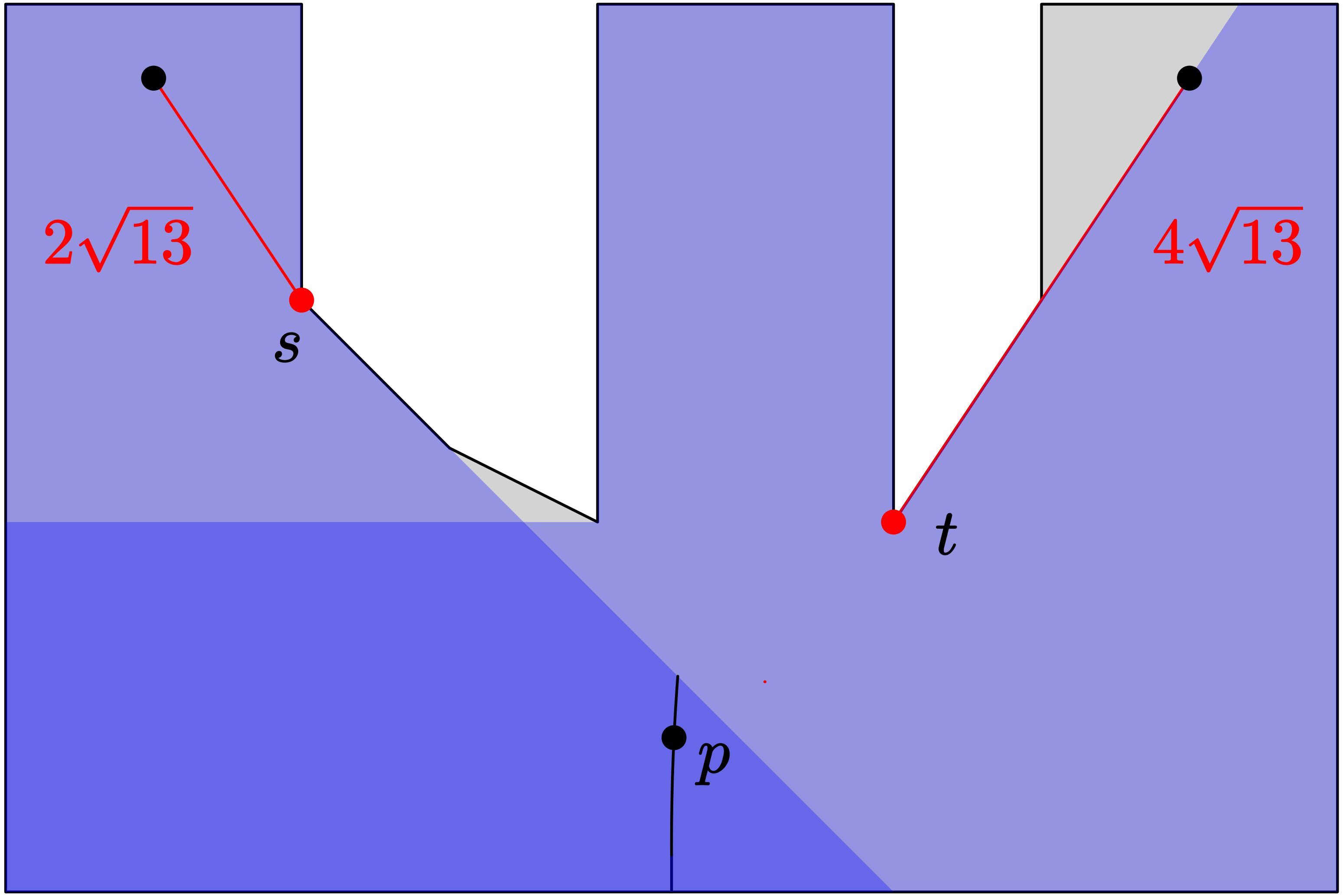
多角形内の 2 点の等距離線：例



注：等距離線はイメージ

多角形内の 2 点の等距離線：例

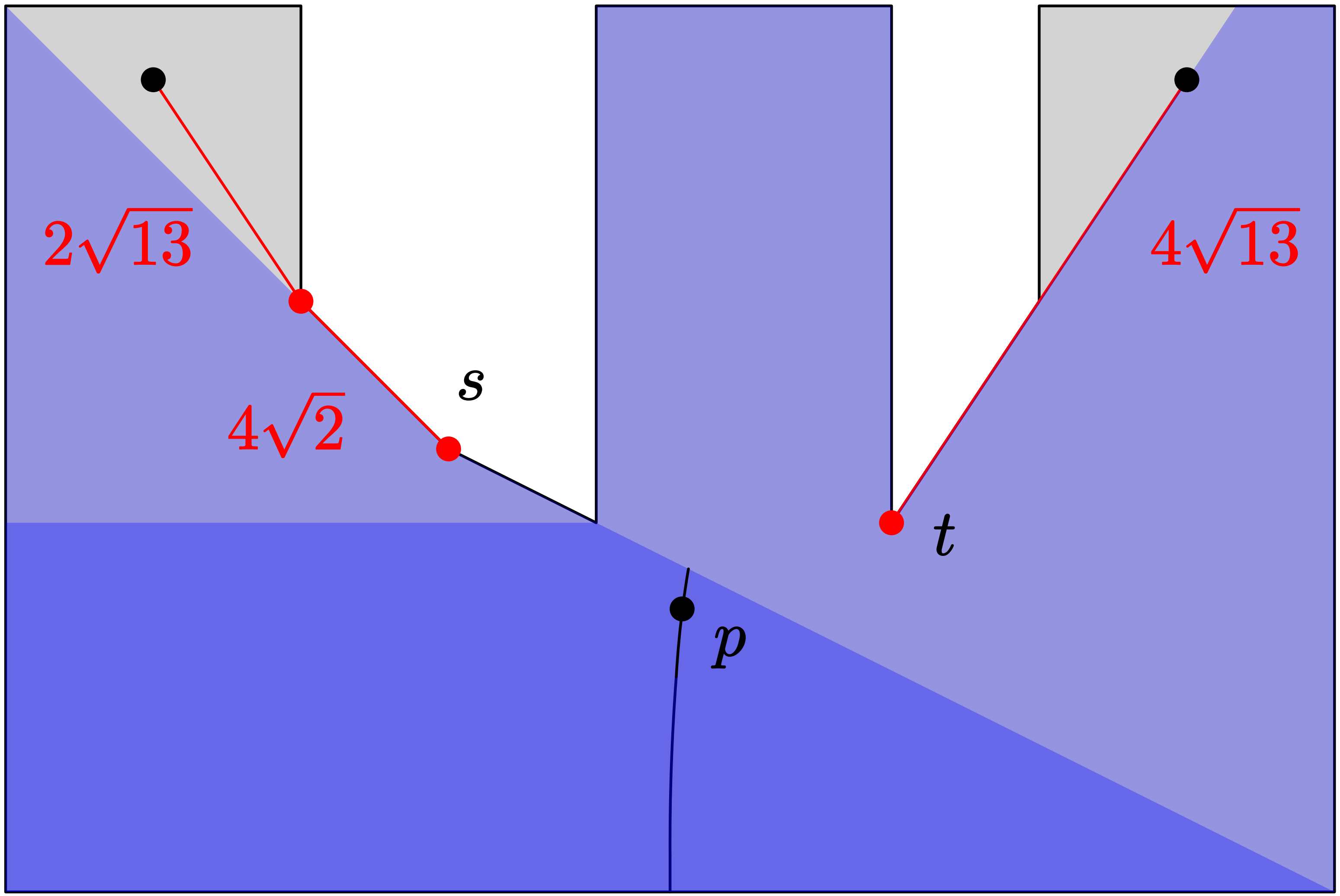
$$\|p - s\|_2 + 2\sqrt{13} = \|p - t\|_2 + 4\sqrt{13}$$



注：等距離線はイメージ

多角形内の 2 点の等距離線：例

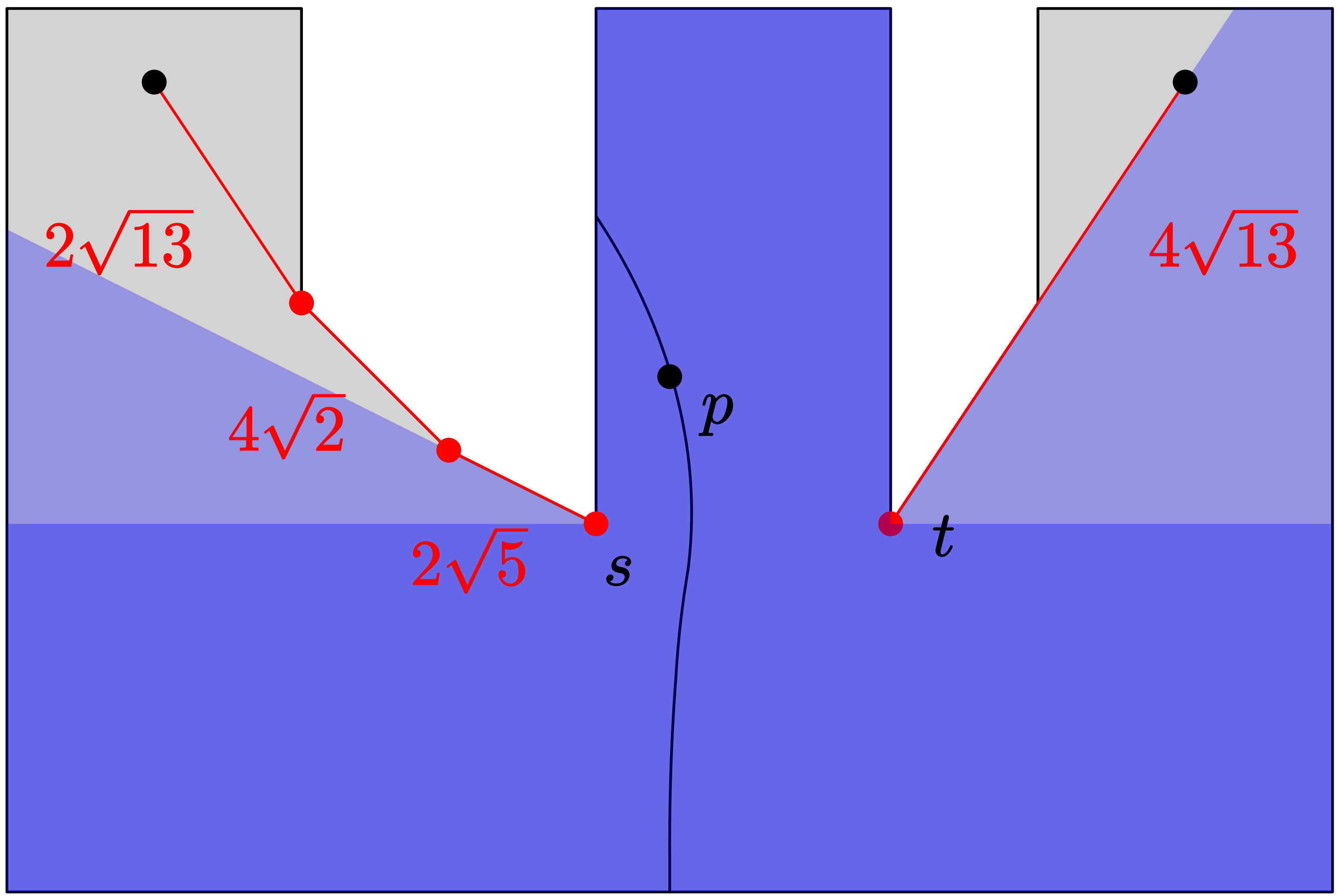
$$\|p - s\|_2 + 2\sqrt{13} + 4\sqrt{2} = \|p - t\|_2 + 4\sqrt{13}$$



注：等距離線はイメージ

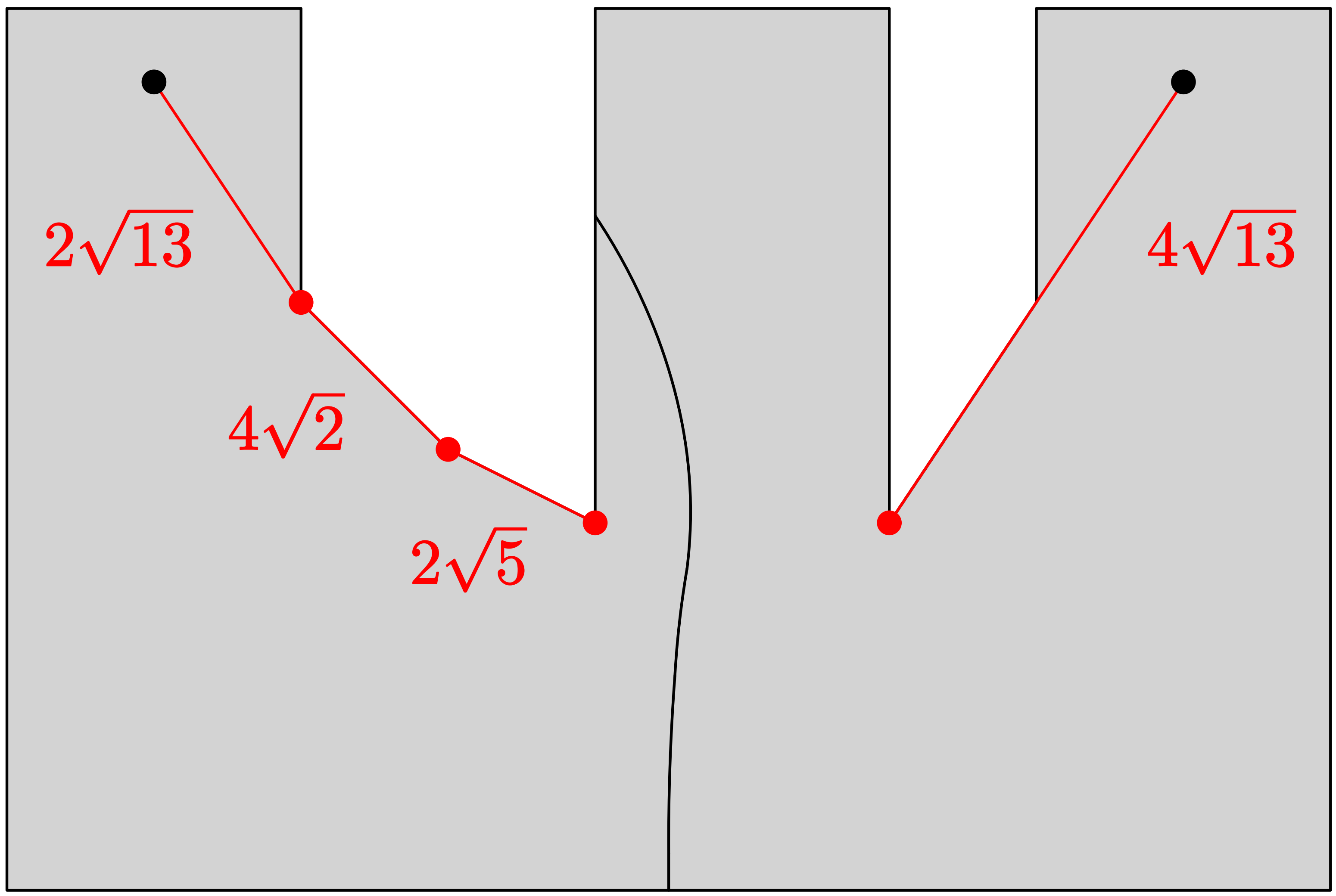
多角形内の 2 点の等距離線：例

$$\|p-s\|_2 + 2\sqrt{13} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5} = \|p-t\|_2 + 4\sqrt{13}$$



注：等距離線はイメージ

多角形内の 2 点の等距離線：例



注：等距離線はイメージ

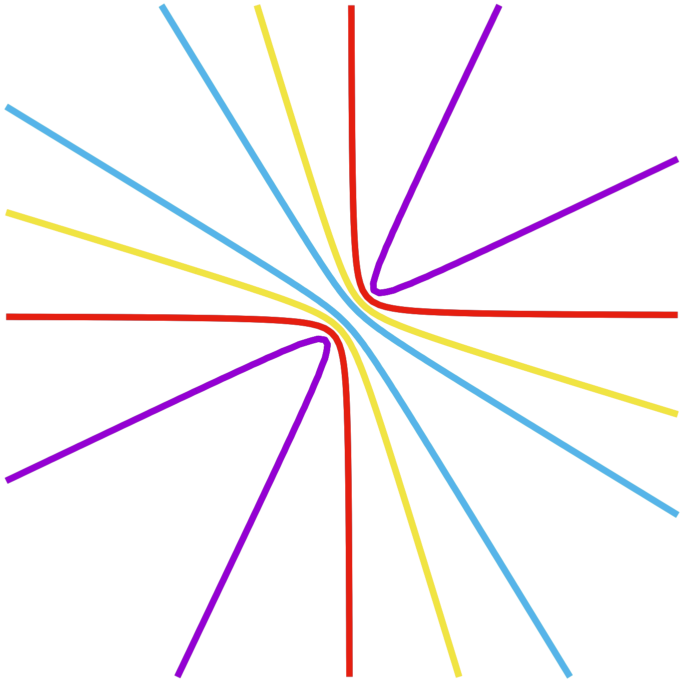
復習：双曲線

2 点 $s, t \in \mathbb{R}^2$，正実数 $c > 0$

定義：双曲線，焦点

s, t を **焦点** とする **双曲線** とは
s からの距離と t からの距離の差が c となる点 p の集合

$$\{p \in \mathbb{R}^2 \mid |\|p - s\|_2 - \|p - t\|_2| = c\}$$

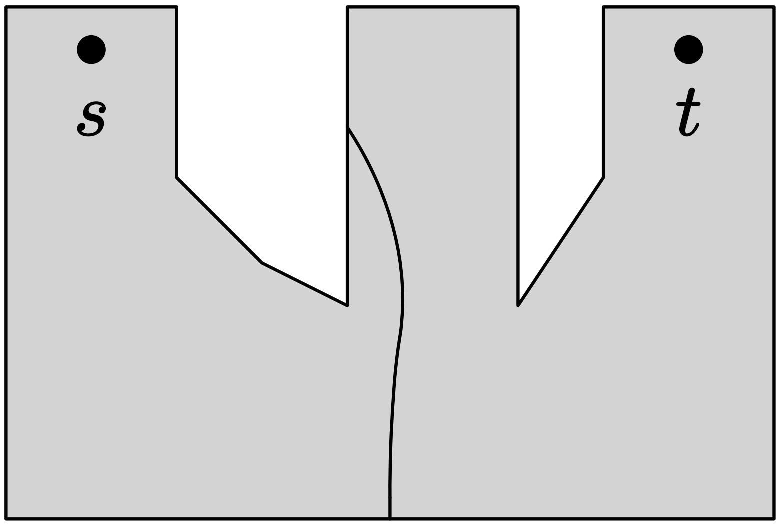


多角形内の 2 点の等距離線

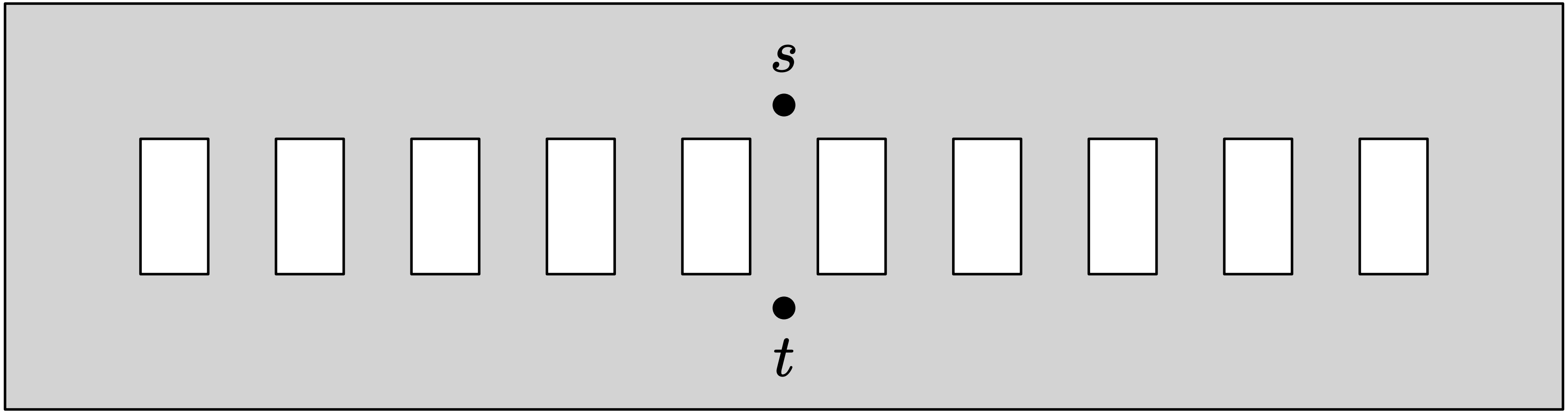
多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, 2 点 $s, t \in P$

性質：多角形内の等距離線

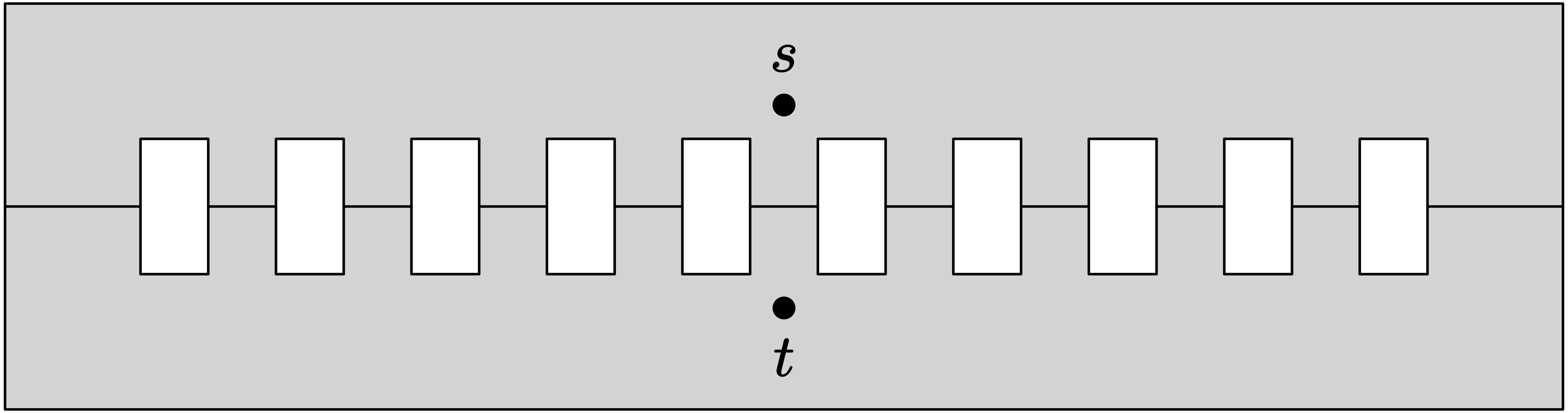
P における s, t の等距離線は
直線の一部 (線分) か 双曲線の一部か
それらをつなげたもの



等距離線が非連結である例



等距離線が非連結である例



まとめ

今日の目標

多角形の中の距離を扱えるようになる

- 可視性，可視領域，可視グラフ
- 多角形領域における等距離線

教訓

障害物によって，距離の扱いが大きく変わる