離散数理工学 (2025 年度後学期)

第 4 回

低次元 (4)：距離とボロノイ図

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 11 月 11 日

最終更新：2025 年 11 月 2 日　21:51

今回の目標

今日の目標

ボロノイ図の基本的な性質を理解して，証明できる

- デローネ三角形分割との双対性
- ユークリッド距離 と マンハッタン距離

ボロノイ図が応用される分野 (Wikipedia による)

- 気象学
- 文化人類学
- 言語学
- 政治学
- 生態学
- 動物行動学
- 天体物理学
- 計算物理学
- 医学的診断
- 高分子物理学
- 物質科学
- 建築
- 都市計画
- コンピュータ・グラフィックス
- ユーザ・インタフェース
- …

ゲオルギー・ボロノイ

Georgy Voronoy

Georges Voronoï

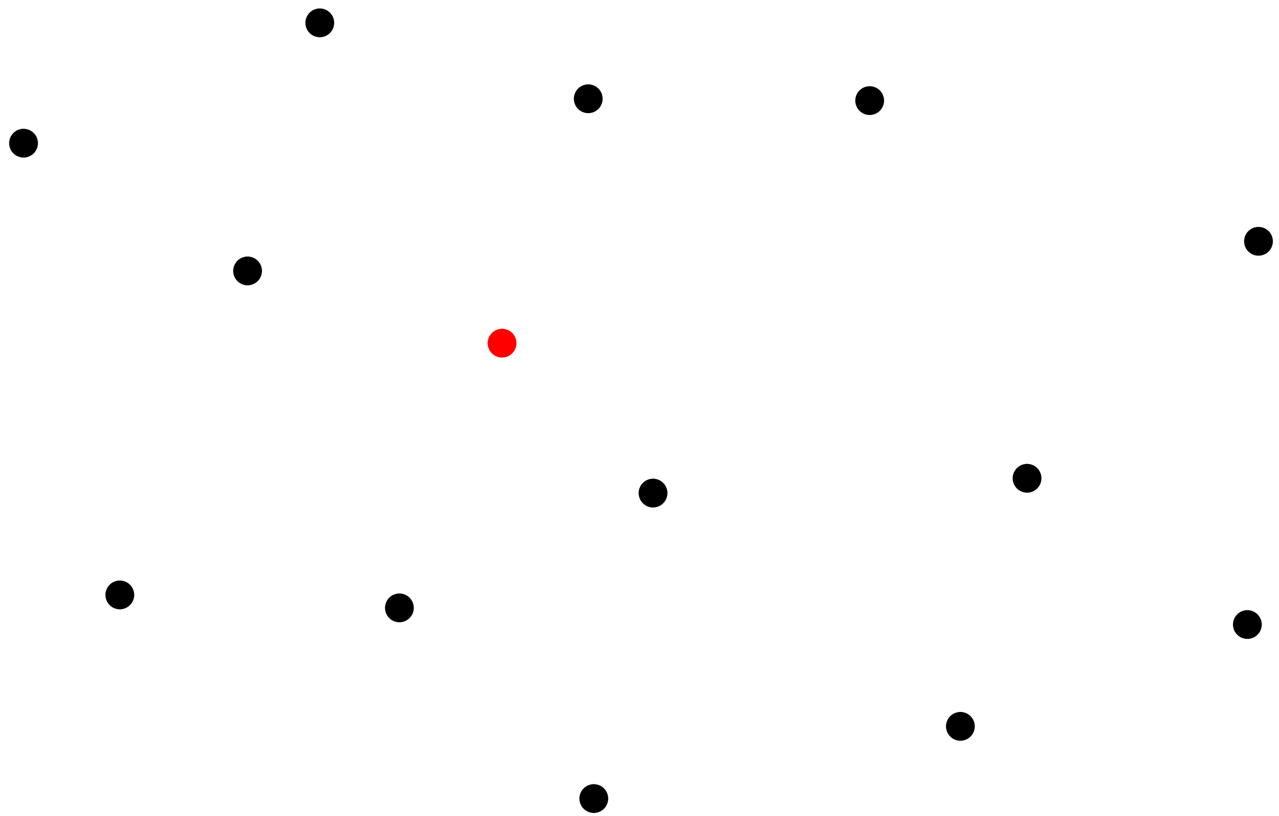
(1868–1908)

ロシア帝国 (現ウクライナ) の数学者

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georgy_Voronoy.jpg

典型的な問題 (1)：最近点問題

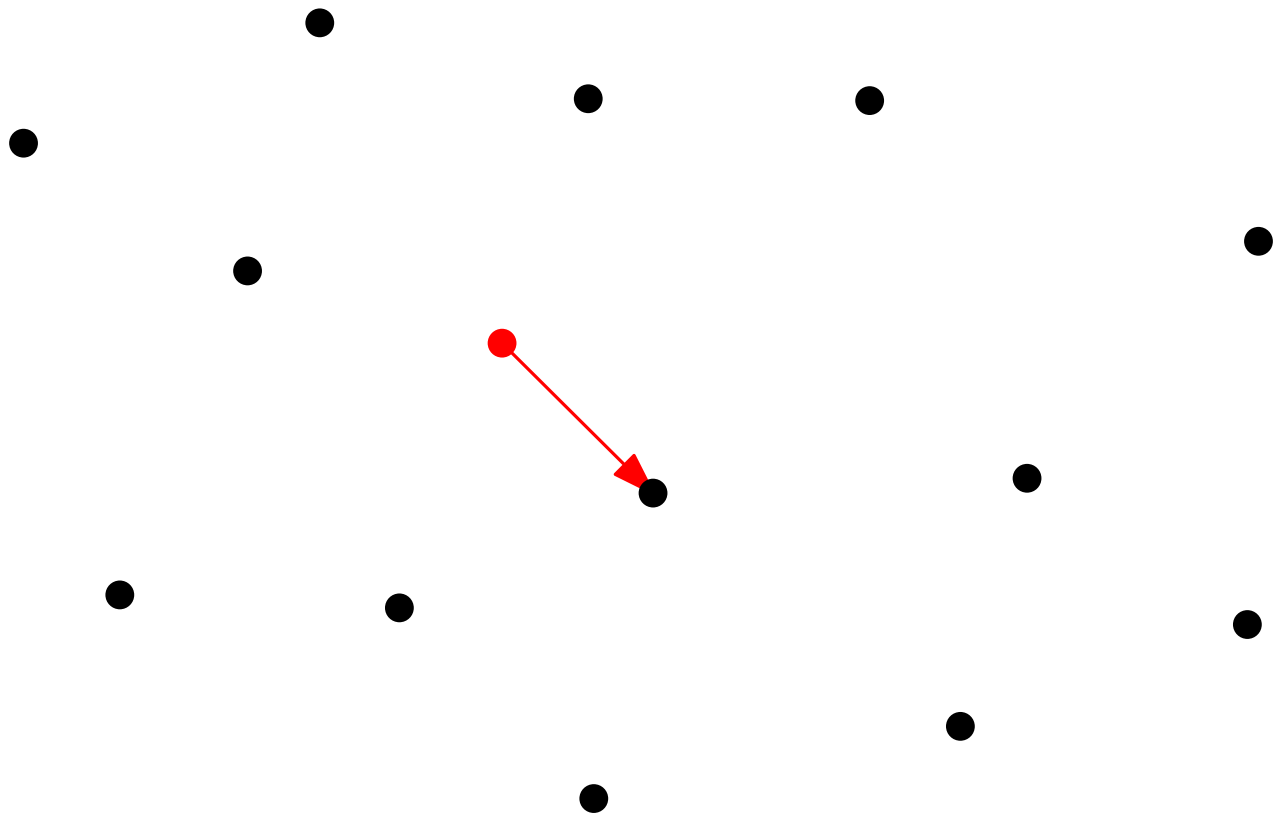
赤点に最も近い黒点はどれか？



典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

典型的な問題 (1)：最近点問題

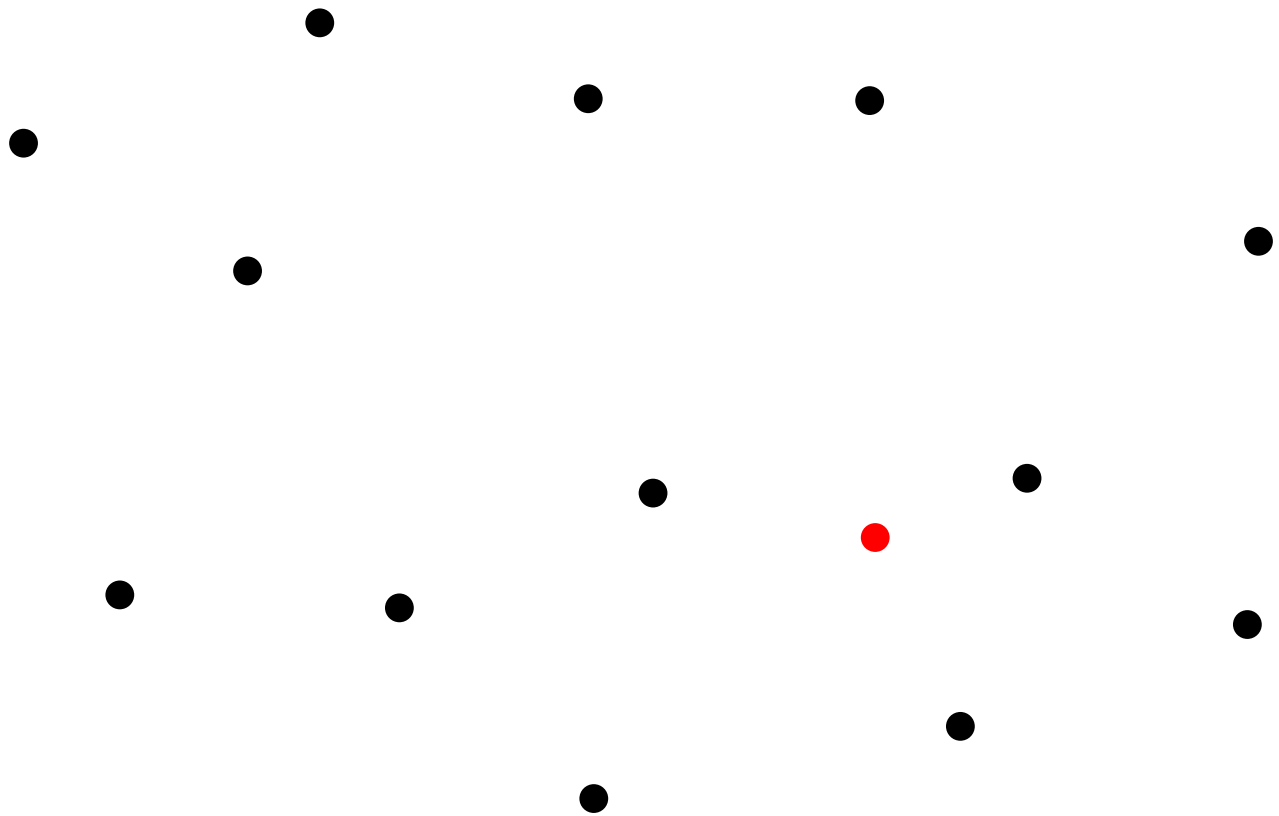
赤点に最も近い黒点はどれか？



典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

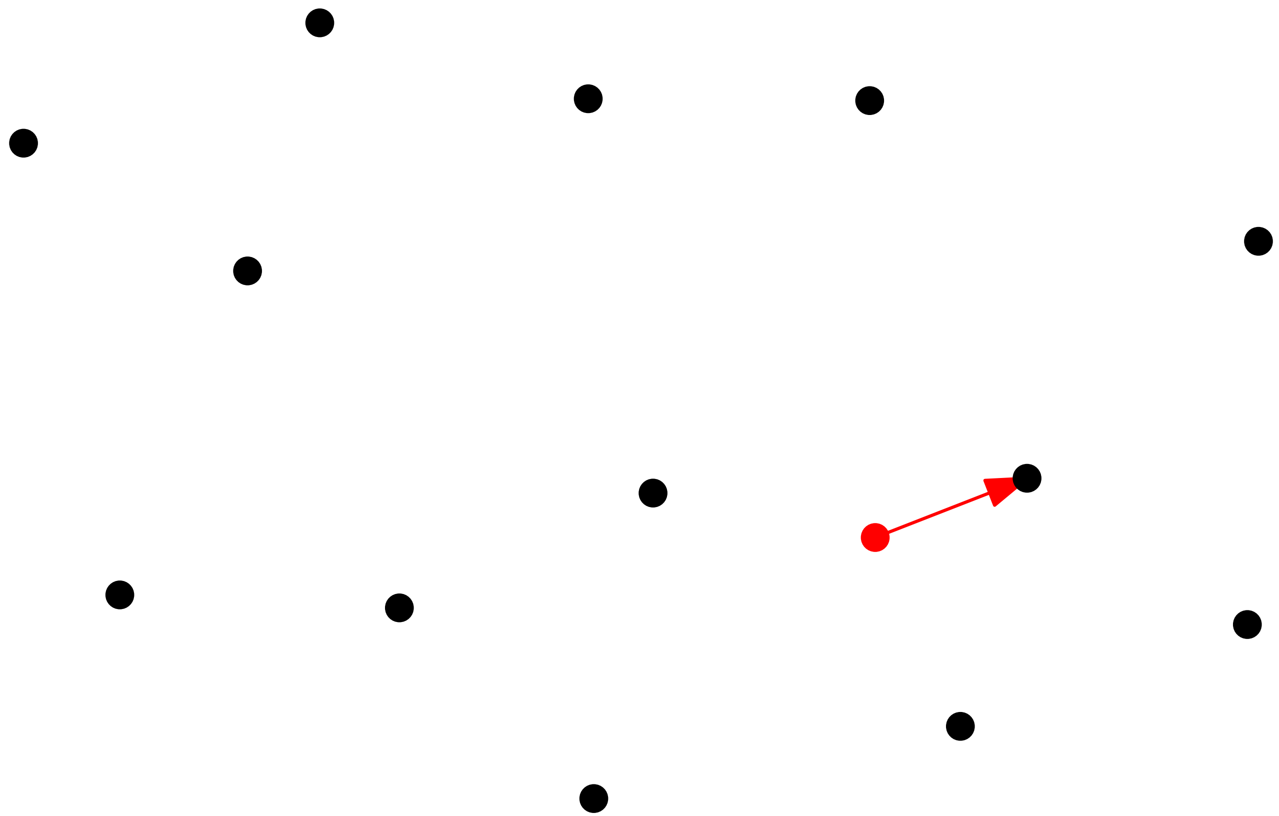
典型的な問題 (1)：最近点問題

赤点に最も近い黒点はどれか？



典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

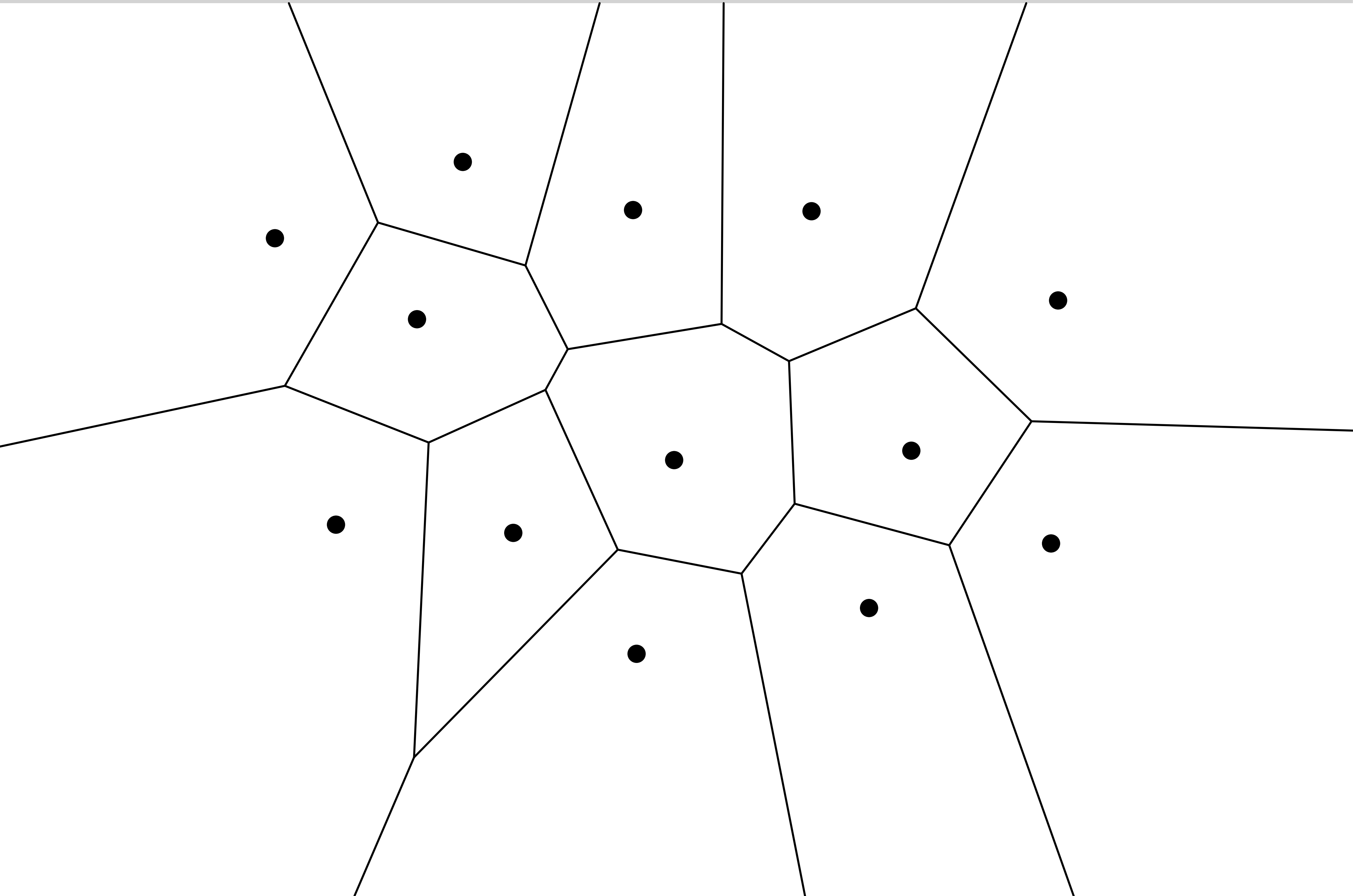
赤点に最も近い黒点はどれか？



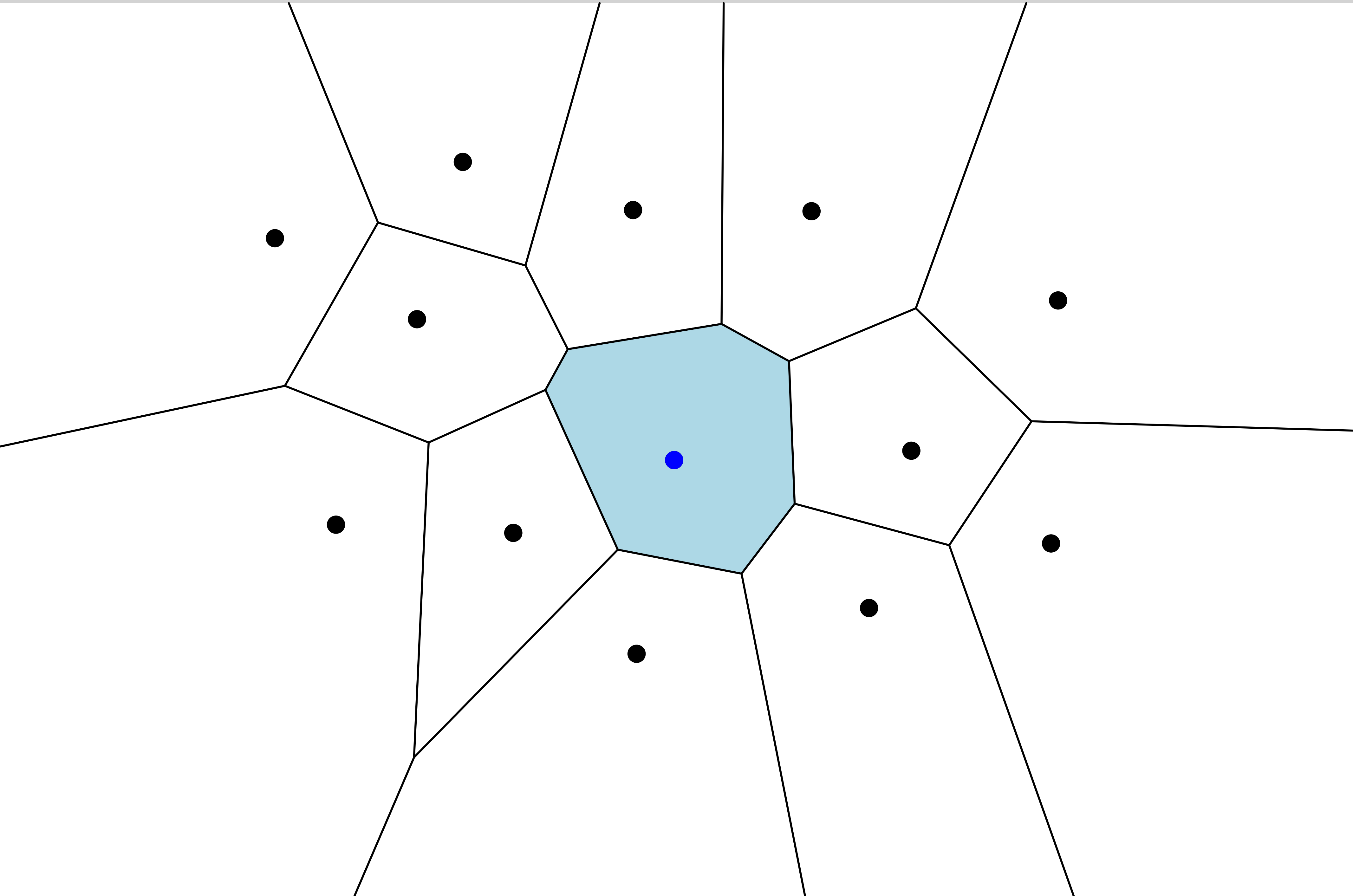
典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

目次

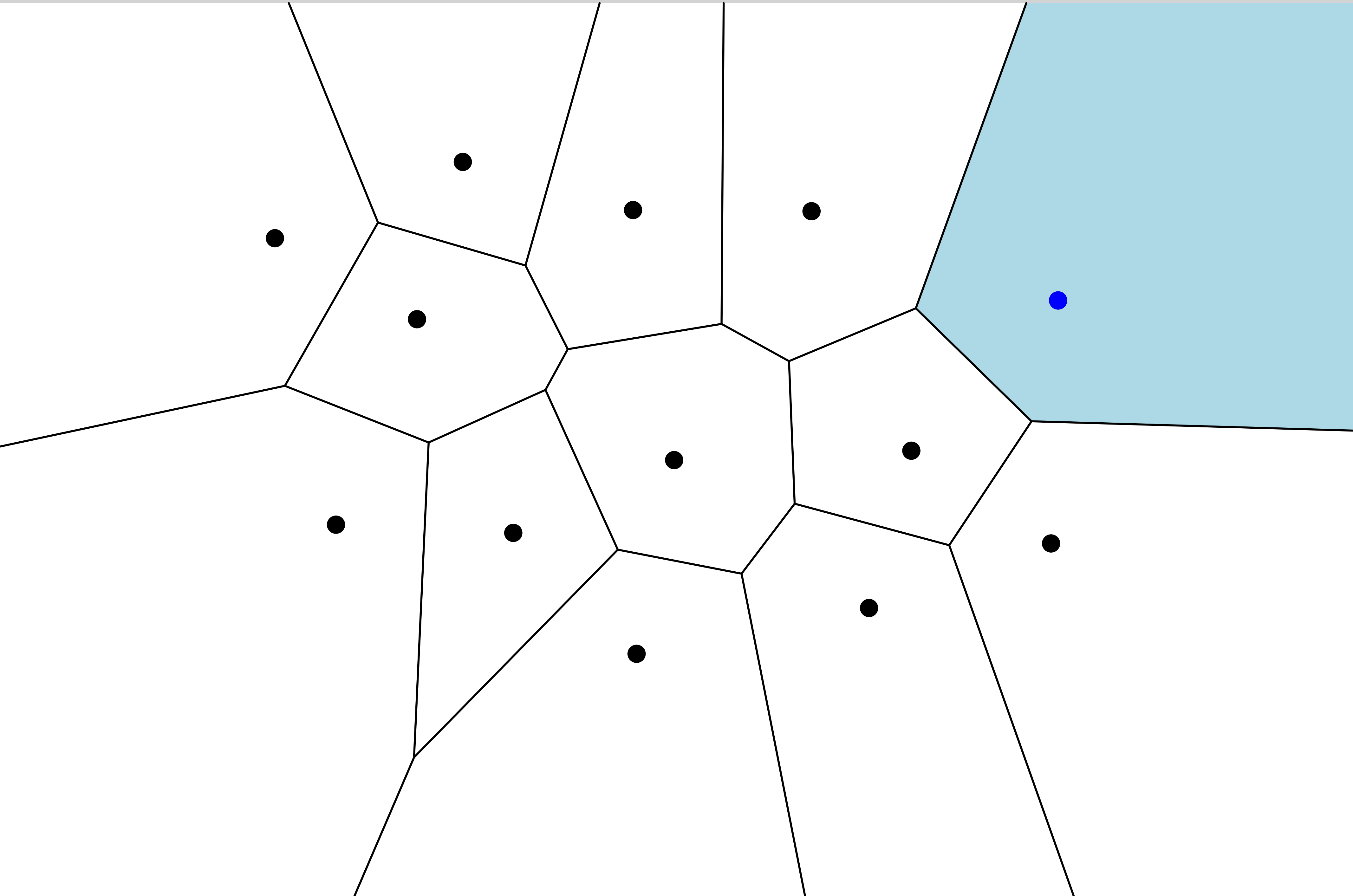
ボロノイ図：例



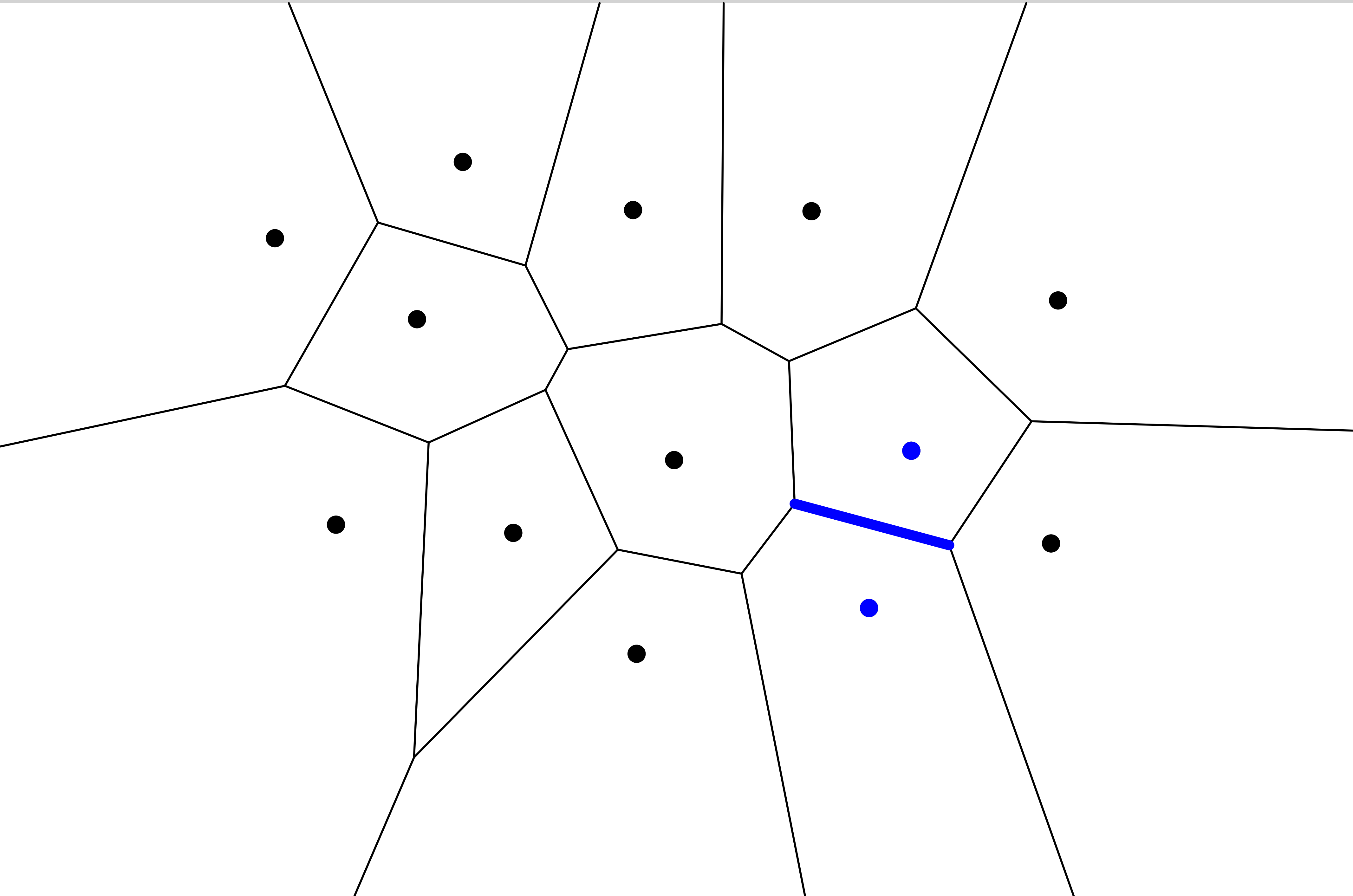
ボロノイ図：例



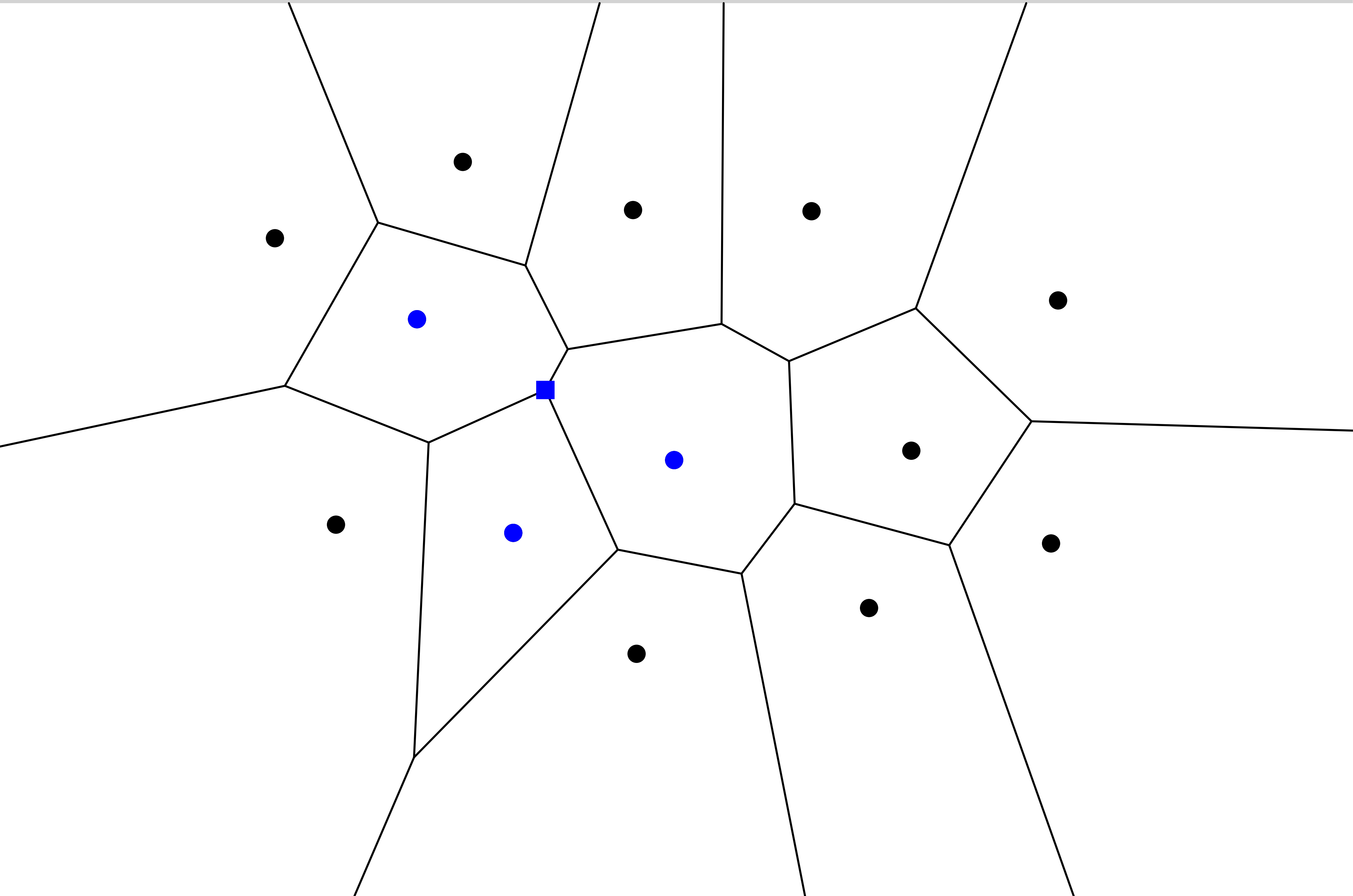
ボロノイ図：例



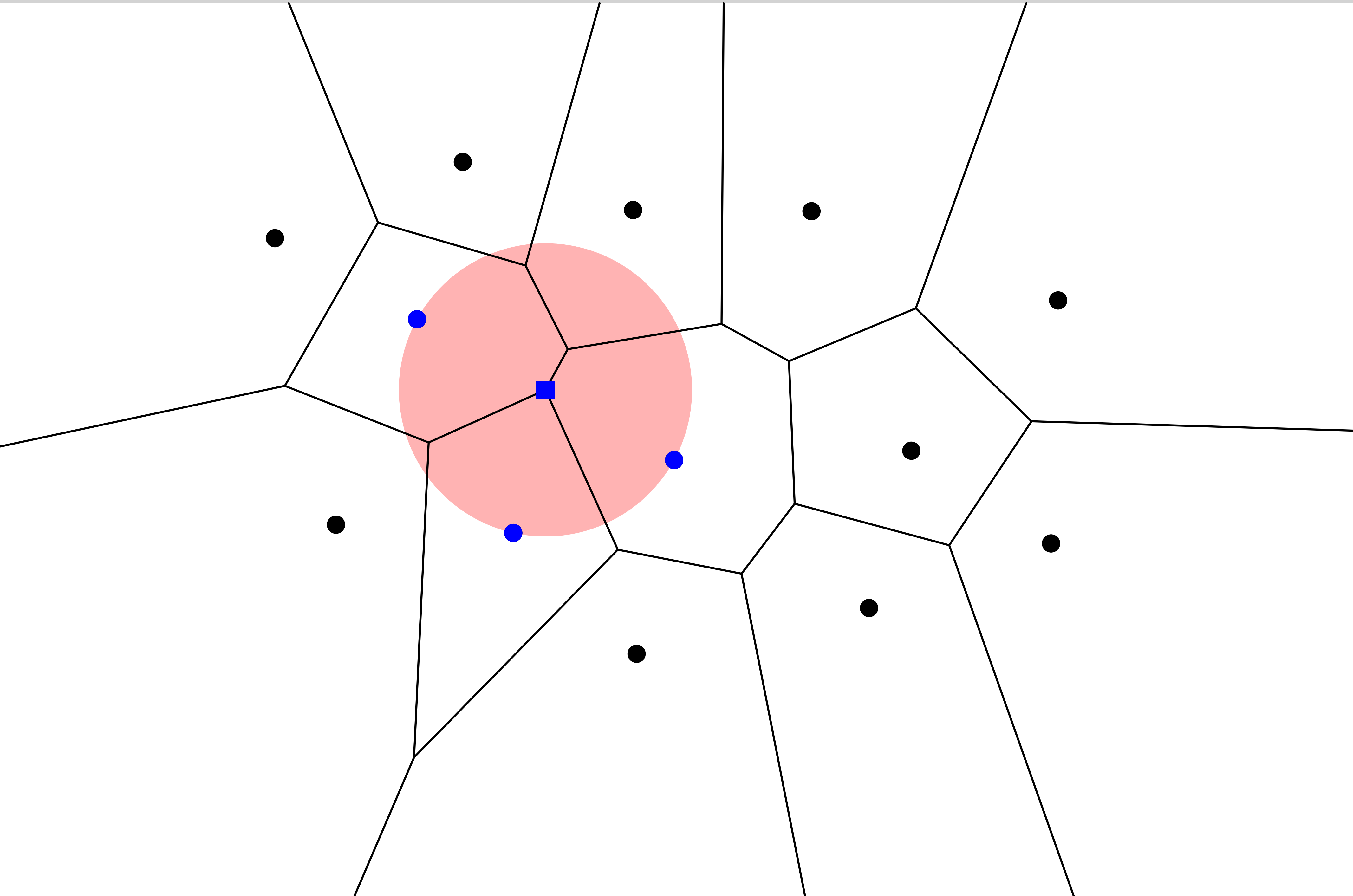
ボロノイ図：例



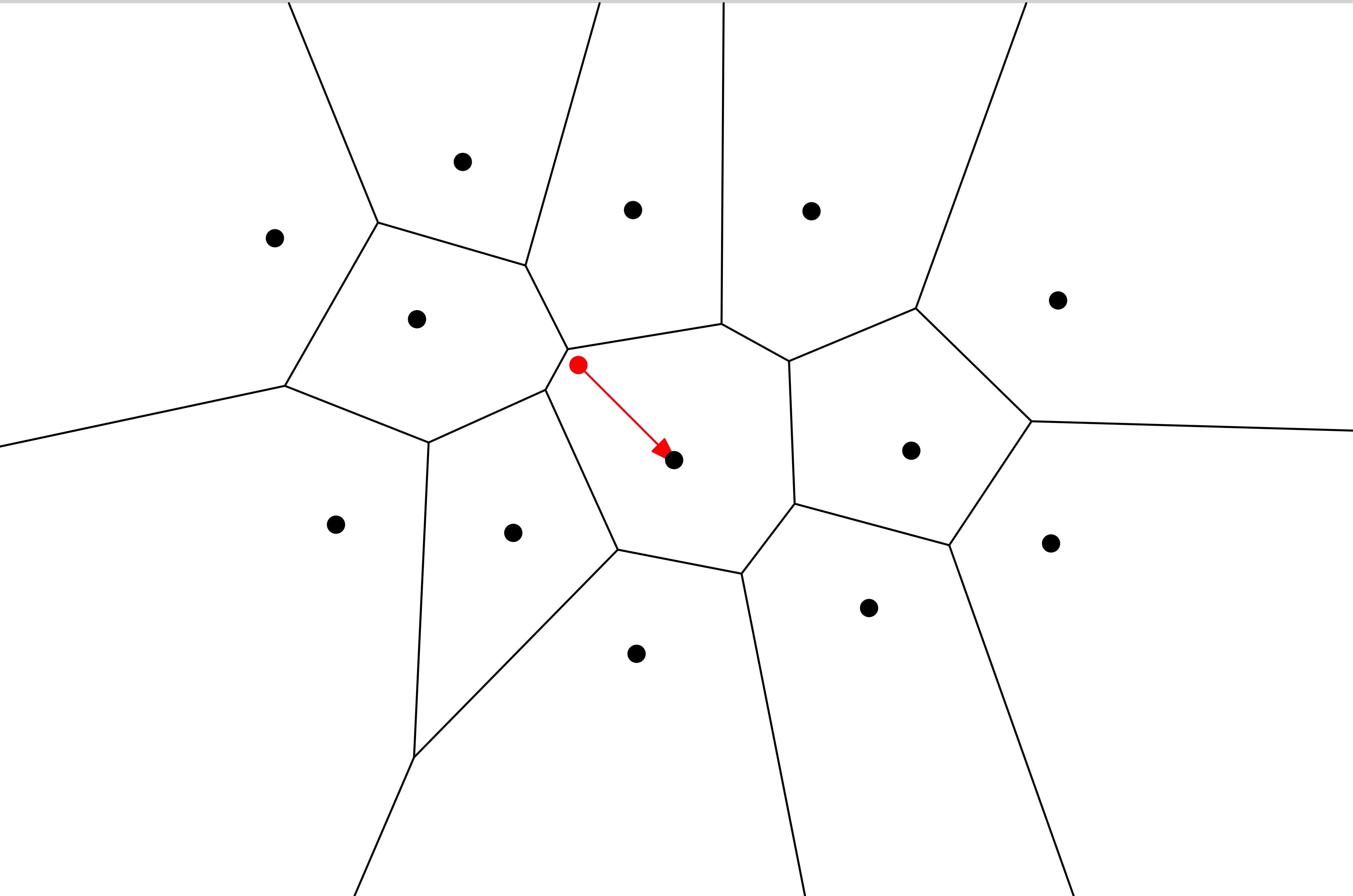
ボロノイ図：例



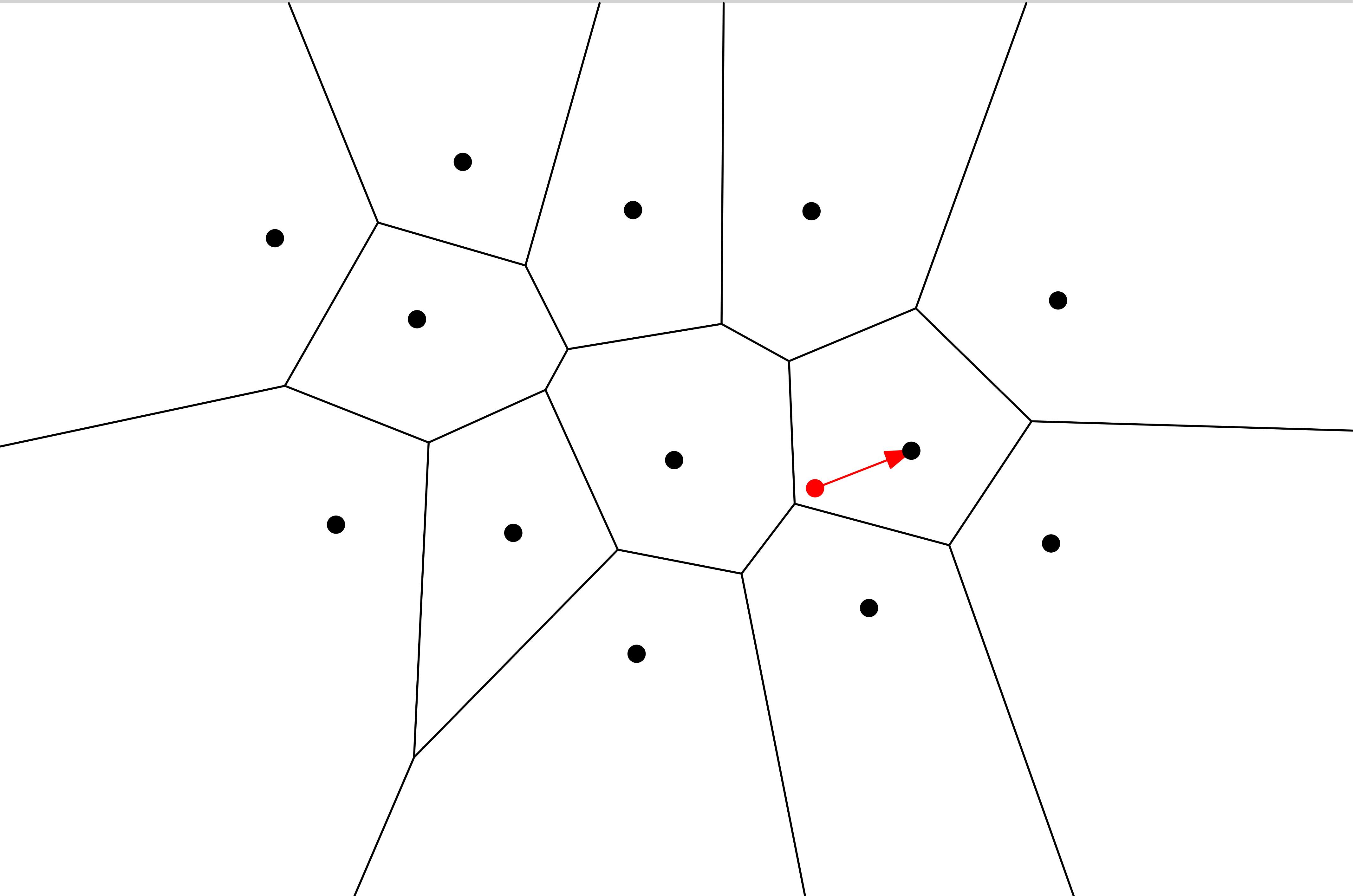
ボロノイ図：例



ボロノイ図：例



ボロノイ図：例



ボロノイ図：定義

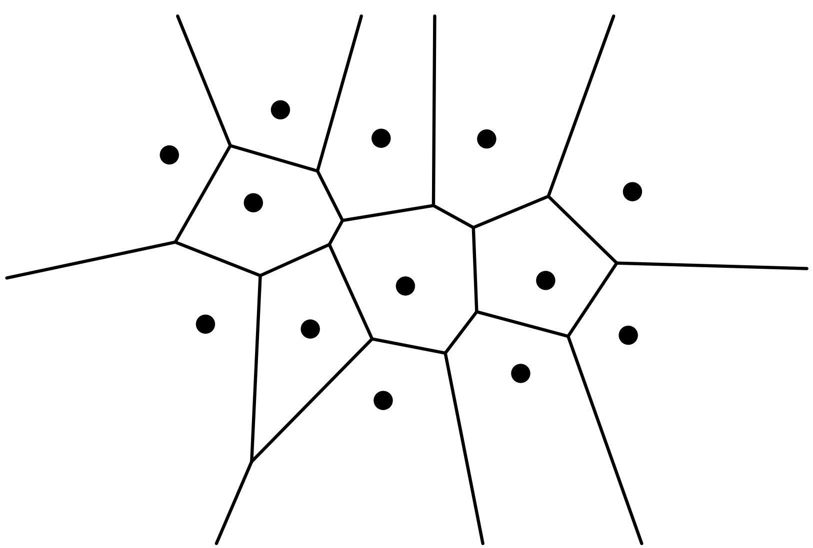
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$

定義：ボロノイ図

P の **ボロノイ図** とは，次の図形 $V(p)$ による平面の分割

$$V(p) = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} p \text{ と } q \text{ の距離} \leq r \text{ と } q \text{ の距離} \\ \forall\, r \in P - \{p\} \end{array} \right\}$$

ただし，$p \in P$



各点 $p \in P$ を

母点 や **サイト** と

呼ぶことがある

ボロノイ図：定義

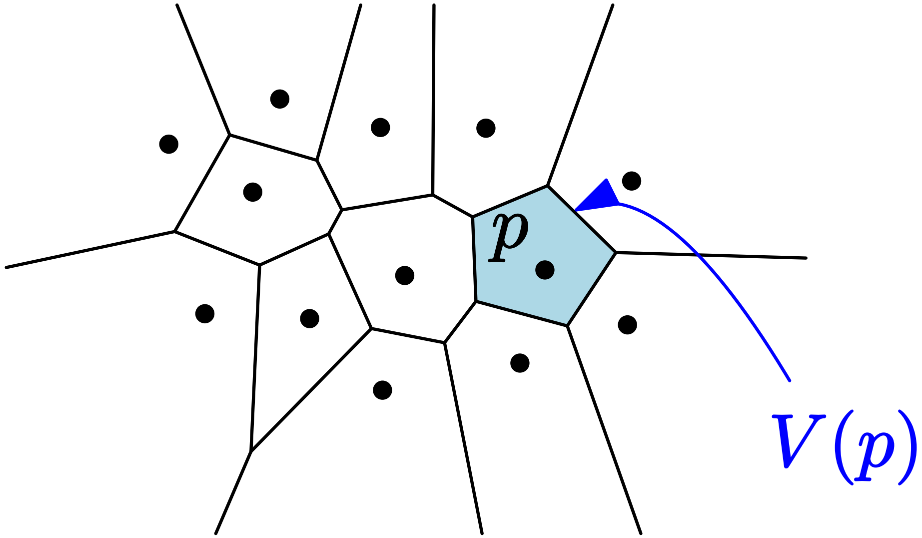
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$

定義：ボロノイ図

P の **ボロノイ図** とは，次の図形 $V(p)$ による平面の分割

$$V(p) = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} p \text{ と } q \text{ の距離} \leq r \text{ と } q \text{ の距離} \\ \forall\, r \in P - \{p\} \end{array} \right\}$$

ただし，$p \in P$

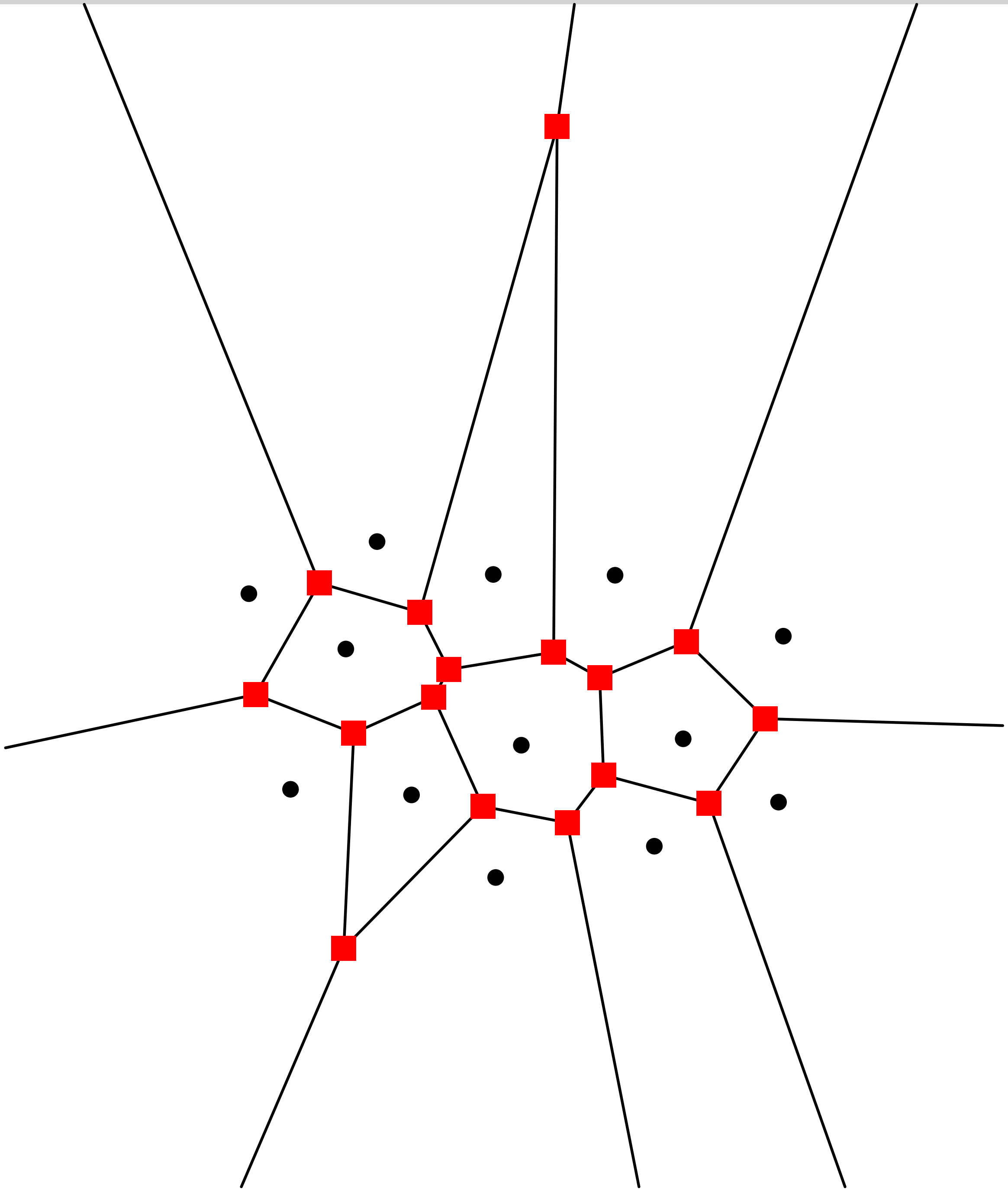


各点 $p \in P$ を

母点 や **サイト** と

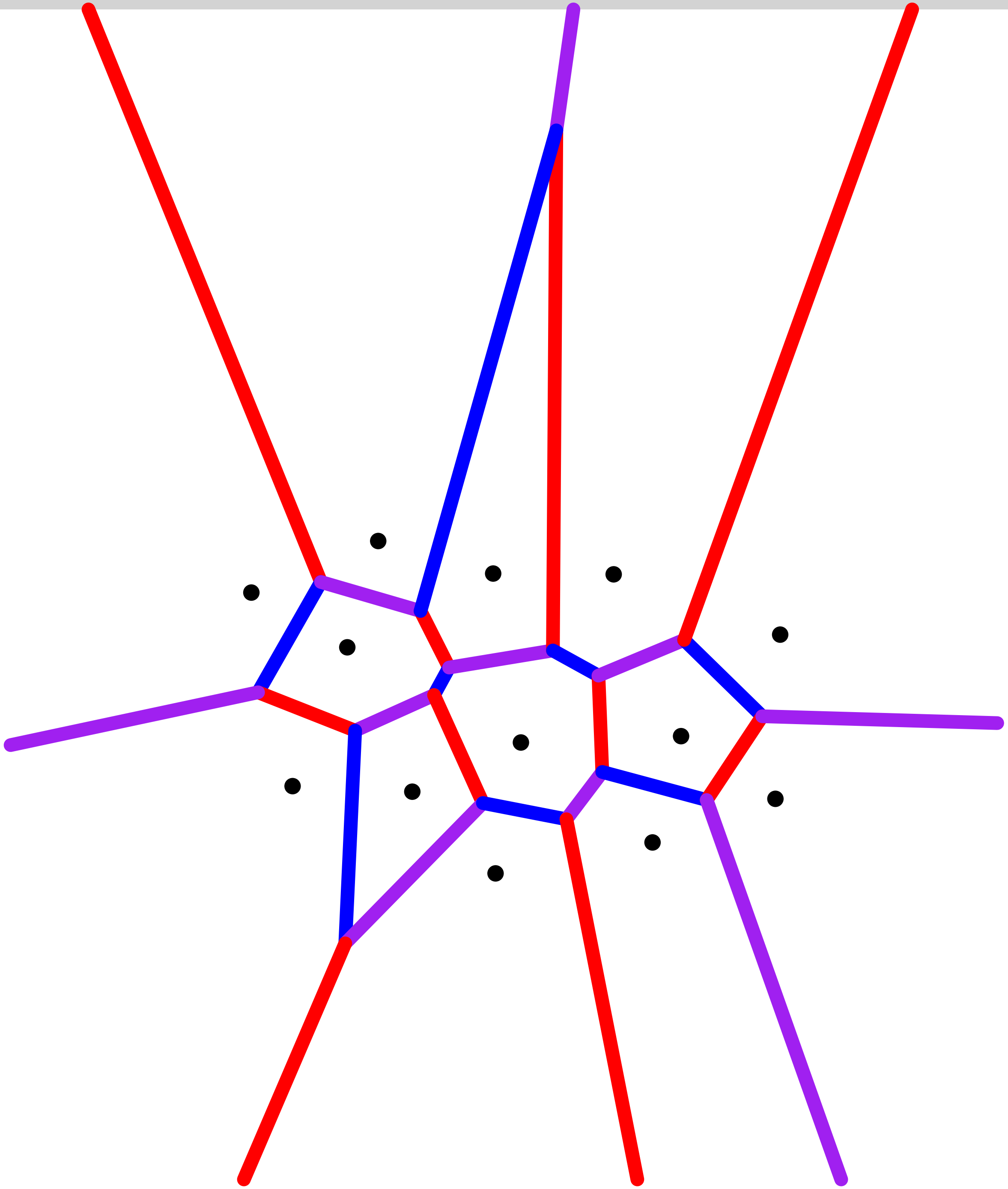
呼ぶことがある

ボロノイ図の構造



ボロノイ頂点：16 個

ボロノイ図の構造



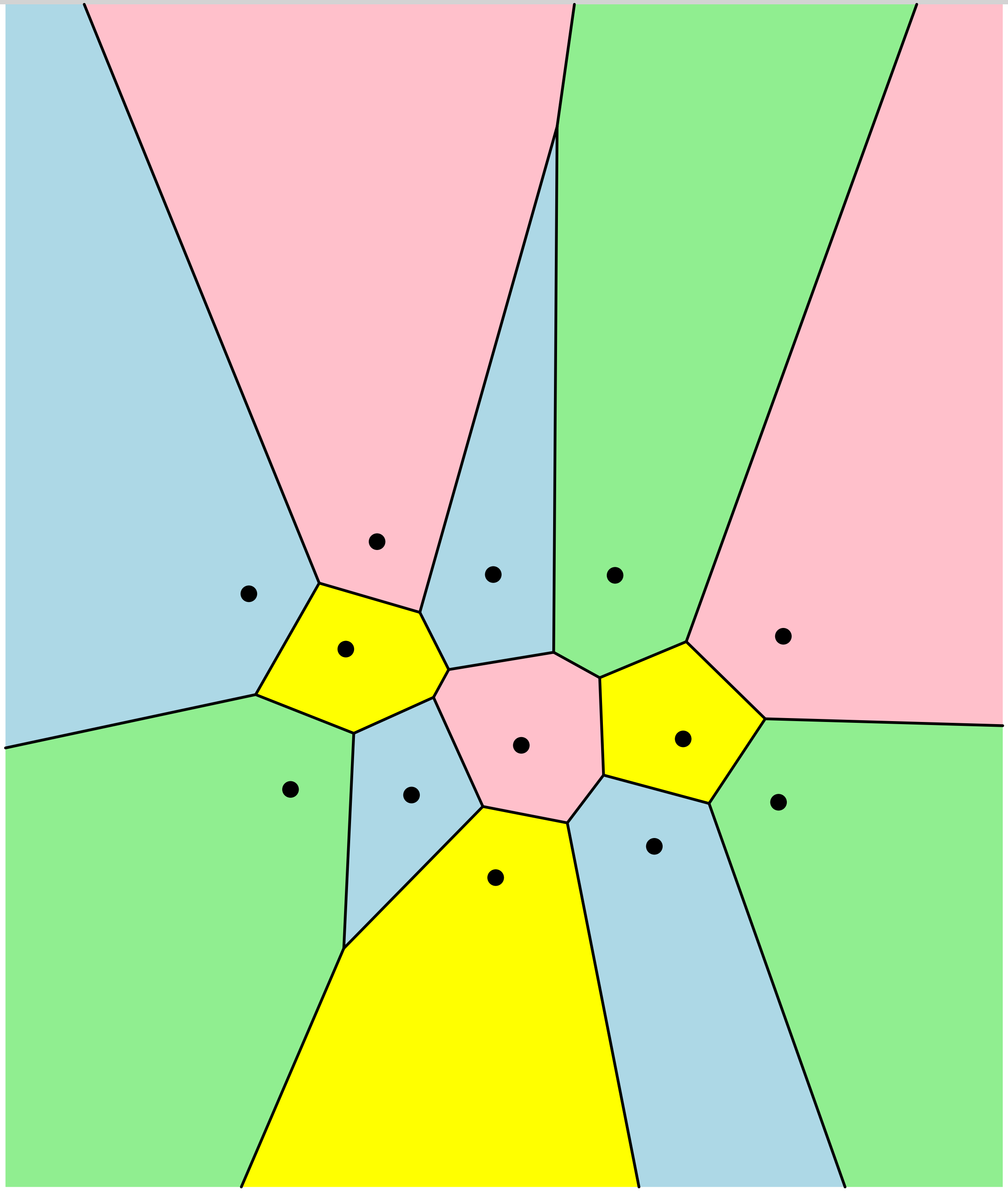
ボロノイ頂点：16 個

ボロノイ辺：28 個

　有界なもの：20 個

　非有界なもの：8 個

ボロノイ図の構造



ボロノイ頂点：16 個

ボロノイ辺：28 個

　有界なもの：20 個

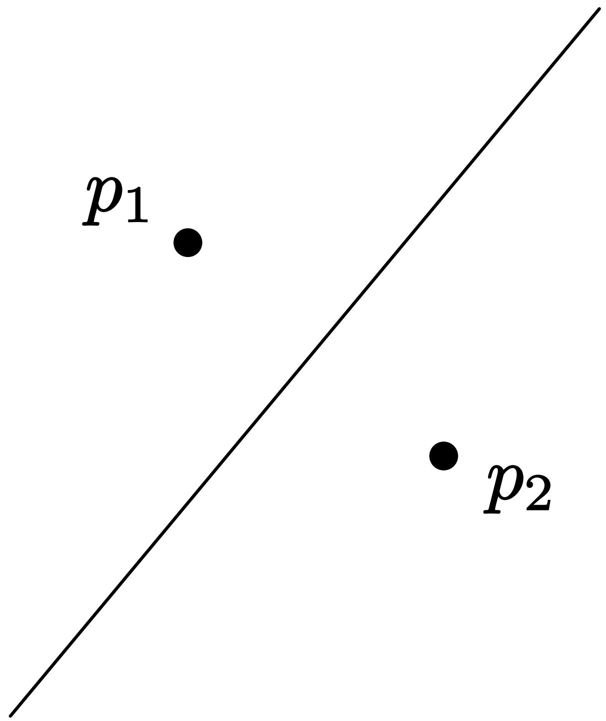
　非有界なもの：8 個

ボロノイ領域：13 個
(ボロノイ胞)
(ボロノイ・セル)

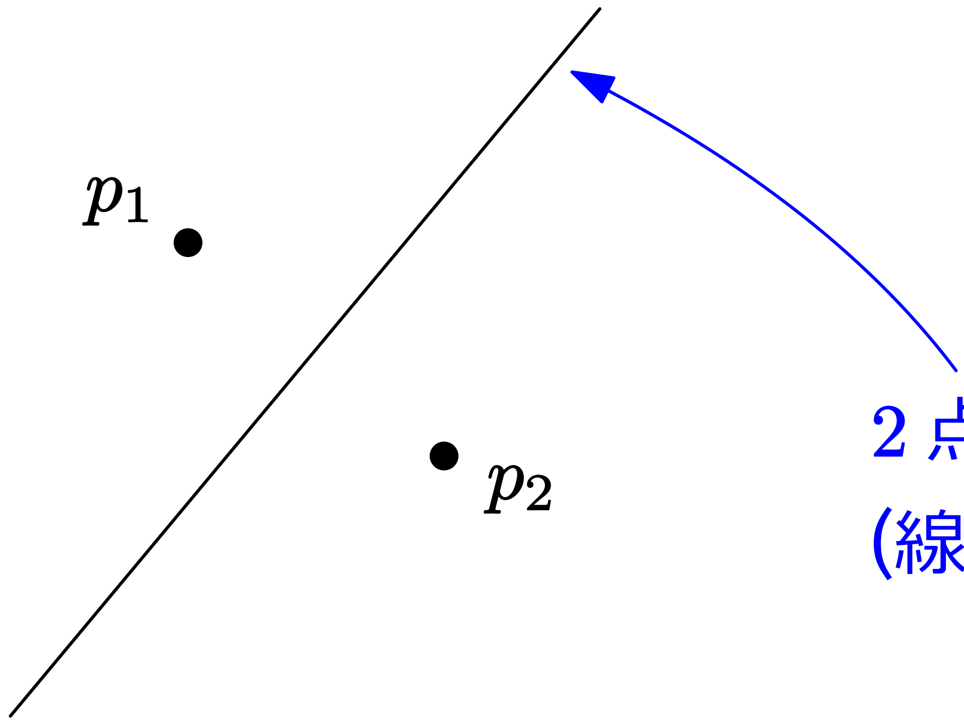
　有界なもの：5 個

　非有界なもの：8 個

母点が 2 個の場合

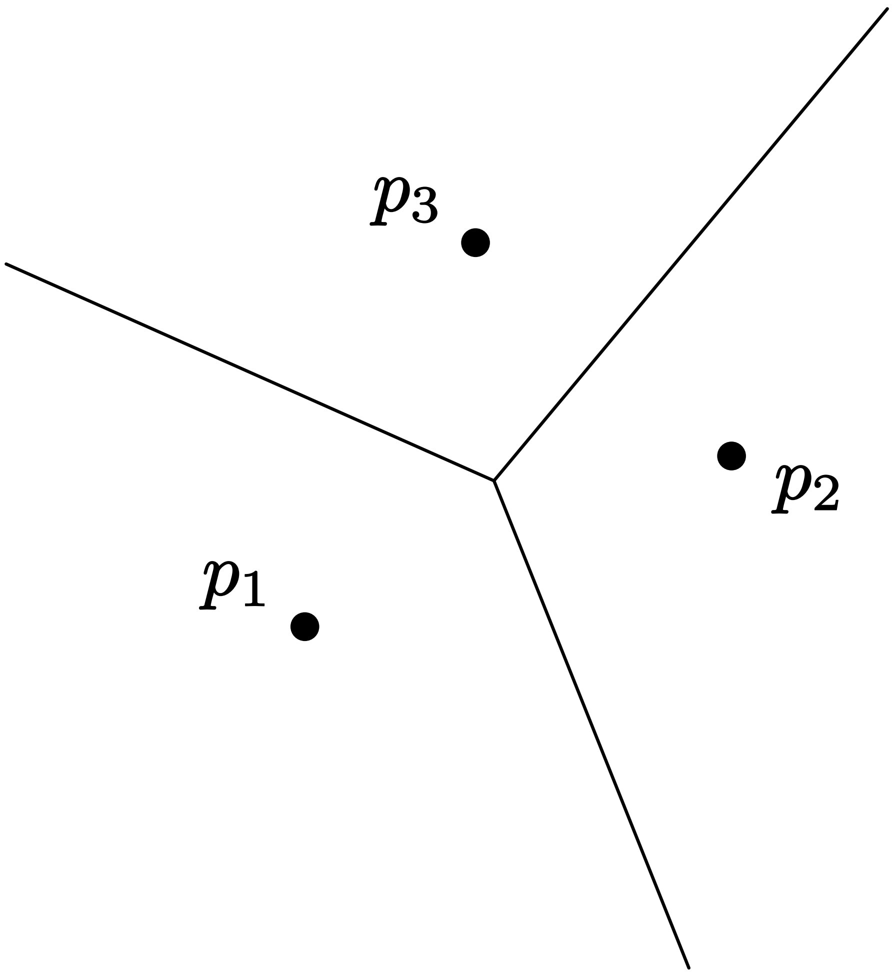


母点が 2 個の場合

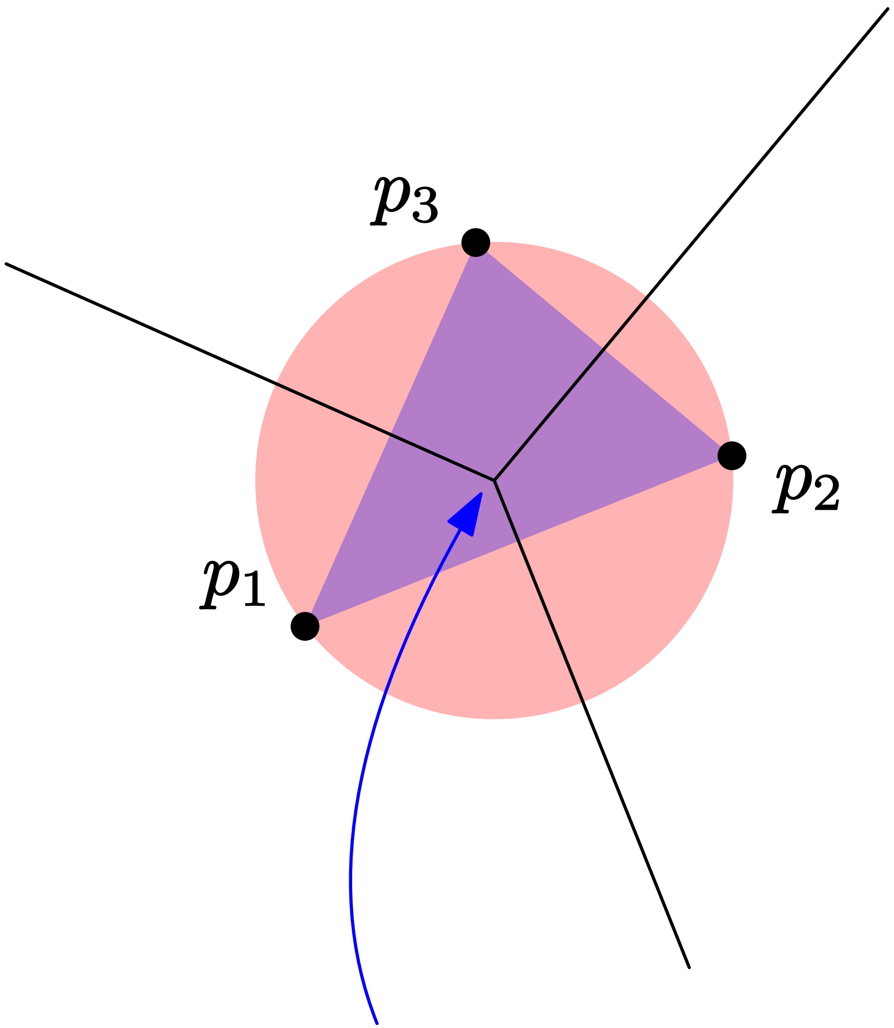


2 点 p_1, p_2 の等距離線
(線分 $\overline{p_1 p_2}$ の垂直二等分線)

母点が 3 個の場合

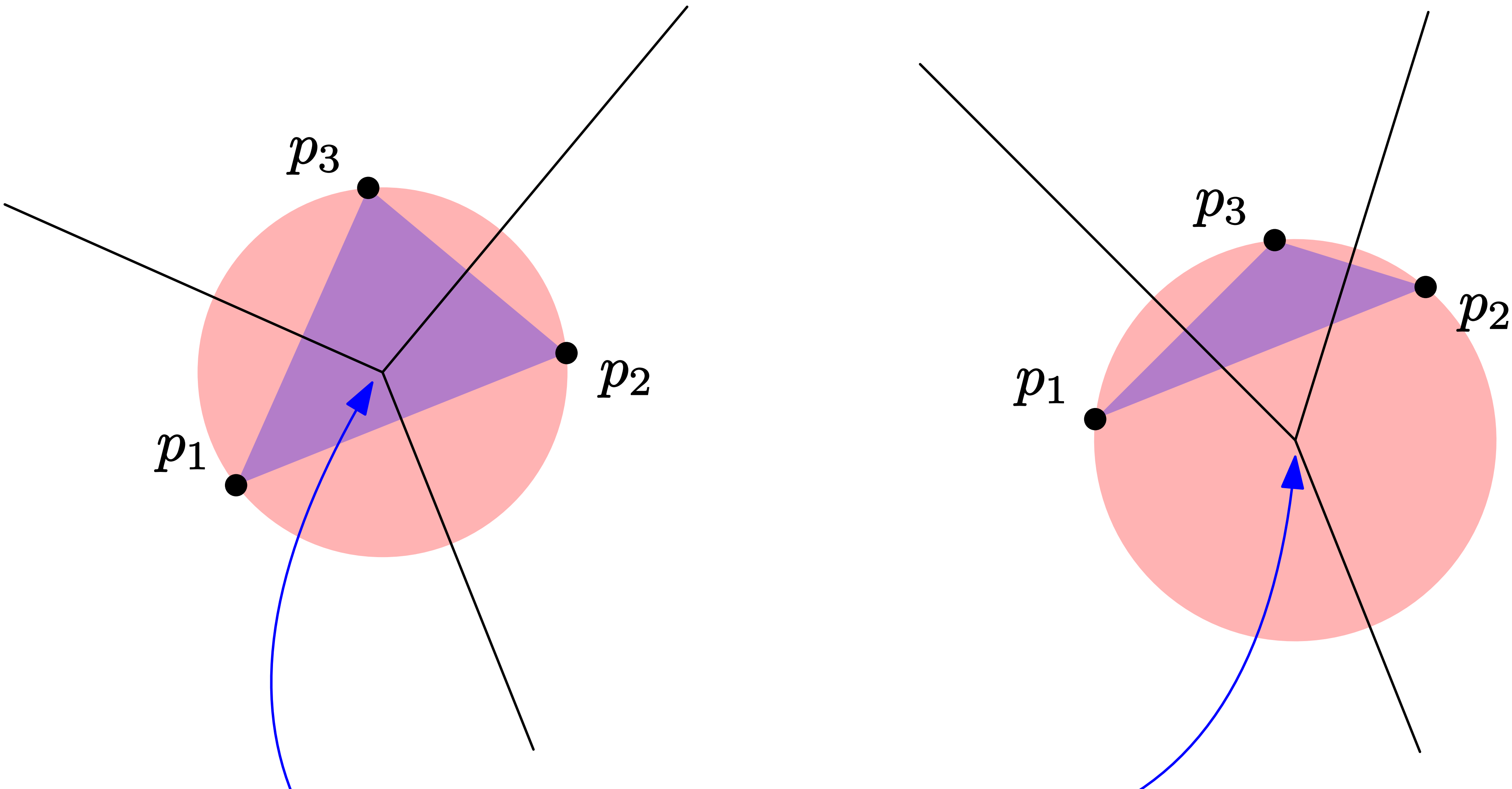


母点が 3 個の場合



$\triangle p_1p_2p_3$ の外接円の中心 (外心)

母点が 3 個の場合



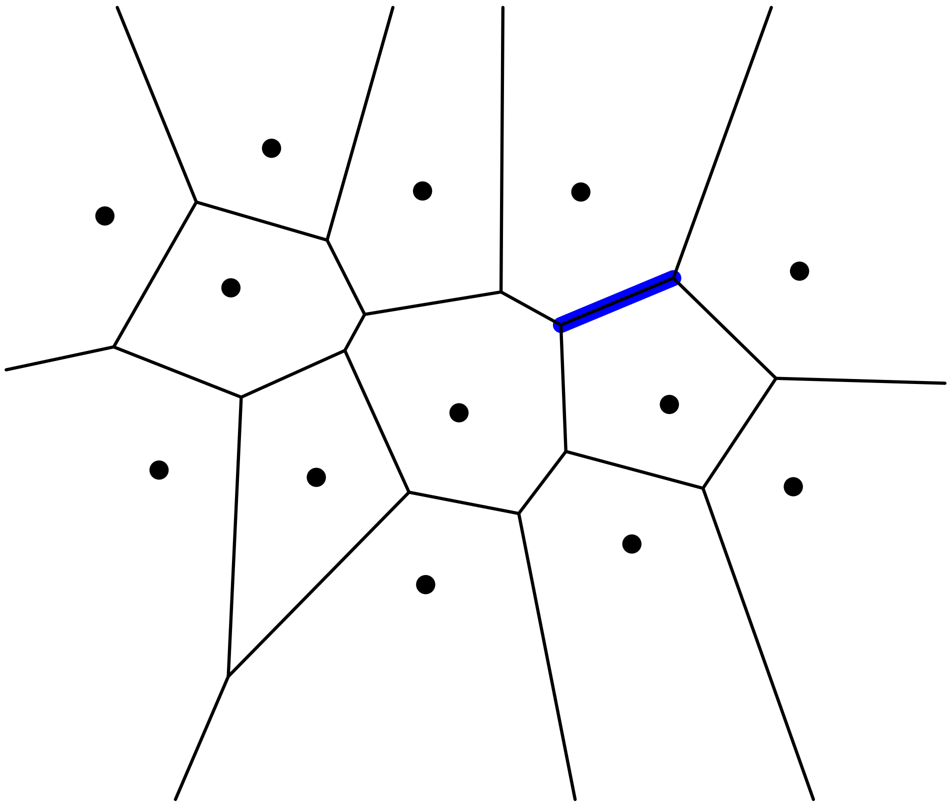
$\triangle p_1p_2p_3$ の外接円の中心 (外心)

ボロノイ辺は等距離線の一部

有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$

性質：ボロノイ辺

ボロノイ辺はある 2 点 $p, p' \in P$ の等距離線の一部



つまり，

q がボロノイ辺の相対的内点 $\Rightarrow$

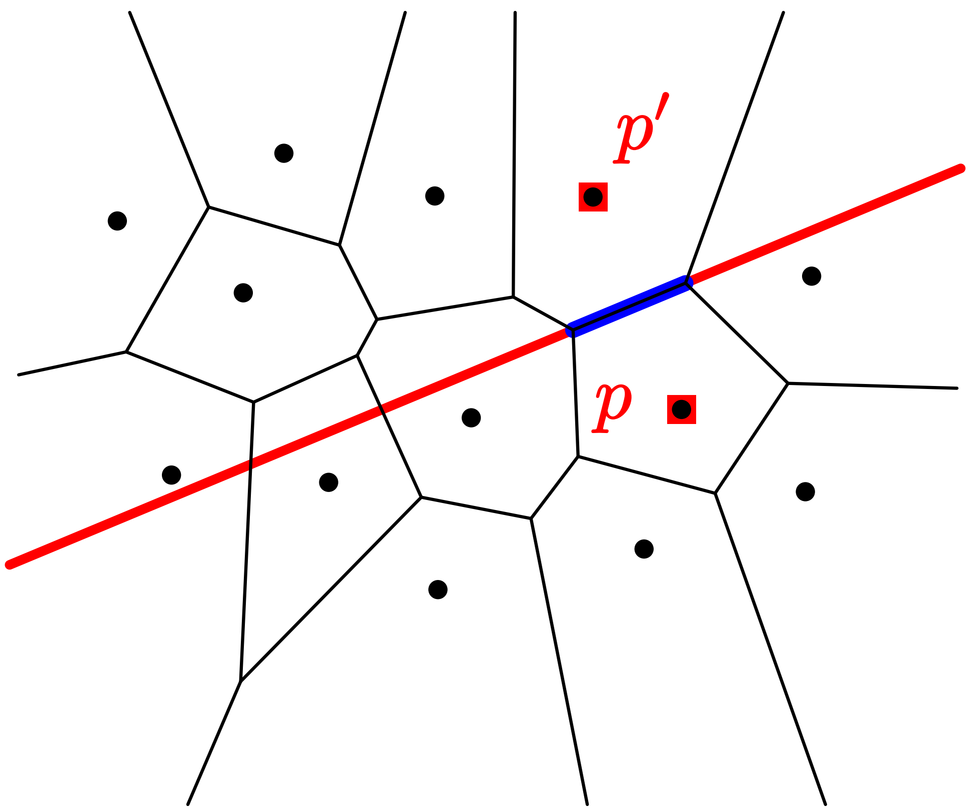
P における q の最近点の数 $= 2$

ボロノイ辺は等距離線の一部

有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$

性質：ボロノイ辺

ボロノイ辺はある 2 点 $p, p' \in P$ の等距離線の一部



つまり，

q がボロノイ辺の相対的内点 $\Rightarrow$

P における q の最近点の数 $= 2$

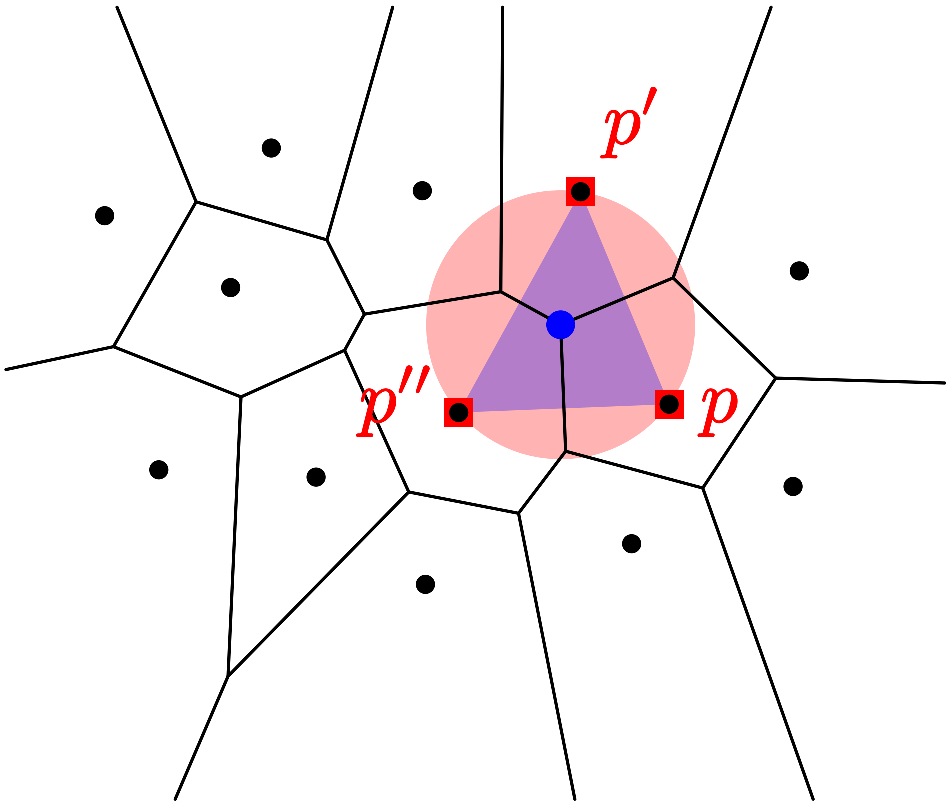
このボロノイ辺 $= V(p) \cap V(p')$

ボロノイ頂点は外心

有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$

性質：ボロノイ頂点

ボロノイ頂点はある 3 点 $p, p', p'' \in P$ が作る三角形 $\triangle pp'p''$ の外心



つまり，

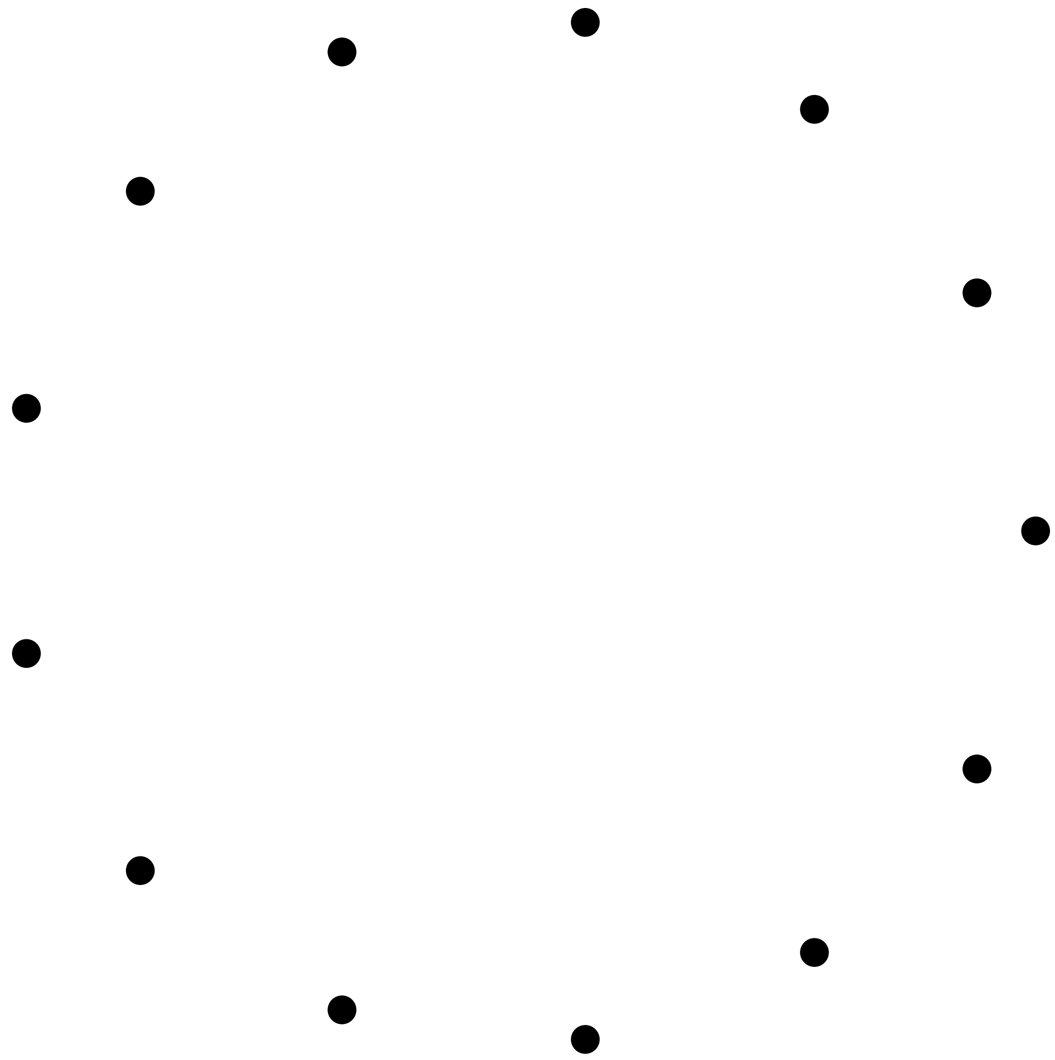
q がボロノイ頂点 $\Rightarrow$

P における q の最近点の数 ≥ 3

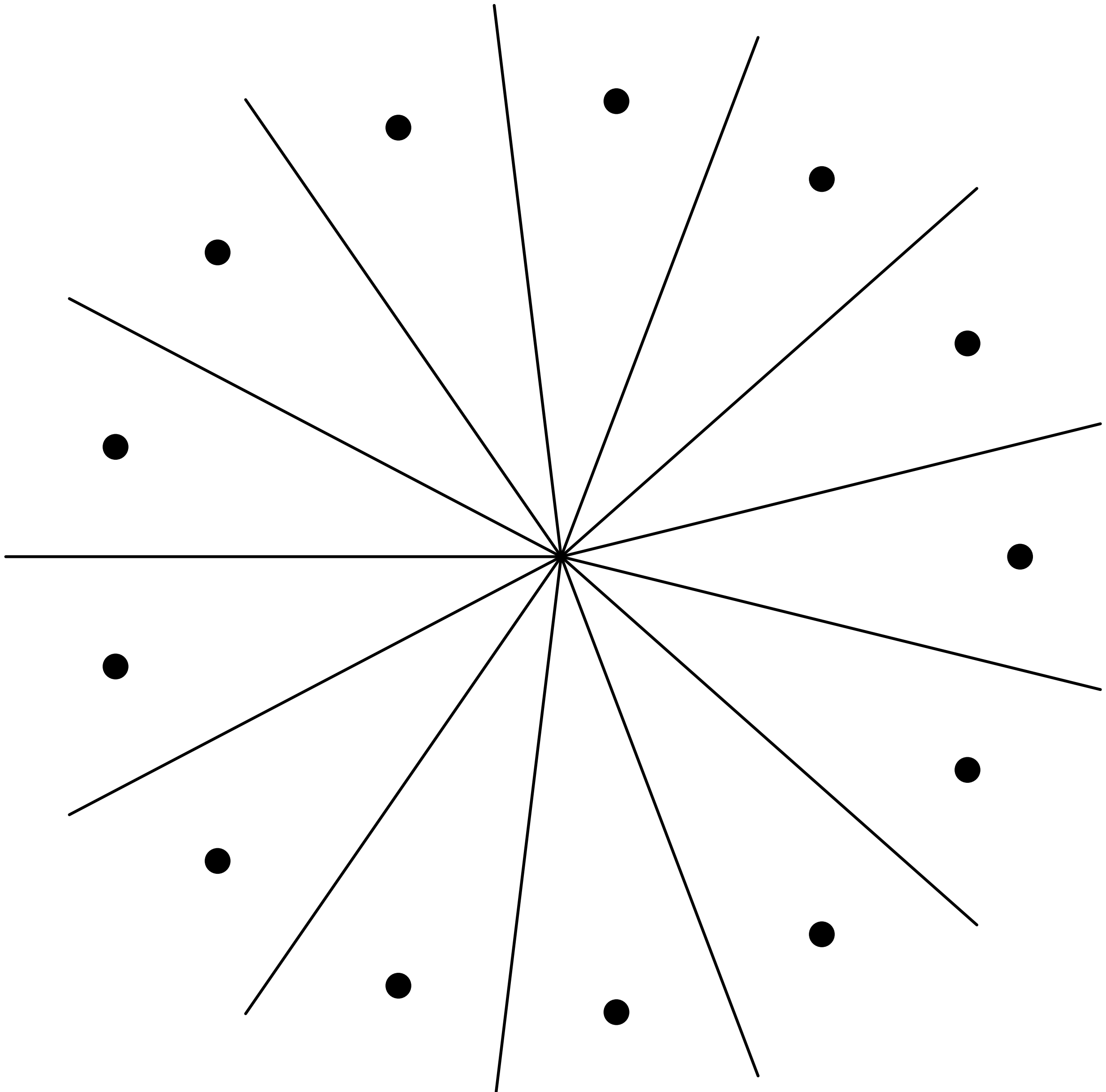
$\triangle pp'p''$ の外心

$= V(p) \cap V(p') \cap V(p'')$ の点

$P =$ 正十三角形の頂点集合

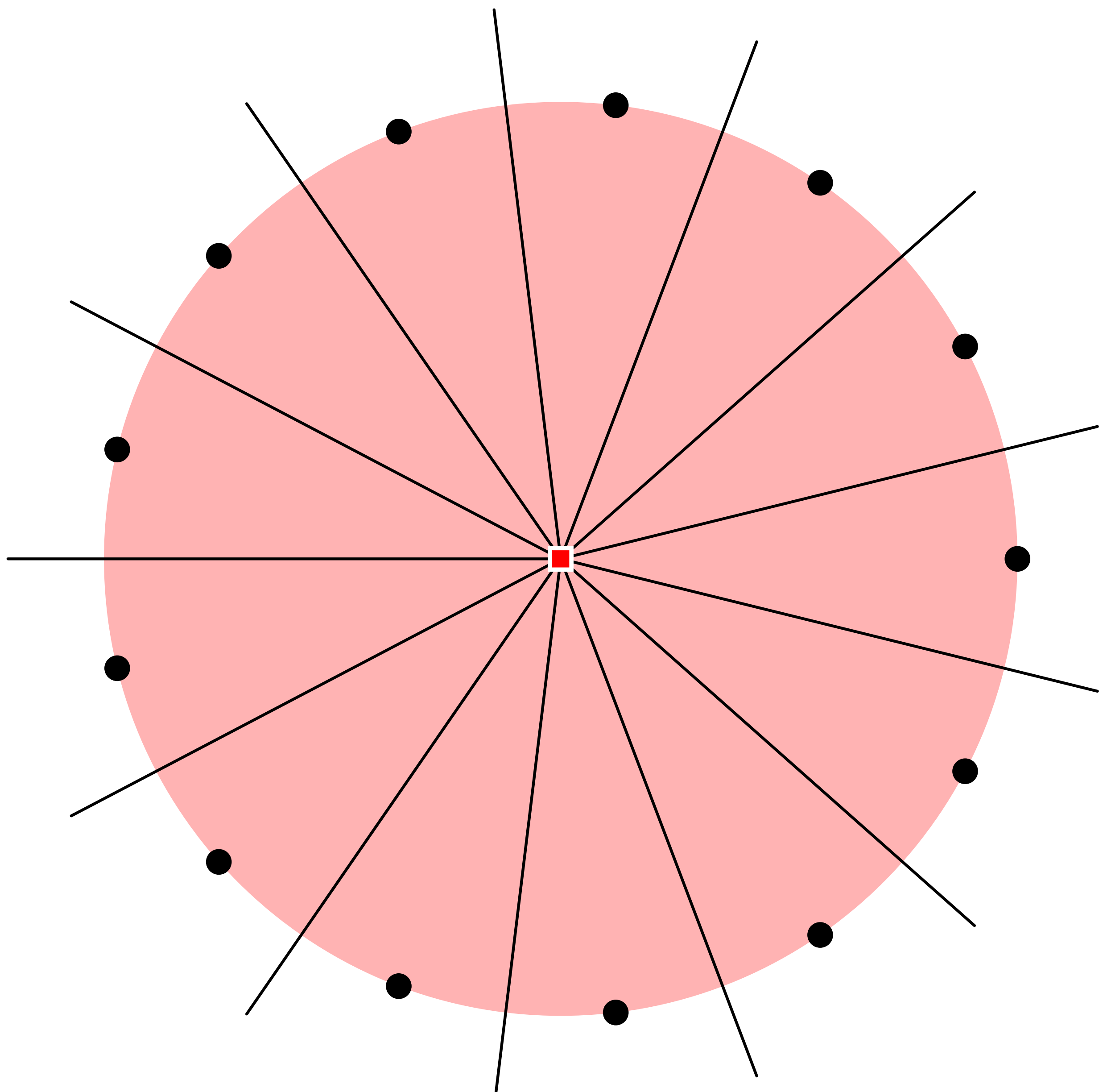


$P =$ 正十三角形の頂点集合



ボロノイ頂点の最近点

$P =$ 正十三角形の頂点集合



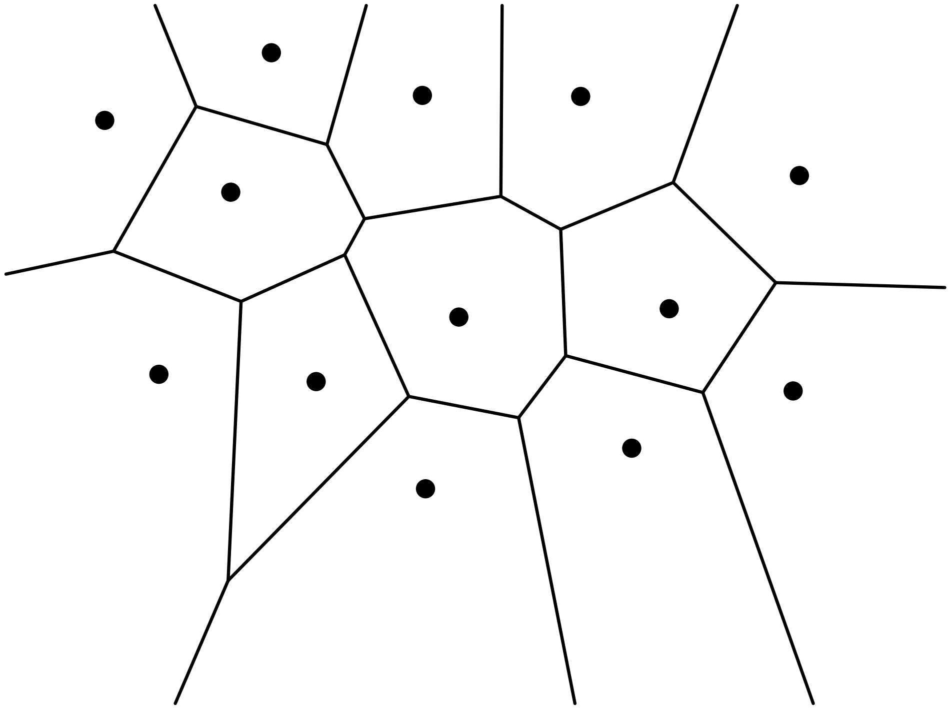
母点のボロノイ領域は必ず非空

有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$

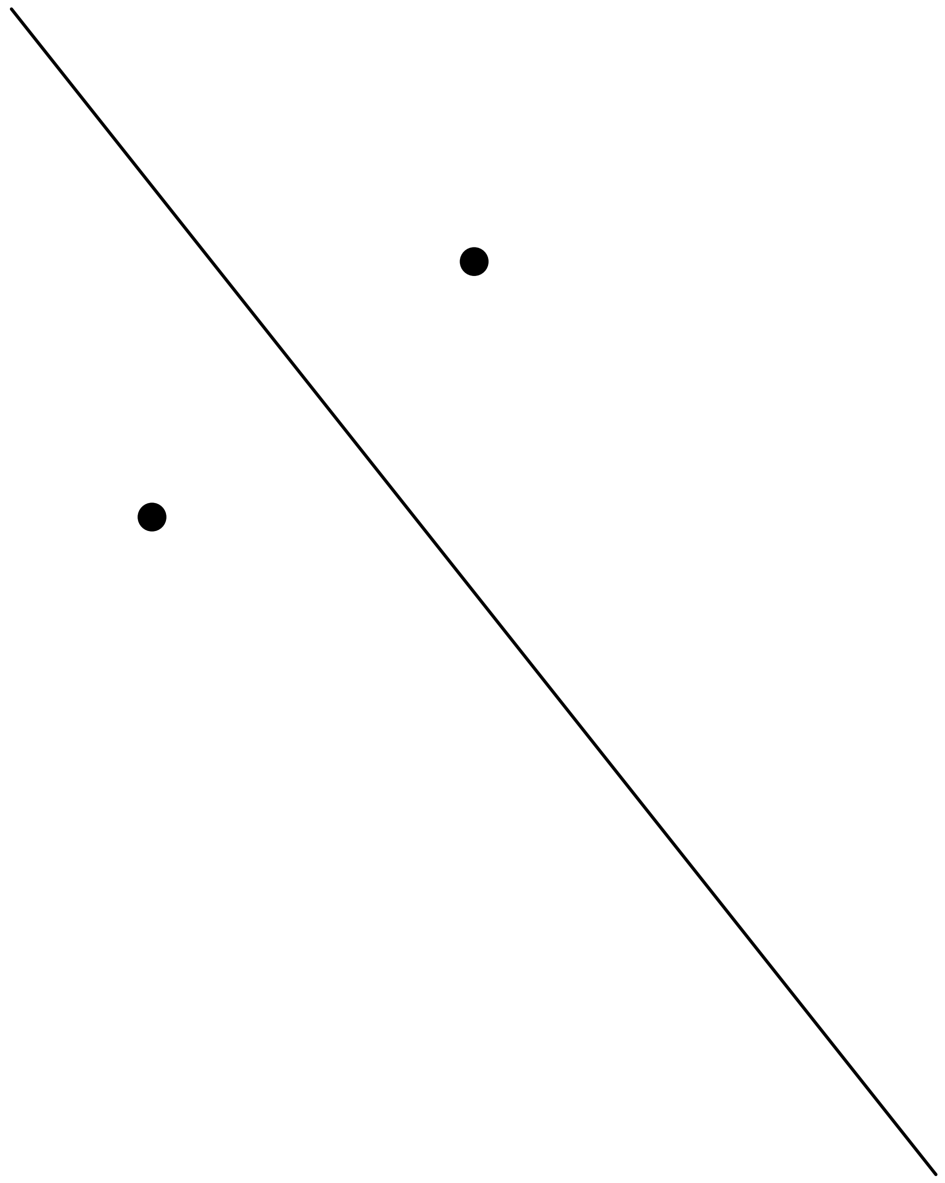
性質：ボロノイ領域は非空

点 $p \in P$ のボロノイ領域 $V(p)$ に対して，$p \in V(p)$

定義：$V(p) = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} p \text{ と } q \text{ の距離} \leq r \text{ と } q \text{ の距離} \\ \forall\, r \in P - \{p\} \end{array} \right\}$

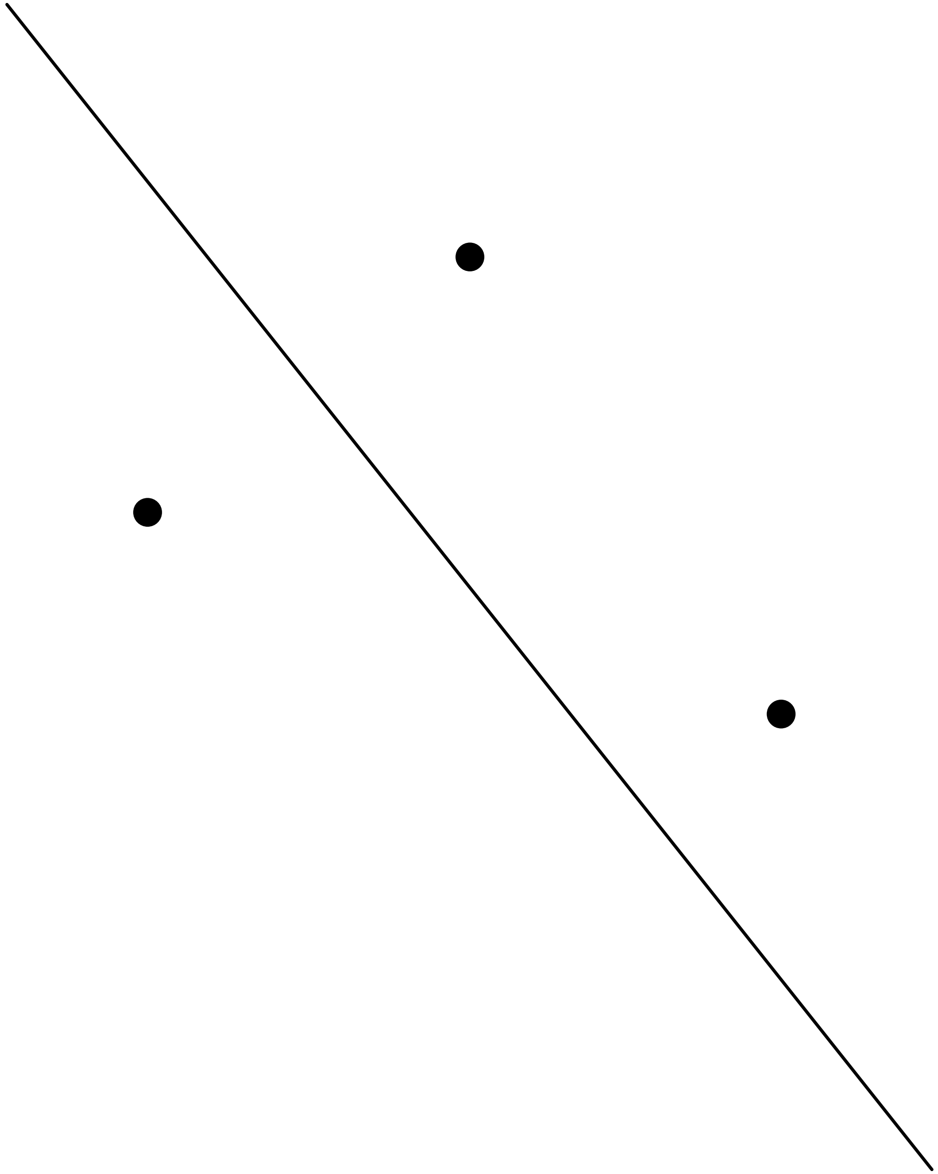


ボロノイ図の作り方



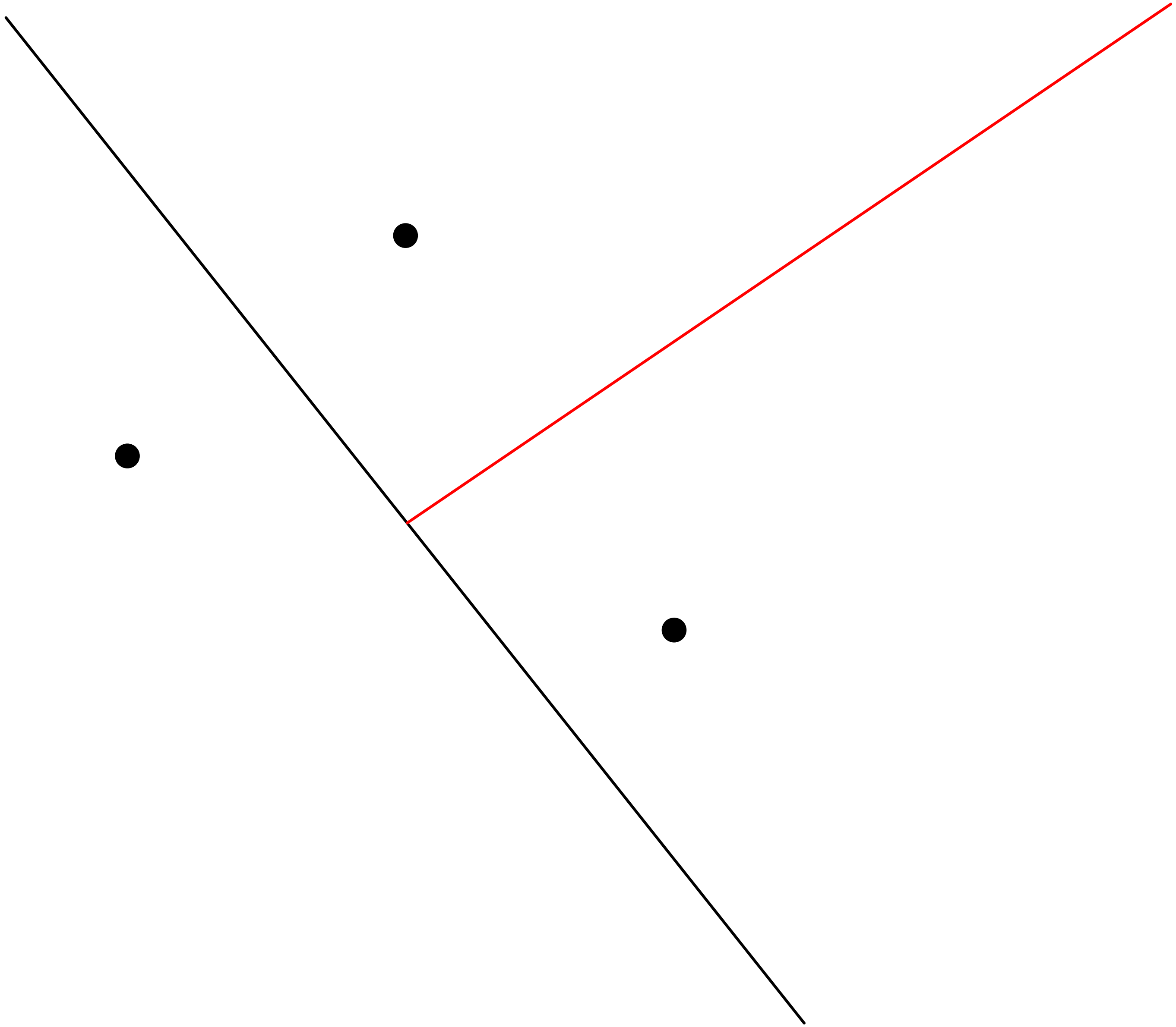
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



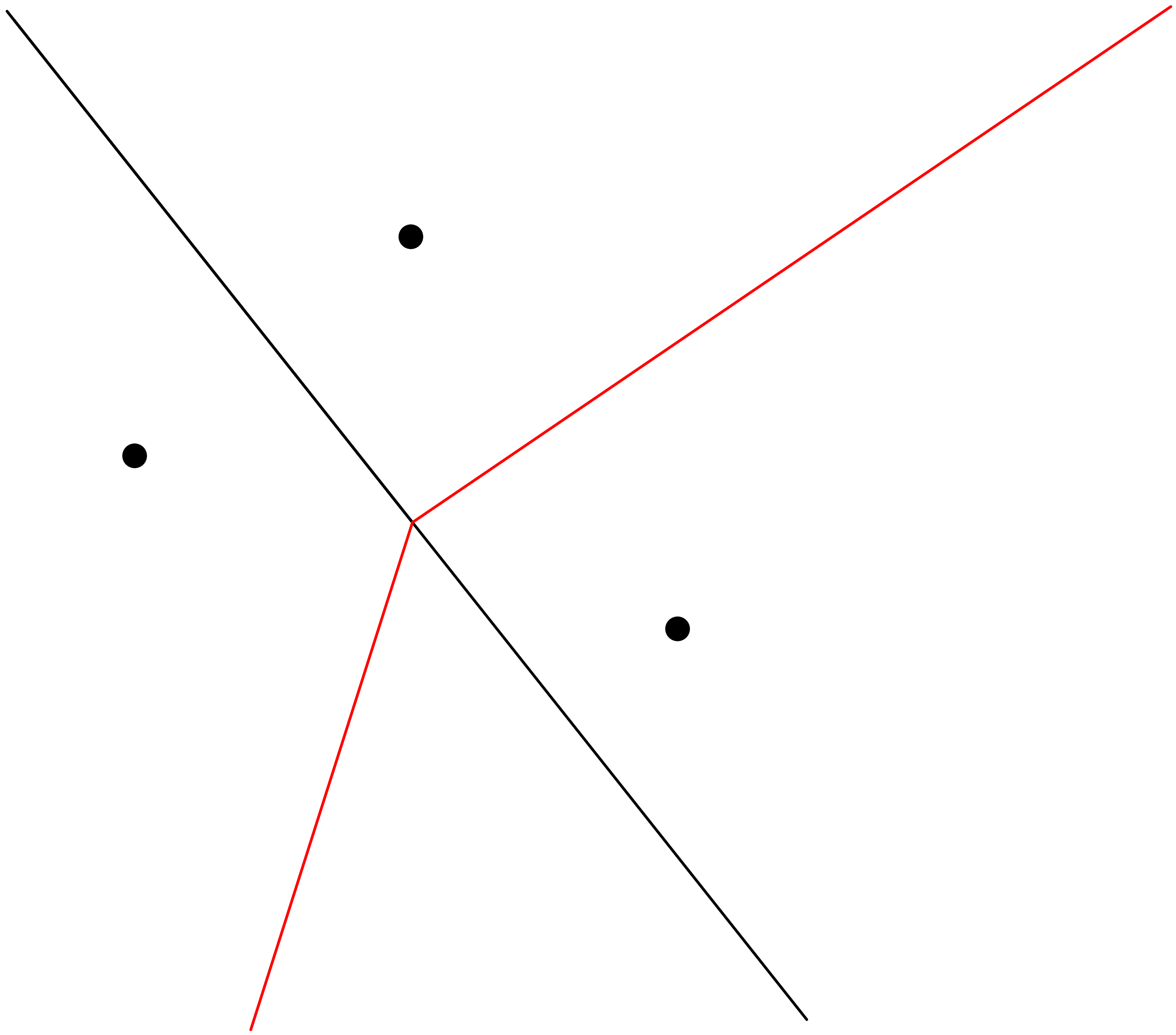
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



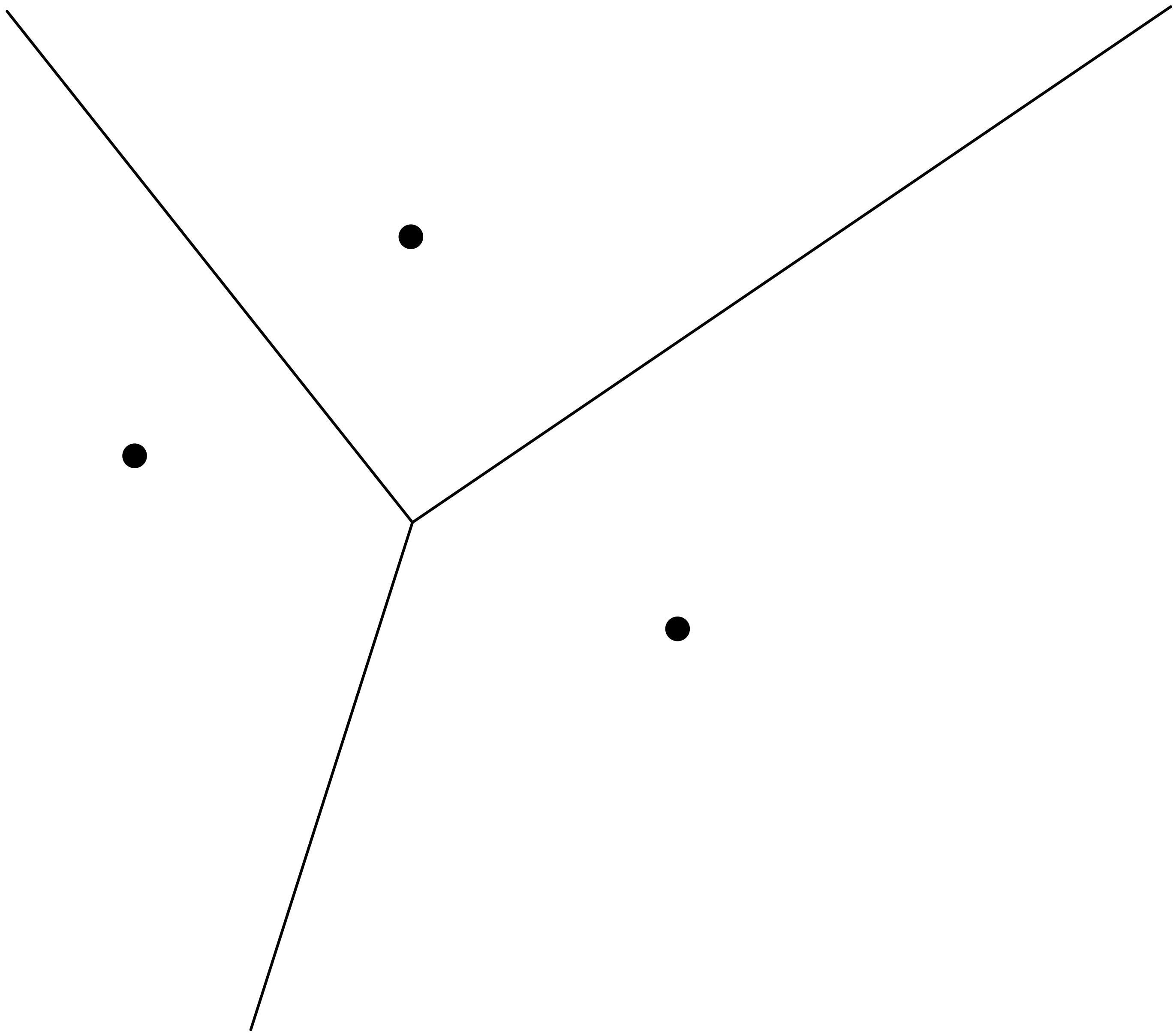
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



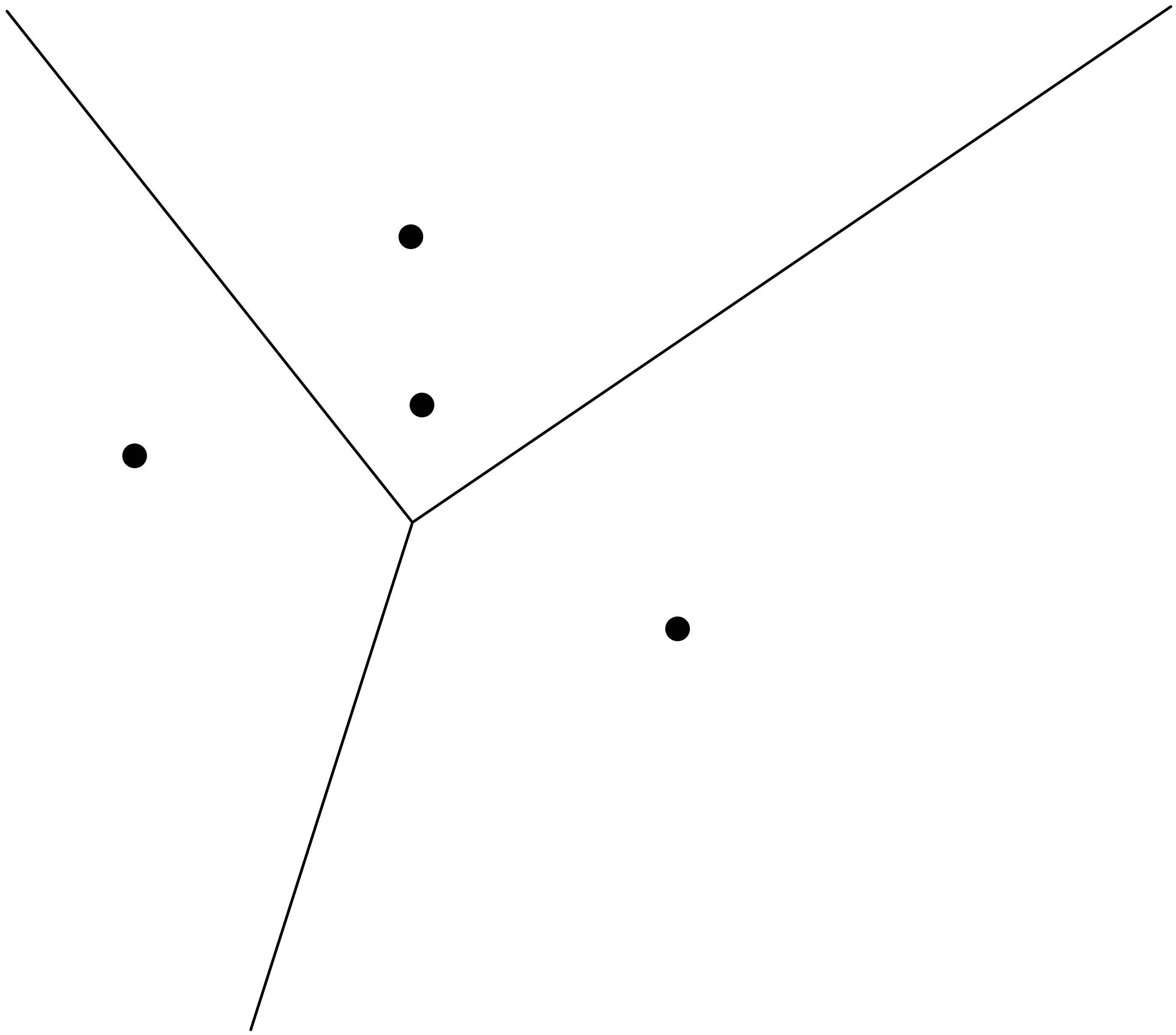
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



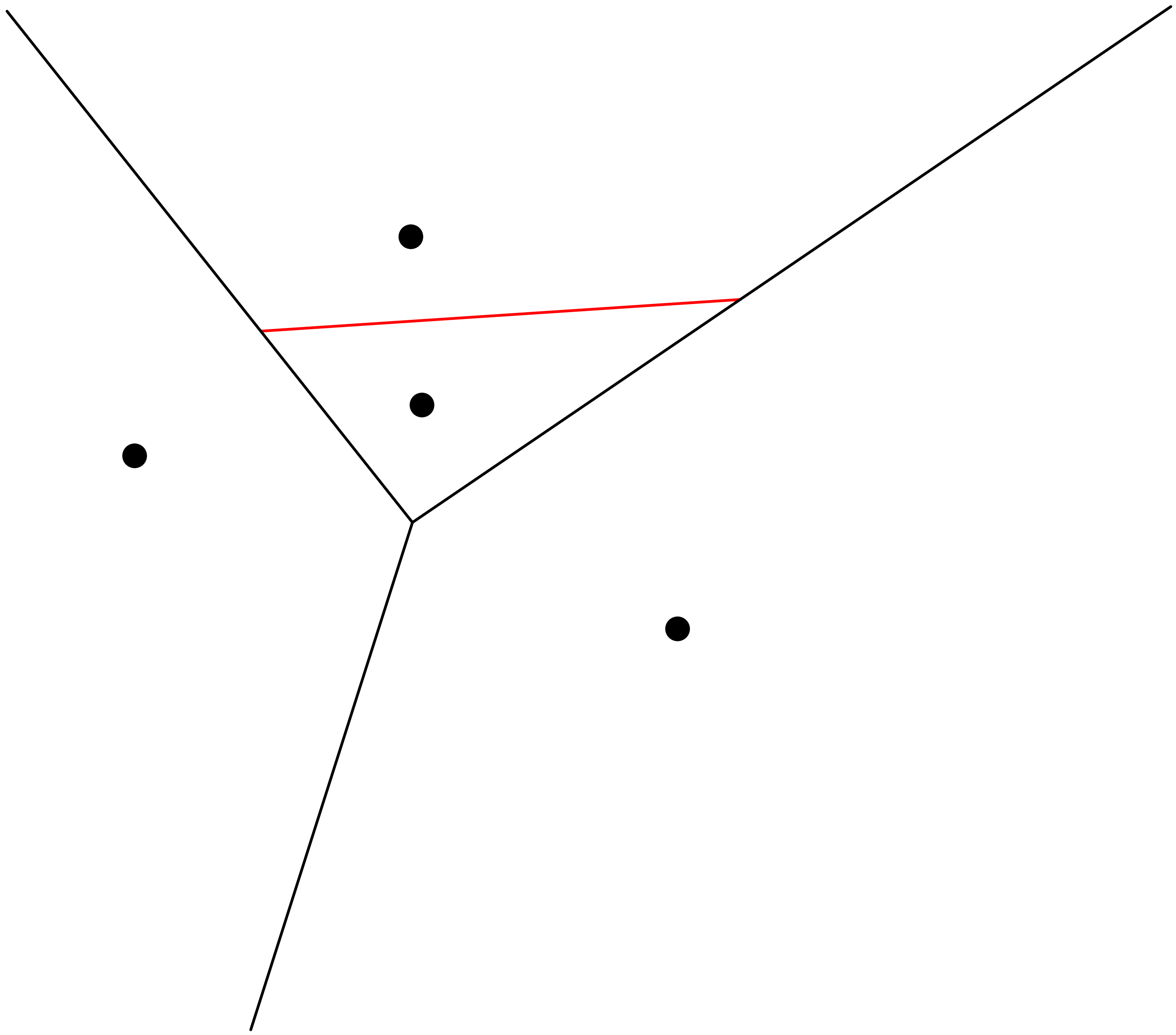
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



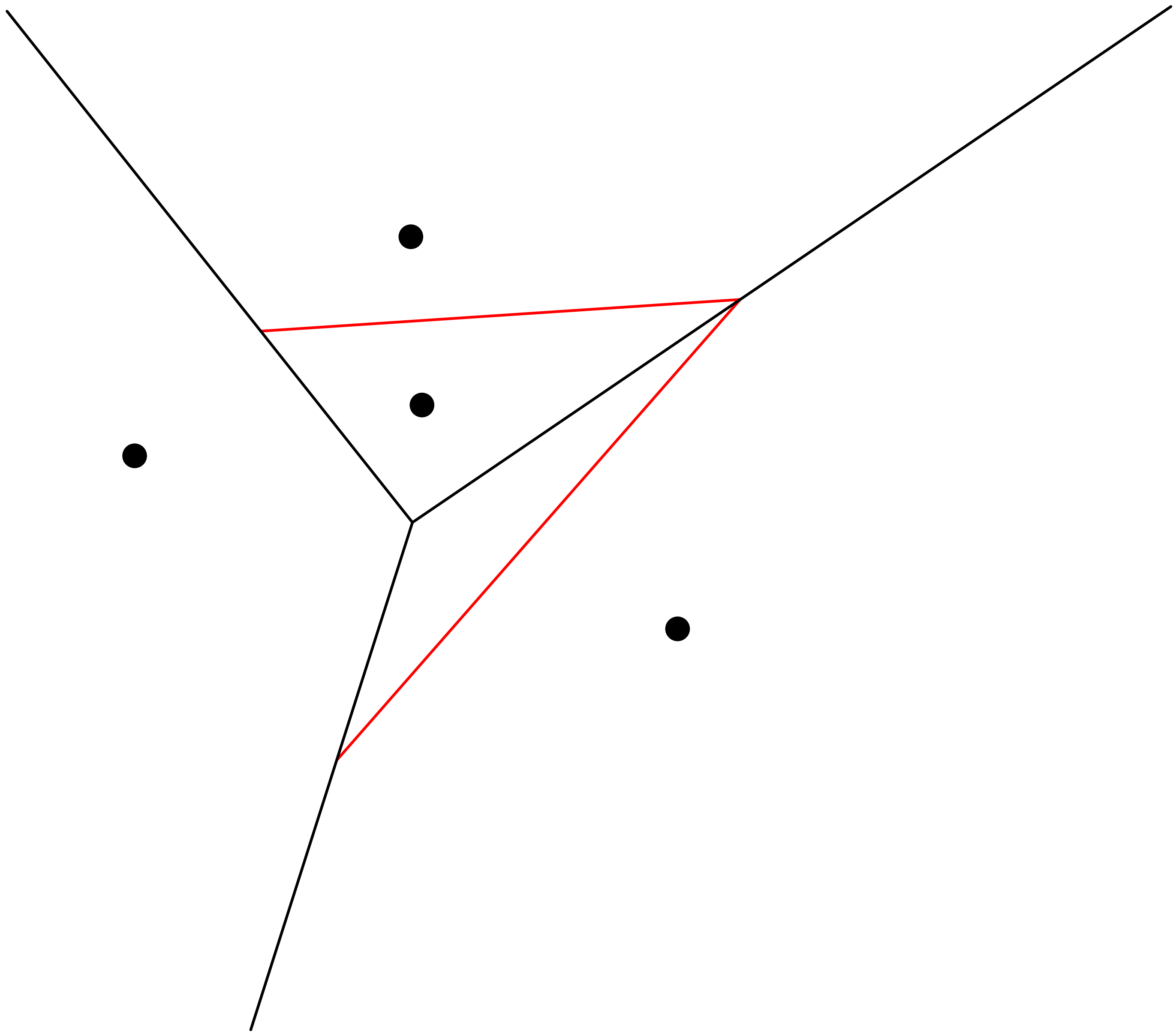
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



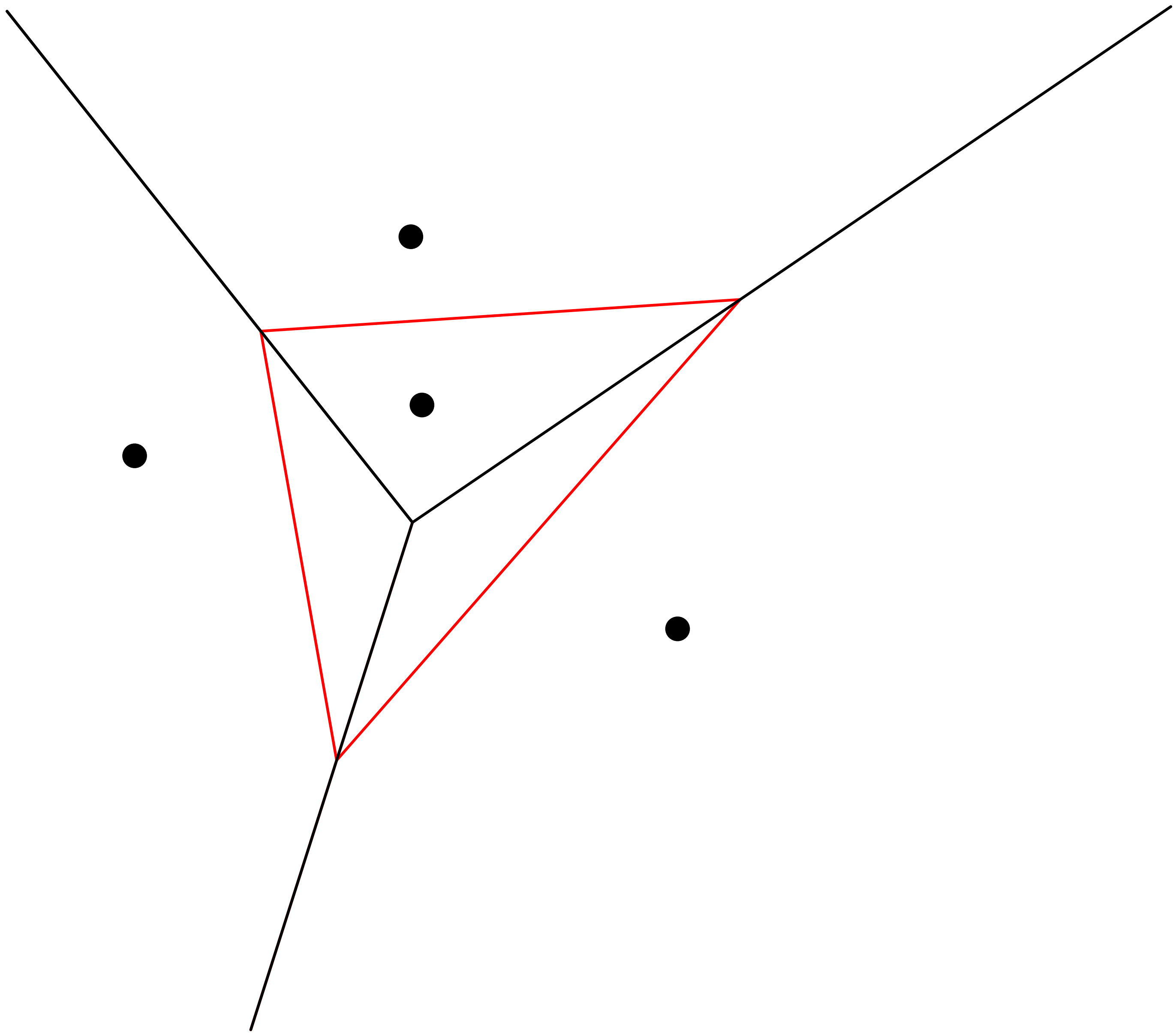
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



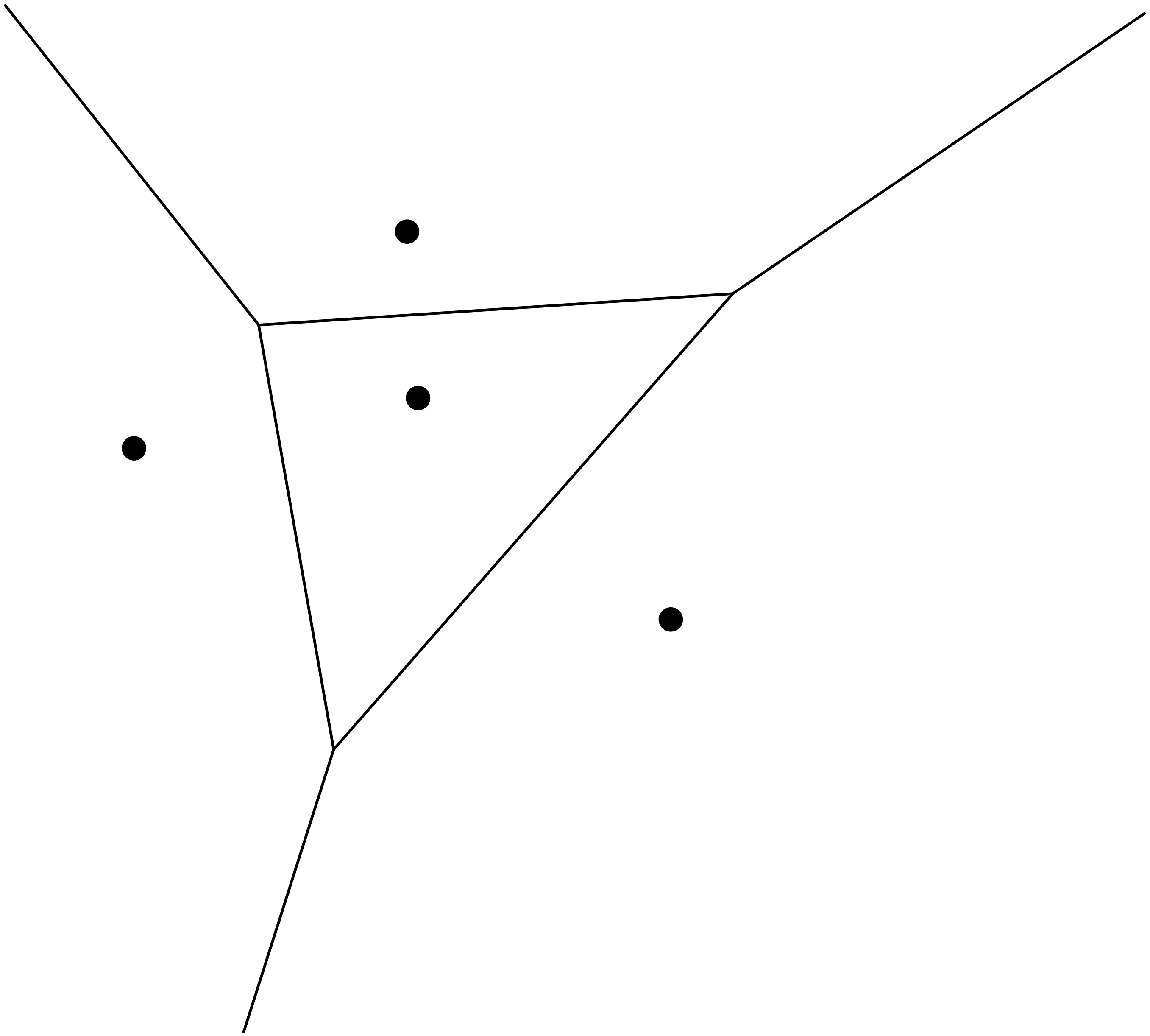
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



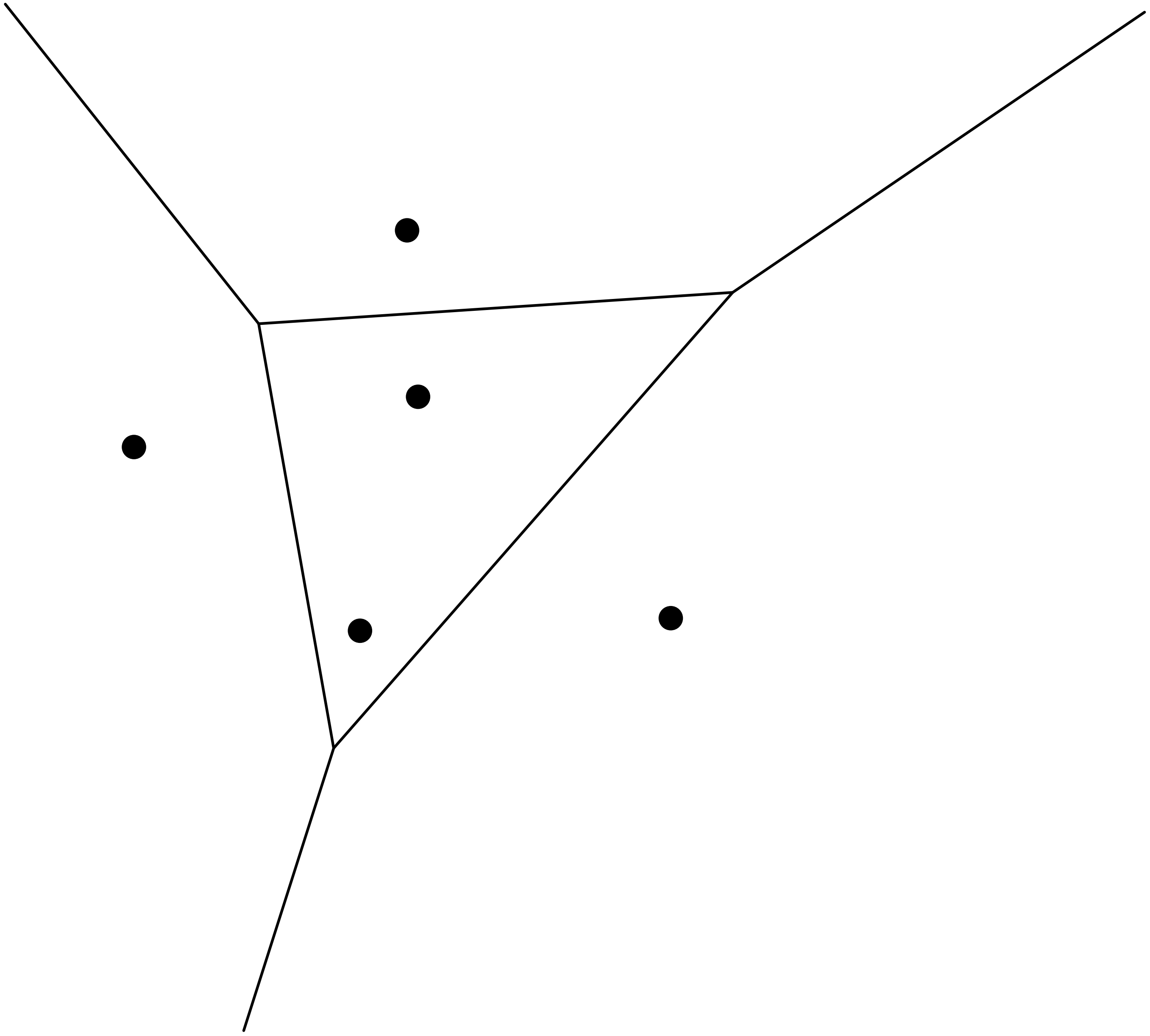
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



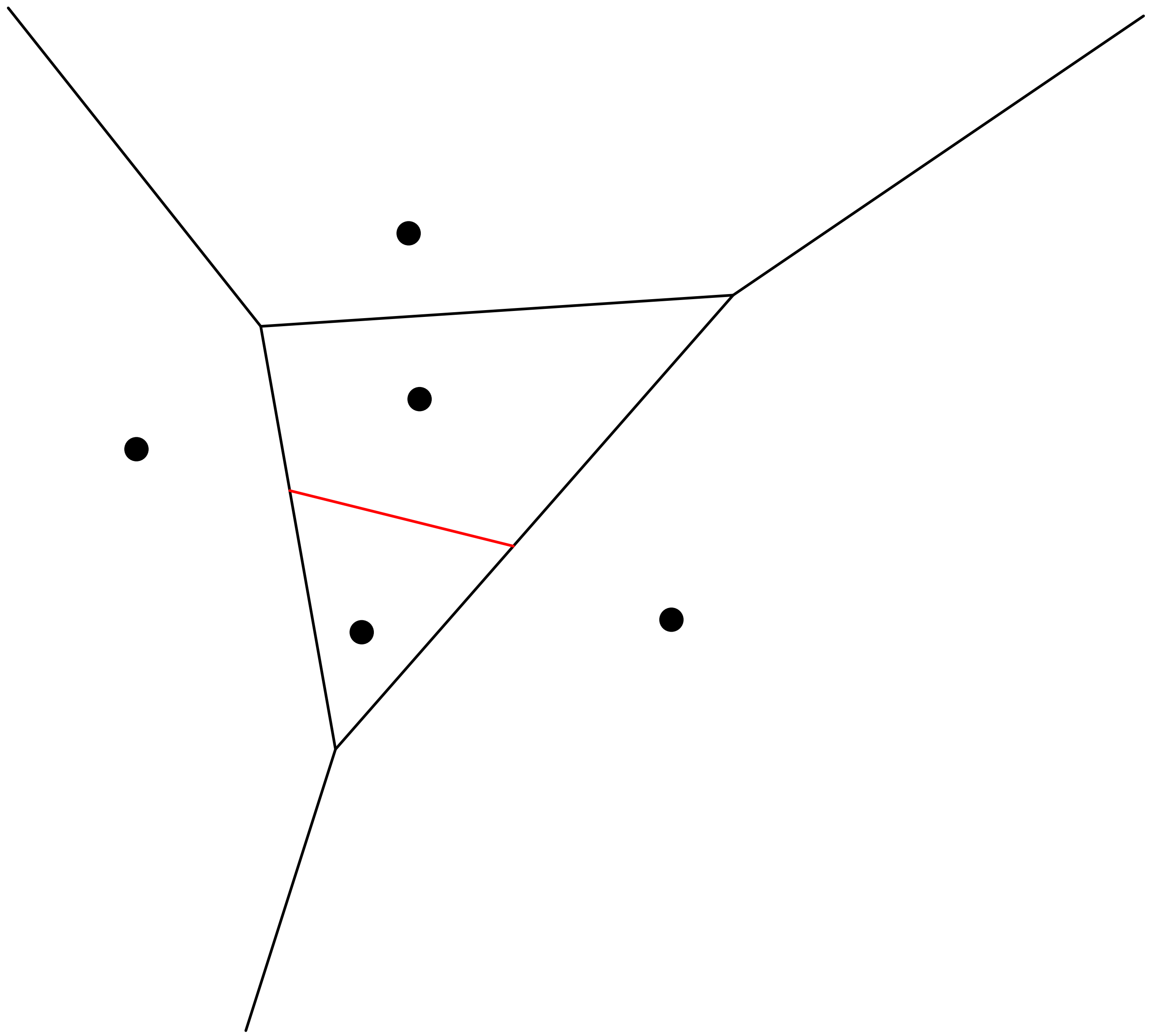
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



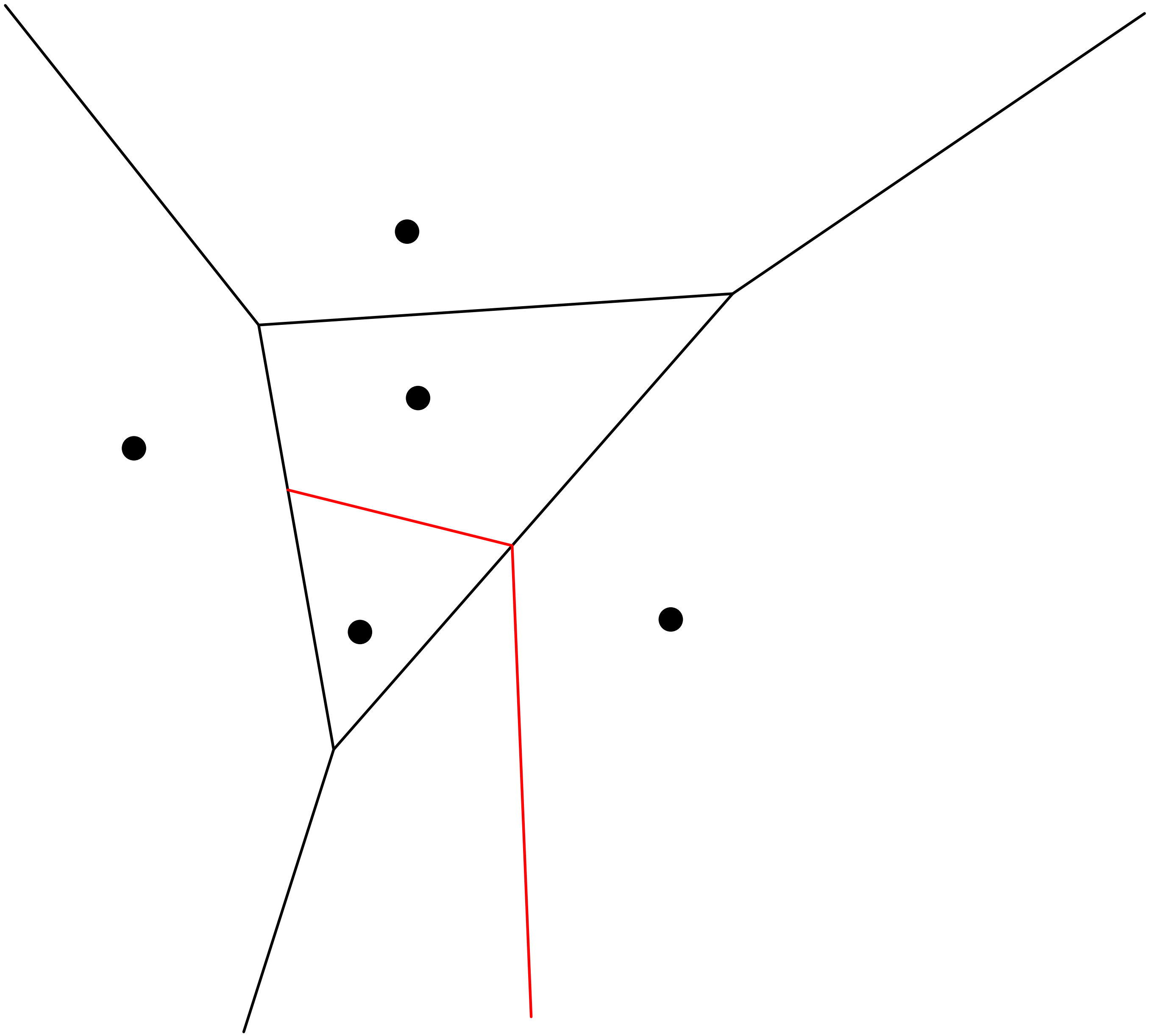
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



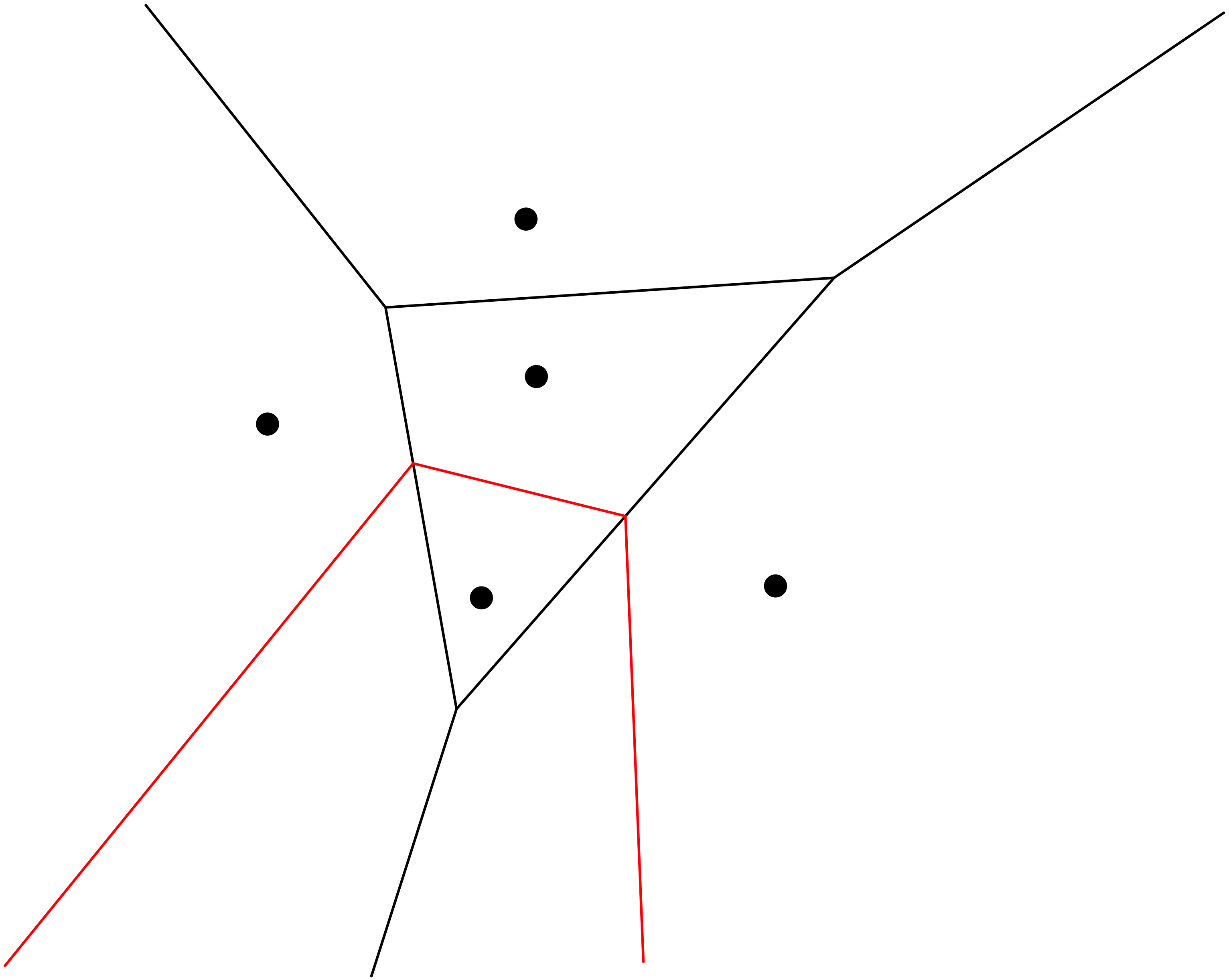
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



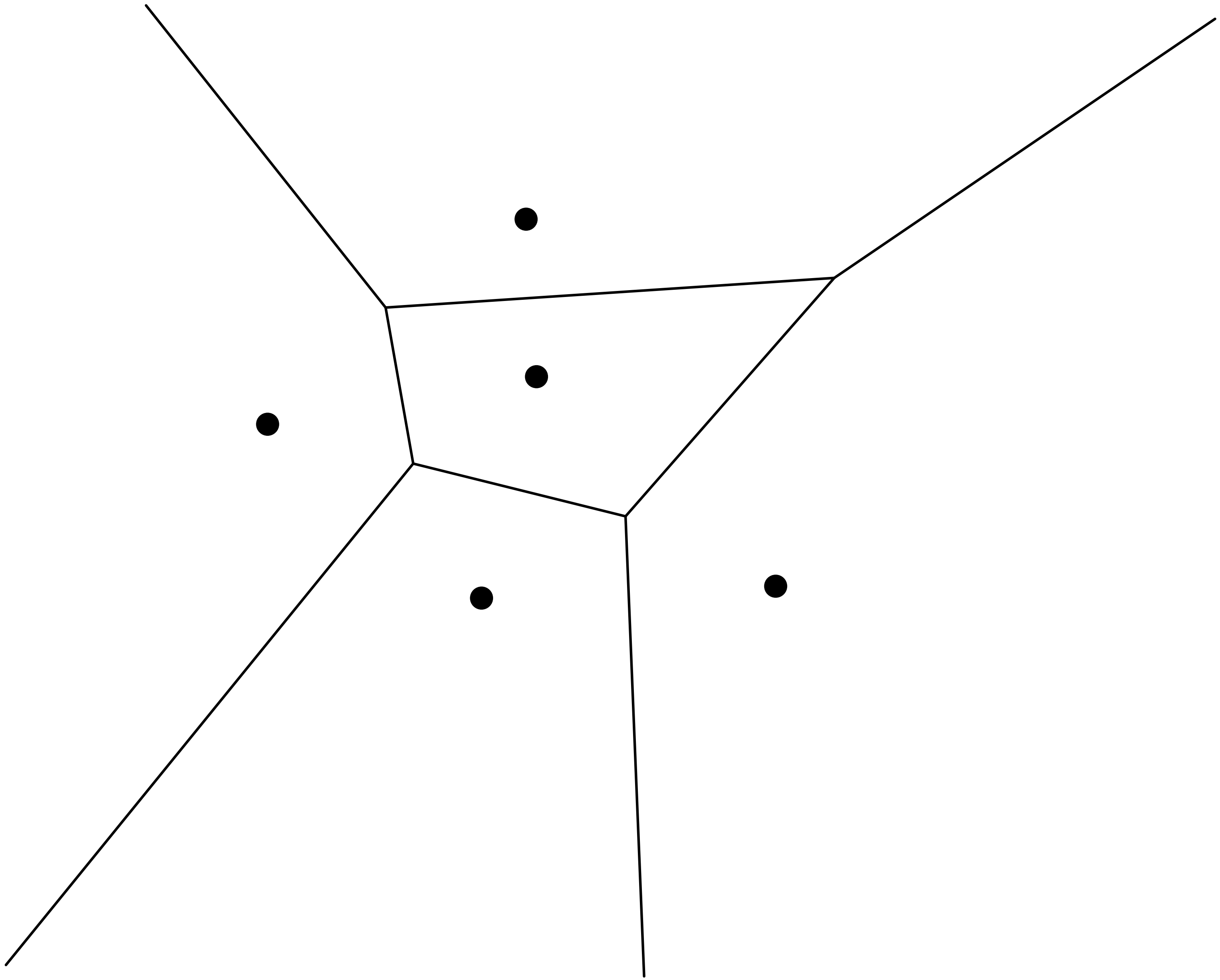
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



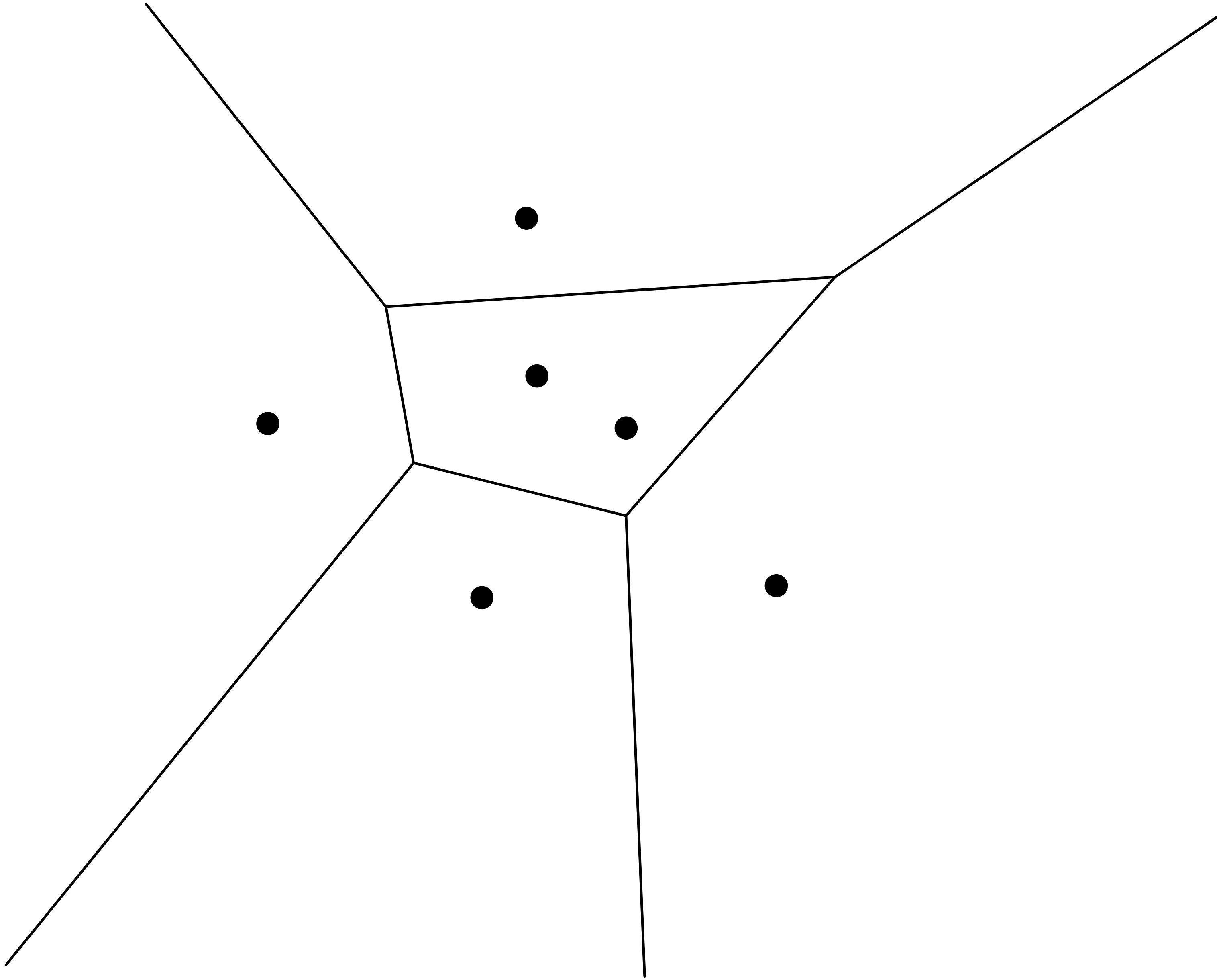
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



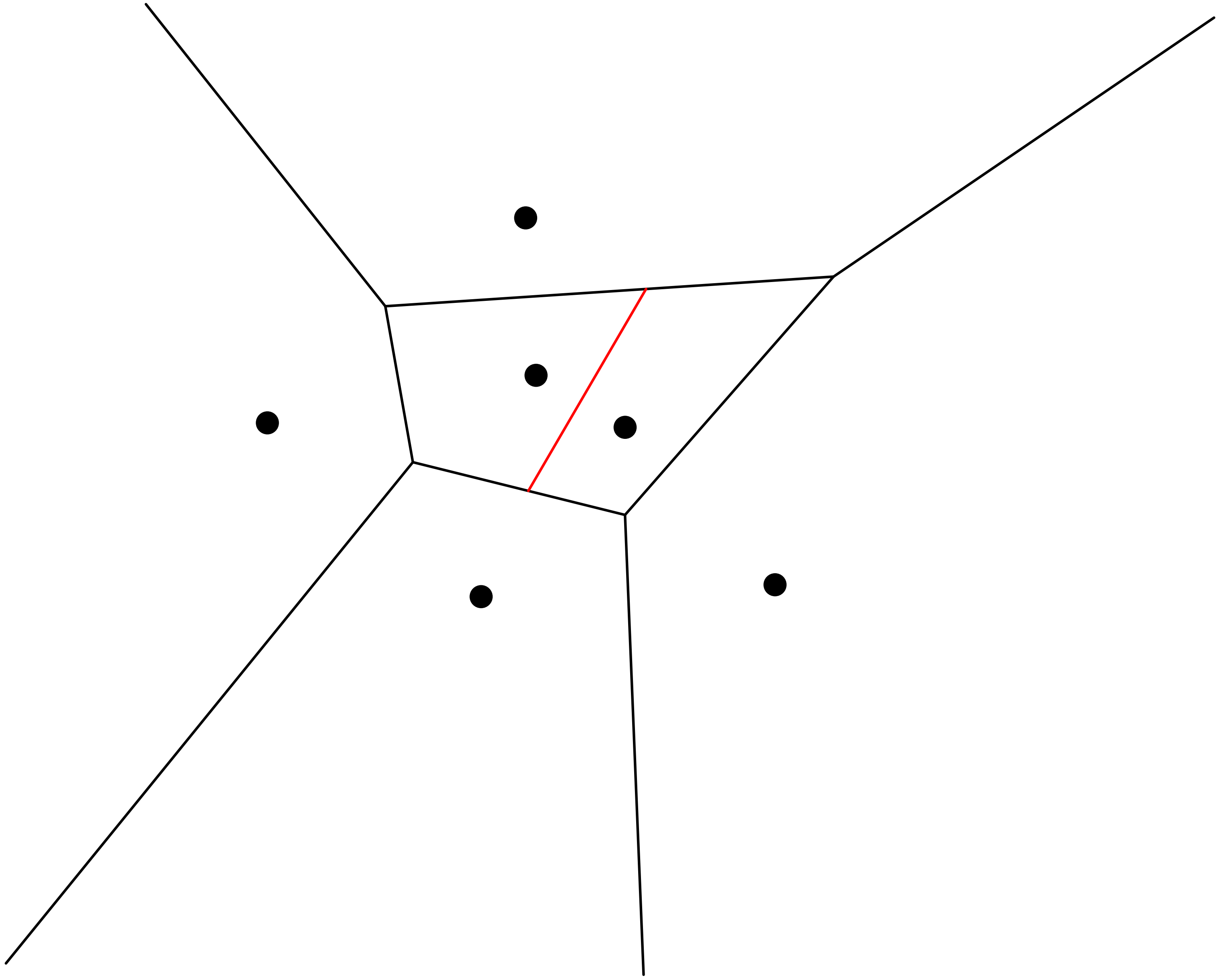
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



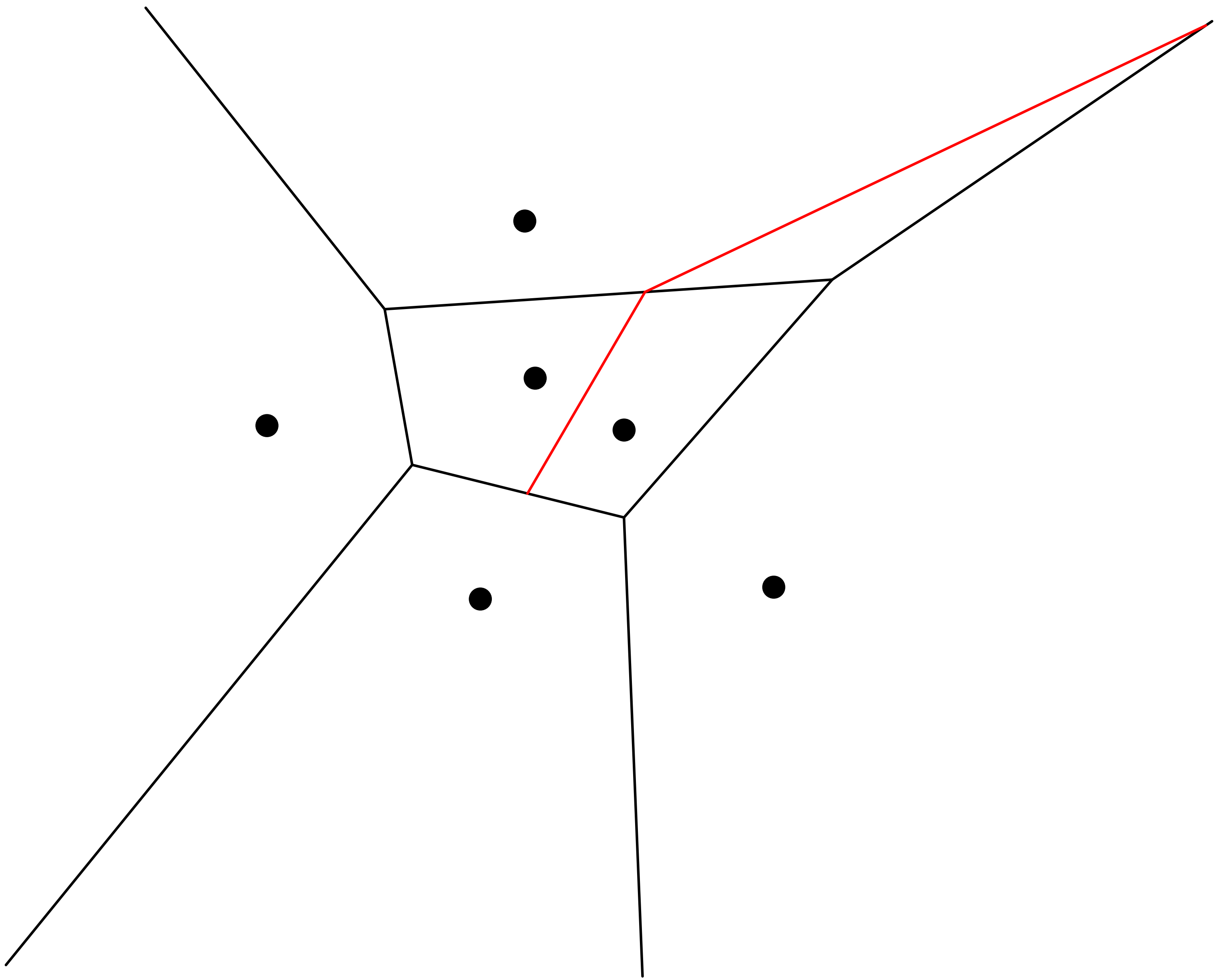
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



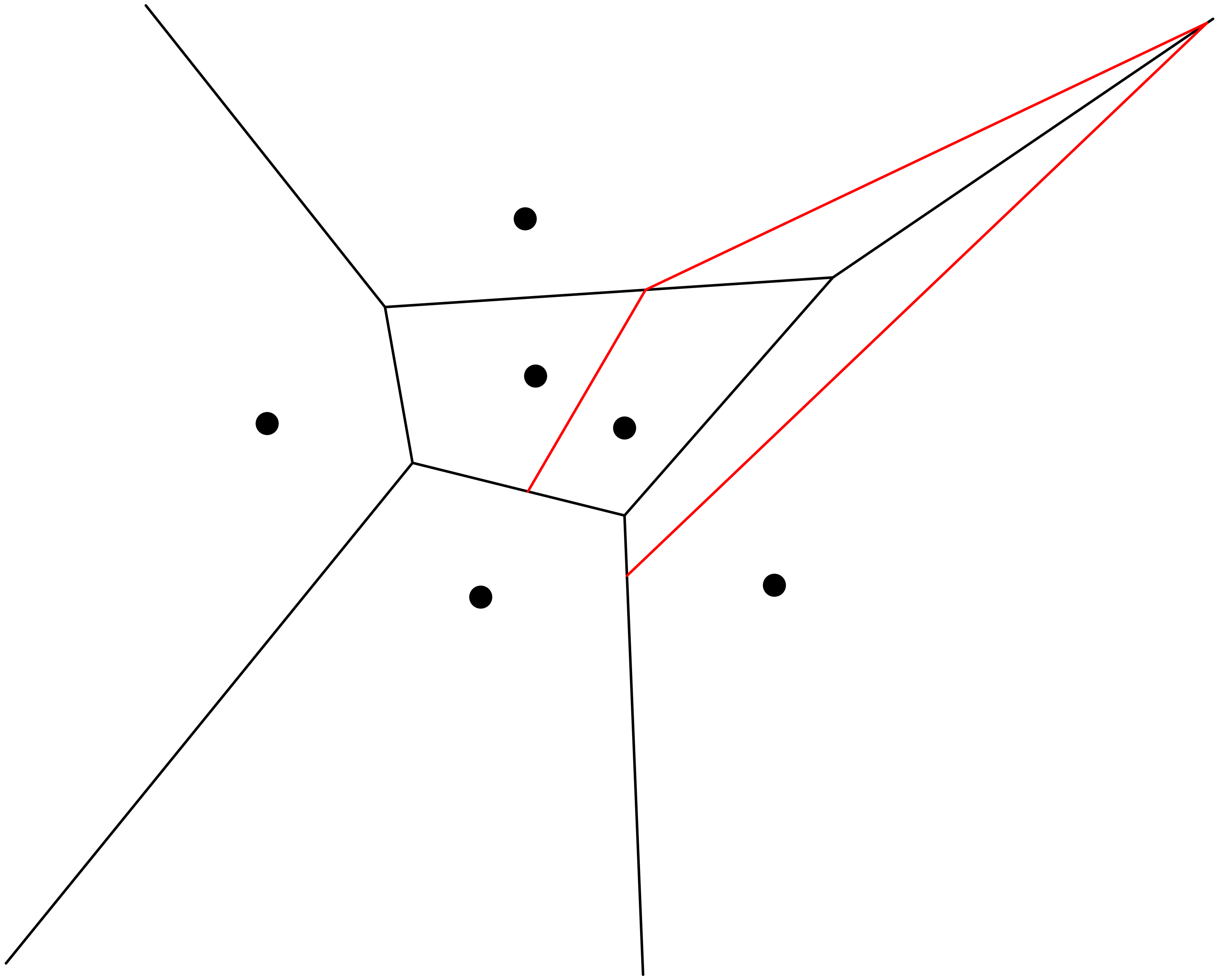
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



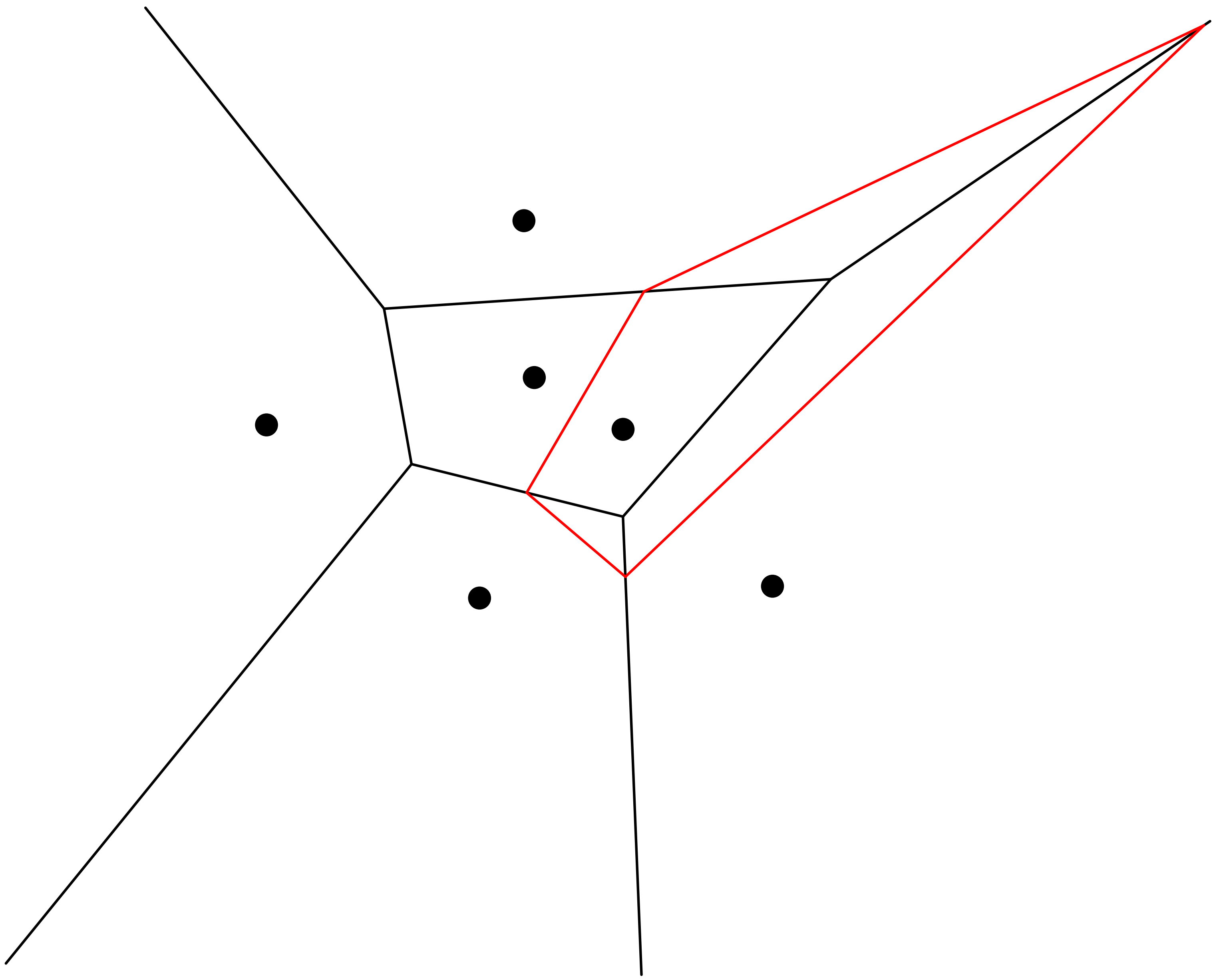
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



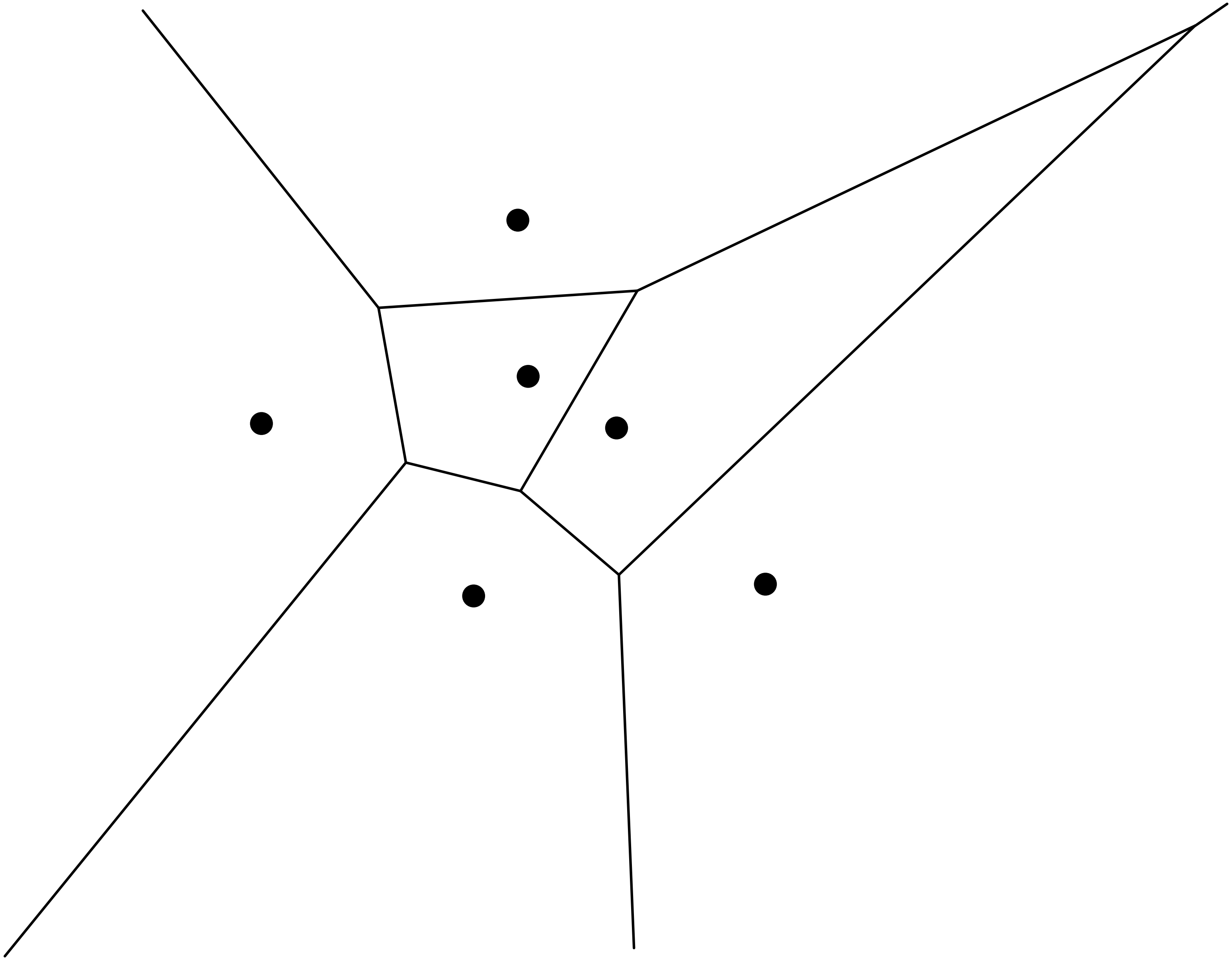
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



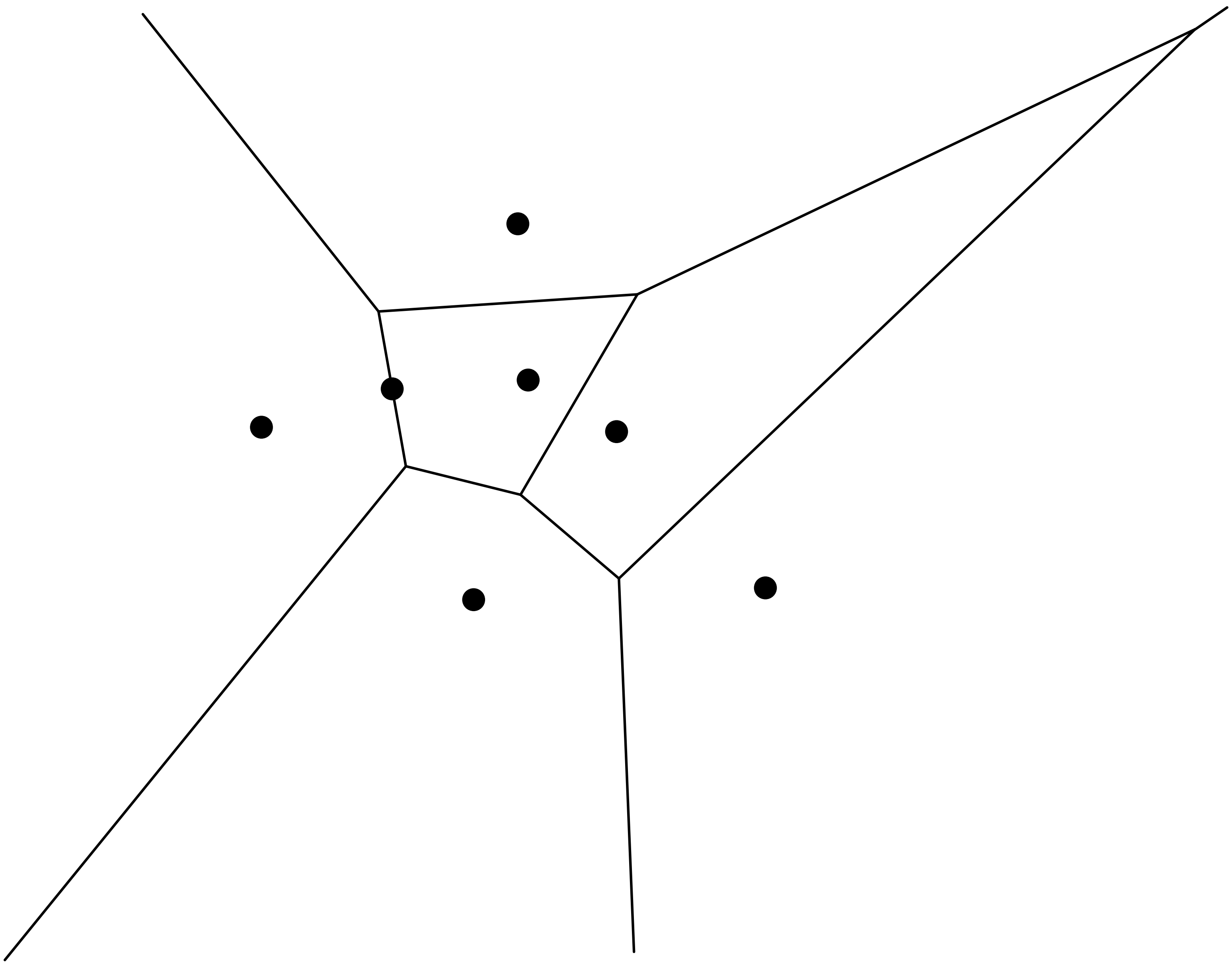
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



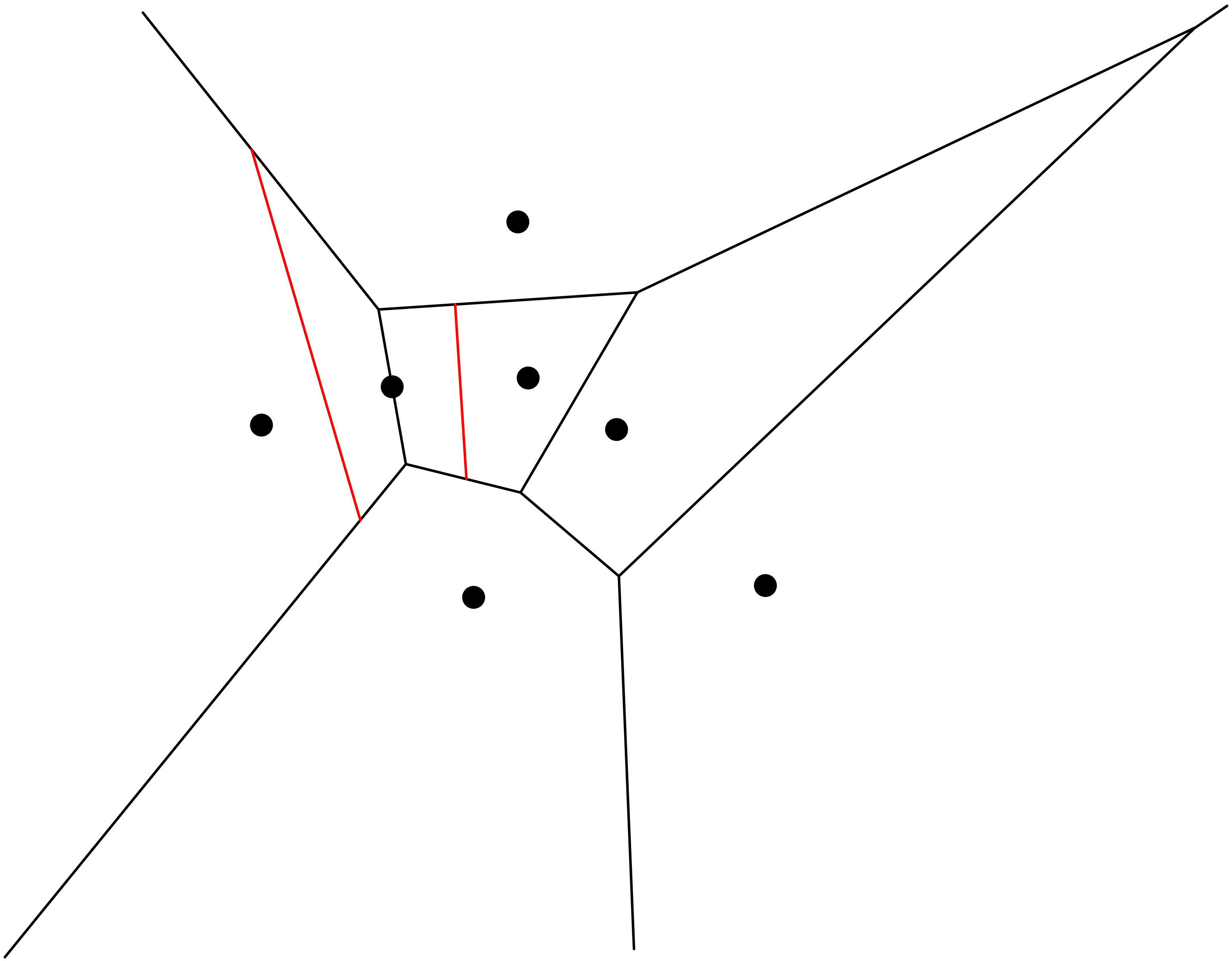
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



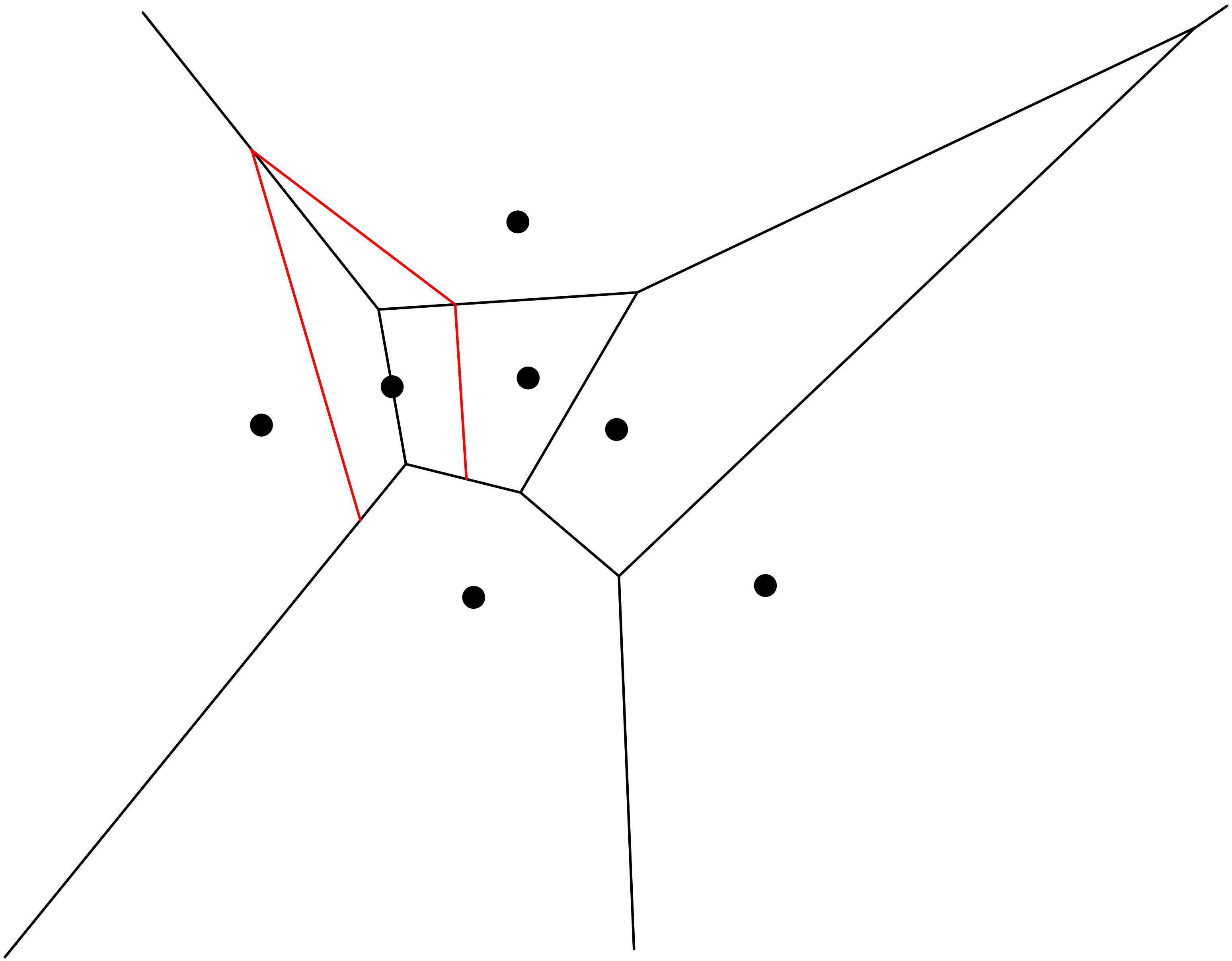
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



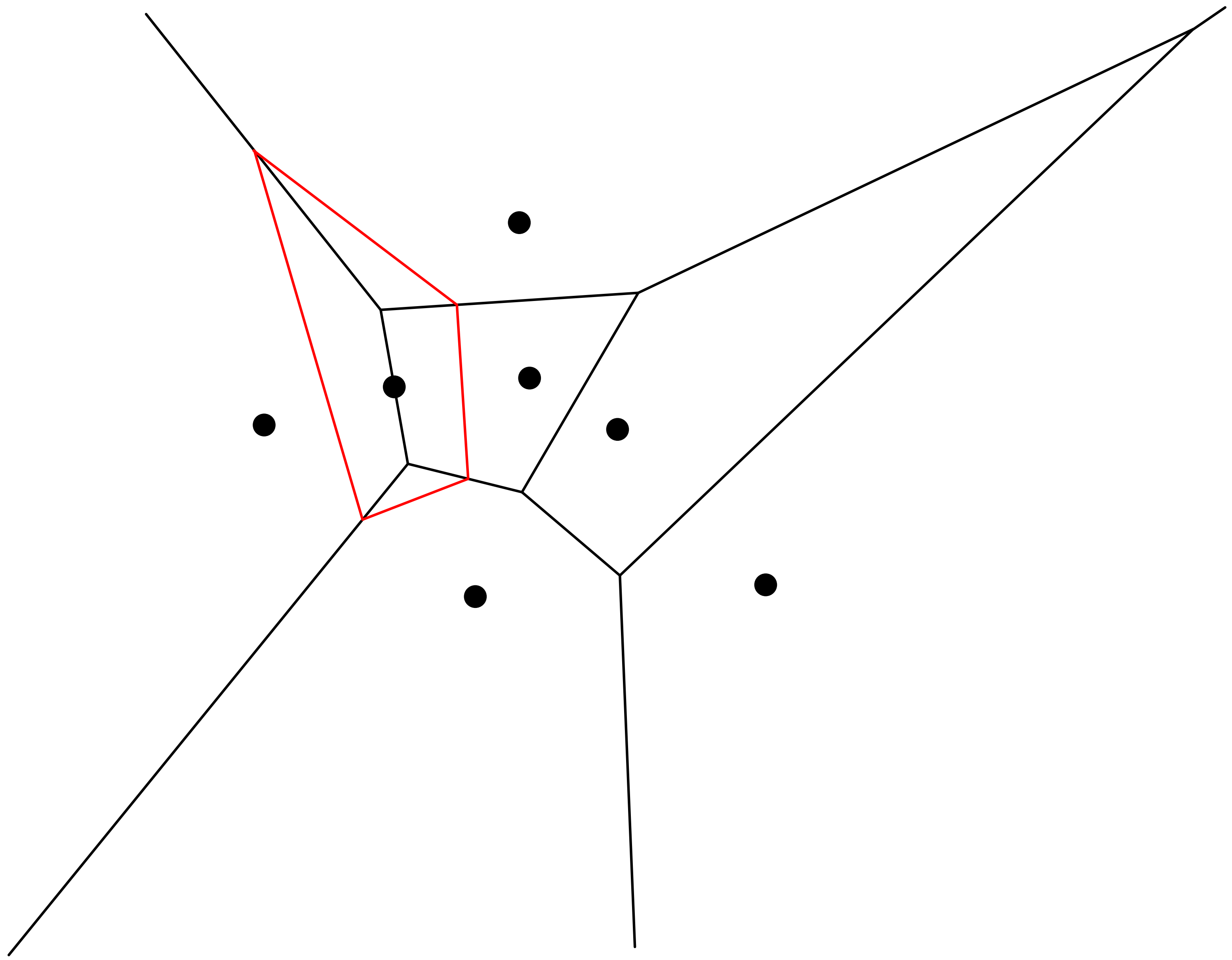
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方

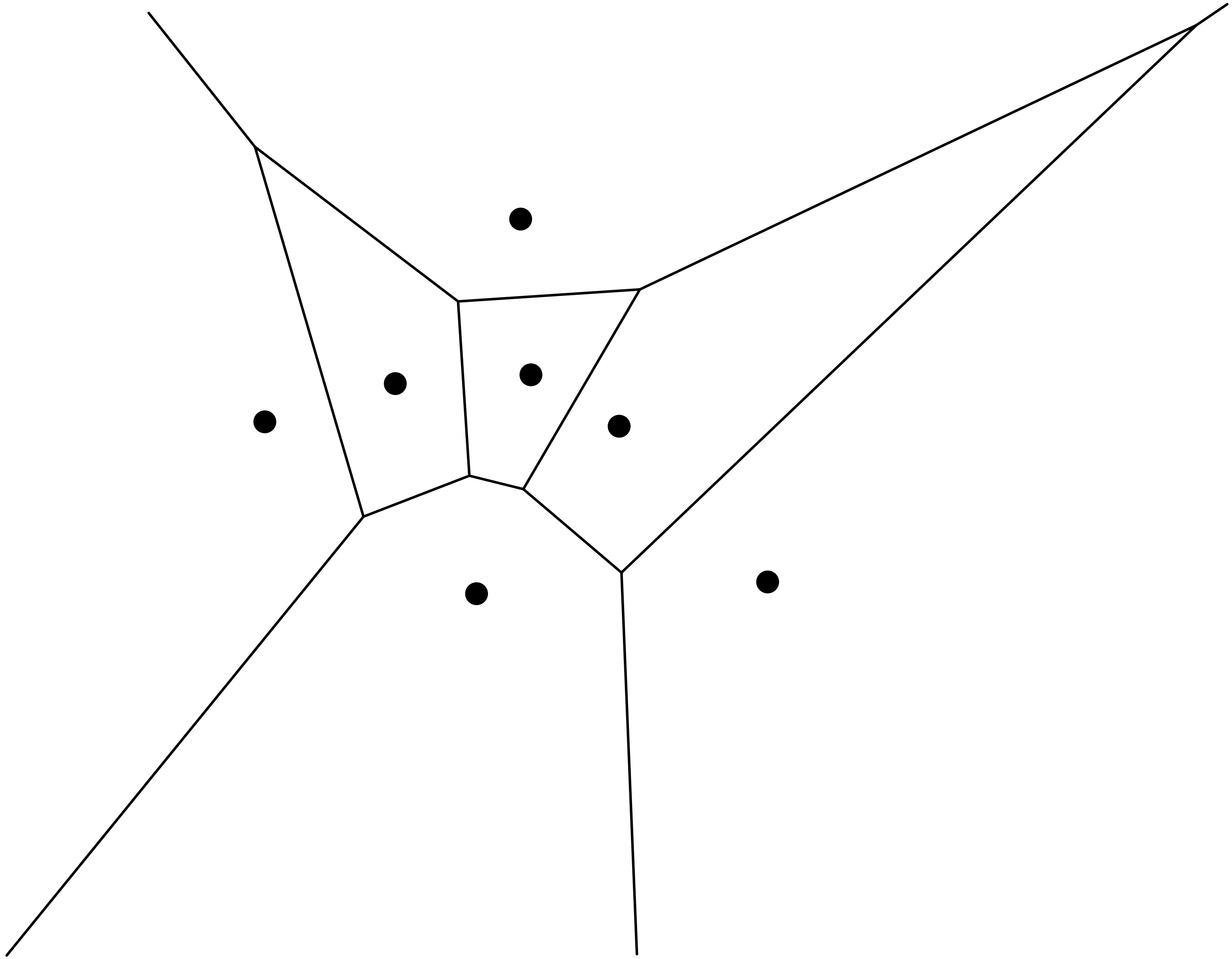


「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方

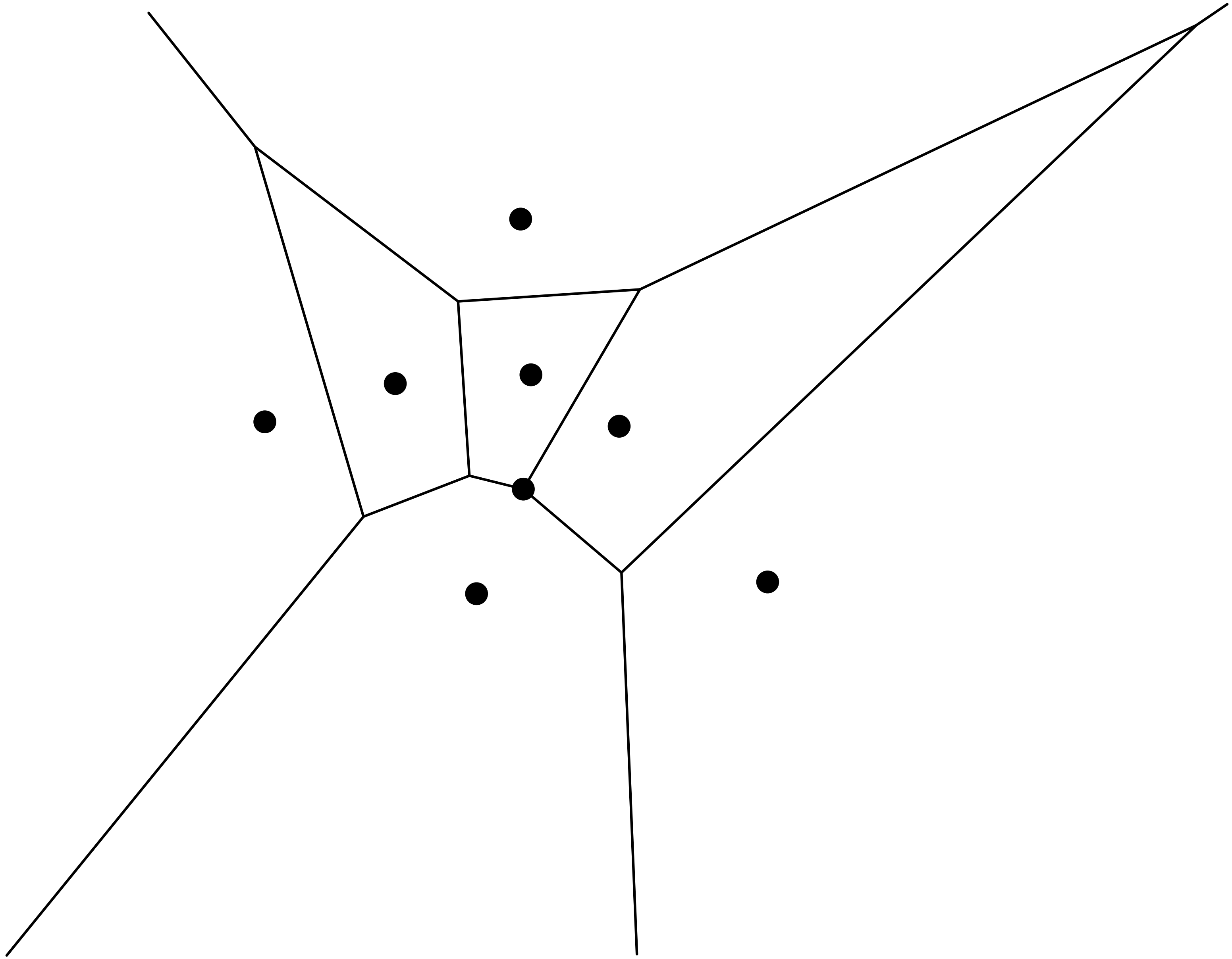


「逐次添加法」と呼ばれる



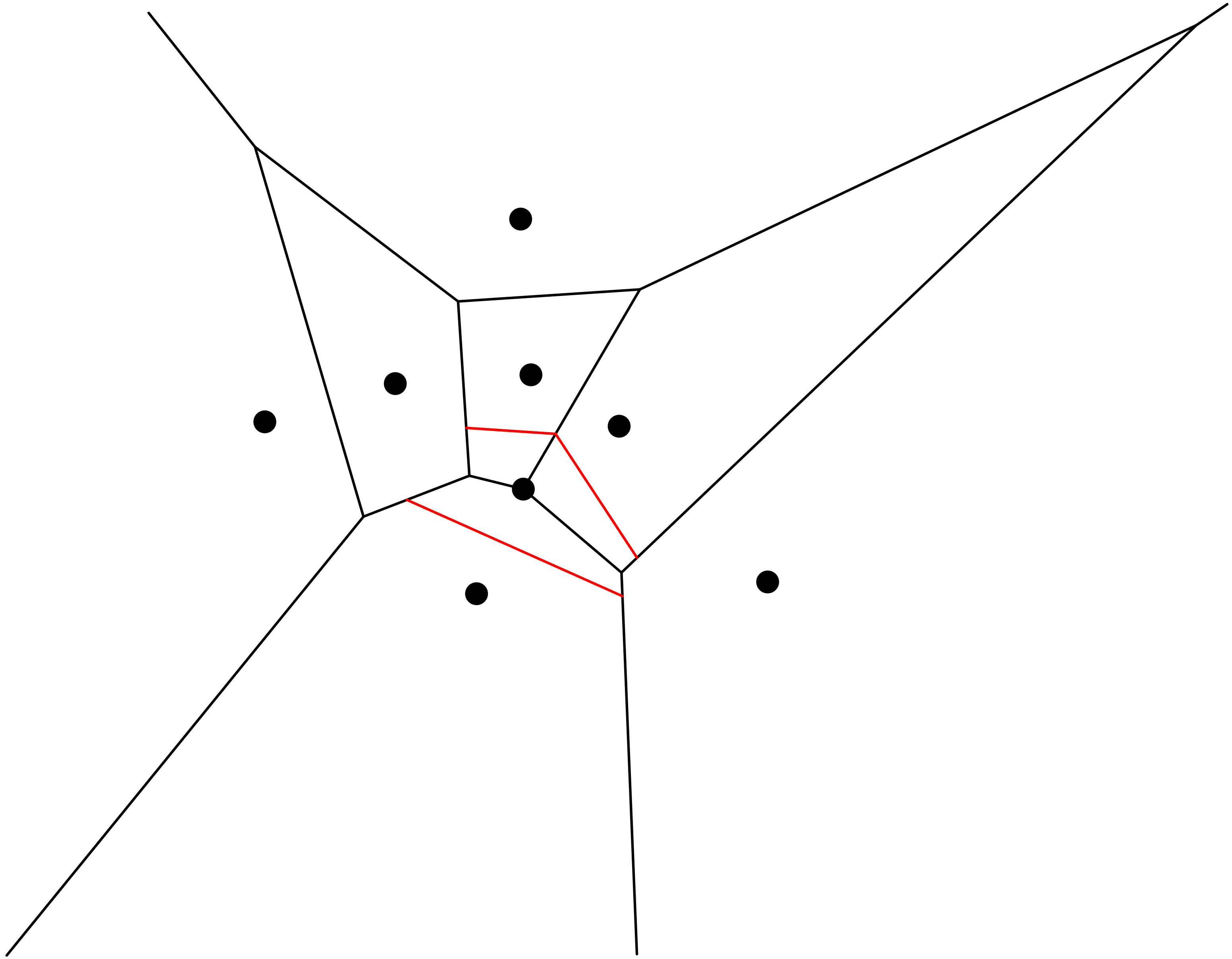
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



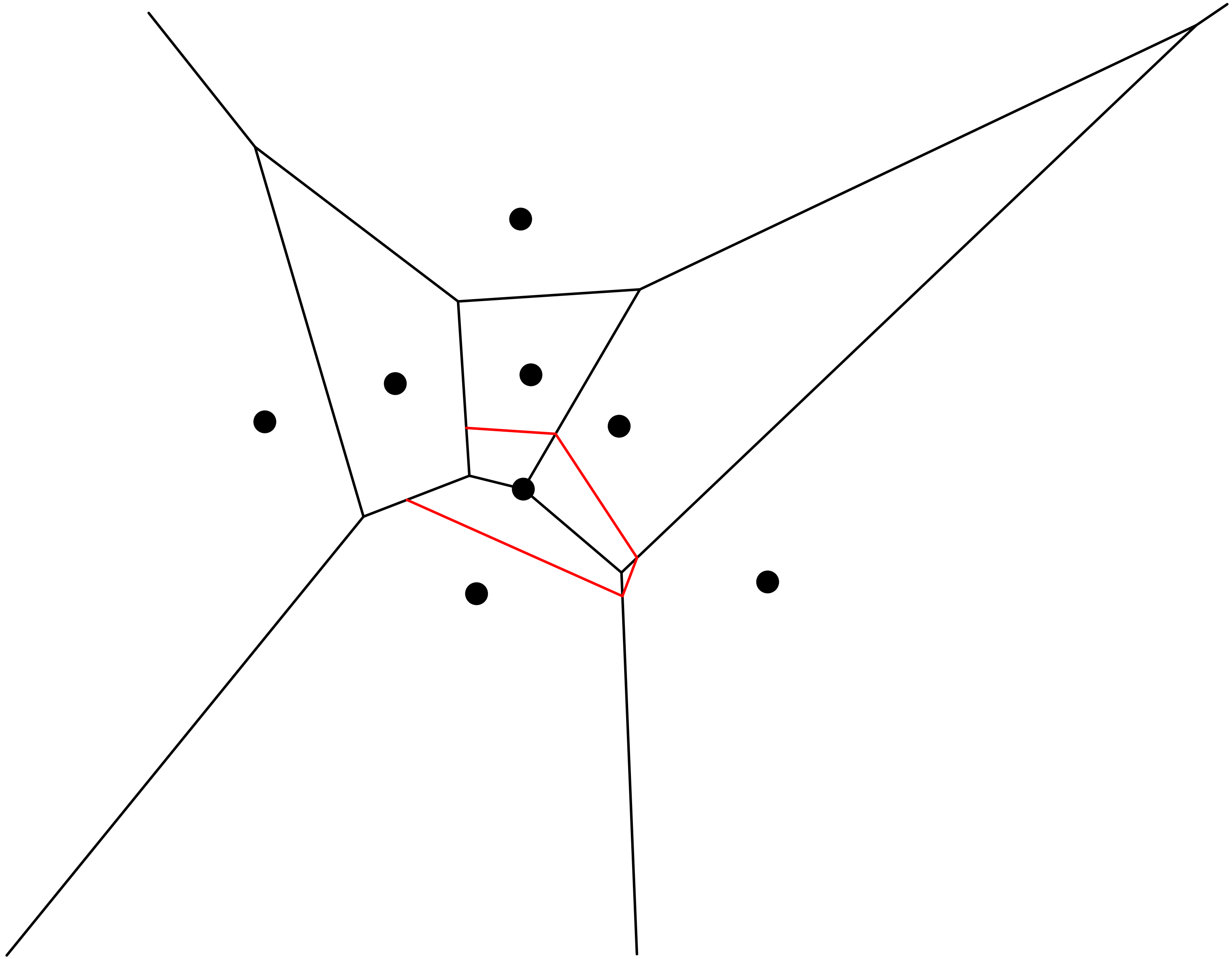
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



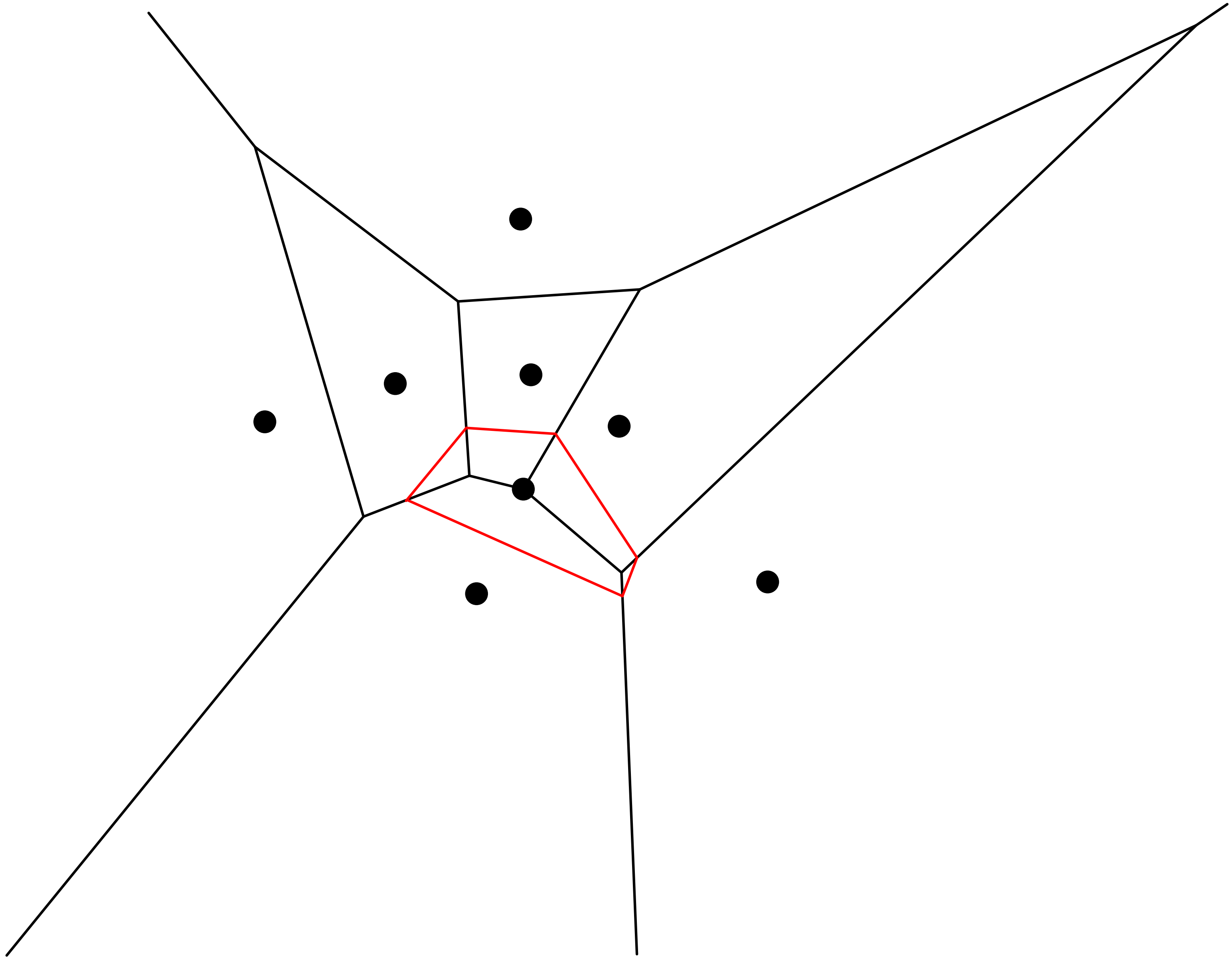
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



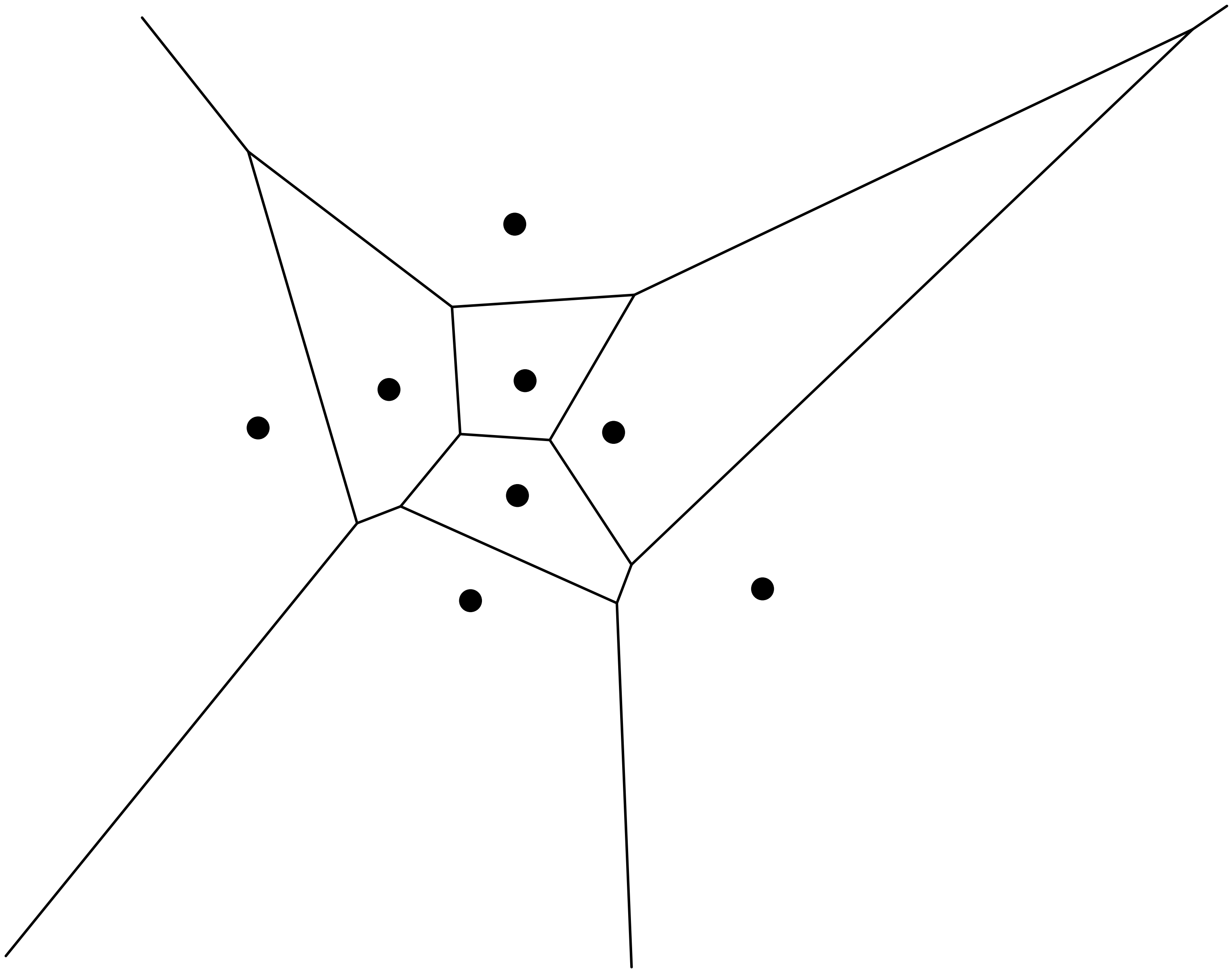
「逐次添加法」と呼ばれる

ボロノイ図の作り方



「逐次添加法」と呼ばれる

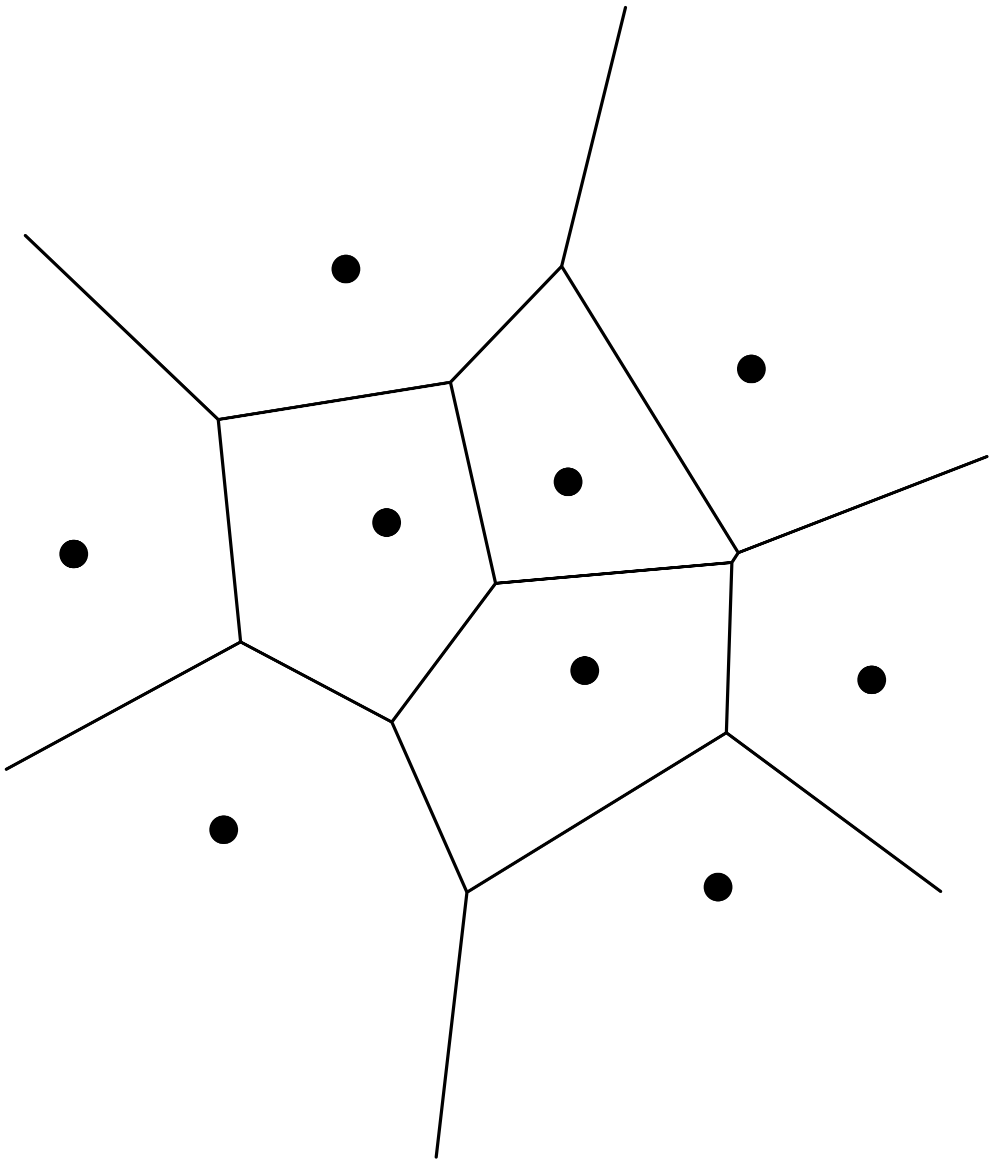
ボロノイ図の作り方



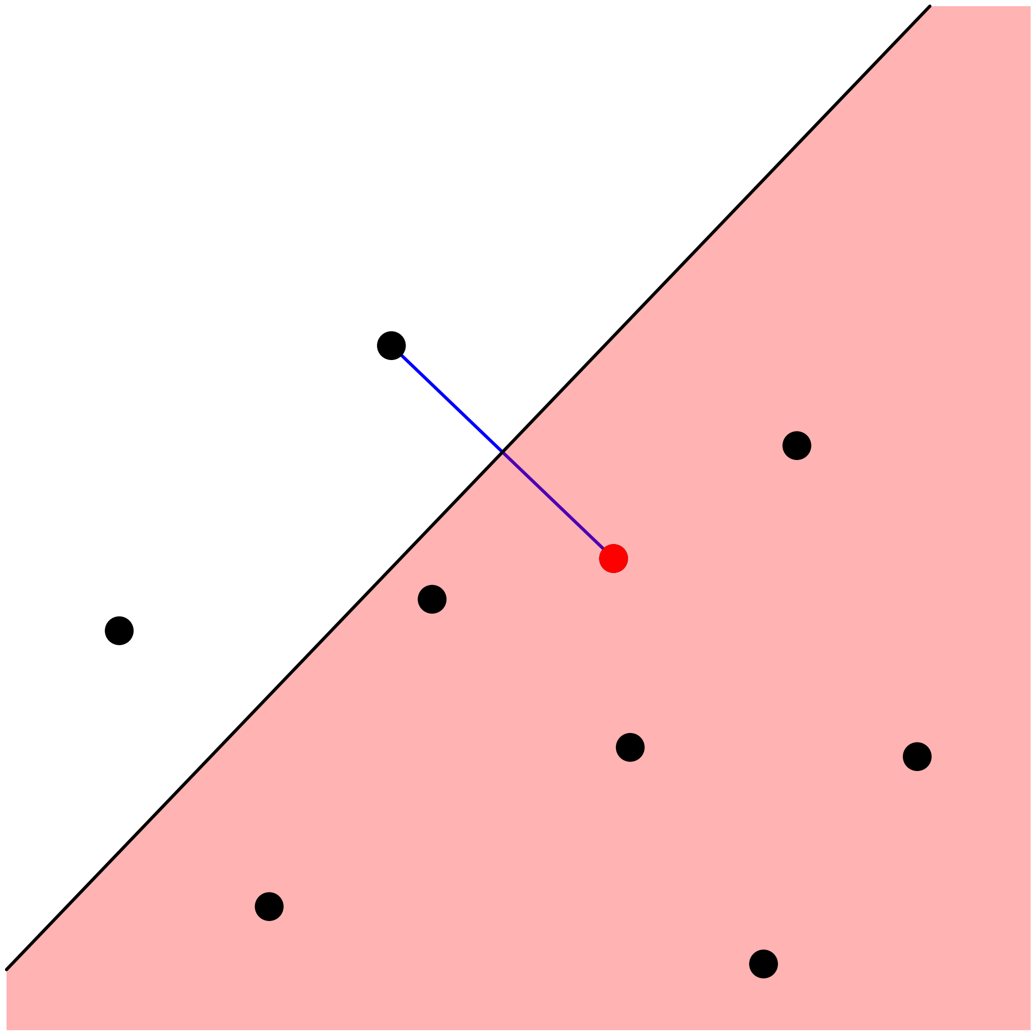
「逐次添加法」と呼ばれる

目次

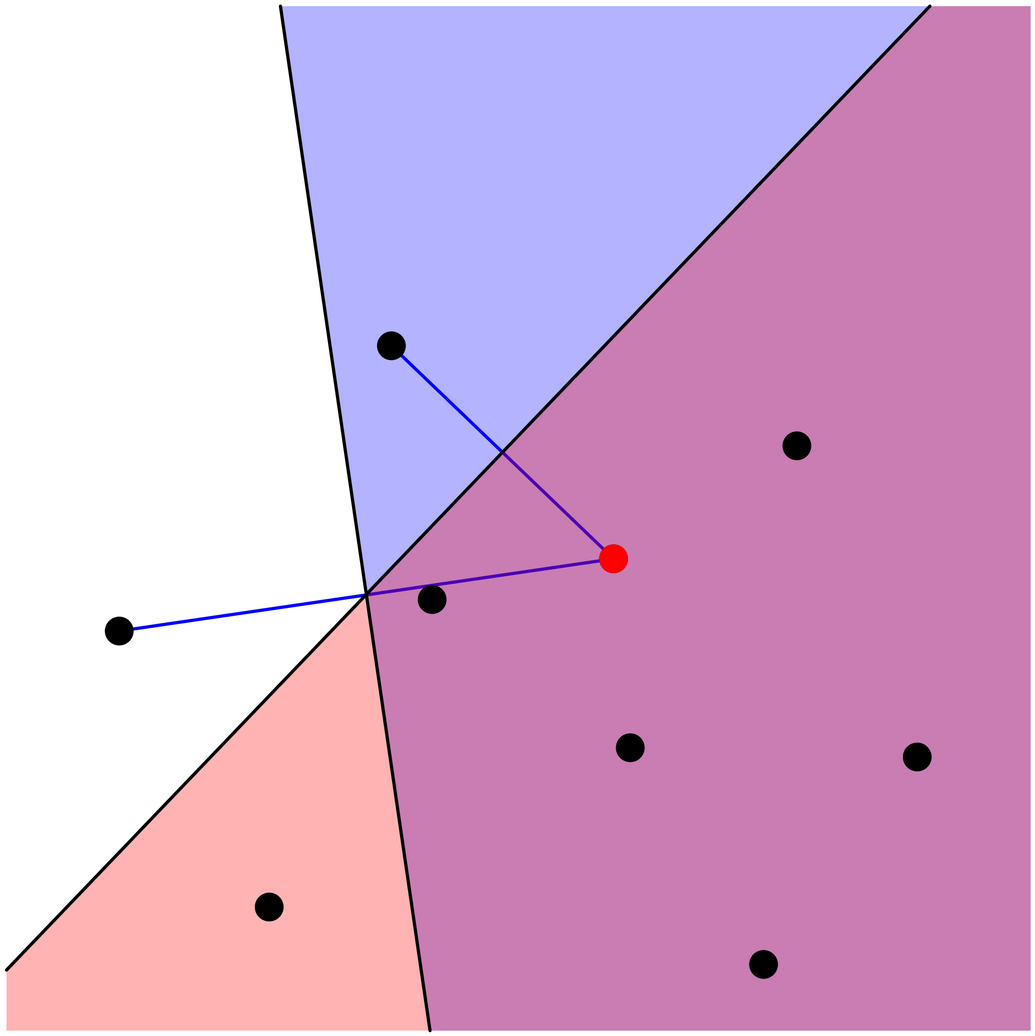
有界ボロノイ領域は凸多角形：例



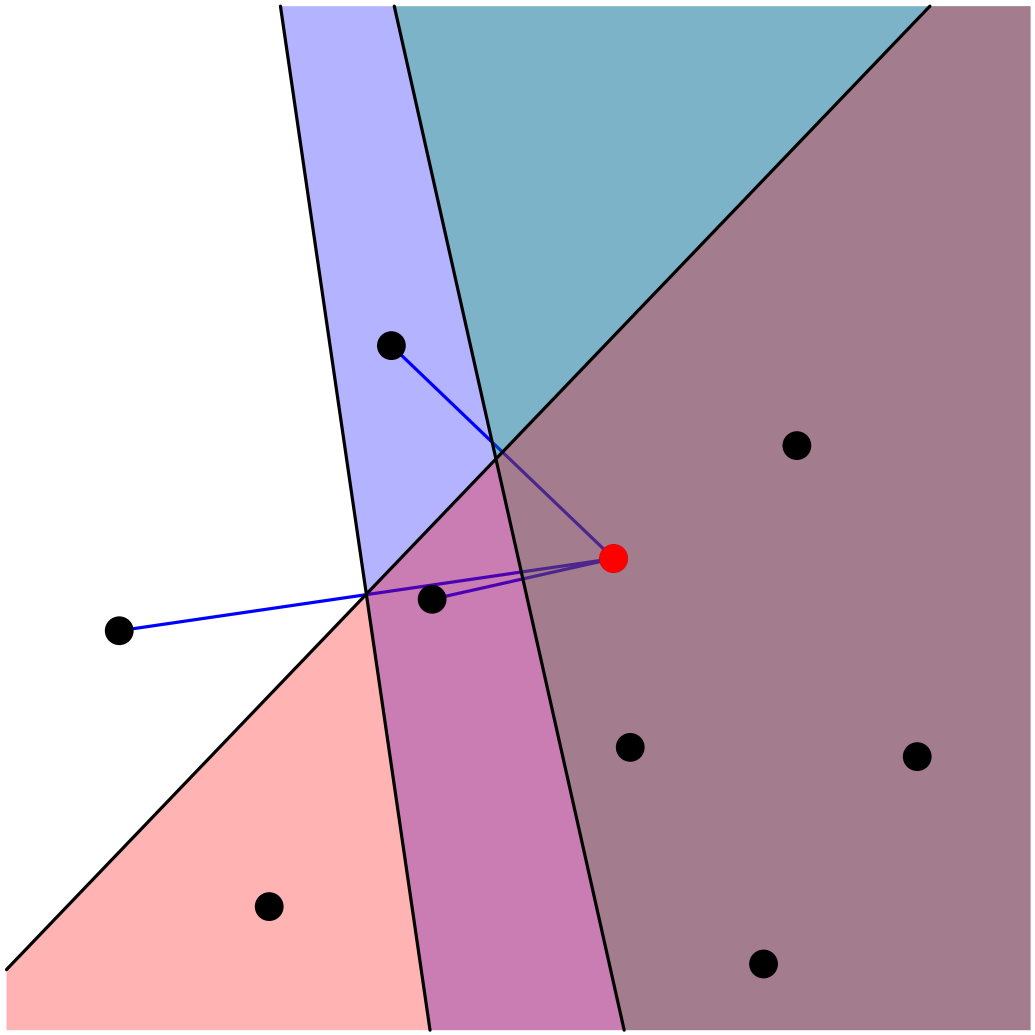
有界ボロノイ領域は凸多角形：例



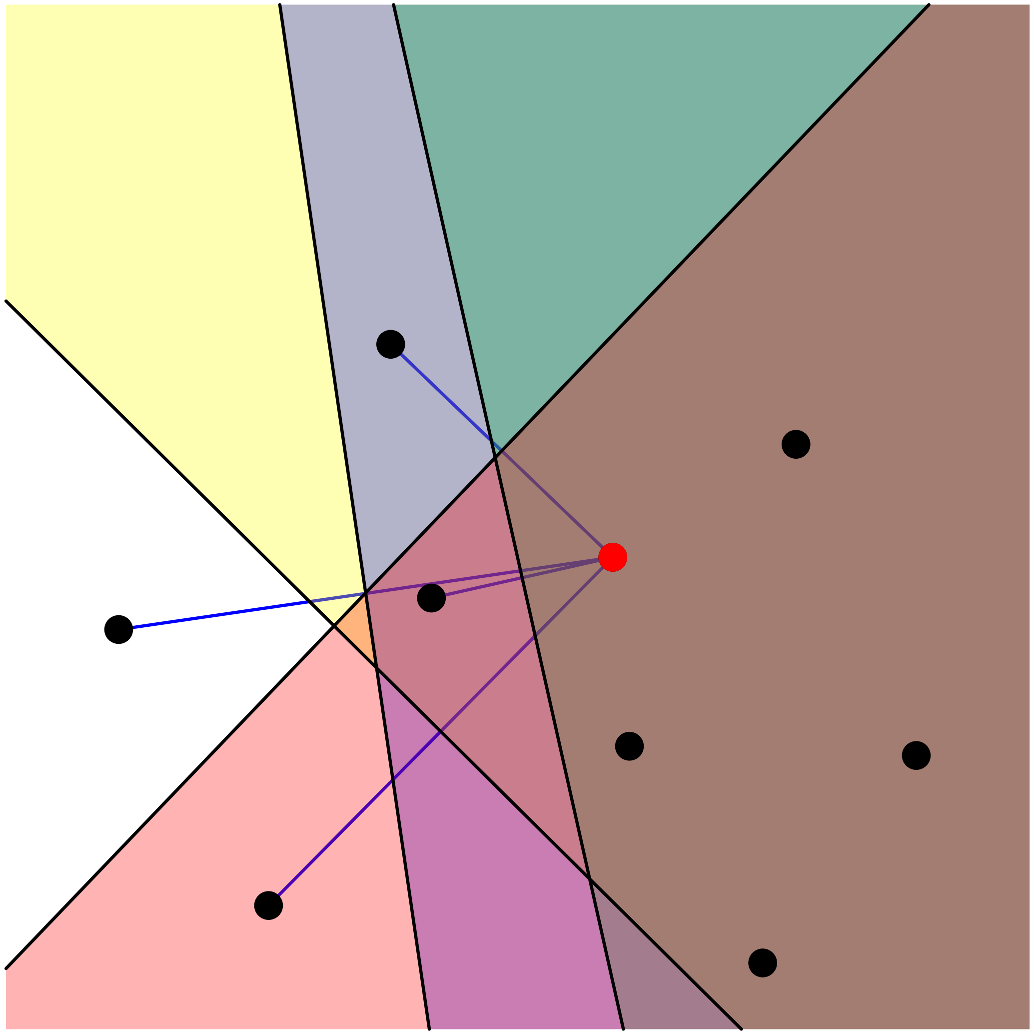
有界ボロノイ領域は凸多角形：例



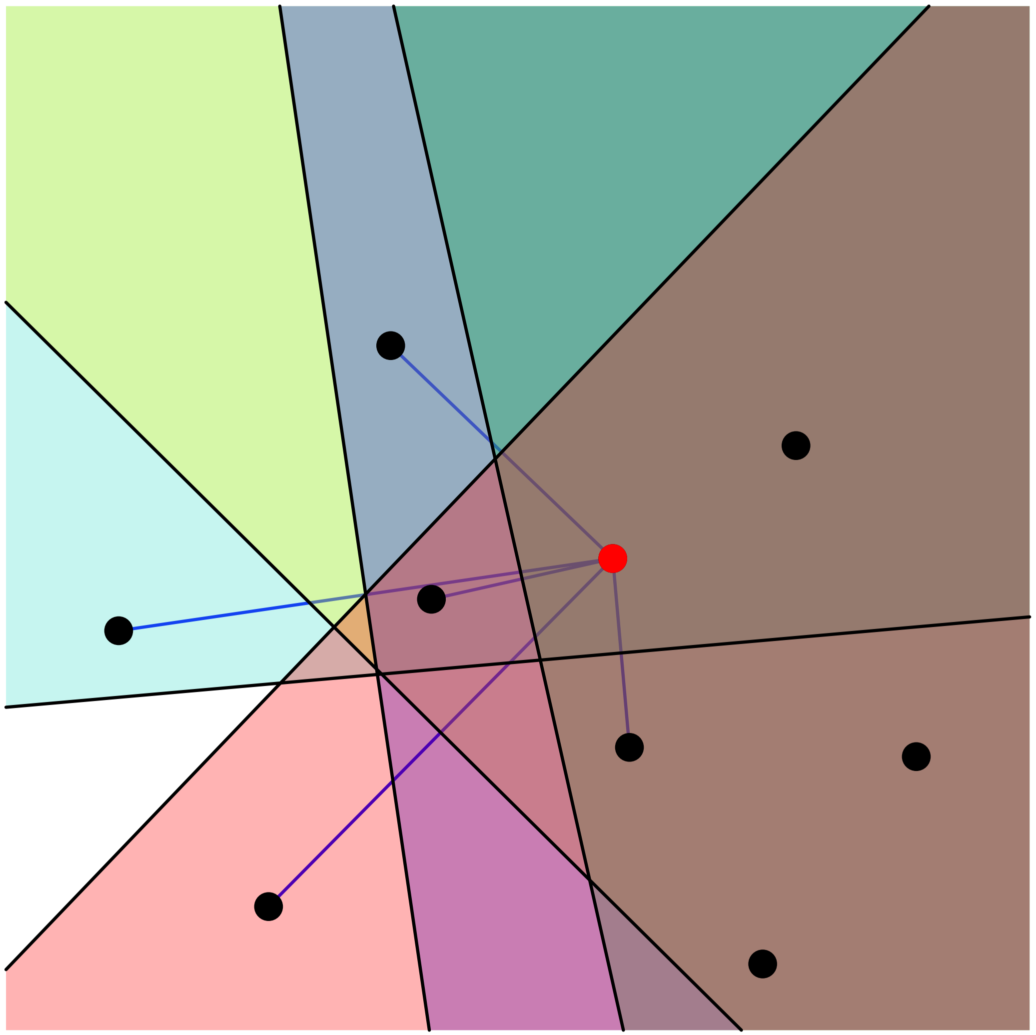
有界ボロノイ領域は凸多角形：例



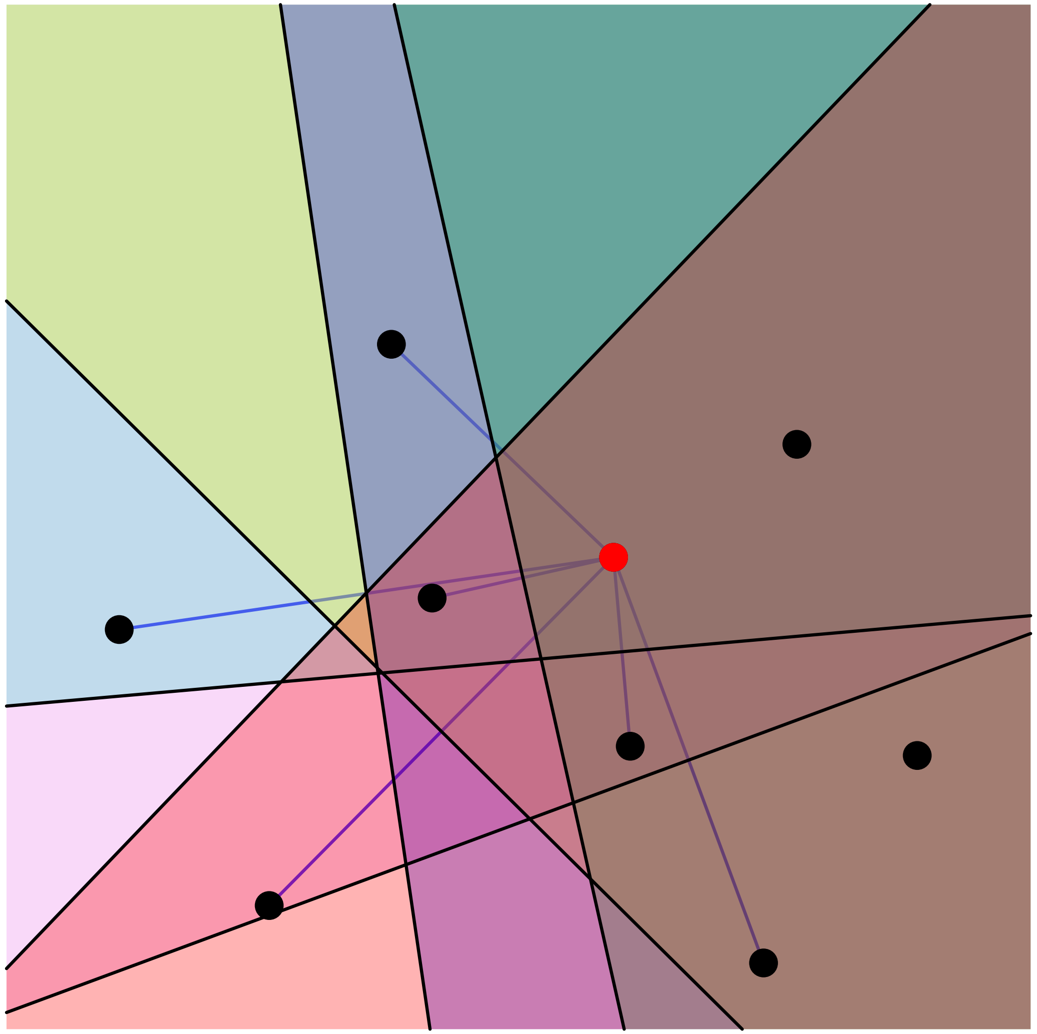
有界ボロノイ領域は凸多角形：例



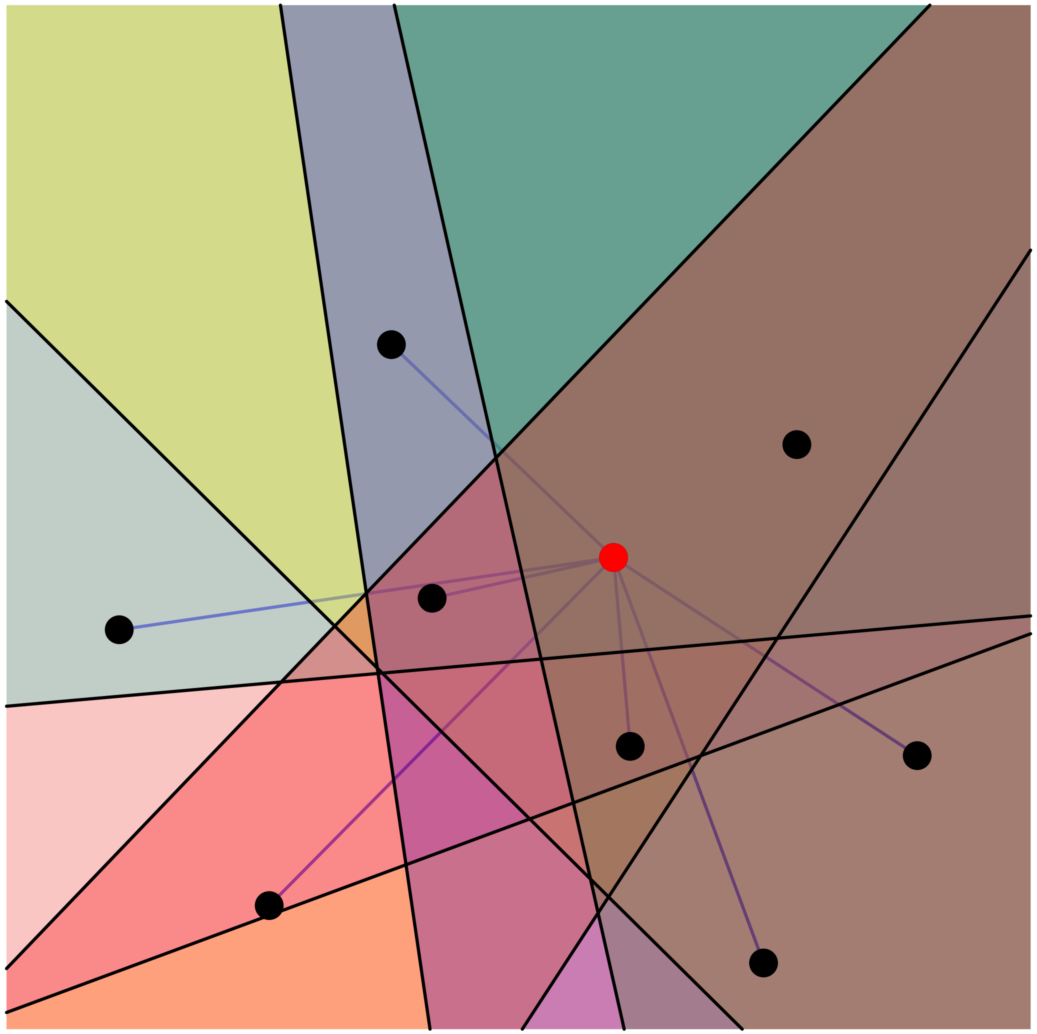
有界ボロノイ領域は凸多角形：例



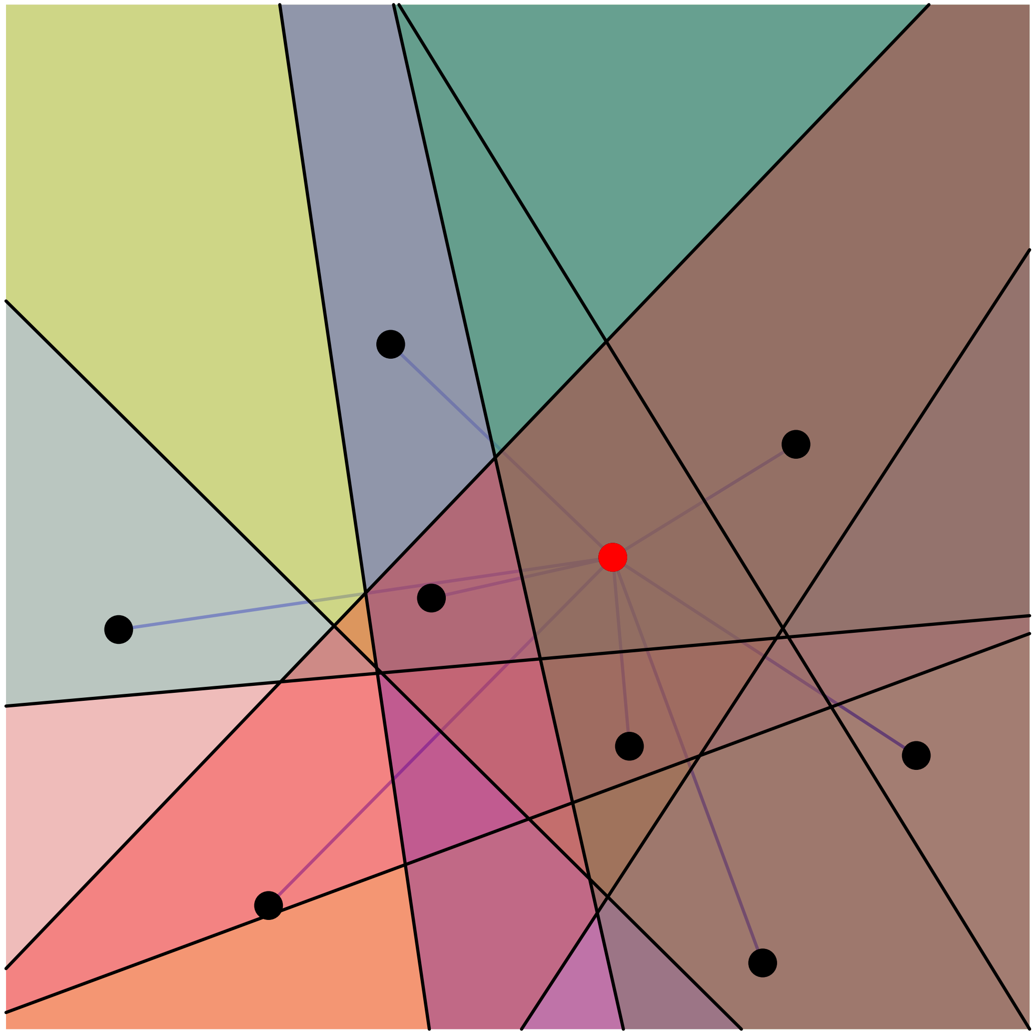
有界ボロノイ領域は凸多角形：例



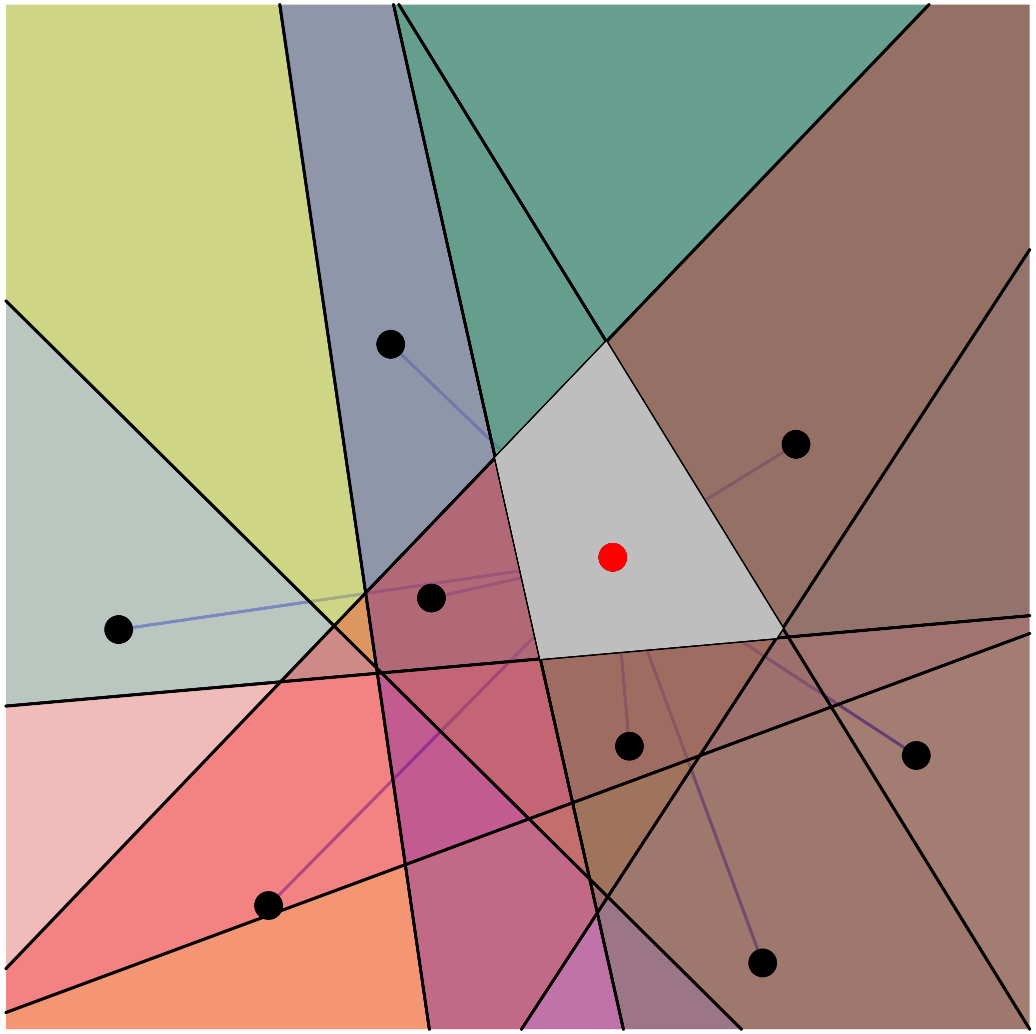
有界ボロノイ領域は凸多角形：例



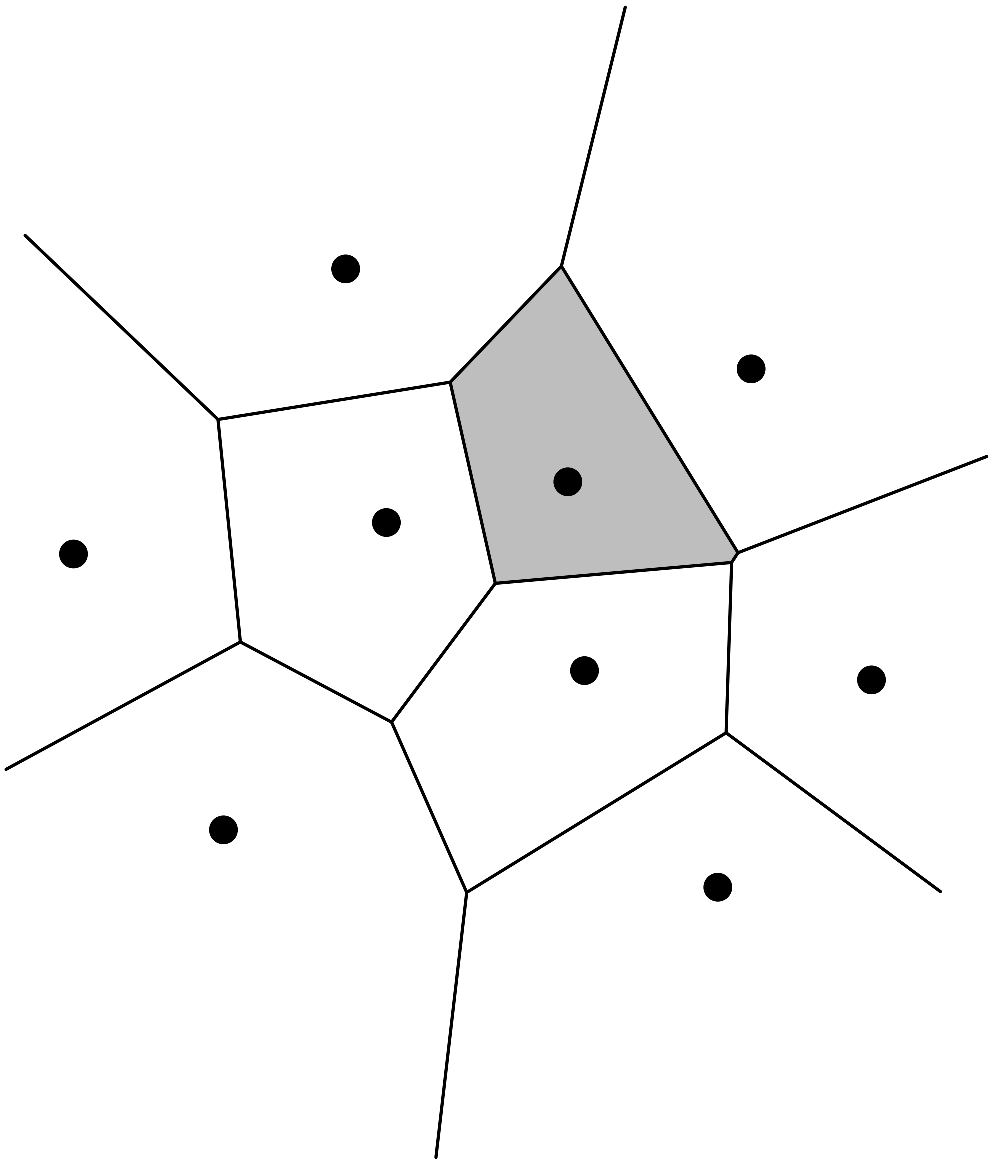
有界ボロノイ領域は凸多角形：例



有界ボロノイ領域は凸多角形：例



有界ボロノイ領域は凸多角形：例



有界ボロノイ領域は凸多角形

有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，$p \in P$，ボロノイ領域 $V(p)$

性質：有界ボロノイ領域は凸多角形

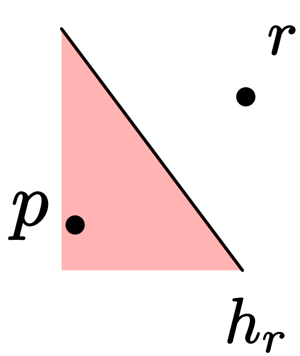
$V(p)$ が有界 $\Rightarrow$ $V(p)$ は凸多角形

証明：$V(p)$ の定義より，

$$q \in V(p) \Leftrightarrow p \text{ と } q \text{ の距離} \leq r \text{ と } q \text{ の距離 } \forall r \in P - \{p\}$$

$\Leftrightarrow p$ と r の等距離線を境界とする半平面で p を含むものを h_r とするとき，$q \in h_r \ \forall r \in P - \{p\}$

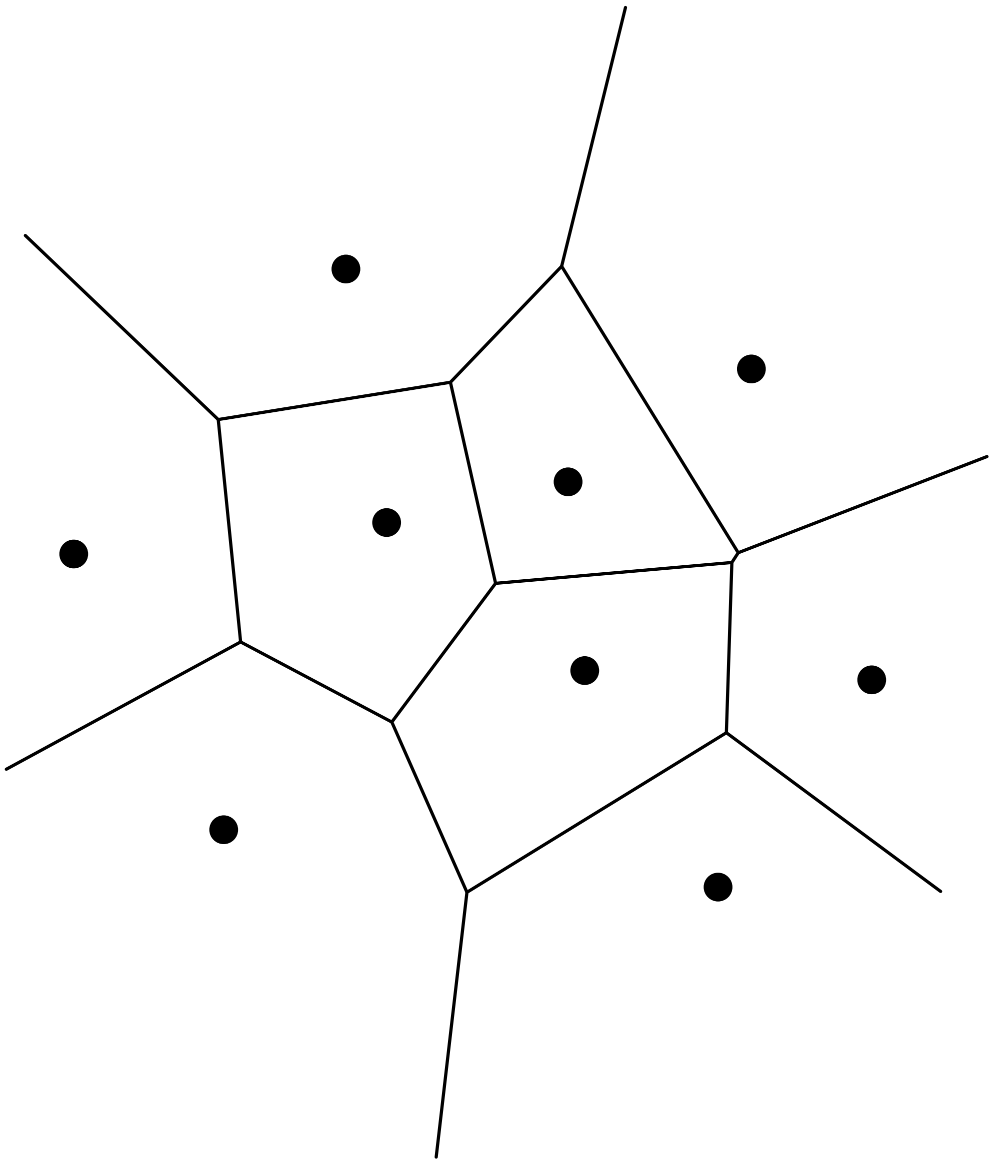
$$\Leftrightarrow q \in \bigcap_{r \in P - \{p\}} h_r$$



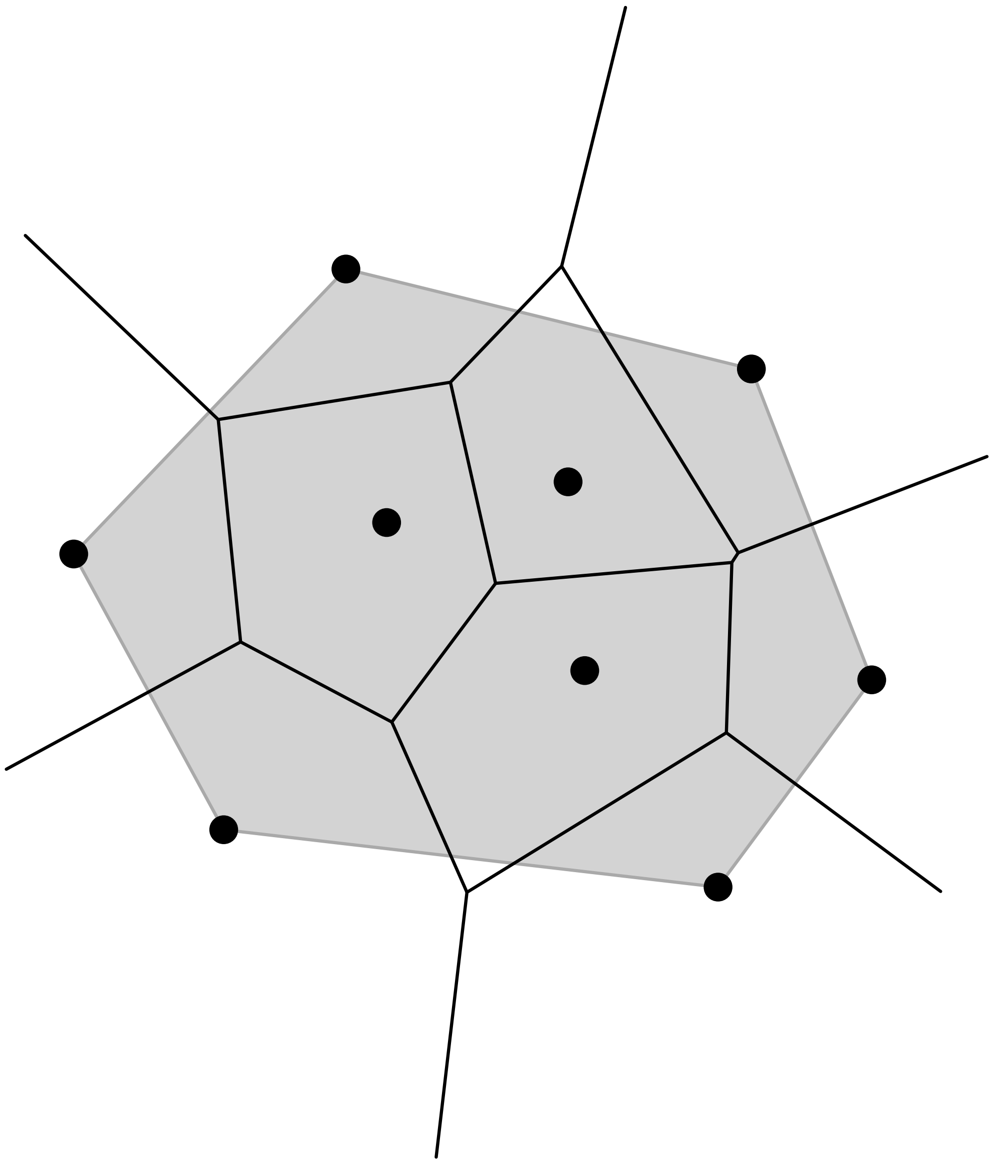
つまり，$V(p) = \bigcap_{r \in P - \{p\}} h_r$ で，これは有界なら凸多角形

□

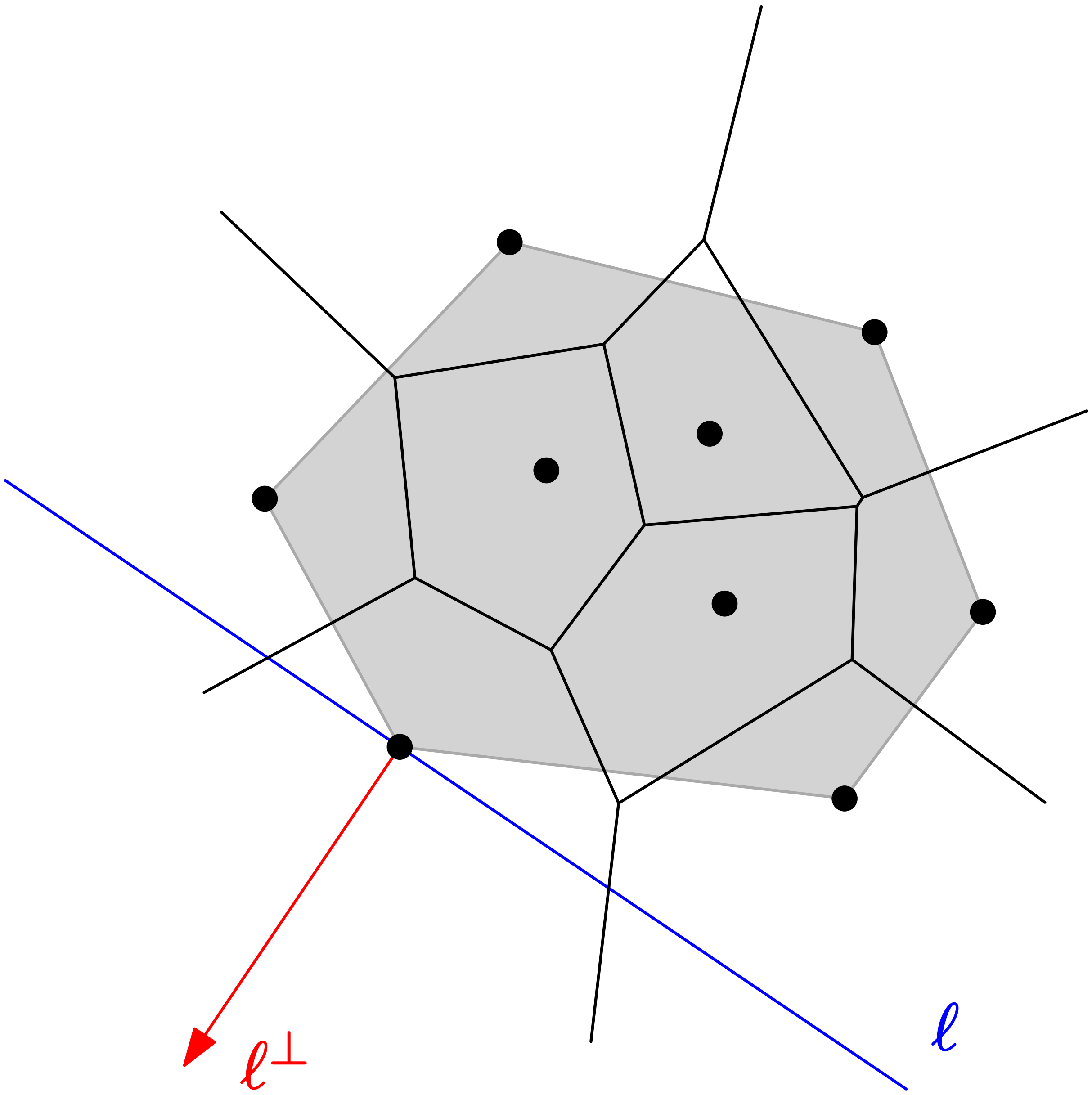
非有界ボロノイ領域と凸包：例



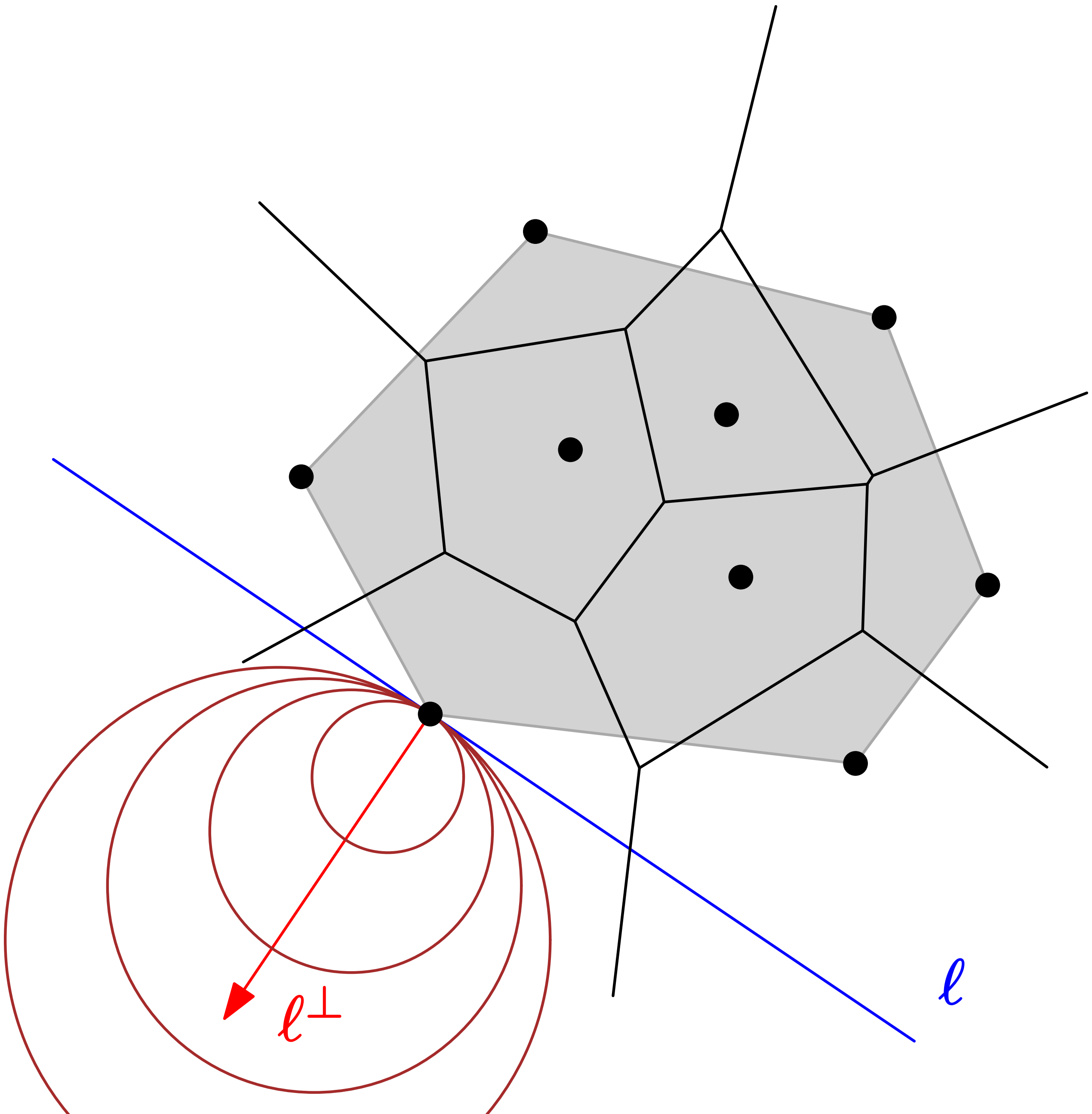
非有界ボロノイ領域と凸包：例



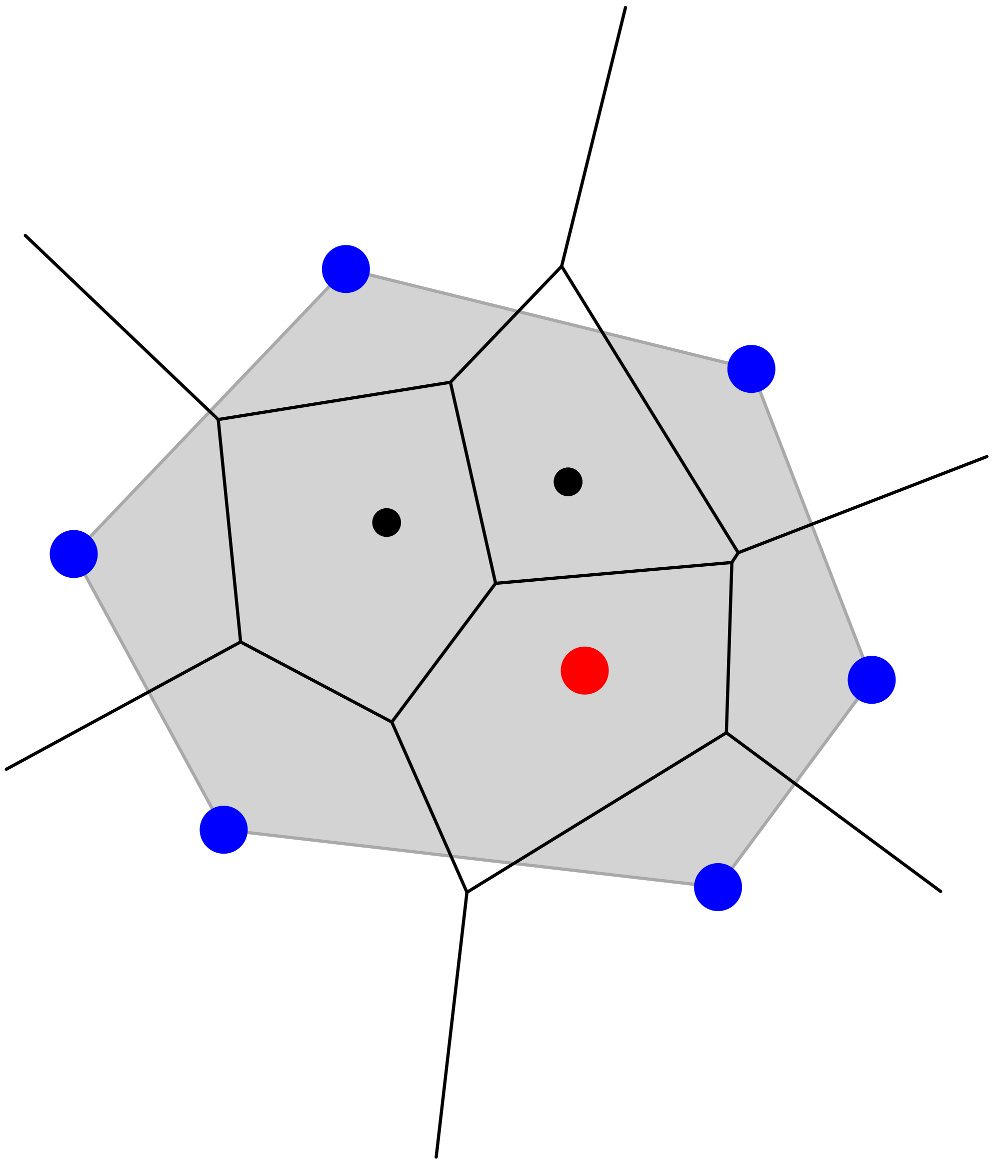
非有界ボロノイ領域と凸包：例



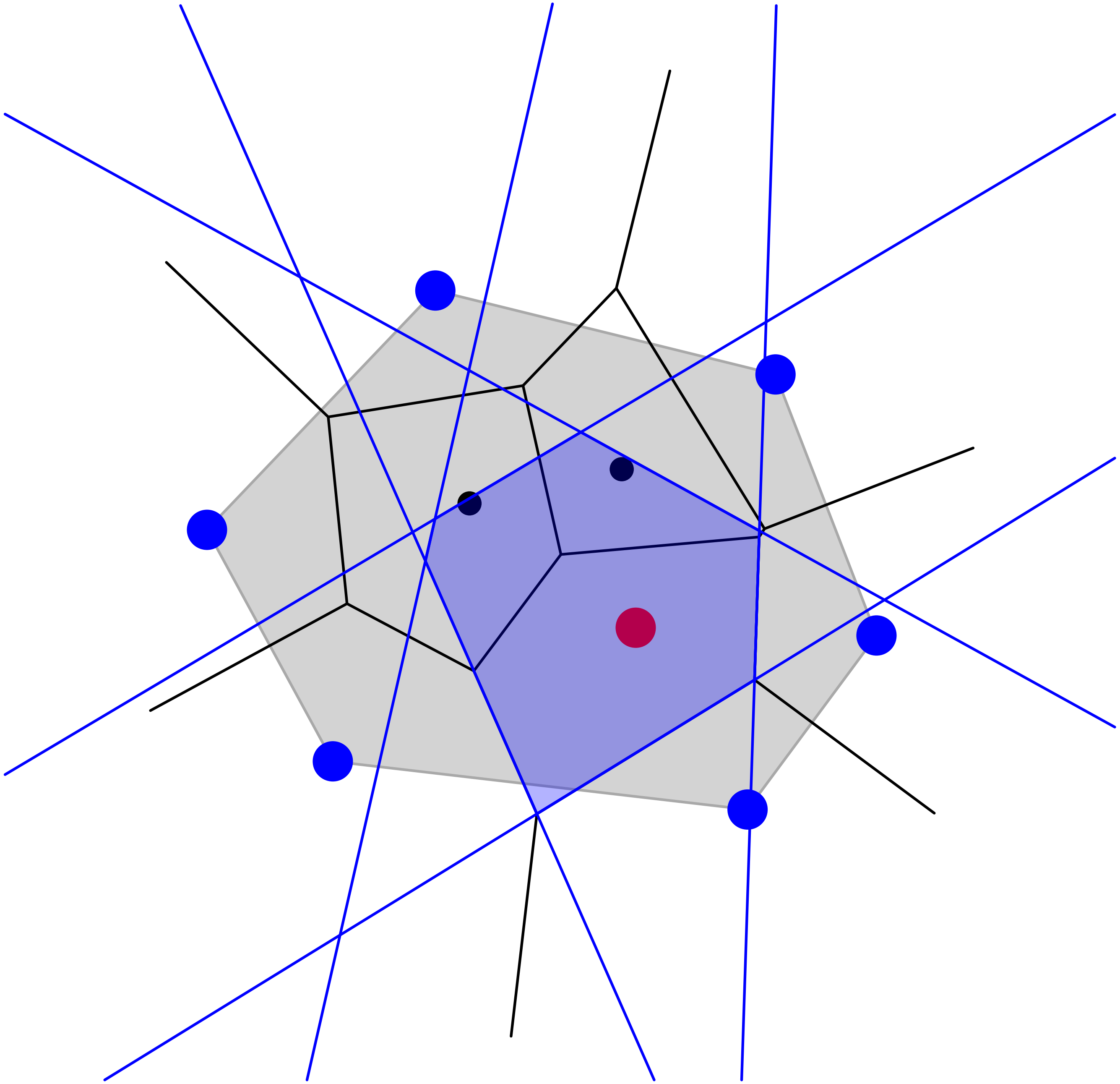
非有界ボロノイ領域と凸包：例



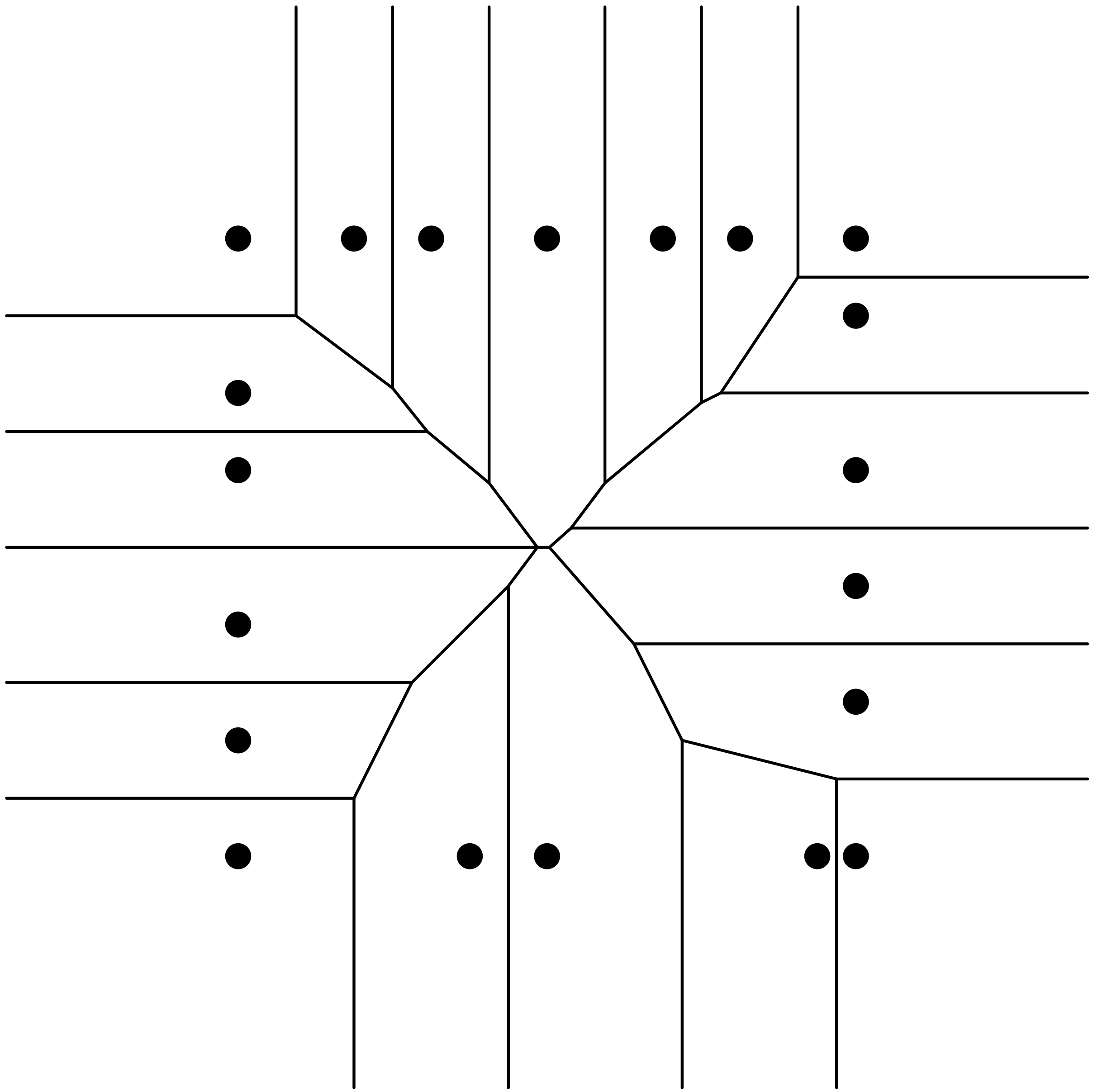
非有界ボロノイ領域と凸包：例



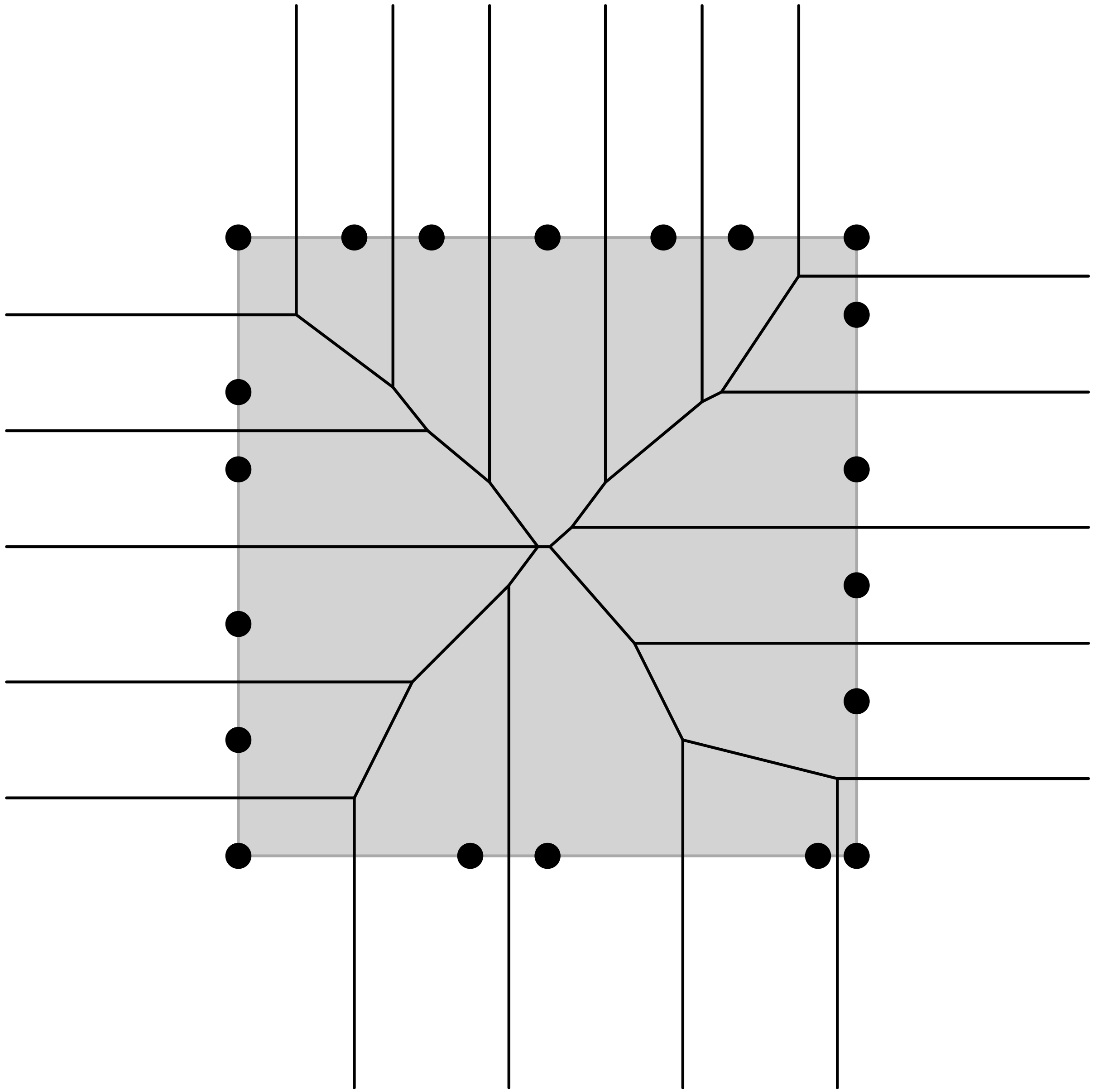
非有界ボロノイ領域と凸包：例



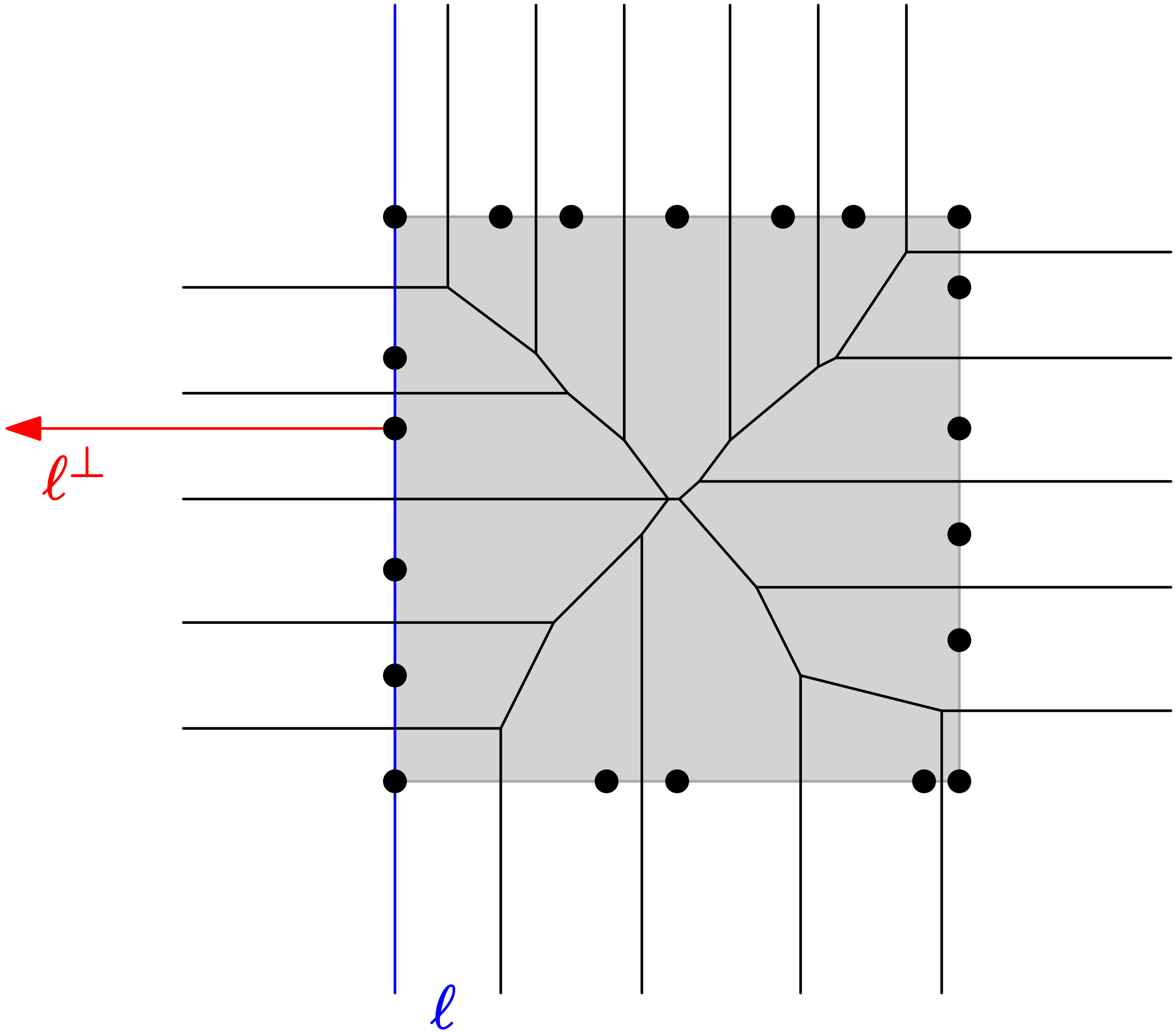
非有界ボロノイ領域と凸包：例 2



非有界ボロノイ領域と凸包：例 2



非有界ボロノイ領域と凸包：例 2



有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，すべてが 1 直線上にはない

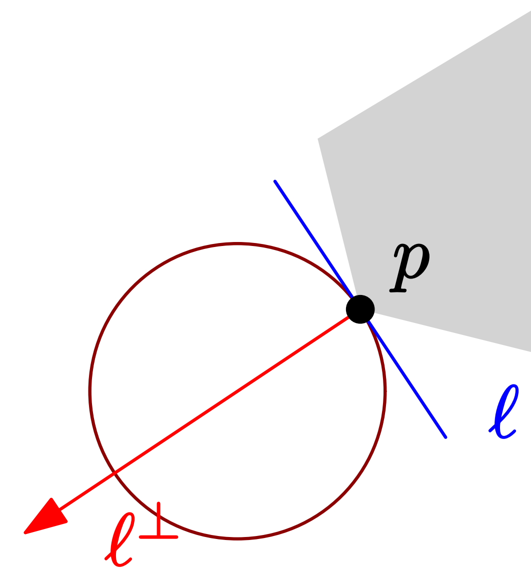
$p \in P$, ボロノイ領域 $V(p)$

性質：非有界ボロノイ領域と凸包

$V(p)$ が非有界 $\Leftrightarrow$ p は凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の境界にある

証明 $(\Leftarrow)$: p が $\mathrm{CH}(P)$ の境界にあると仮定

- p における $\mathrm{CH}(P)$ の接線を ℓ として，p を始点とし，ℓ と垂直で，P の外側に向かう半直線を $\ell^\perp$ とする



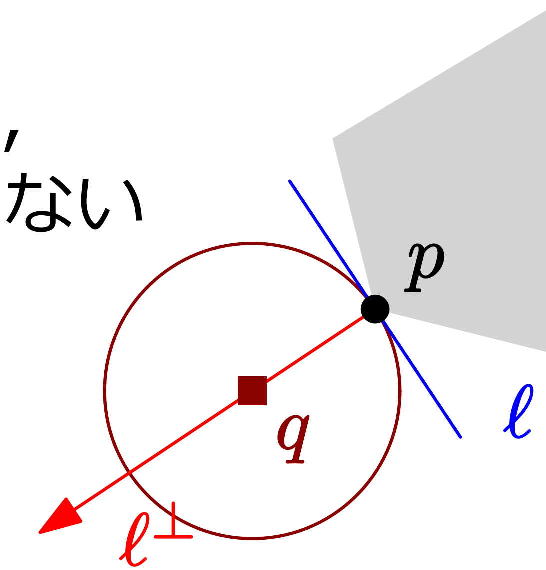
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，すべてが 1 直線上にはない
$p \in P$, ボロノイ領域 $V(p)$

性質：非有界ボロノイ領域と凸包

$V(p)$ が非有界 $\Leftrightarrow$ p は凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の境界にある

<u>証明 ($\Leftarrow$)</u>：p が $\mathrm{CH}(P)$ の境界にあると仮定

- p における $\mathrm{CH}(P)$ の接線を ℓ として，
  p を始点とし，ℓ と垂直で，P の外側に向かう半直線を $\ell^{\perp}$ とする
- このとき，$\ell^{\perp}$ 上の任意の点 q を中心として，
  p を通る円周は $\mathrm{CH}(P)$ の p 以外の点を含まない
- $\therefore \ell^{\perp} \subseteq V(p)$ であり，$V(p)$ は非有界



非有界ボロノイ領域と凸包 (2)

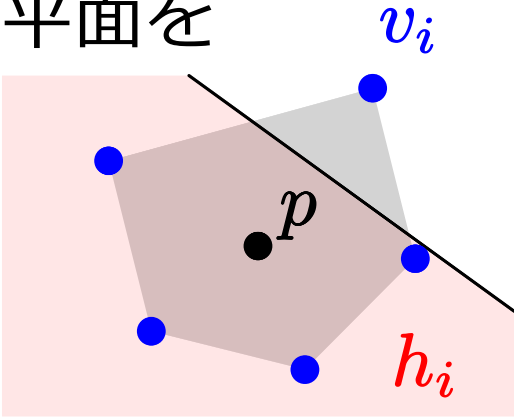
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，すべてが 1 直線上にはない
$p \in P$, ボロノイ領域 $V(p)$

性質：非有界ボロノイ領域と凸包

$V(p)$ が非有界 $\Leftrightarrow$ p は凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の境界にある

証明 ($\Rightarrow$)：p が $\mathrm{CH}(P)$ の内点であると仮定

- $\mathrm{CH}(P)$ の頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_k$ とする
- p と v_i の等距離線を境界に持ち，p を含む半平面を h_i とする



非有界ボロノイ領域と凸包 (2)

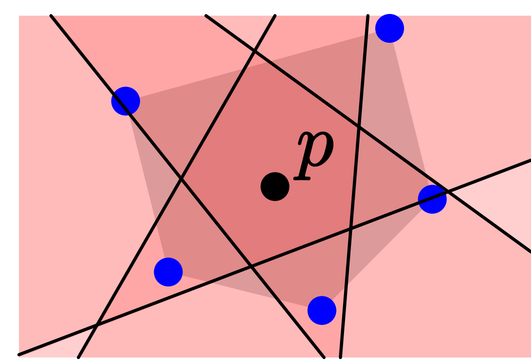
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，すべてが 1 直線上にはない
$p \in P$, ボロノイ領域 $V(p)$

性質：非有界ボロノイ領域と凸包

$V(p)$ が非有界 $\Leftrightarrow$ p は凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の境界にある

証明 (⇒)：p が $\mathrm{CH}(P)$ の内点であると仮定

- $\mathrm{CH}(P)$ の頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_k$ とする
- p と v_i の等距離線を境界に持ち，p を含む半平面を h_i とする
- このとき，$V(p) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} h_i$
- $\bigcap_{i=1}^{k} h_i$ が有界であれば，$V(p)$ も有界



非有界ボロノイ領域と凸包 (2)

有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，すべてが 1 直線上にはない
$p \in P$, ボロノイ領域 $V(p)$

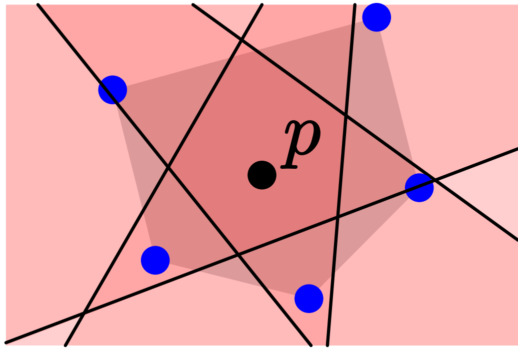
性質：非有界ボロノイ領域と凸包

$V(p)$ が非有界 $\Leftrightarrow$ p は凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の境界にある

証明 ($\Rightarrow$)：p が $\mathrm{CH}(P)$ の内点であると仮定

- $\mathrm{CH}(P)$ の頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_k$ とする
- p と v_i の等距離線を境界に持ち，p を含む半平面を h_i とする
- このとき，$V(p) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} h_i$
- $\bigcap_{i=1}^{k} h_i$ が有界であれば，$V(p)$ も有界

これの成立が言えれば十分



非有界ボロノイ領域と凸包 (3)

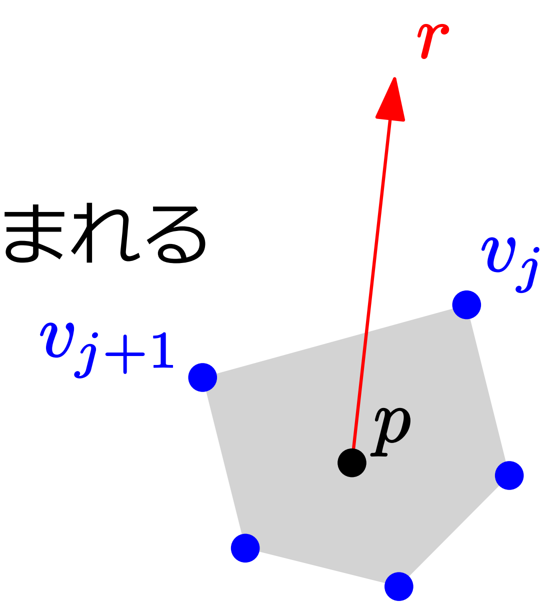
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，すべてが 1 直線上にはない
$p \in P$, ボロノイ領域 $V(p)$

性質：非有界ボロノイ領域と凸包

$V(p)$ が非有界 $\Leftrightarrow$ p は凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の境界にある

証明 (⇒)：p が $\mathrm{CH}(P)$ の内点であると仮定

- [背理法] $\bigcap h_i$ が非有界であると仮定
- p を始点とする ある半直線 r が $\bigcap h_i$ に含まれる
- r は $\mathrm{CH}(P)$ の境界と交わる
- その交点が辺 $\overline{v_j v_{j+1}}$ 上にあるとする



非有界ボロノイ領域と凸包 (3)

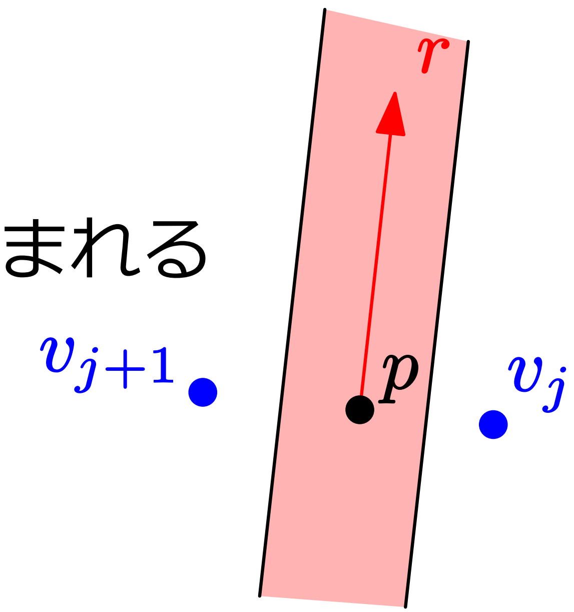
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，すべてが 1 直線上にはない
$p \in P$, ボロノイ領域 $V(p)$

性質：非有界ボロノイ領域と凸包

$V(p)$ が非有界 $\Leftrightarrow$ p は凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の境界にある

証明 ($\Rightarrow$)：p が $\mathrm{CH}(P)$ の内点であると仮定

- [背理法] $\bigcap h_i$ が非有界であると仮定
- p を始点とする ある半直線 r が $\bigcap h_i$ に含まれる
- r は $\mathrm{CH}(P)$ の境界と交わる
- その交点が辺 $\overline{v_j v_{j+1}}$ 上にあるとする
- r が h_j, h_{j+1} に含まれるので，
  p, v_j, v_{j+1} は 1 直線上にある
- これは p が $\mathrm{CH}(P)$ の内点であることに矛盾



非有界ボロノイ領域と凸包 (3)

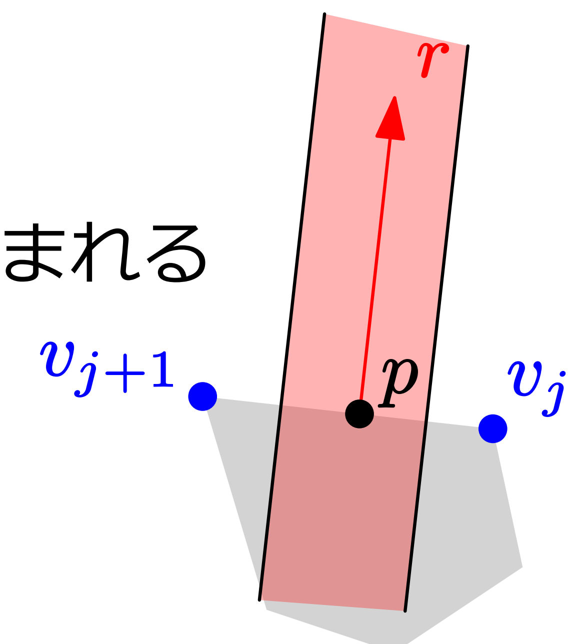
有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$，すべてが 1 直線上にはない
$p \in P$, ボロノイ領域 $V(p)$

性質：非有界ボロノイ領域と凸包

$V(p)$ が非有界 $\Leftrightarrow$ p は凸包 $\mathrm{CH}(P)$ の境界にある

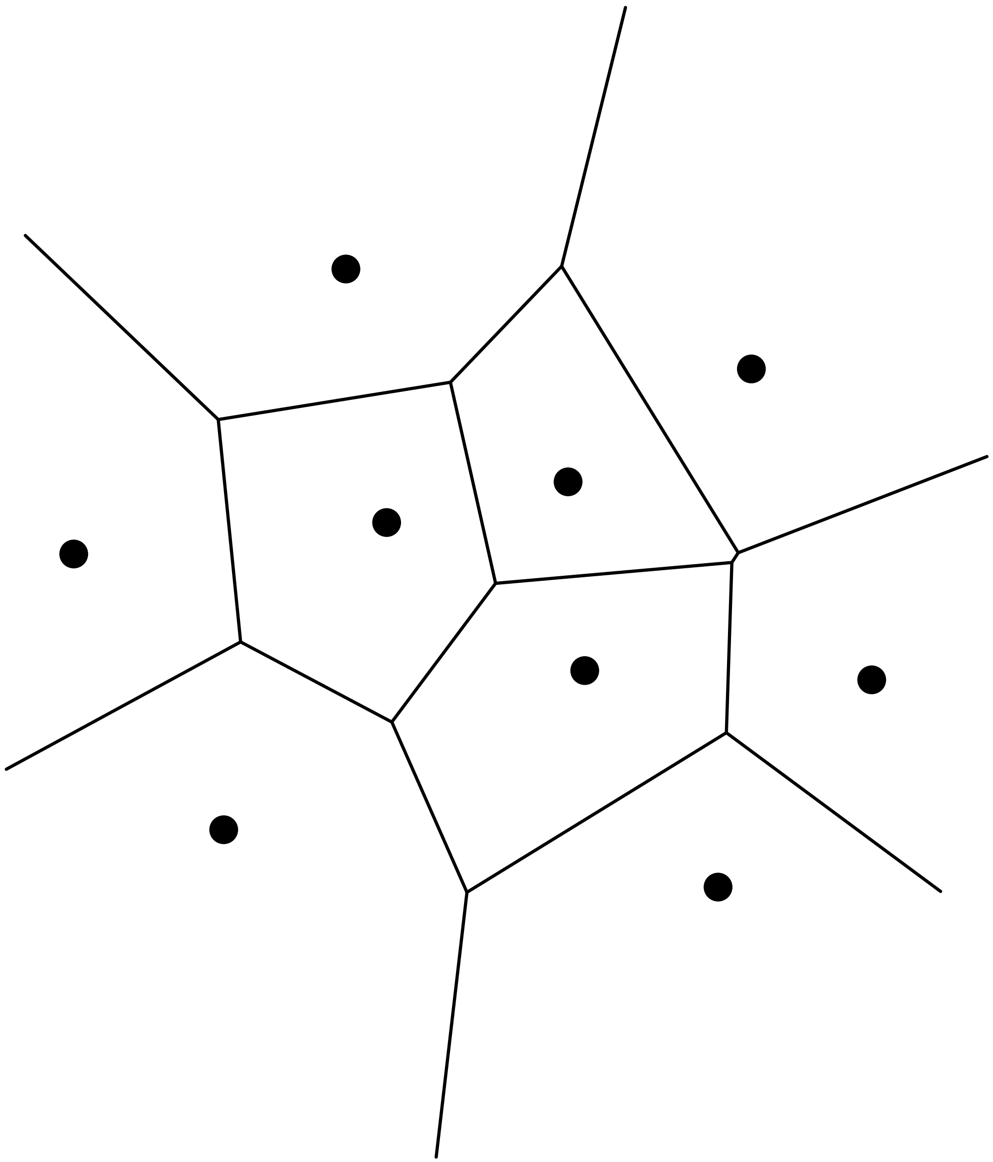
<u>証明 (⇒)</u>：p が $\mathrm{CH}(P)$ の内点であると仮定

- [背理法] $\bigcap h_i$ が非有界であると仮定
- p を始点とする ある半直線 r が $\bigcap h_i$ に含まれる
- r は $\mathrm{CH}(P)$ の境界と交わる
- その交点が辺 $\overline{v_j v_{j+1}}$ 上にあるとする
- r が h_j, h_{j+1} に含まれるので，
  p, v_j, v_{j+1} は 1 直線上にある
- これは p が $\mathrm{CH}(P)$ の内点であることに矛盾

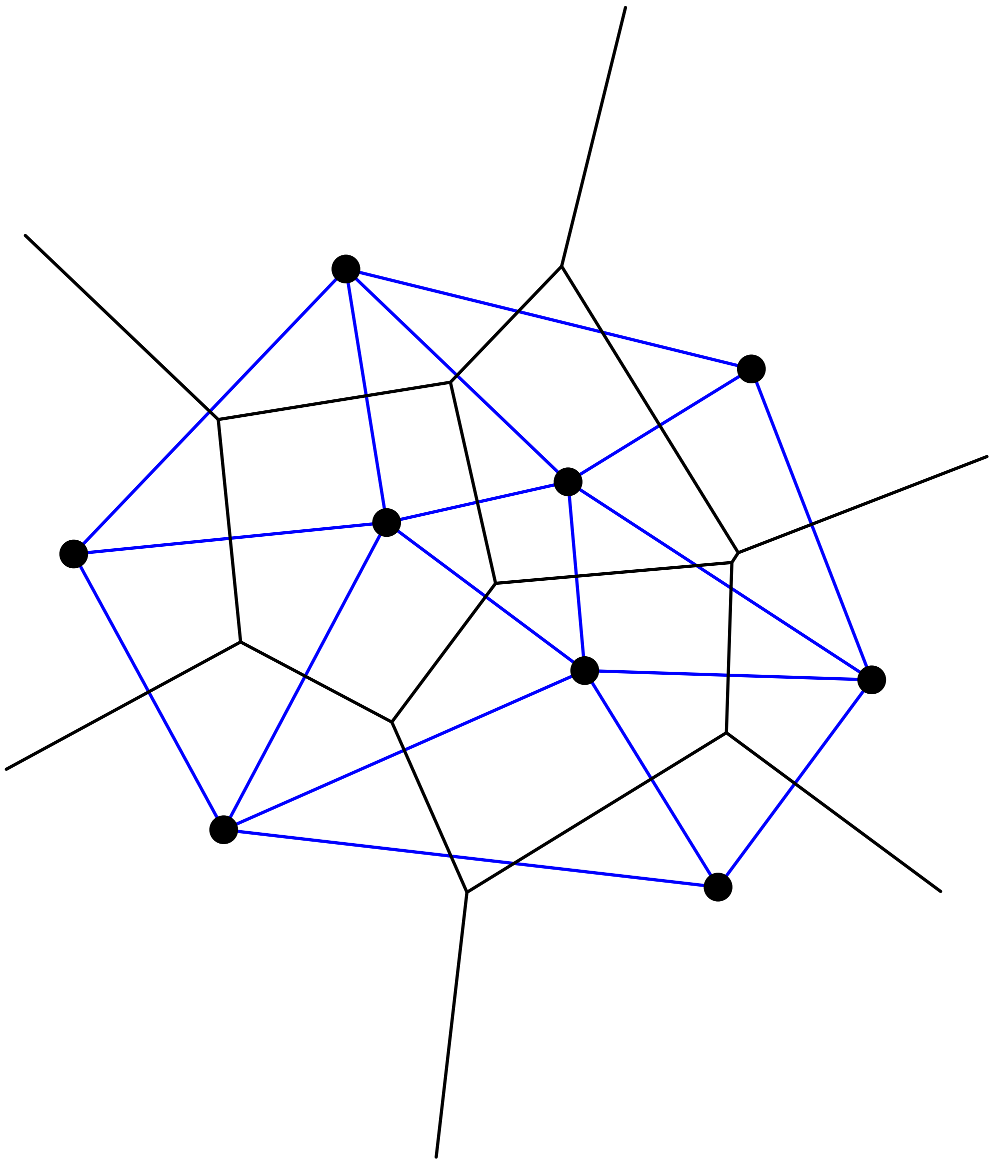


$\square$

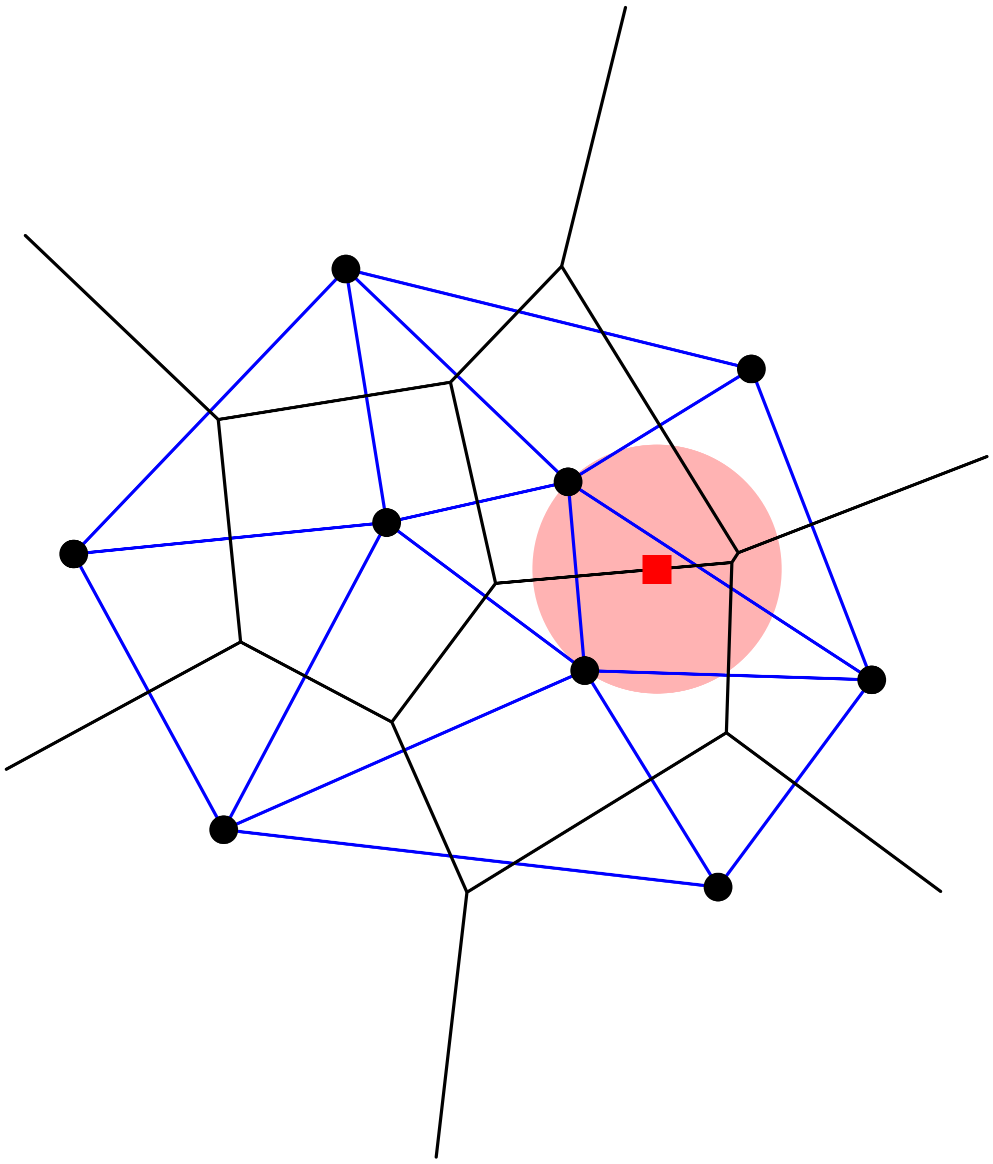
ボロノイ図とデローネ三角形分割：例



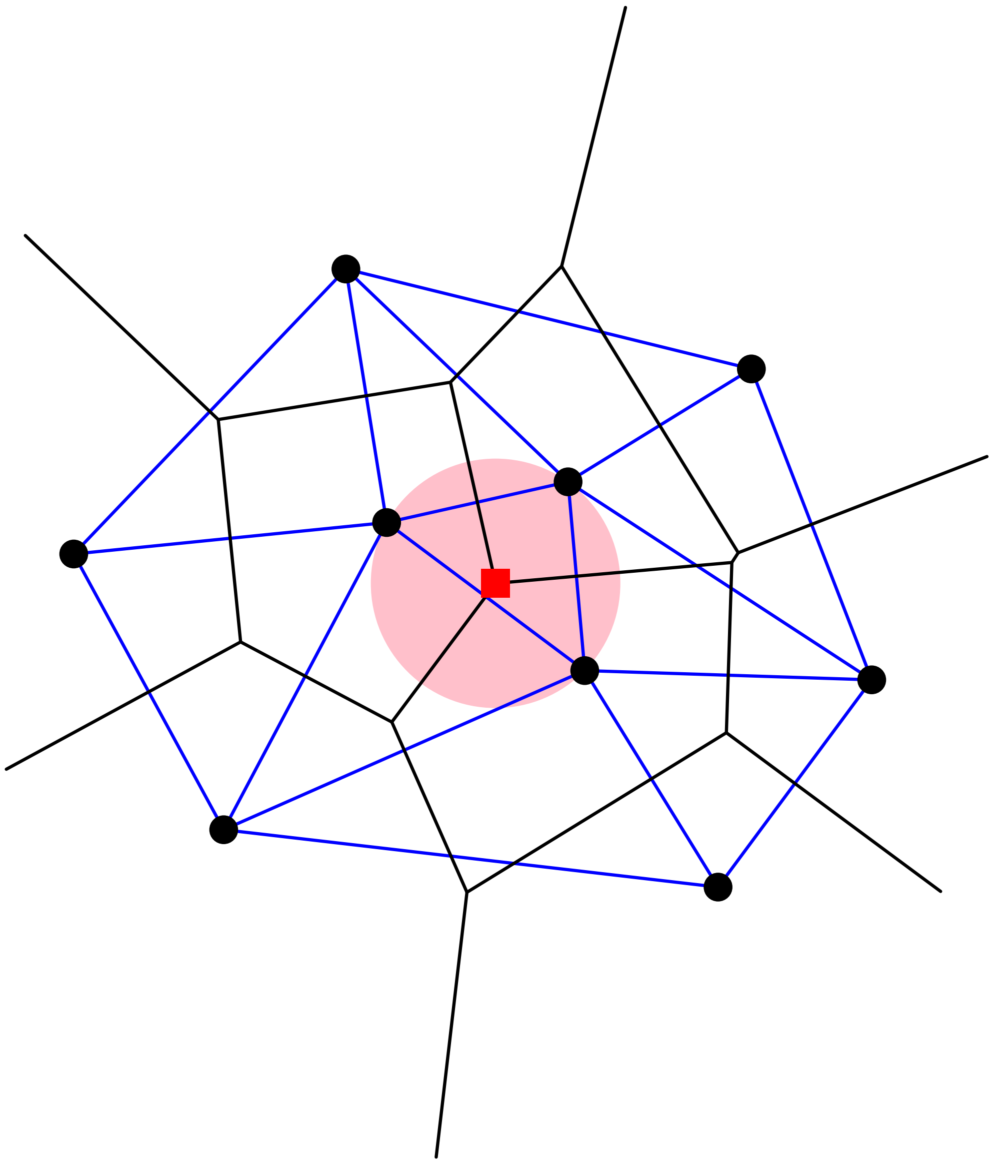
ボロノイ図とデローネ三角形分割：例



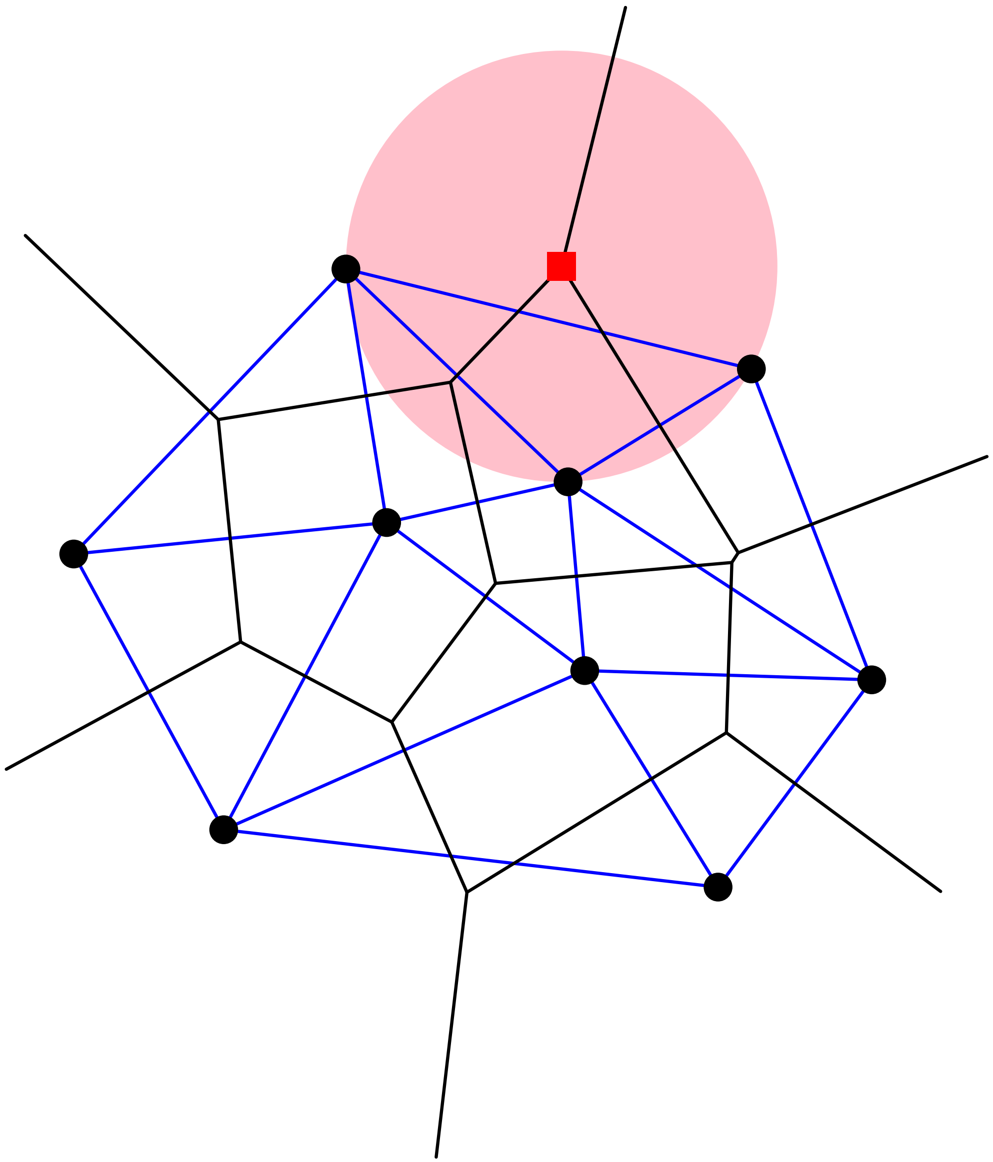
ボロノイ図とデローネ三角形分割：例



ボロノイ図とドロネー三角形分割：例



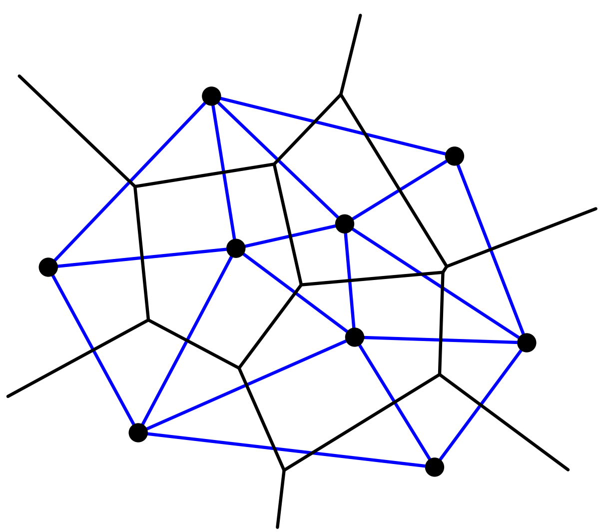
ボロノイ図とドロネー三角形分割：例

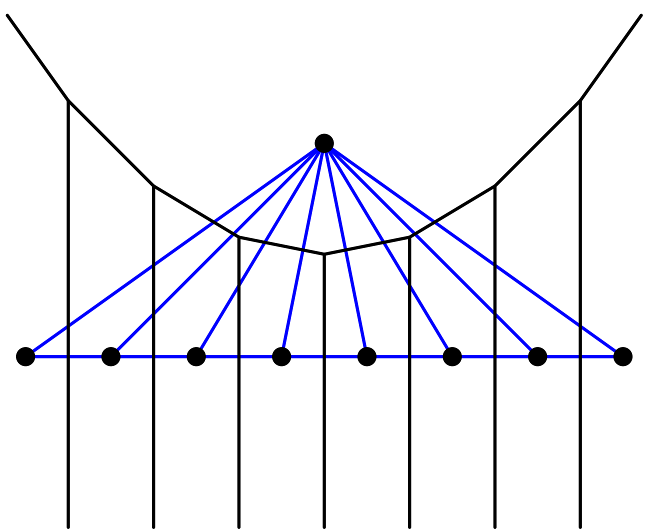


ボロノイ図とデローネ三角形分割

ボロノイ図	デローネ三角形分割
ボロノイ領域 $V(p)$	頂点 $p \in P$
ボロノイ辺 $V(p) \cap V(q)$	辺 $\overline{pq}$
ボロノイ頂点 $V(p) \cap V(q) \cap V(r)$	有界面 (三角形) $\triangle pqr$

仮定：すべてが 1 直線上になく，どの 4 点も 1 円周上にない





ボロノイ頂点とボロノイ辺の数

仮定：すべてが 1 直線上になく，どの 4 点も 1 円周上にない

性質：ボロノイ頂点とボロノイ辺の数

n 個の点の集合 P が上の仮定を満たす，$n \geq 3 \Rightarrow$
P のボロノイ図において，ボロノイ頂点の数 $\leq 2n-5$
ボロノイ辺の数 $\leq 3n-6$

ボロノイ頂点とボロノイ辺の数

仮定：すべてが 1 直線上になく，どの 4 点も 1 円周上にない

性質：ボロノイ頂点とボロノイ辺の数

n 個の点の集合 P が上の仮定を満たす，$n \geq 3 \Rightarrow$
P のボロノイ図において，ボロノイ頂点の数 $\leq 2n-5$
ボロノイ辺の数 $\leq 3n-6$

証明：デローネ三角形分割は非交差幾何グラフなので，

- P のデローネ三角形分割において
  辺数 $\leq 3n-6$，有界面数 $\leq (2n-4)-1 = 2n-5$
- デローネ三角形分割とボロノイ図の対応を考えると，
  P のボロノイ辺数 $\leq 3n-6$，
  P のボロノイ頂点数 $\leq 2n-5$ $\square$

目次

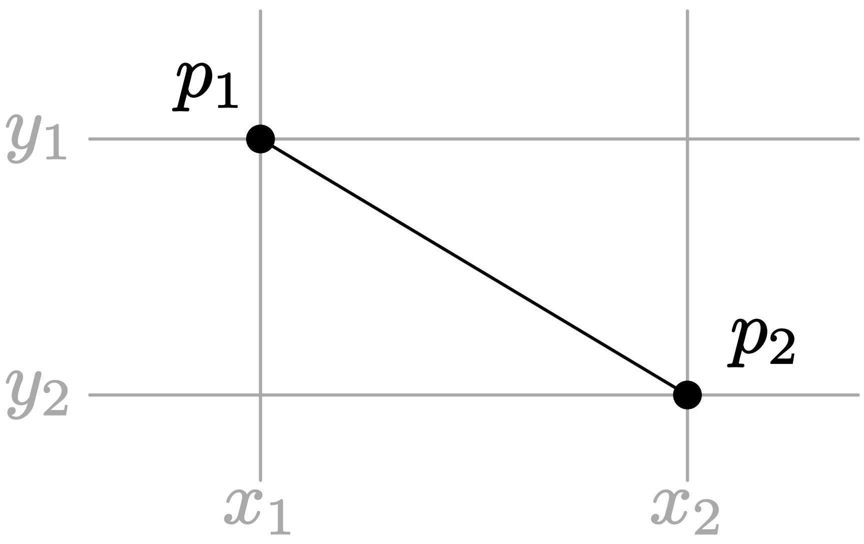
ユークリッド距離

いままで，距離といえば「ユークリッド距離」を意味していた

定義 (復習)：ユークリッド距離

2 点 $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して
p_1 と p_2 の**ユークリッド距離** (または L_2 距離) とは

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



点 $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して
$\|p\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ とすると

$$p_1 \text{ と } p_2 \text{ のユークリッド距離} = \|p_1 - p_2\|_2$$

と書ける

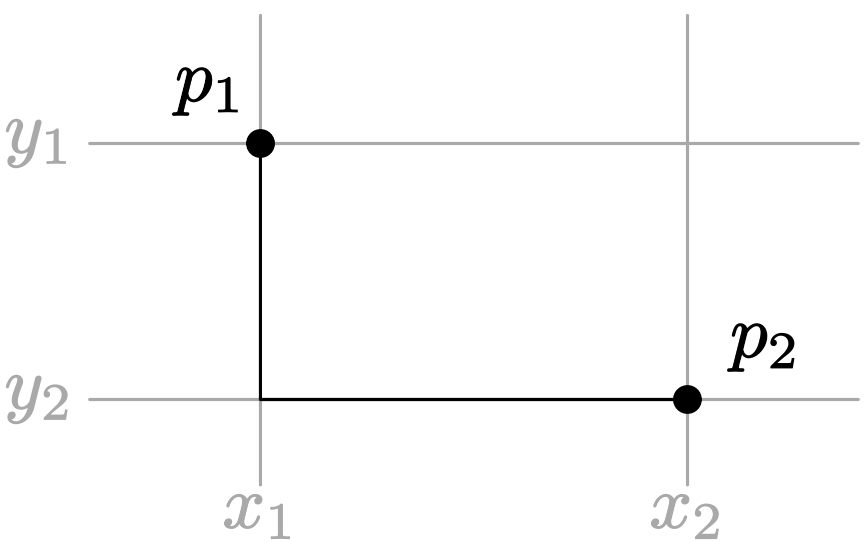
マンハッタン距離

ユークリッド距離の他にも，距離とみなせる量がある

定義 (復習)：マンハッタン距離

2 点 $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して
p_1 と p_2 の**マンハッタン距離** (または L_1 距離) とは

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



点 $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して
$\|p\|_1 = |x| + |y|$ とすると

p_1 と p_2 のマンハッタン距離
$= \|p_1 - p_2\|_1$

と書ける

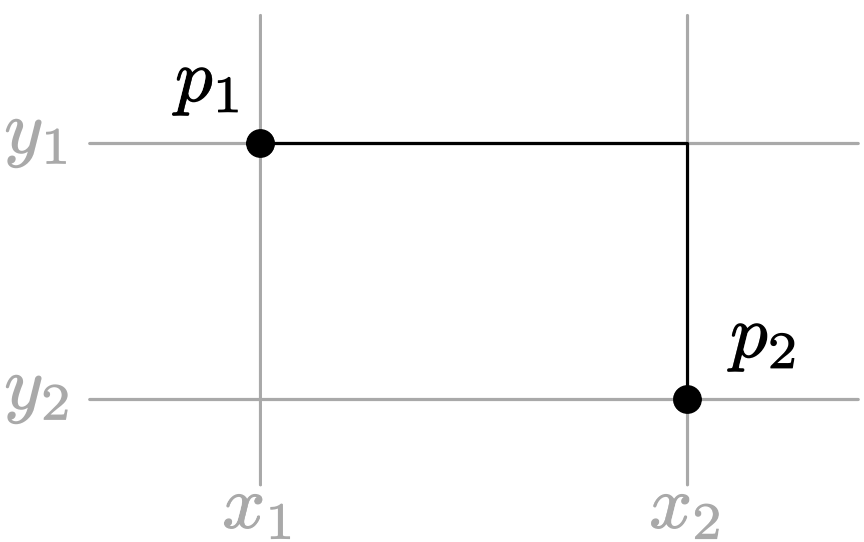
マンハッタン距離

ユークリッド距離の他にも，距離とみなせる量がある

定義 (復習)：マンハッタン距離

2 点 $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して
p_1 と p_2 の**マンハッタン距離** (または L_1 距離) とは

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



点 $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して
$\|p\|_1 = |x| + |y|$ とすると

p_1 と p_2 のマンハッタン距離
$= \|p_1 - p_2\|_1$

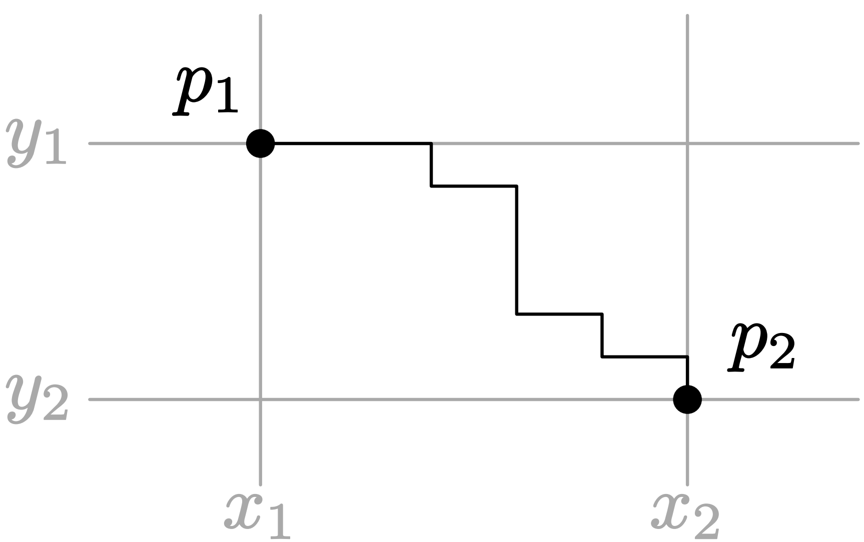
と書ける

ユークリッド距離の他にも，距離とみなせる量がある

定義 (復習)：マンハッタン距離

2 点 $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して
p_1 と p_2 の**マンハッタン距離** (または L_1 距離) とは

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

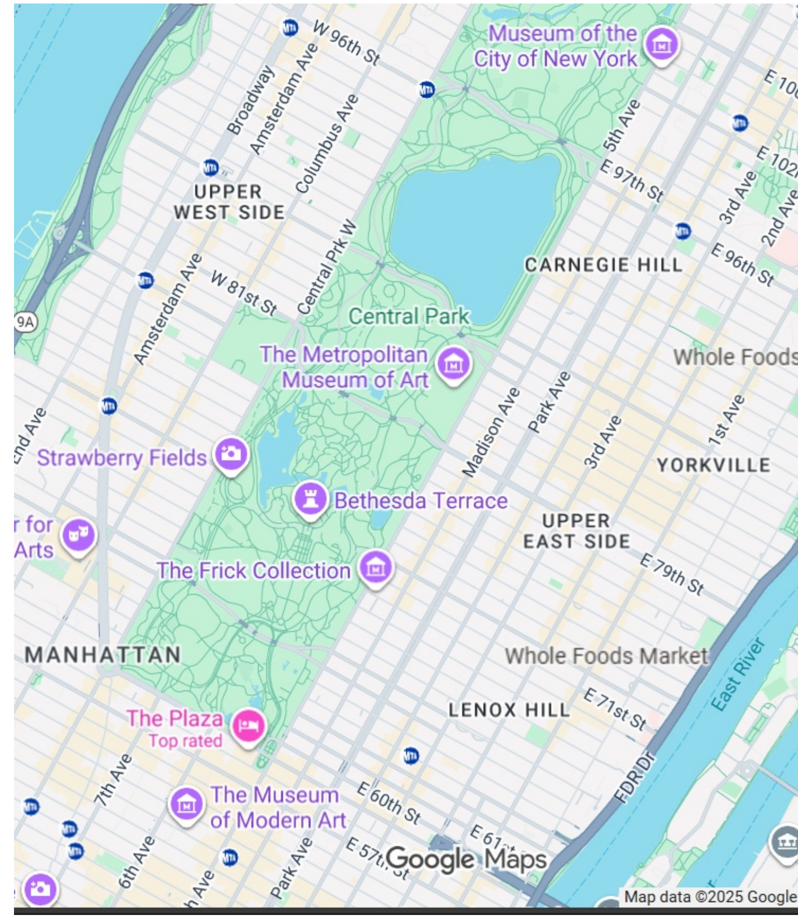


点 $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して
$\|p\|_1 = |x| + |y|$ とすると

p_1 と p_2 のマンハッタン距離
$= \|p_1 - p_2\|_1$

と書ける

ユークリッド と マンハッタン



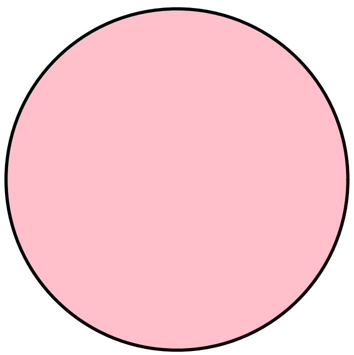
ユークリッド (エウクレイデス) (fl. 300 BC)

マンハッタン (NY, USA)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EuclidStatueOxford.jpg

距離による円板の違い

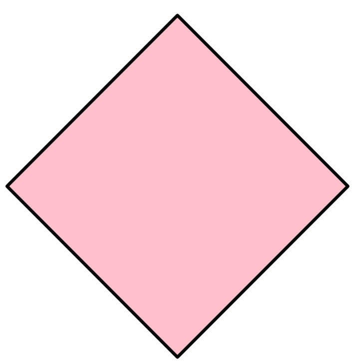
ユークリッド距離における円板



中心を $c = (x_c, y_c)$ とする半径 r の円板

$$\{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \leq r\}$$

マンハッタン距離における円板

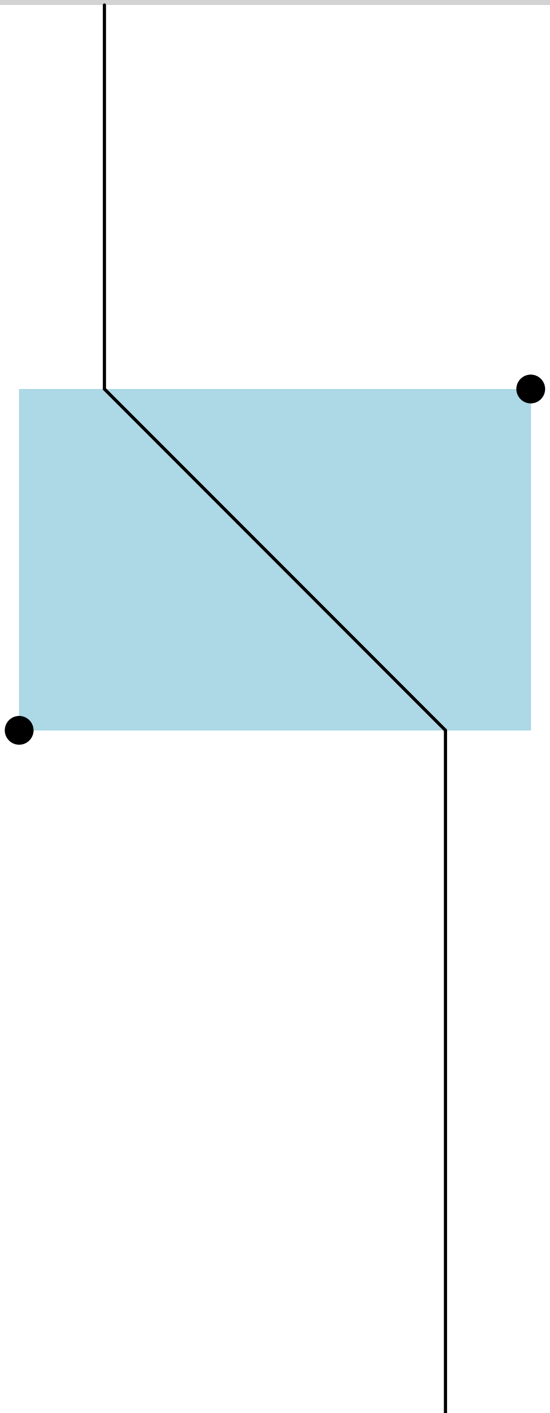


中心を $c = (x_c, y_c)$ とする半径 r の円板

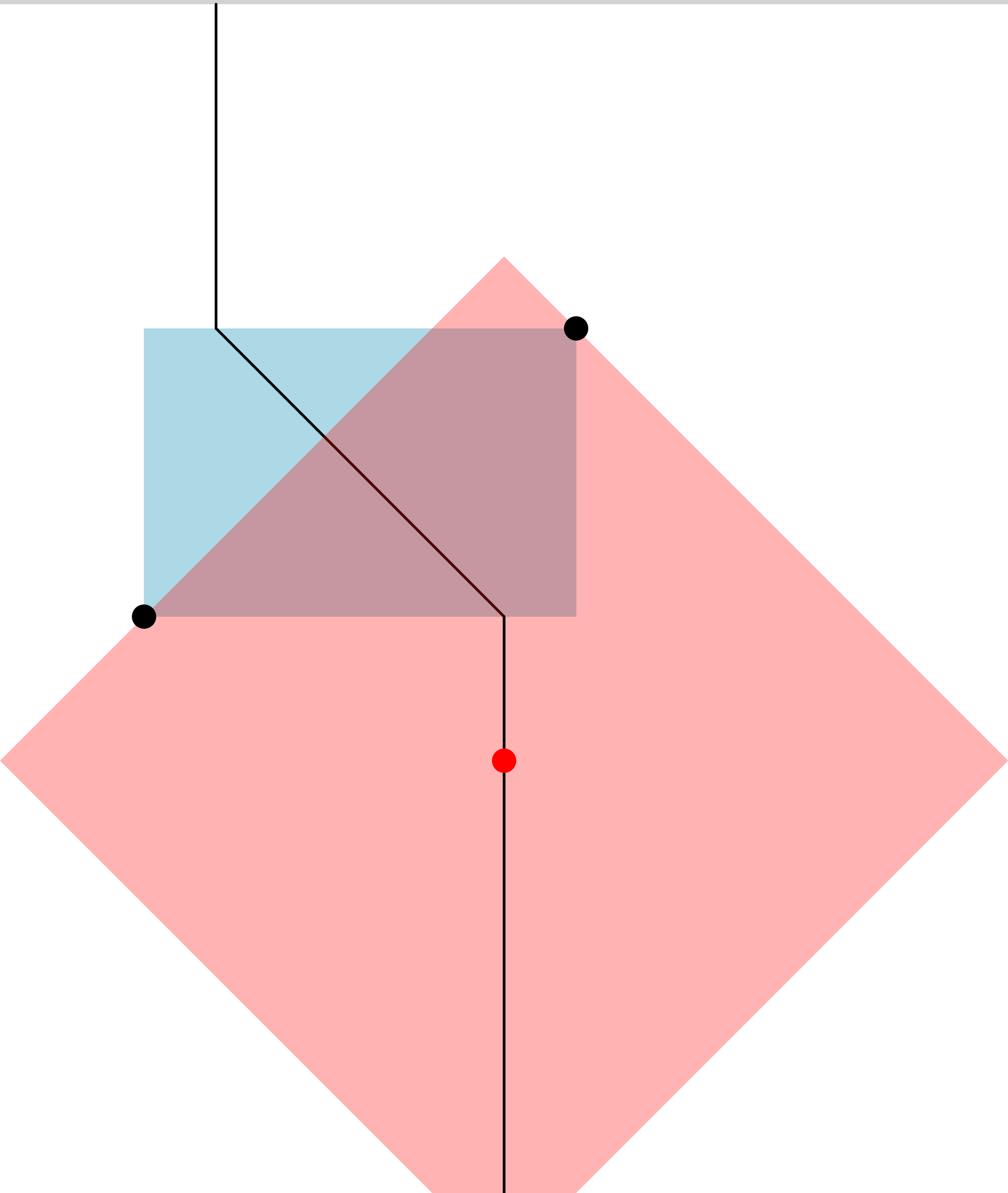
$$\{(x, y) \mid |x - x_c| + |y - y_c| \leq r\}$$

マンハッタン距離の等距離線

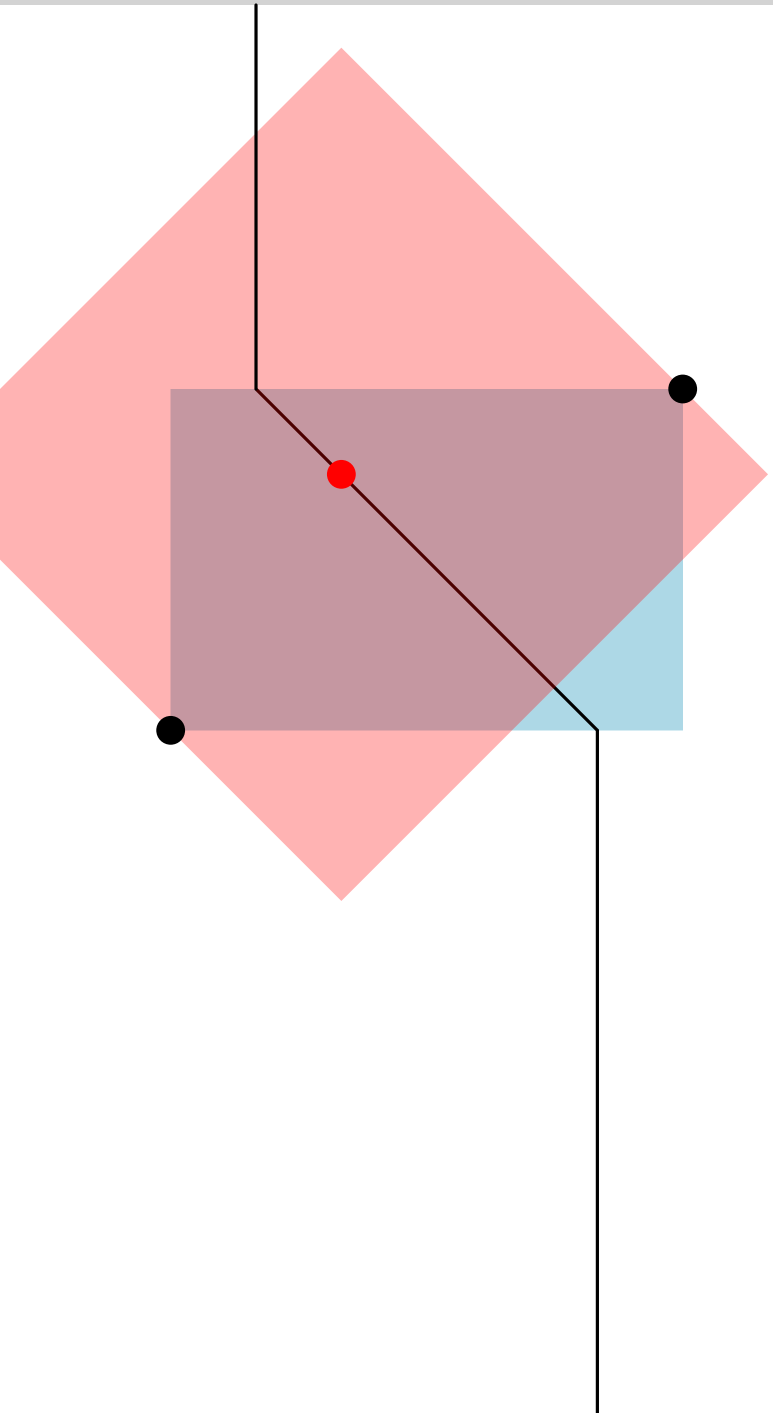
マンハッタン距離の等距離線



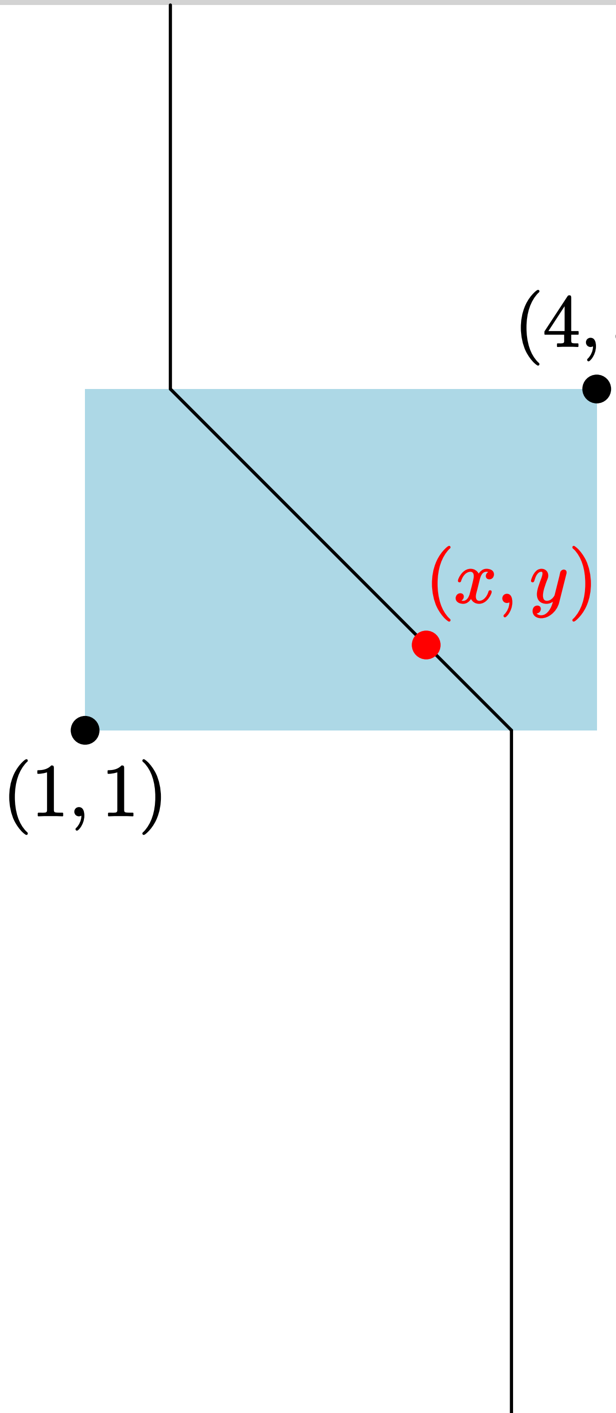
マンハッタン距離の等距離線



マンハッタン距離の等距離線



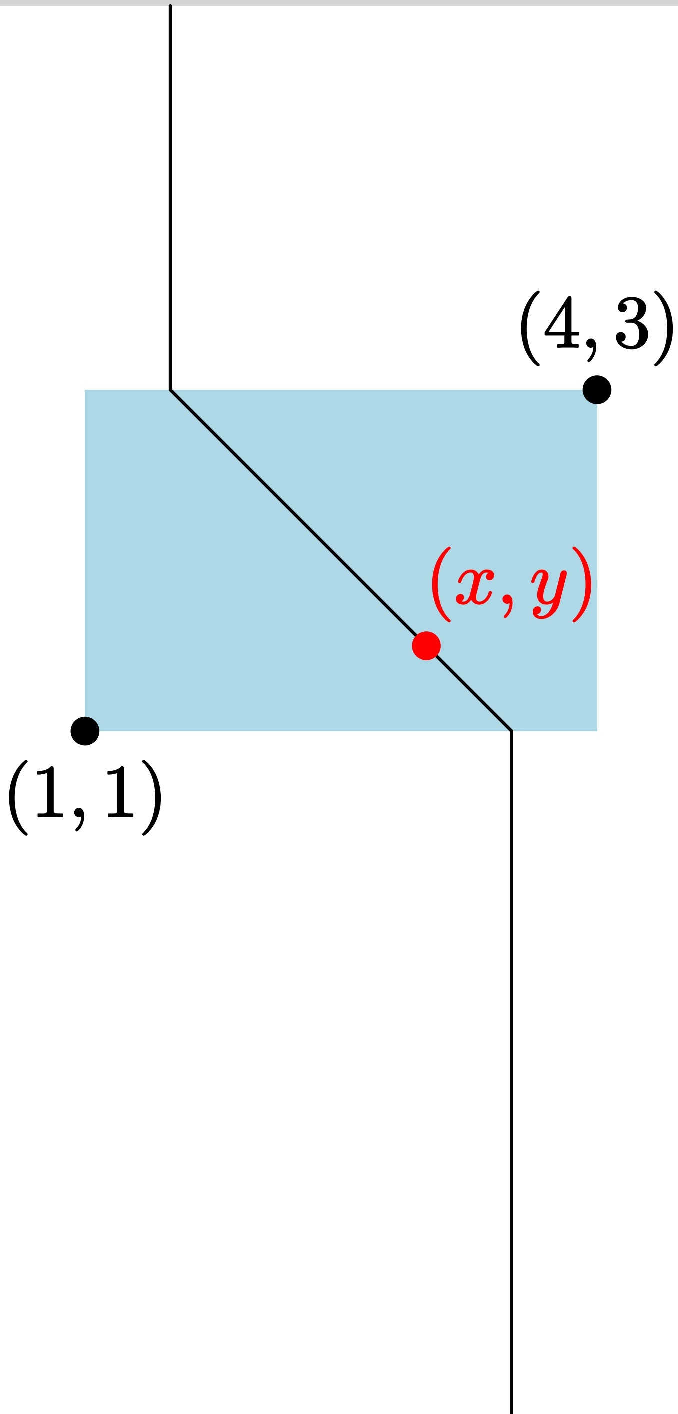
マンハッタン距離の等距離線



等距離線上の点を (x,y) とすると

$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

マンハッタン距離の等距離線

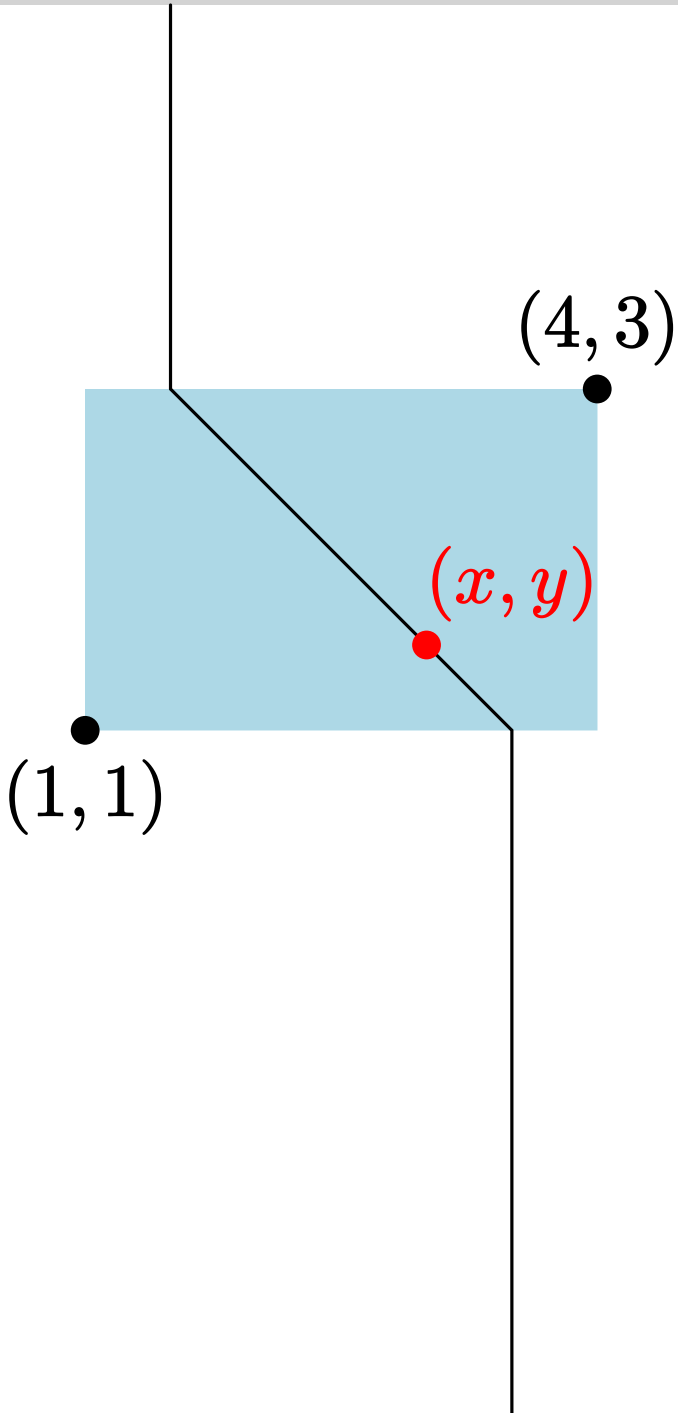


等距離線上の点を (x, y) とすると

$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

	$x<1$	$1\leq x\leq 4$	$4<x$
$3<y$			
$1\leq y\leq 3$			
$y<1$			

マンハッタン距離の等距離線



等距離線上の点を (x,y) とすると

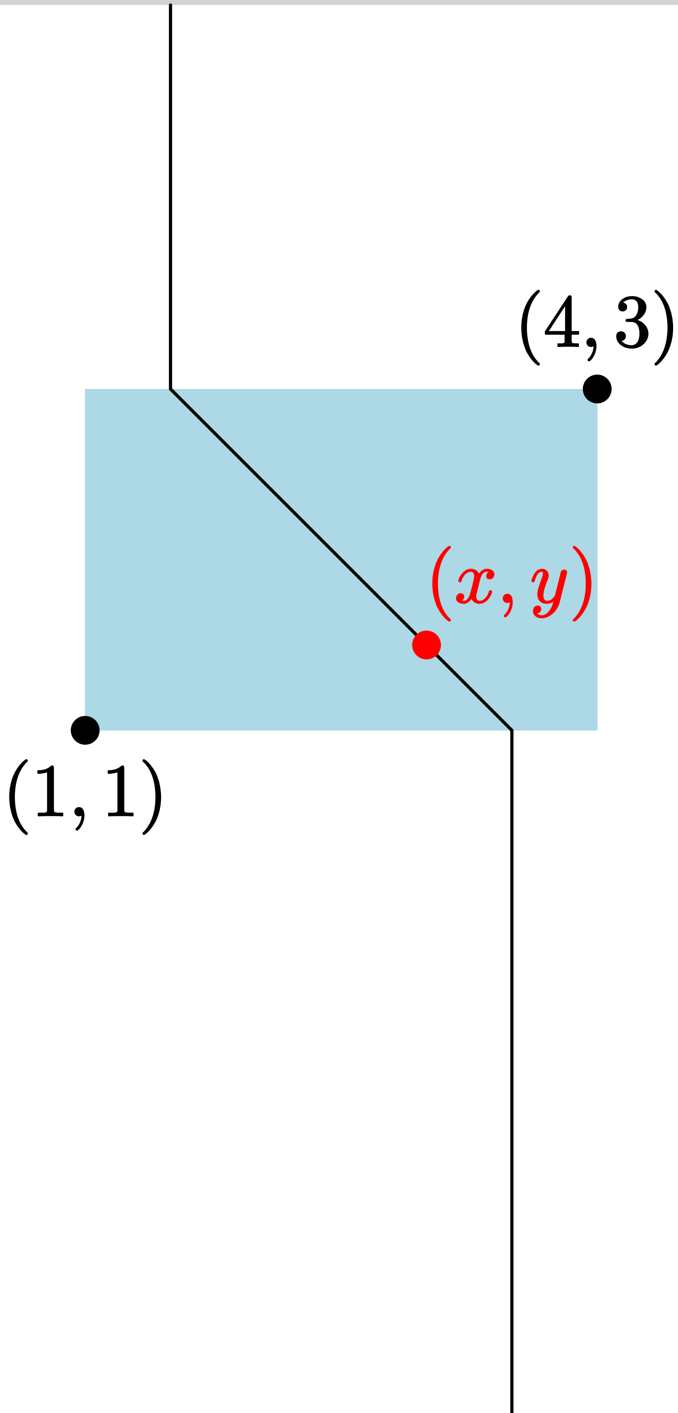
$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

$$(1-x)+(y-1)=(4-x)+(y-3)$$

$$0=1$$

	$x<1$	$1\le x\le 4$	$4<x$
$3<y$			
$1\le y\le 3$			
$y<1$			

マンハッタン距離の等距離線



等距離線上の点を (x,y) とすると

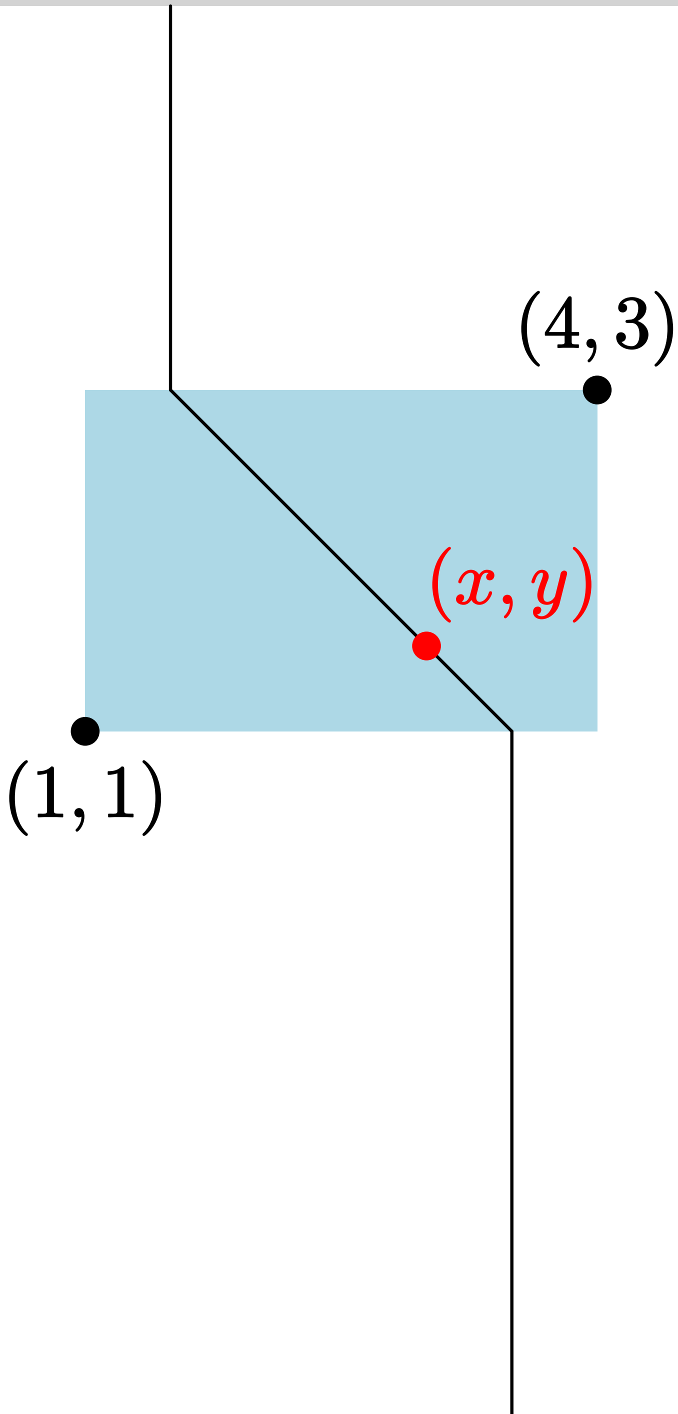
$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

$$(1-x)+(y-1)=(4-x)+(y-3)$$

$$0=1$$

	$x<1$	$1\leq x\leq 4$	$4<x$
$3<y$	$-$		
$1\leq y\leq 3$			
$y<1$			

マンハッタン距離の等距離線



等距離線上の点を (x,y) とすると

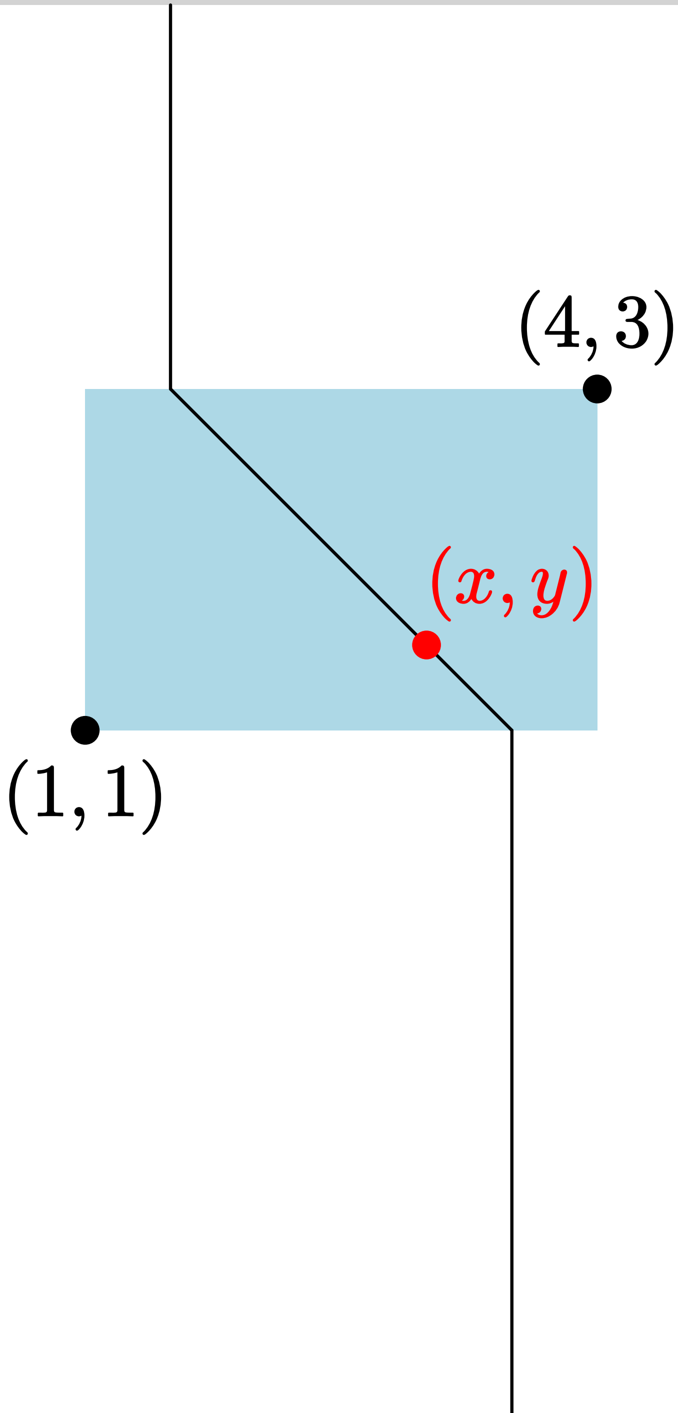
$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

$$(x-1)+(y-1)=(x-4)+(y-3)$$

$$0=-5$$

	$x<1$	$1 \leq x \leq 4$	$4<x$
$3<y$	$-$		
$1 \leq y \leq 3$			
$y<1$			

マンハッタン距離の等距離線



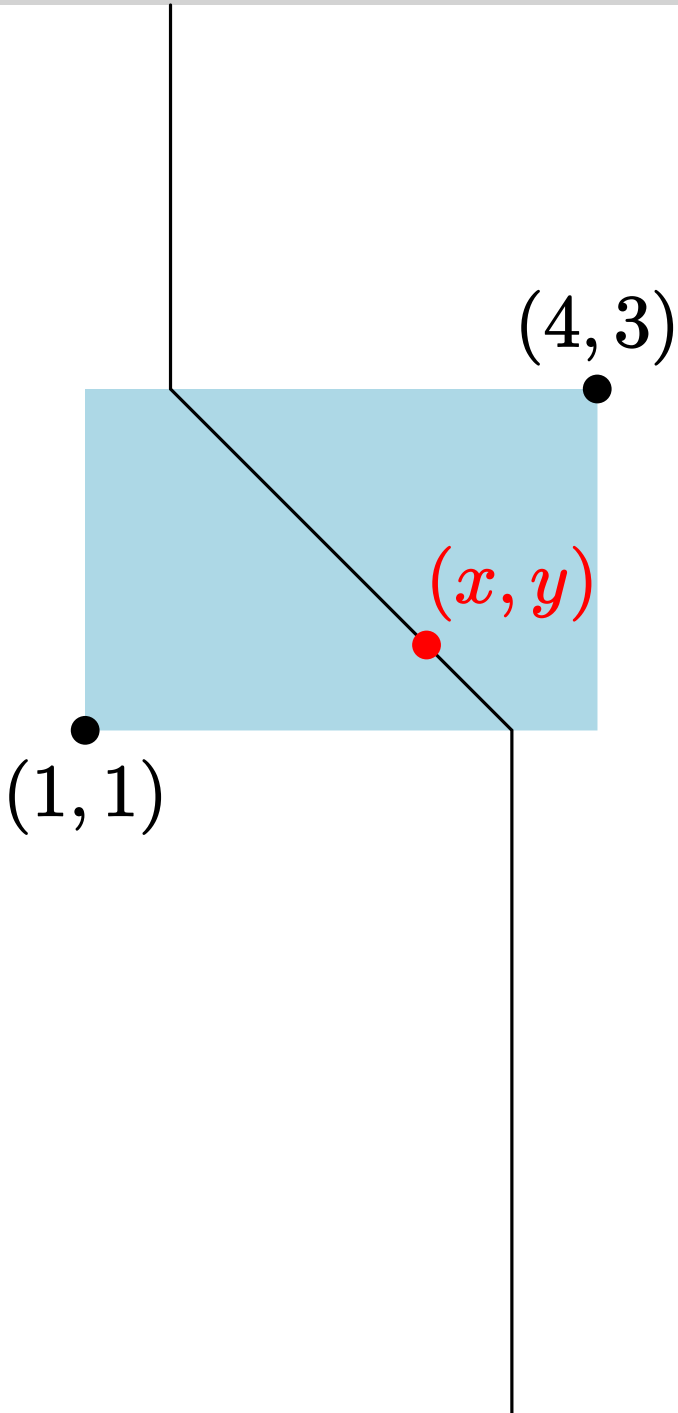
等距離線上の点を (x, y) とすると

$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

$$(x-1)+(y-1)=(x-4)+(y-3)$$

$$0=-5$$

	$x<1$	$1 \le x \le 4$	$4<x$
$3<y$	$-$		$-$
$1 \le y \le 3$			
$y<1$			



等距離線上の点を (x,y) とすると

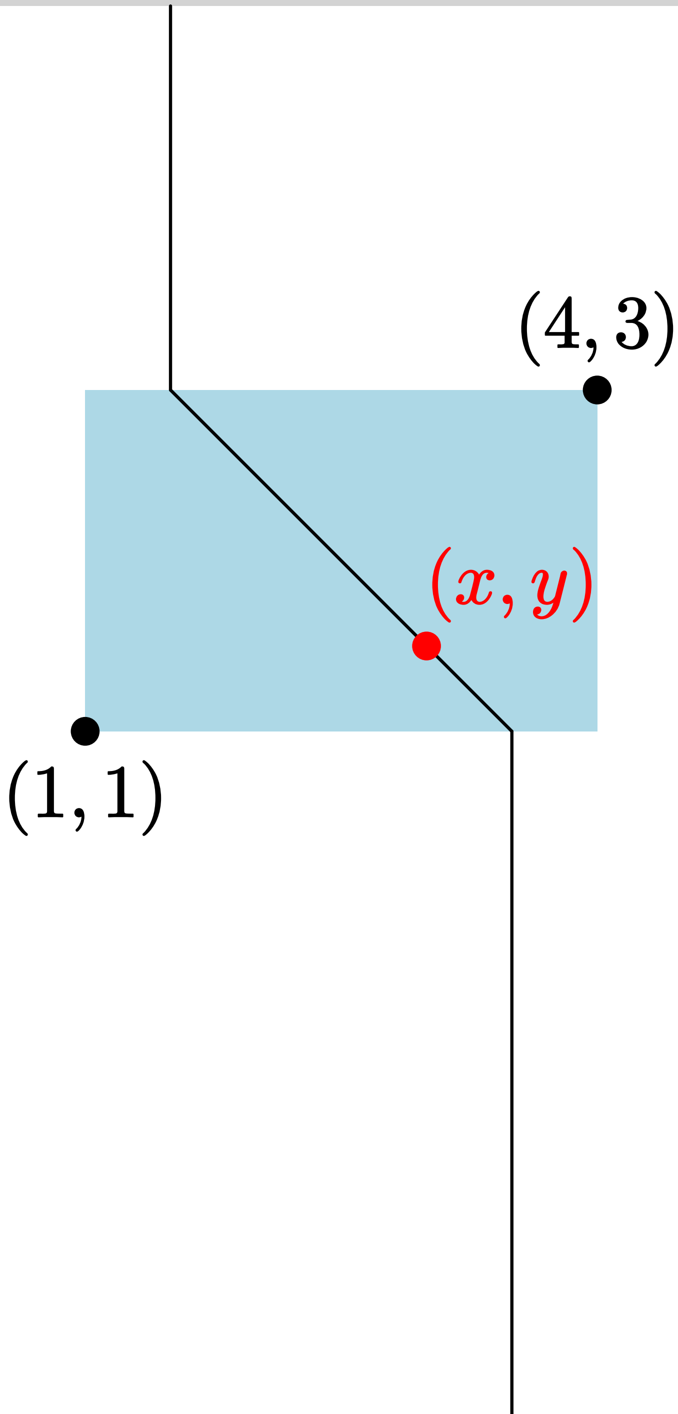
$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

$$(1-x)+(1-y)=(4-x)+(3-y)$$

$$0=5$$

	$x<1$	$1\le x\le 4$	$4<x$
$3<y$	—		—
$1\le y\le 3$			
$y<1$	—		

マンハッタン距離の等距離線



等距離線上の点を (x,y) とすると

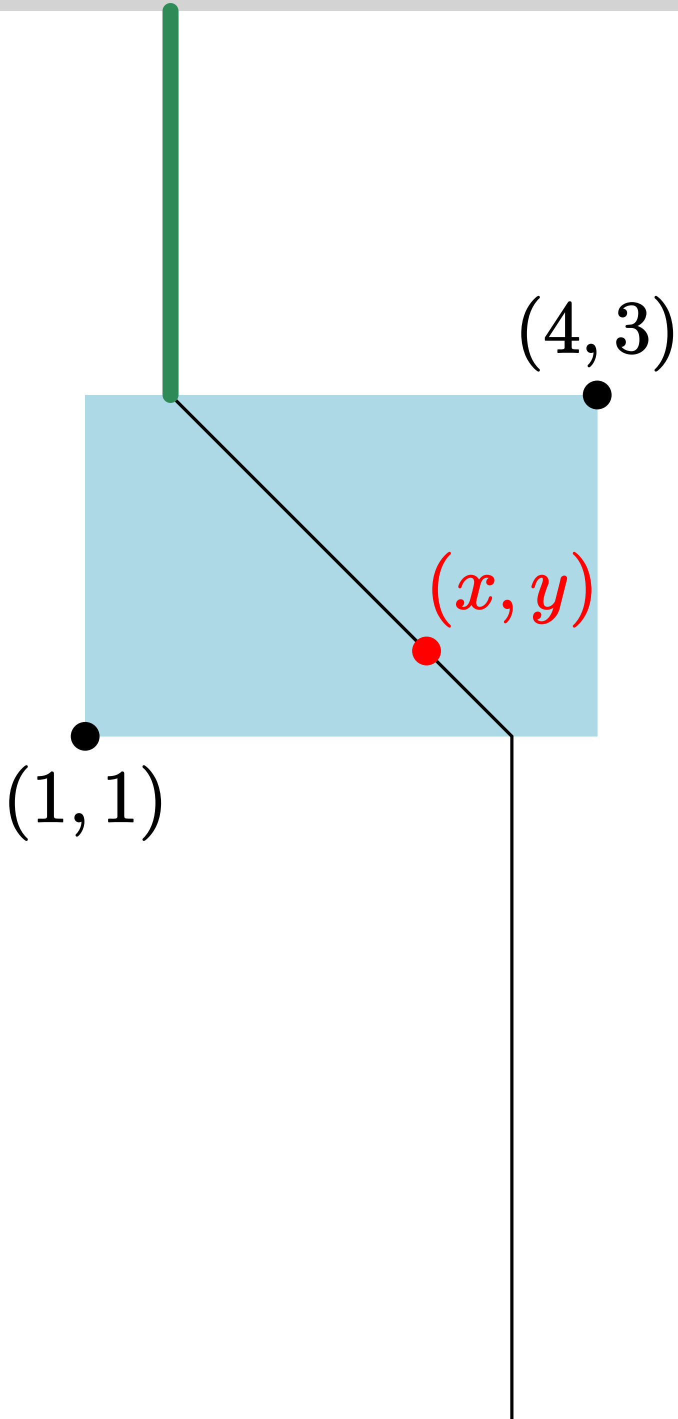
$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

$$(x-1)+(1-y)=(x-4)+(3-y)$$

$$0=-1$$

	$x<1$	$1\le x\le 4$	$4<x$
$3<y$	$-$		$-$
$1\le y\le 3$			
$y<1$	$-$		$-$

マンハッタン距離の等距離線



等距離線上の点を (x,y) とすると

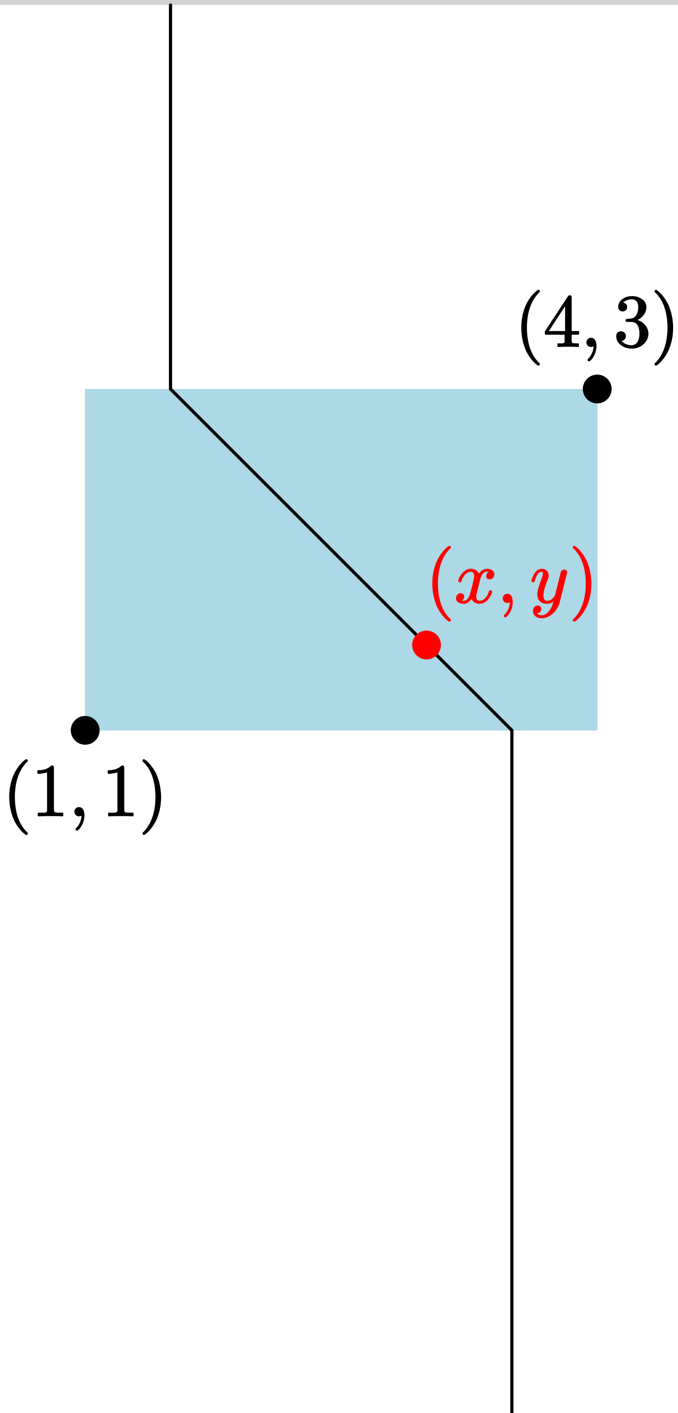
$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

$$(x-1)+(y-1)=(4-x)+(y-3)$$

$$x=3/2$$

	$x<1$	$1\le x\le 4$	$4<x$
$3<y$	$-$	$x=3/2$	$-$
$1\le y\le 3$			
$y<1$	$-$		$-$

マンハッタン距離の等距離線



等距離線上の点を (x, y) とすると

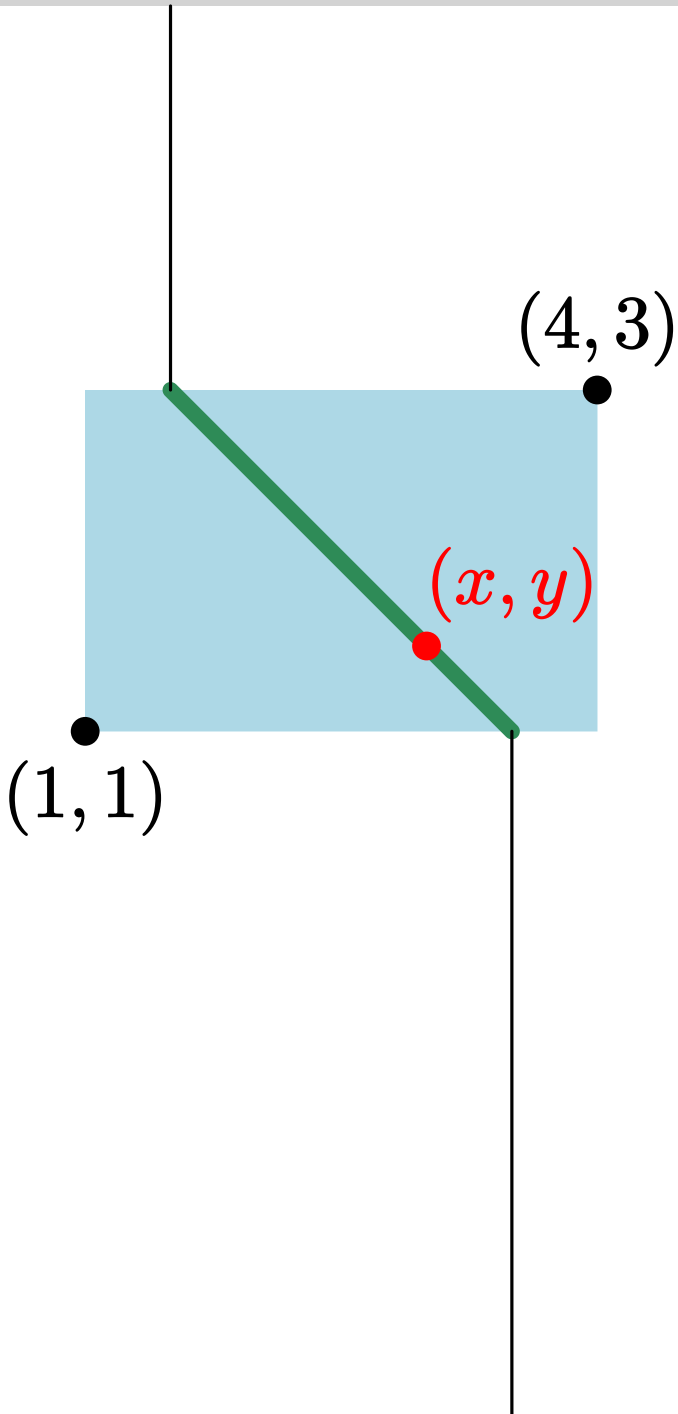
$$|x - 1| + |y - 1| = |x - 4| + |y - 3|$$

$$(1 - x) + (y - 1) = (4 - x) + (3 - y)$$

$$y = 7/2$$

	$x < 1$	$1 \le x \le 4$	$4 < x$
$3 < y$	−	$x = 3/2$	−
$1 \le y \le 3$	−		
$y < 1$	−		−

マンハッタン距離の等距離線



等距離線上の点を (x, y) とすると

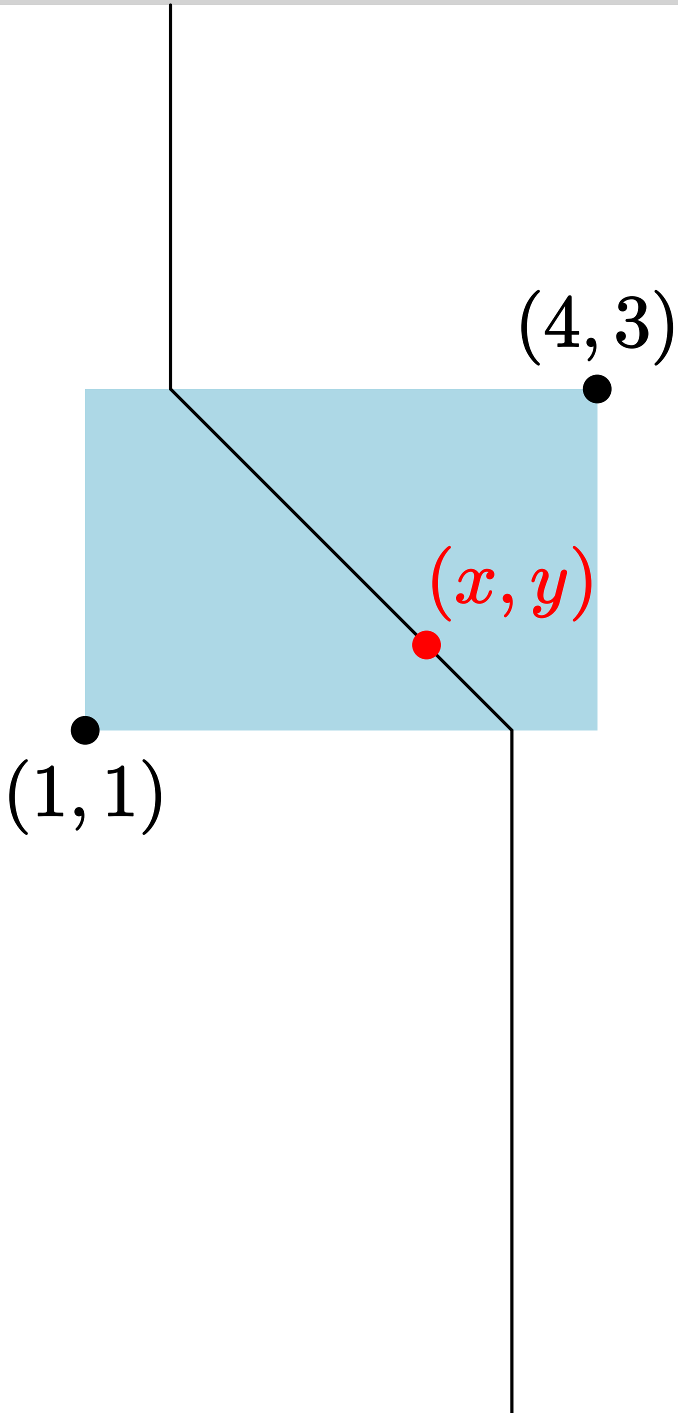
$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

$$(x-1)+(y-1)=(4-x)+(3-y)$$

$$x+y=9/2$$

	$x<1$	$1 \le x \le 4$	$4<x$
$3<y$	$-$	$x=3/2$	$-$
$1 \le y \le 3$	$-$	$x+y=9/2$	
$y<1$	$-$		$-$

マンハッタン距離の等距離線



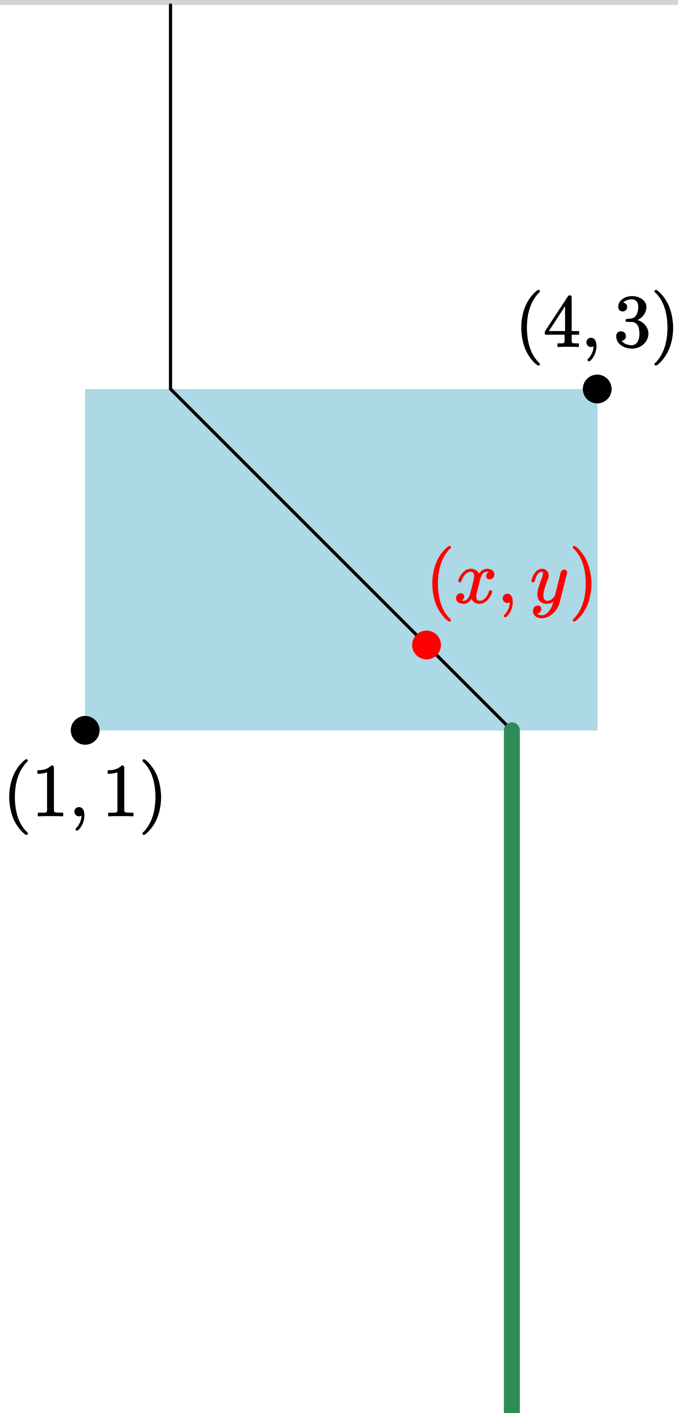
等距離線上の点を (x,y) とすると

$$|x-1|+|y-1| = |x-4|+|y-3|$$

$$(x-1)+(y-1) = (x-4)+(3-y)$$

$$y = 1/2$$

	$x<1$	$1 \le x \le 4$	$4<x$
$3<y$	$-$	$x=3/2$	$-$
$1 \le y \le 3$	$-$	$x+y=9/2$	$-$
$y<1$	$-$		$-$



等距離線上の点を (x,y) とすると

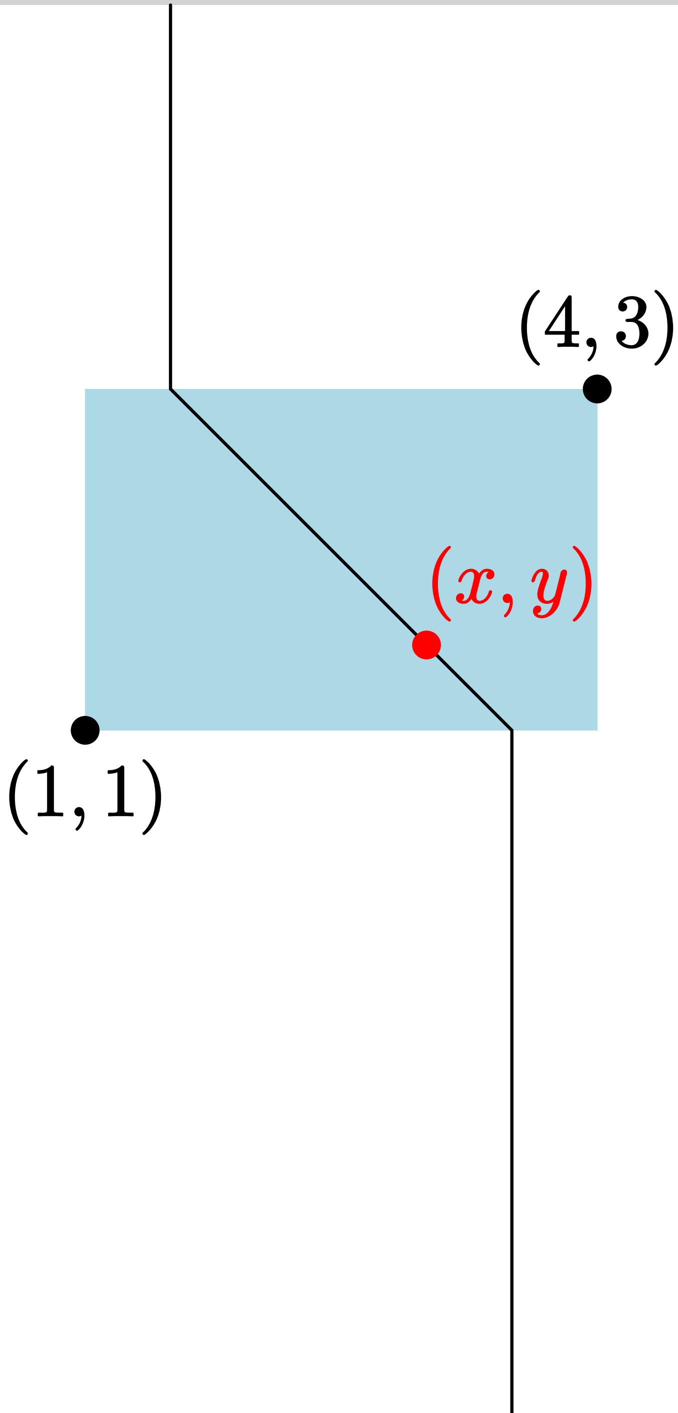
$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

$$(x-1)+(1-y)=(4-x)+(3-y)$$

$$x=7/2$$

	$x<1$	$1\le x\le 4$	$4<x$
$3<y$	$-$	$x=3/2$	$-$
$1\le y\le 3$	$-$	$x+y=9/2$	$-$
$y<1$	$-$	$x=7/2$	$-$

マンハッタン距離の等距離線



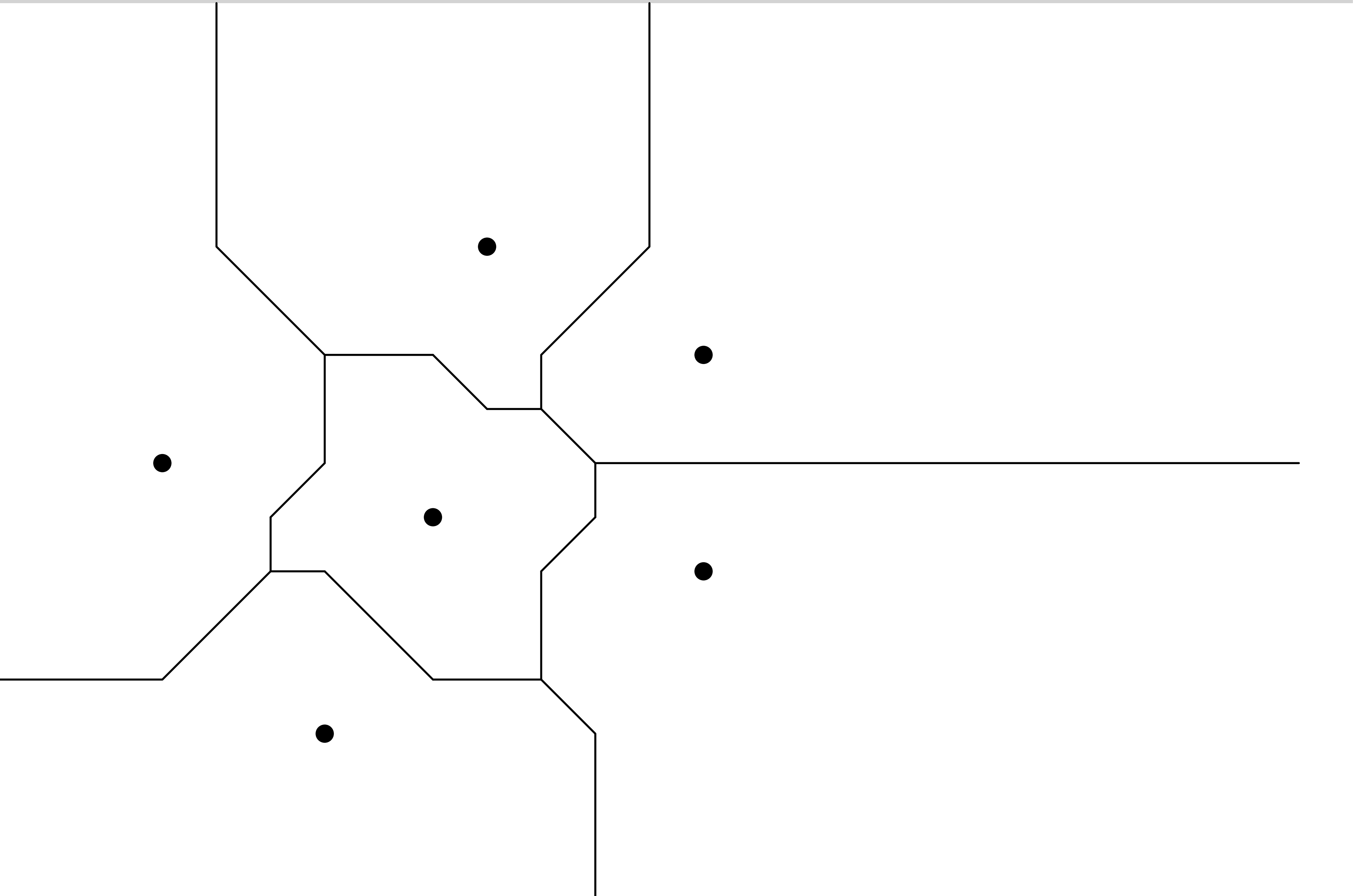
等距離線上の点を (x,y) とすると

$$|x-1|+|y-1|=|x-4|+|y-3|$$

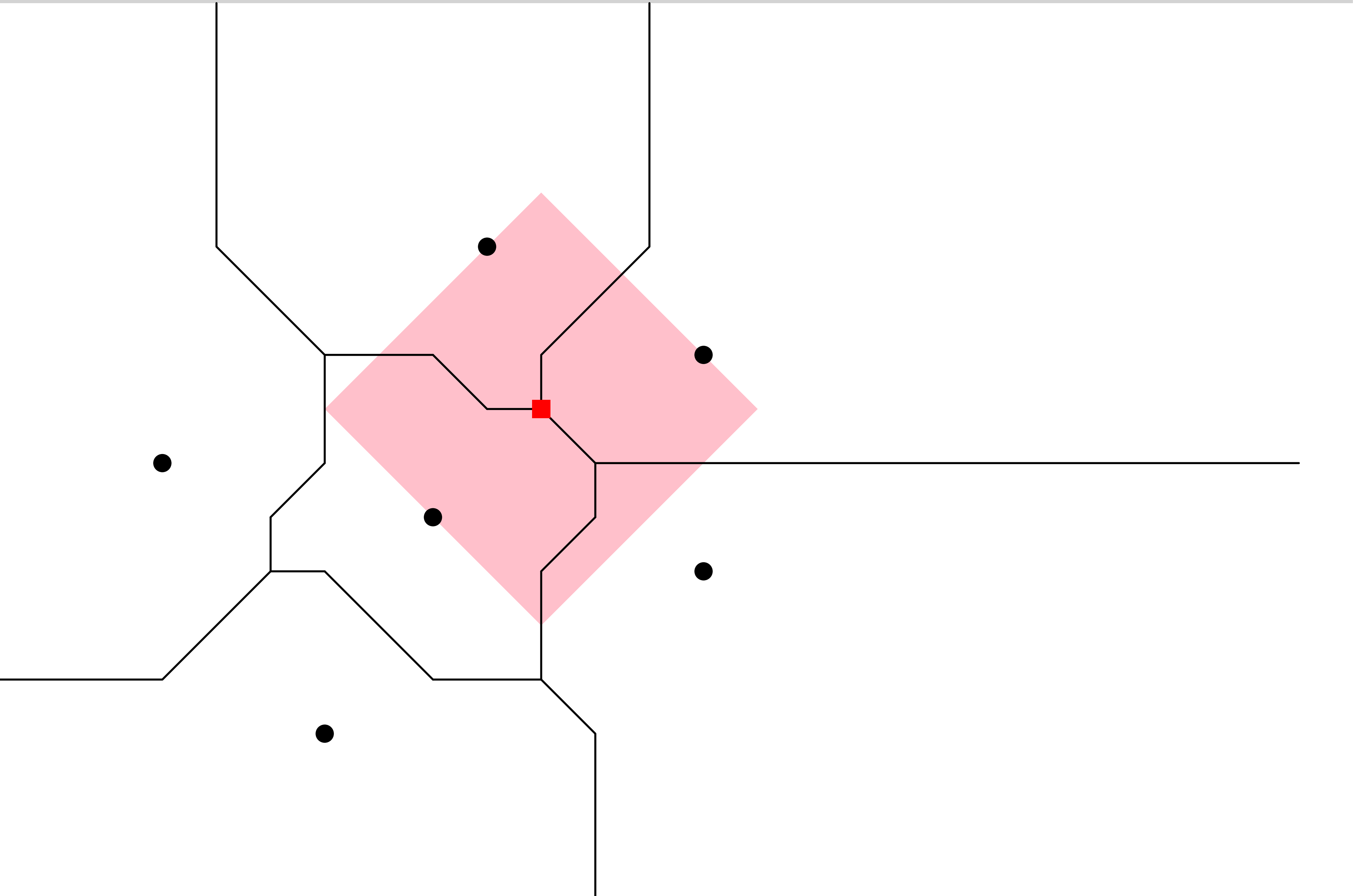
$\therefore$ (x,y) が等距離線上の点 $\Leftrightarrow$

$3<y$ のとき	$x=3/2$
$1\le y\le 3$ のとき	$x+y=5/2$
$y<1$ のとき	$x=7/2$

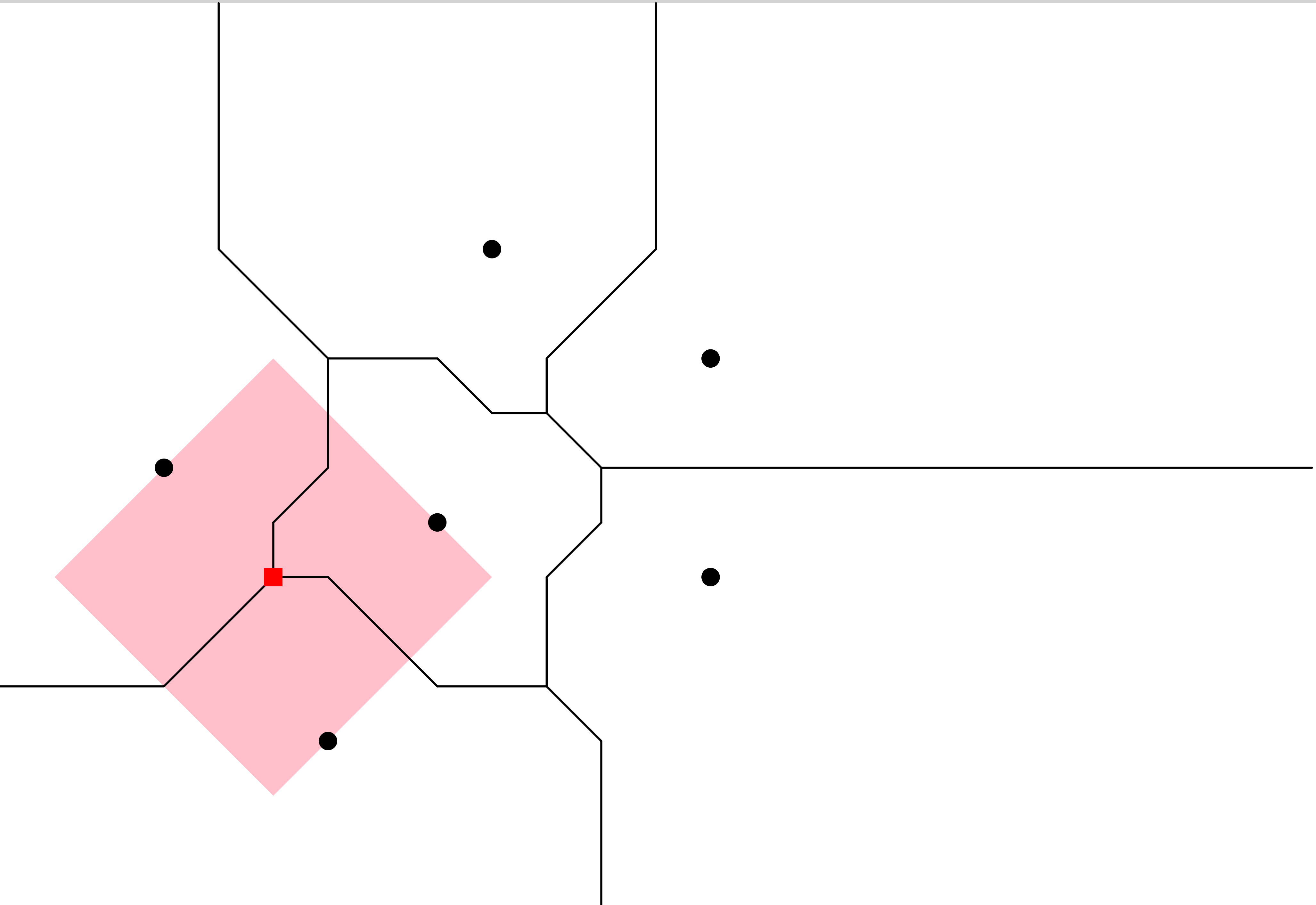
マンハッタン距離のボロノイ図



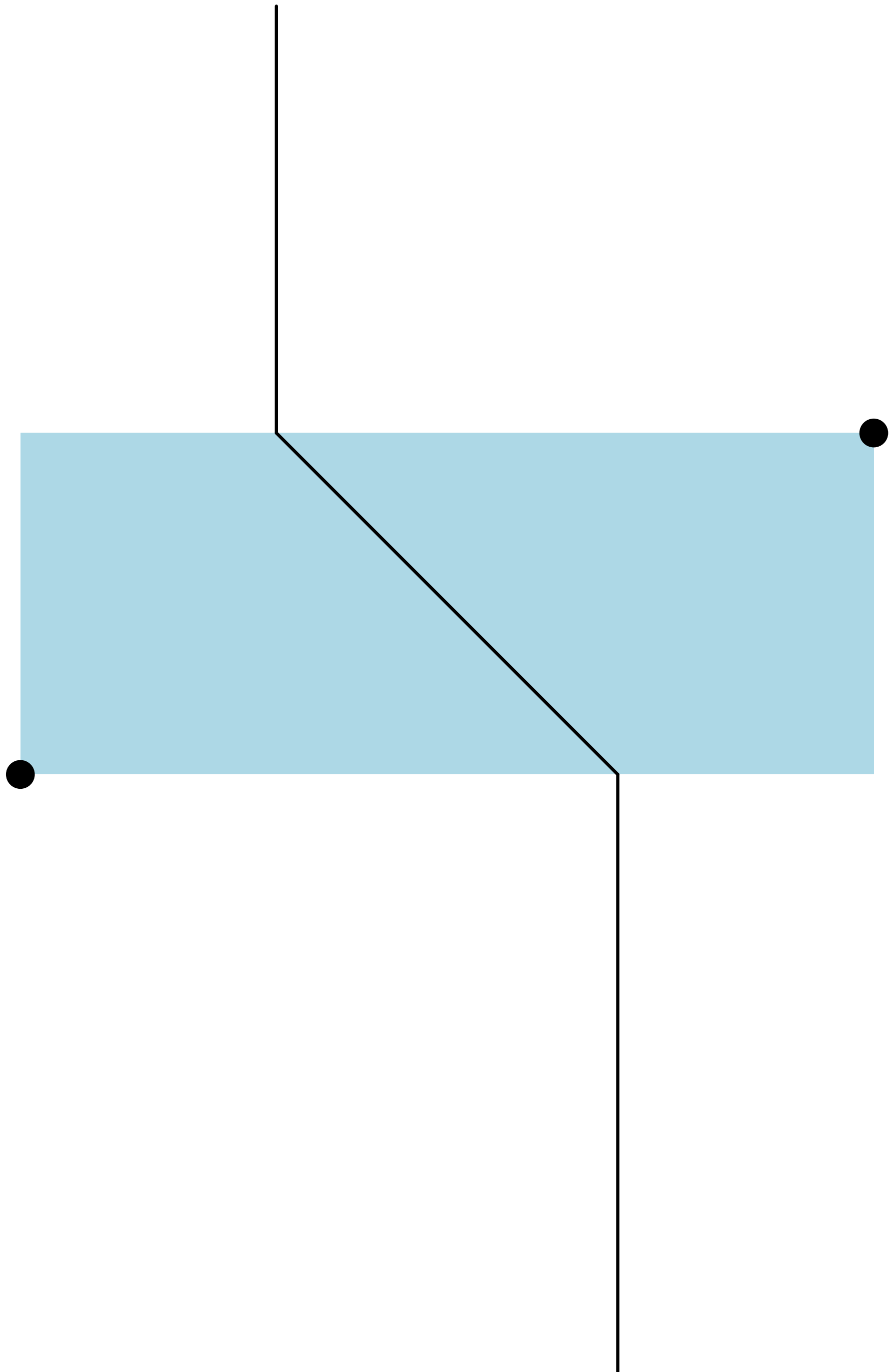
マンハッタン距離のボロノイ図



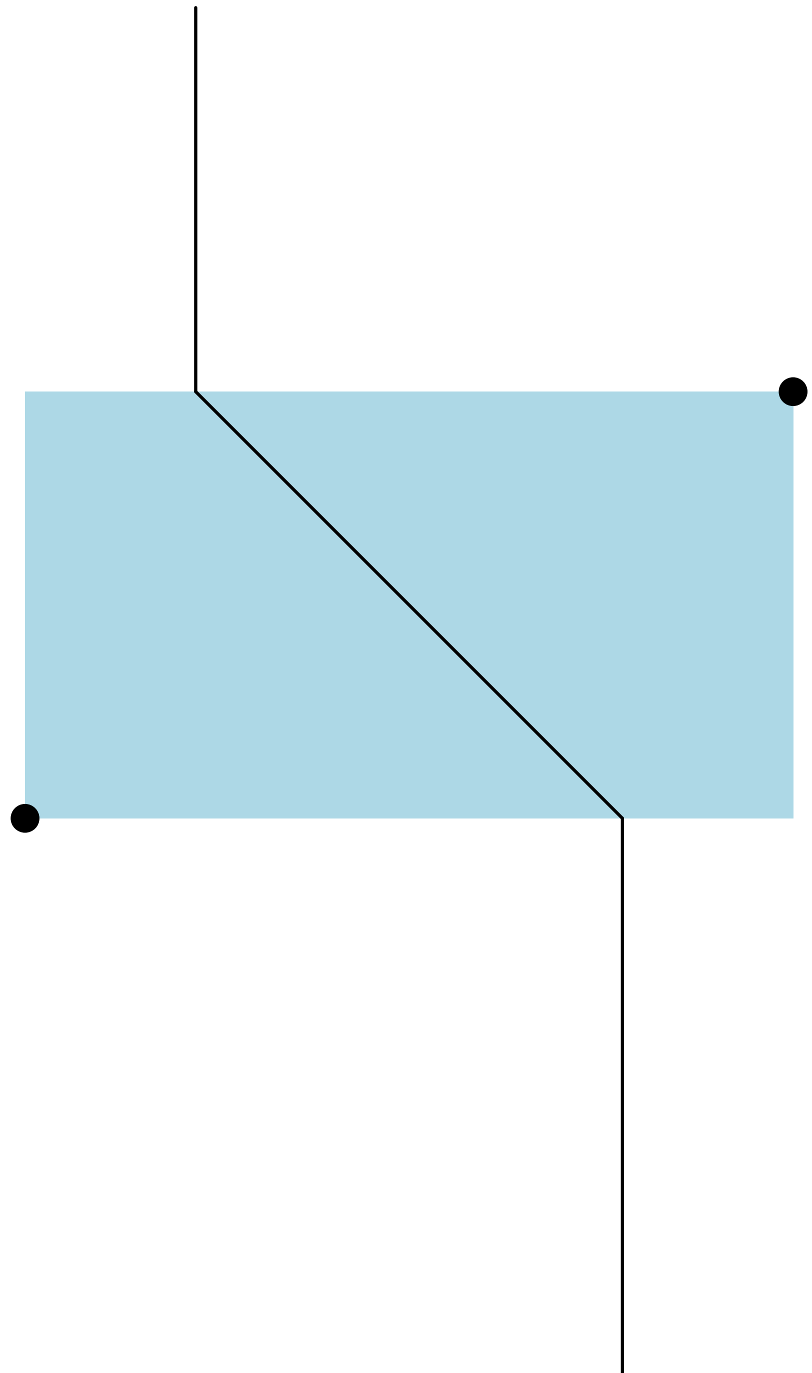
マンハッタン距離のボロノイ図



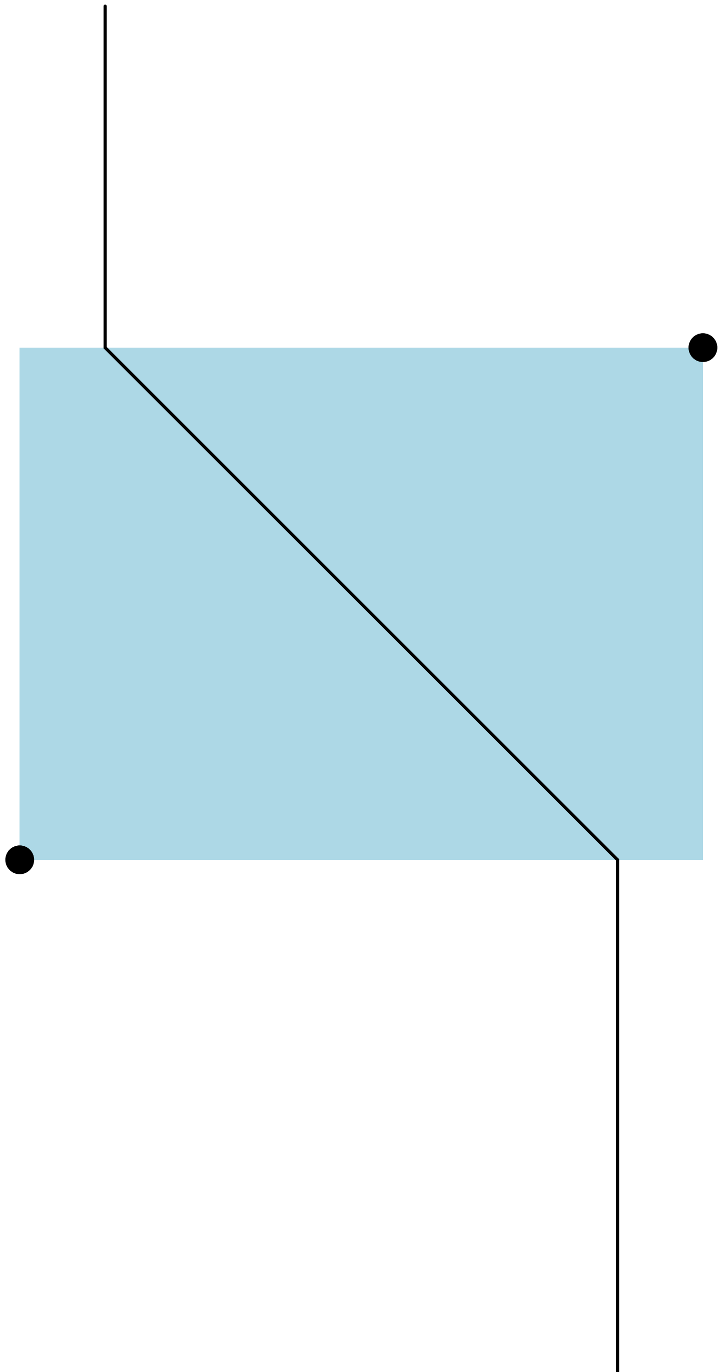
マンハッタン距離の等距離集合



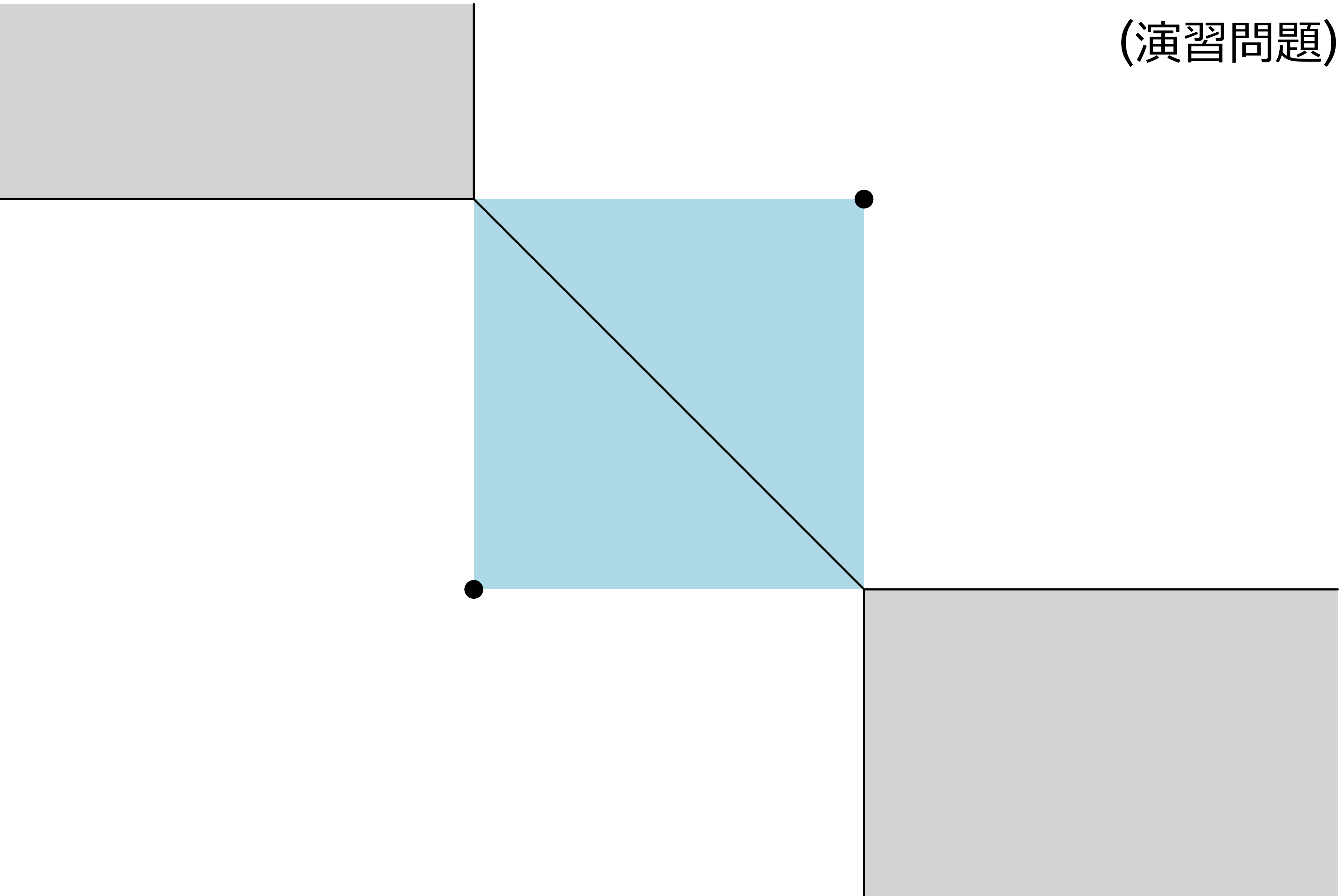
マンハッタン距離の等距離集合



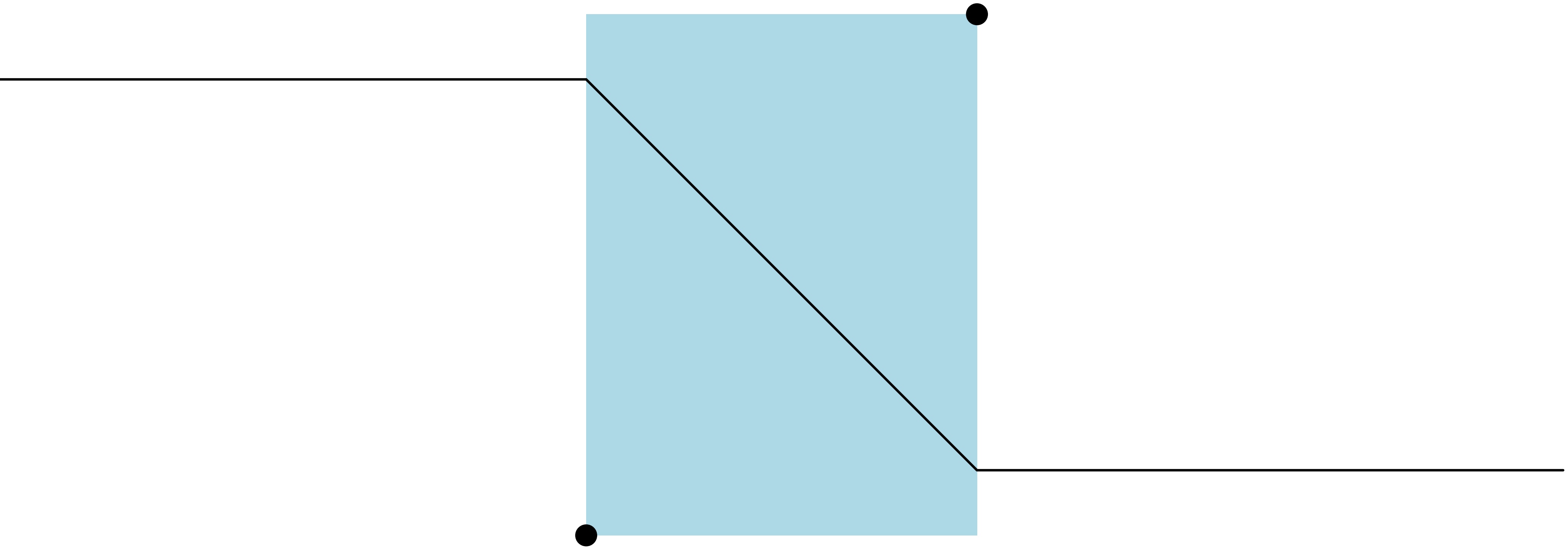
マンハッタン距離の等距離集合



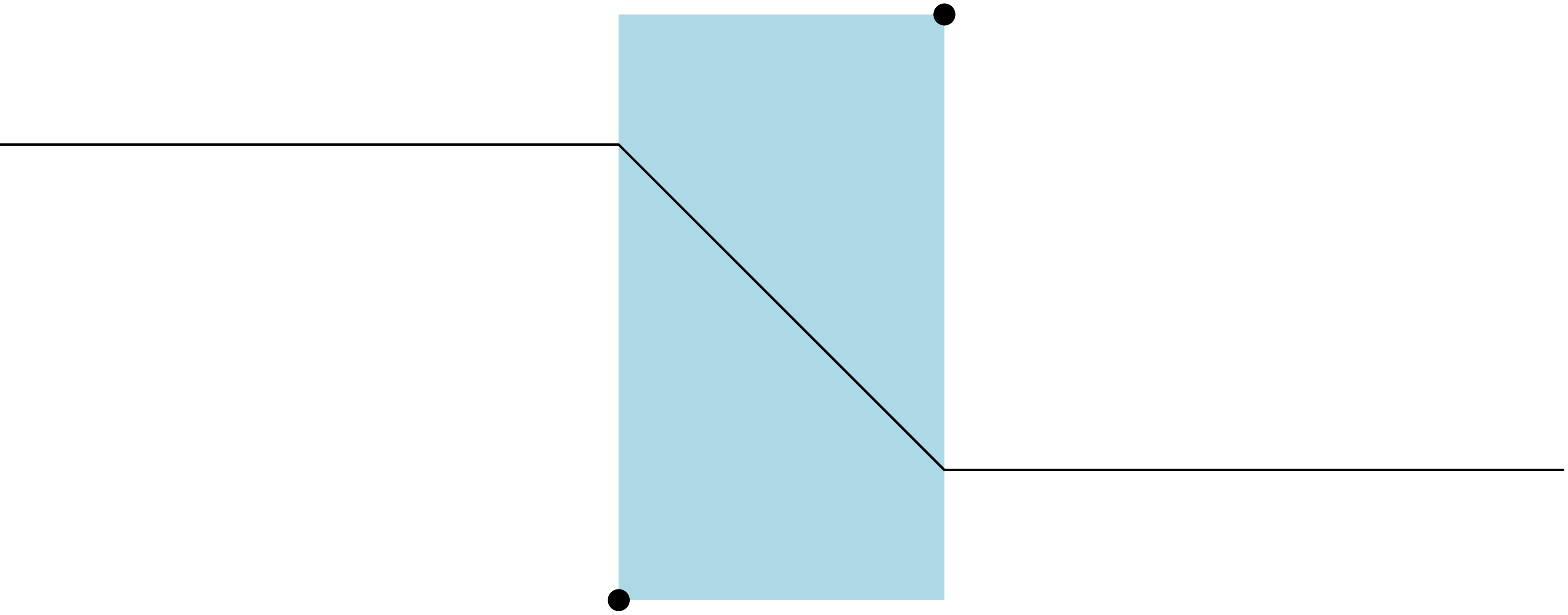
(演習問題)



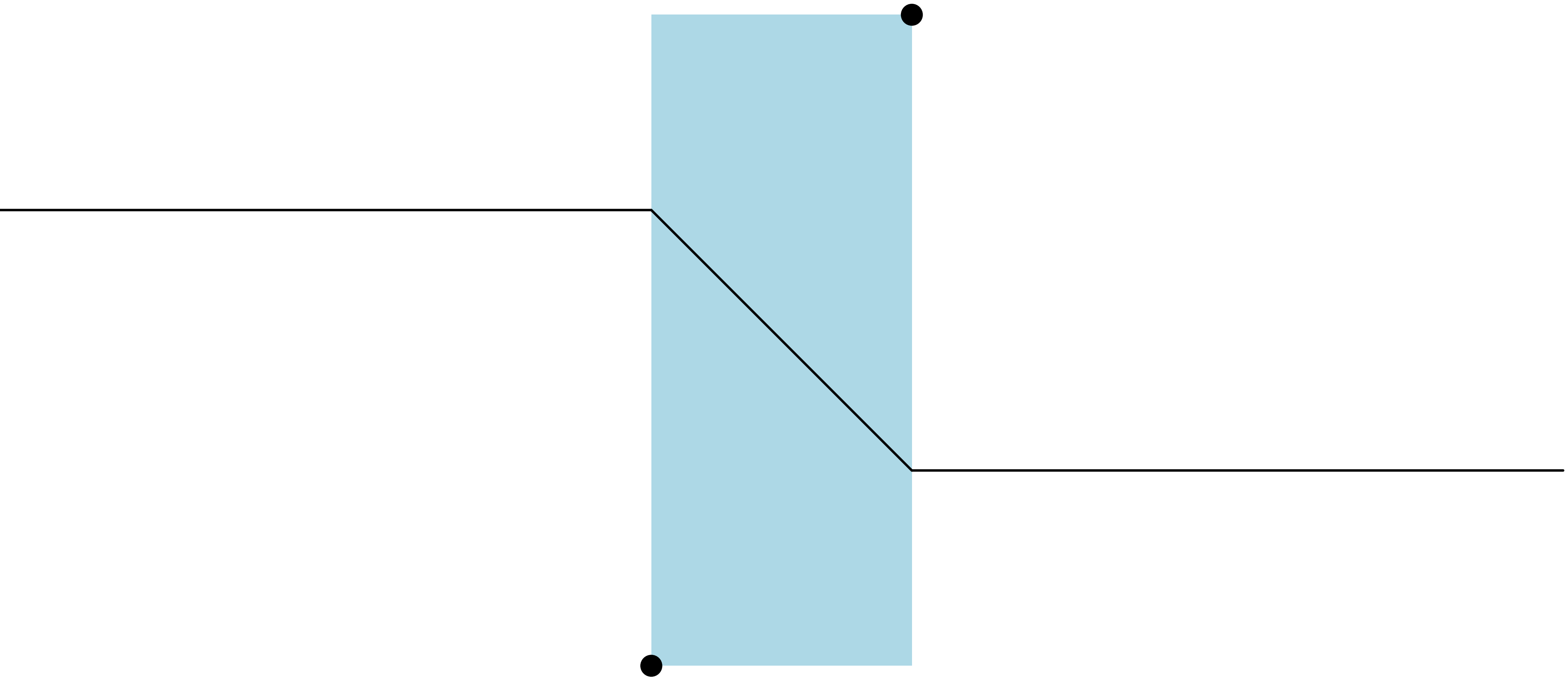
マンハッタン距離の等距離集合



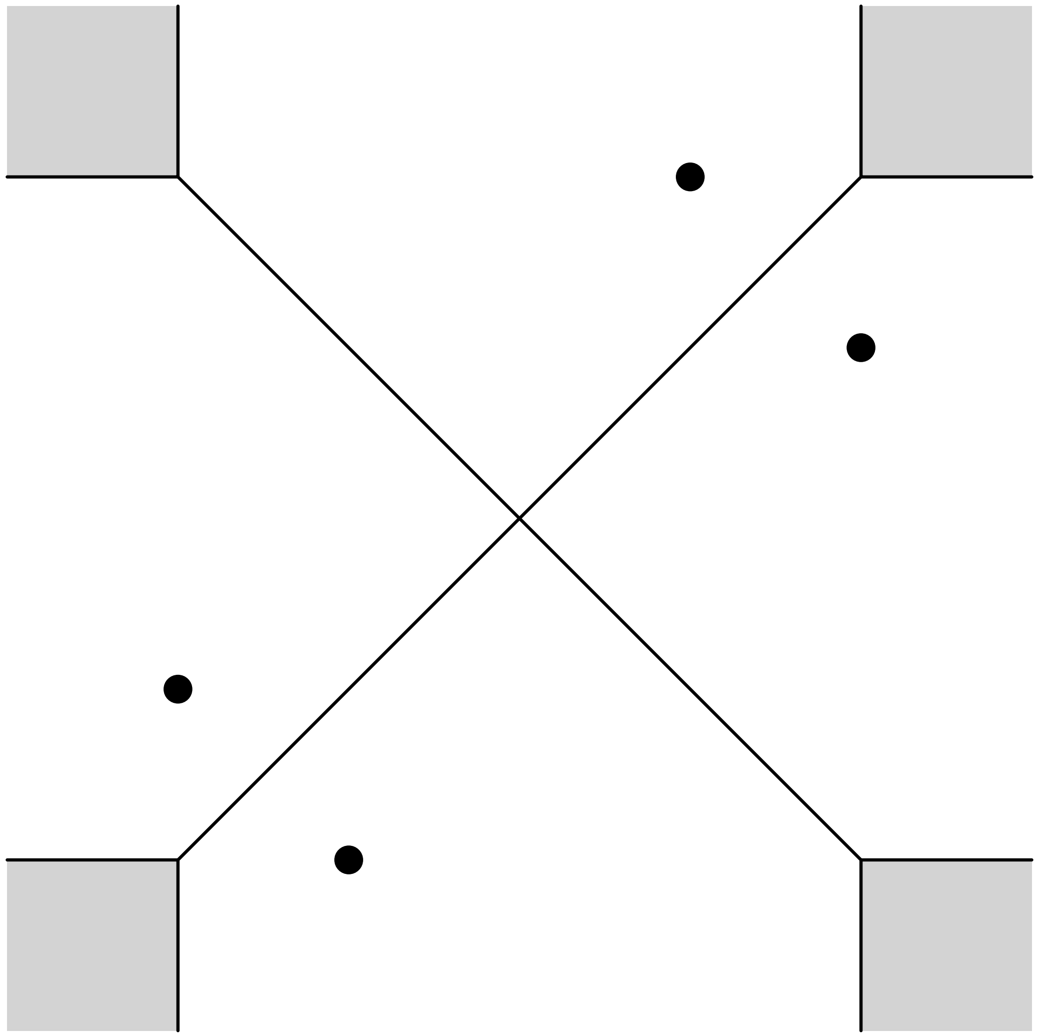
マンハッタン距離の等距離集合



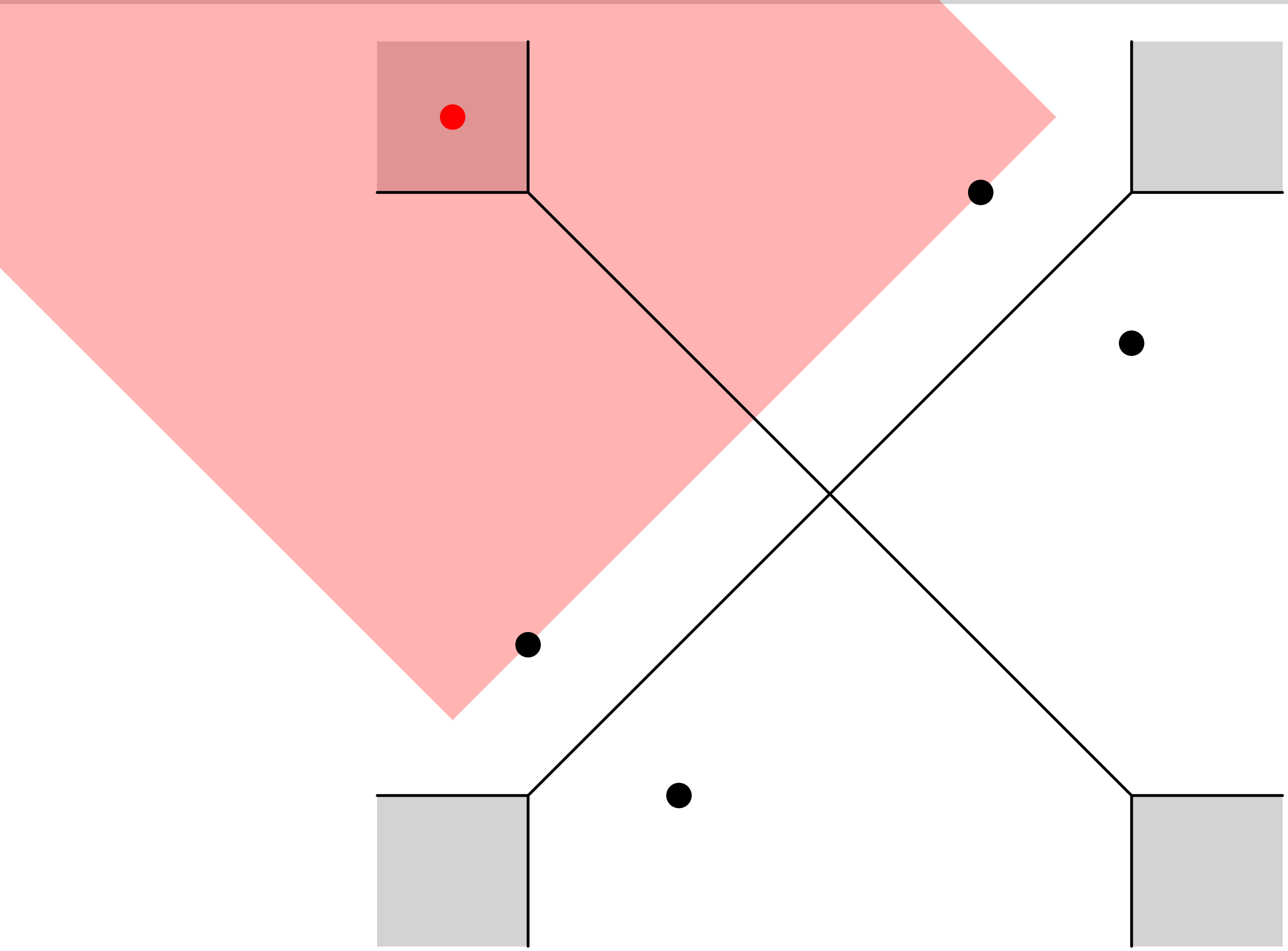
マンハッタン距離の等距離集合



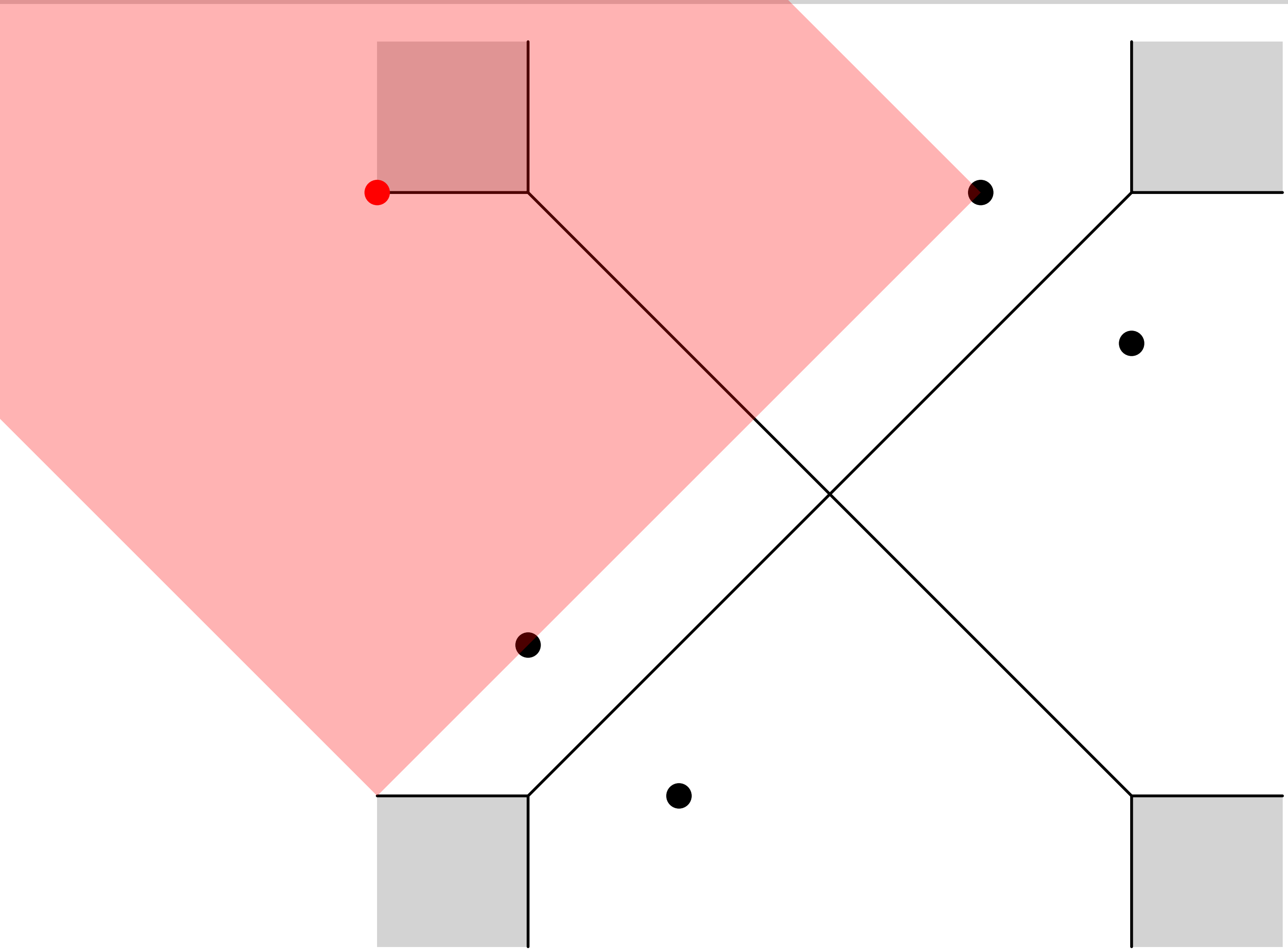
マンハッタン距離のボロノイ図 (2)



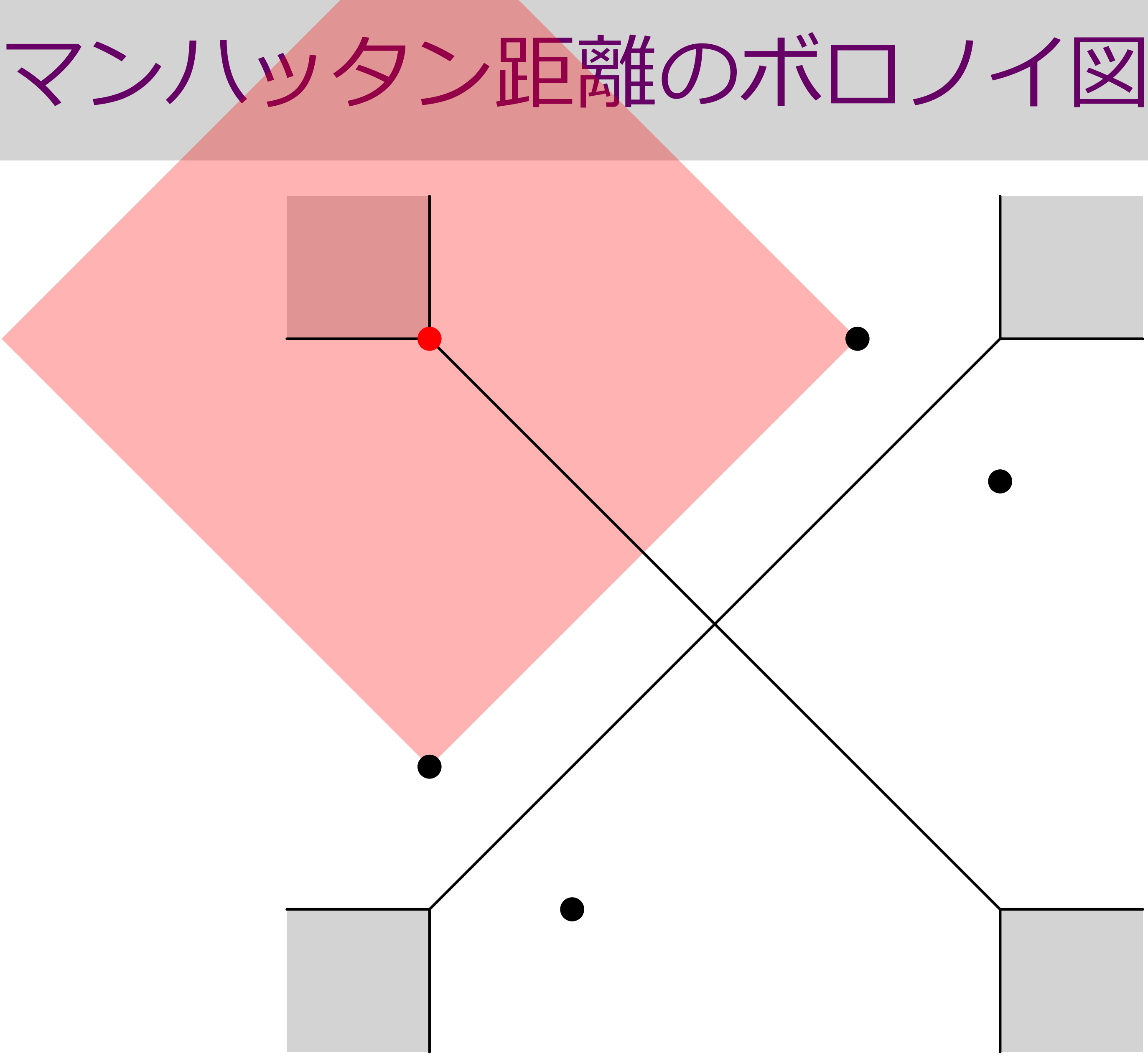
マンハッタン距離のボロノイ図 (2)



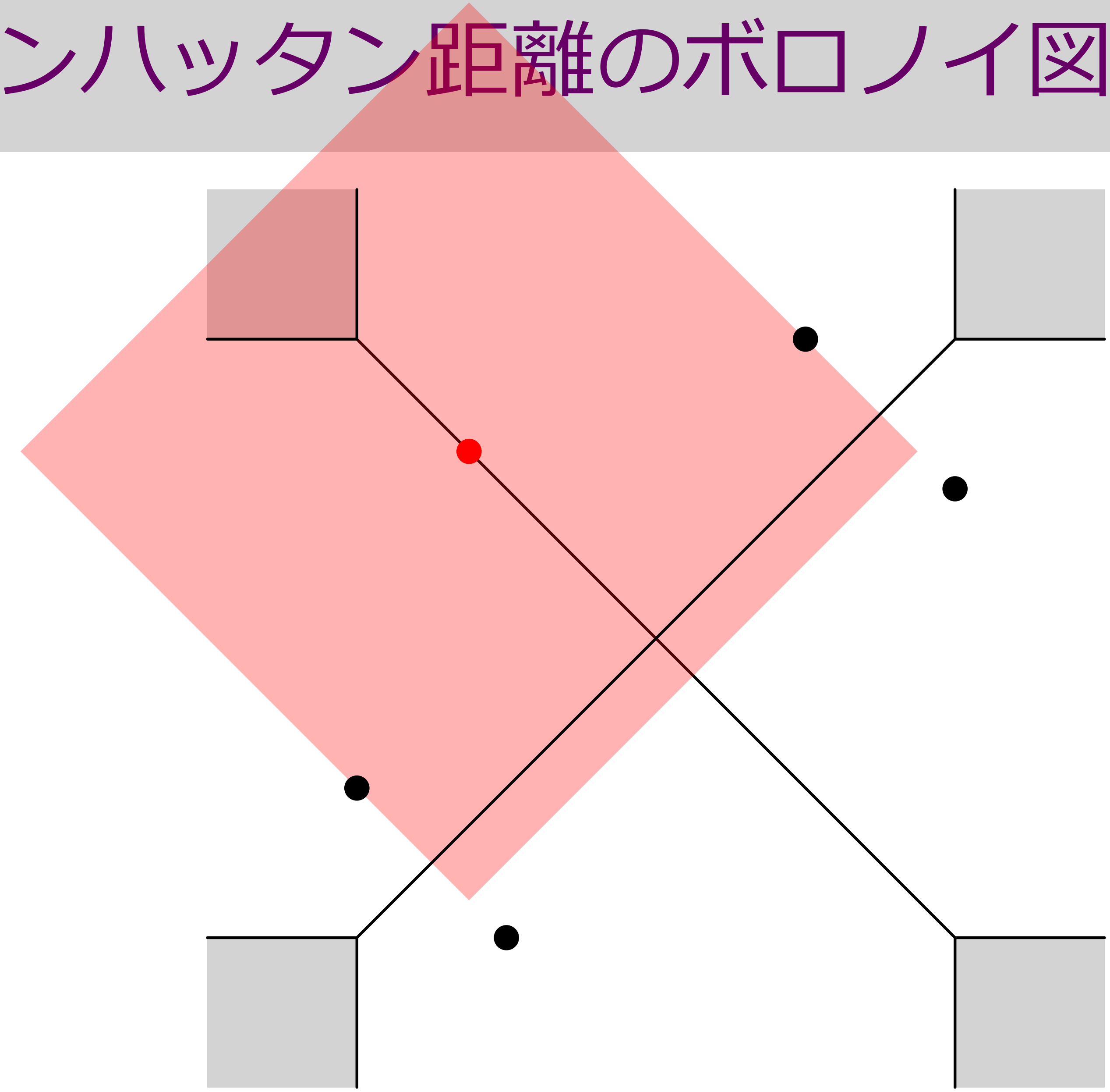
マンハッタン距離のボロノイ図 (2)



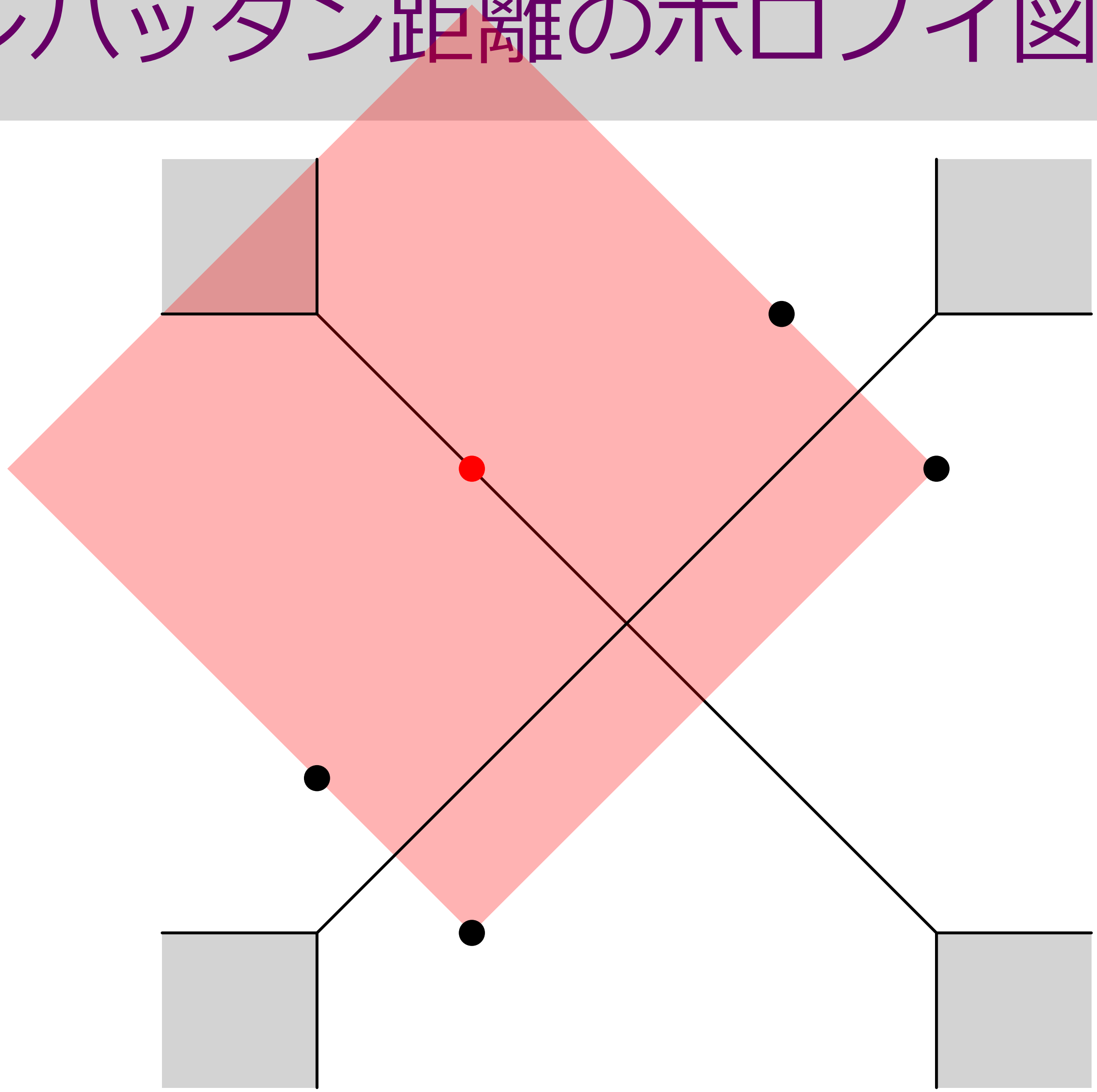
マンハッタン距離のボロノイ図 (2)



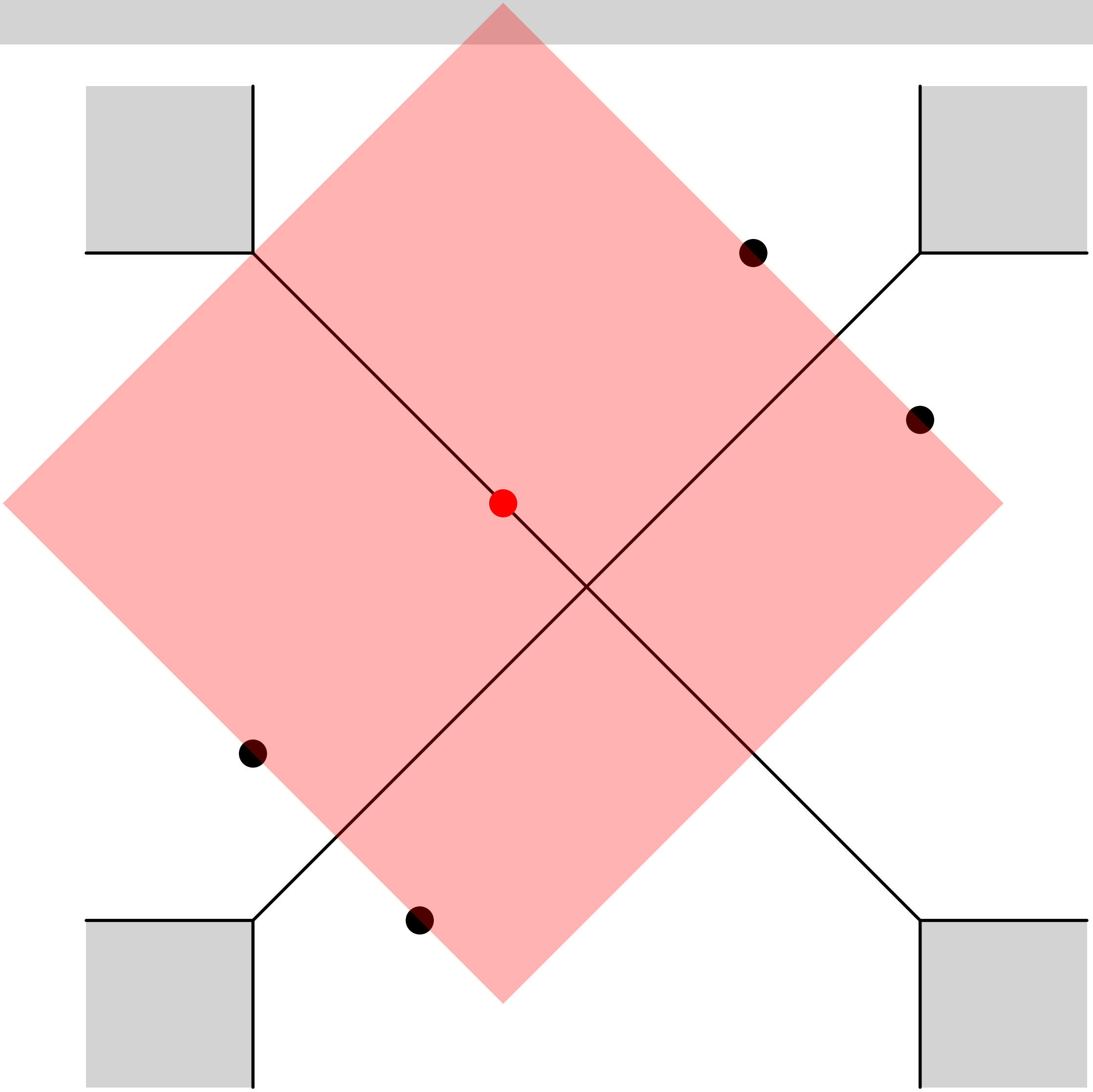
マンハッタン距離のボロノイ図 (2)



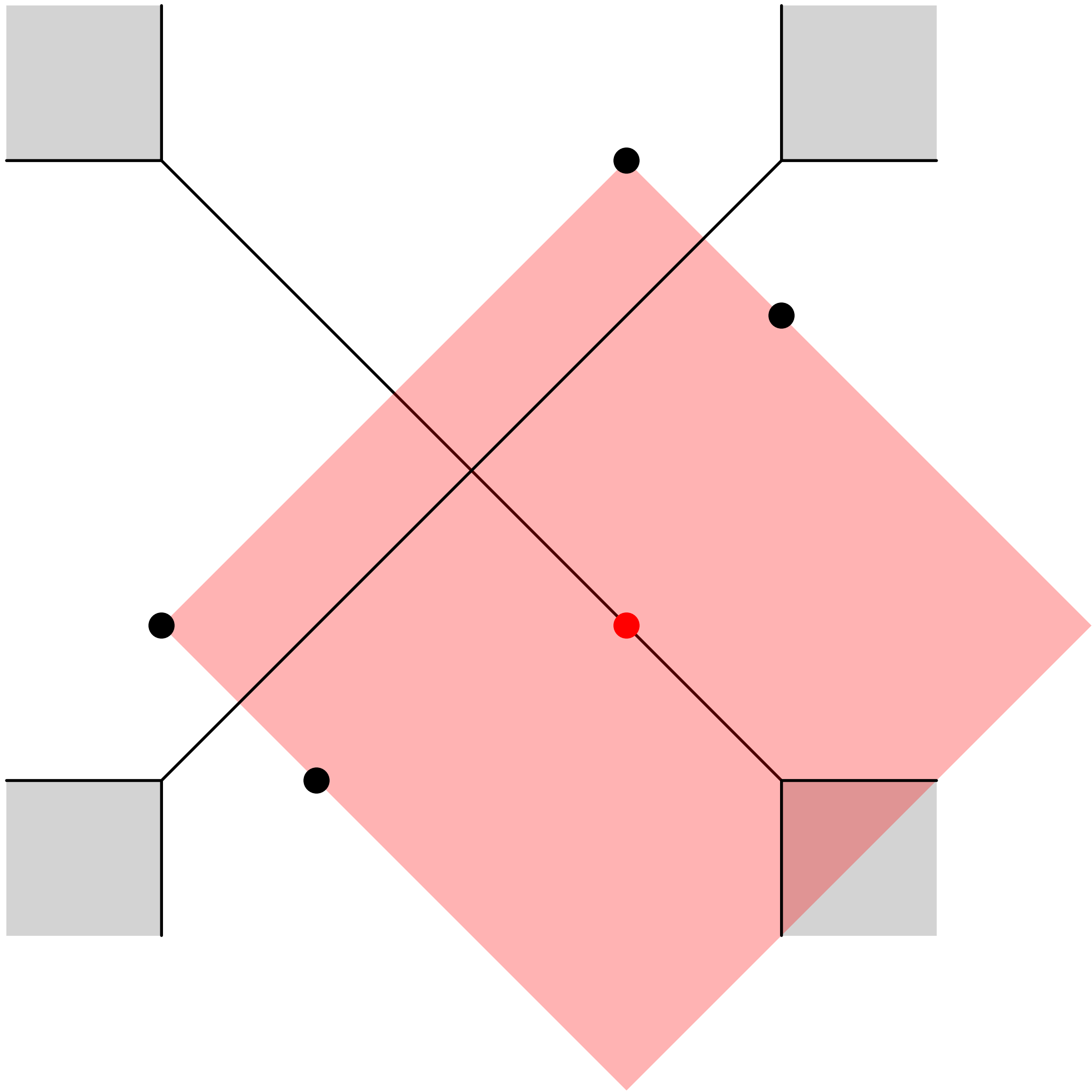
マンハッタン距離のボロノイ図 (2)



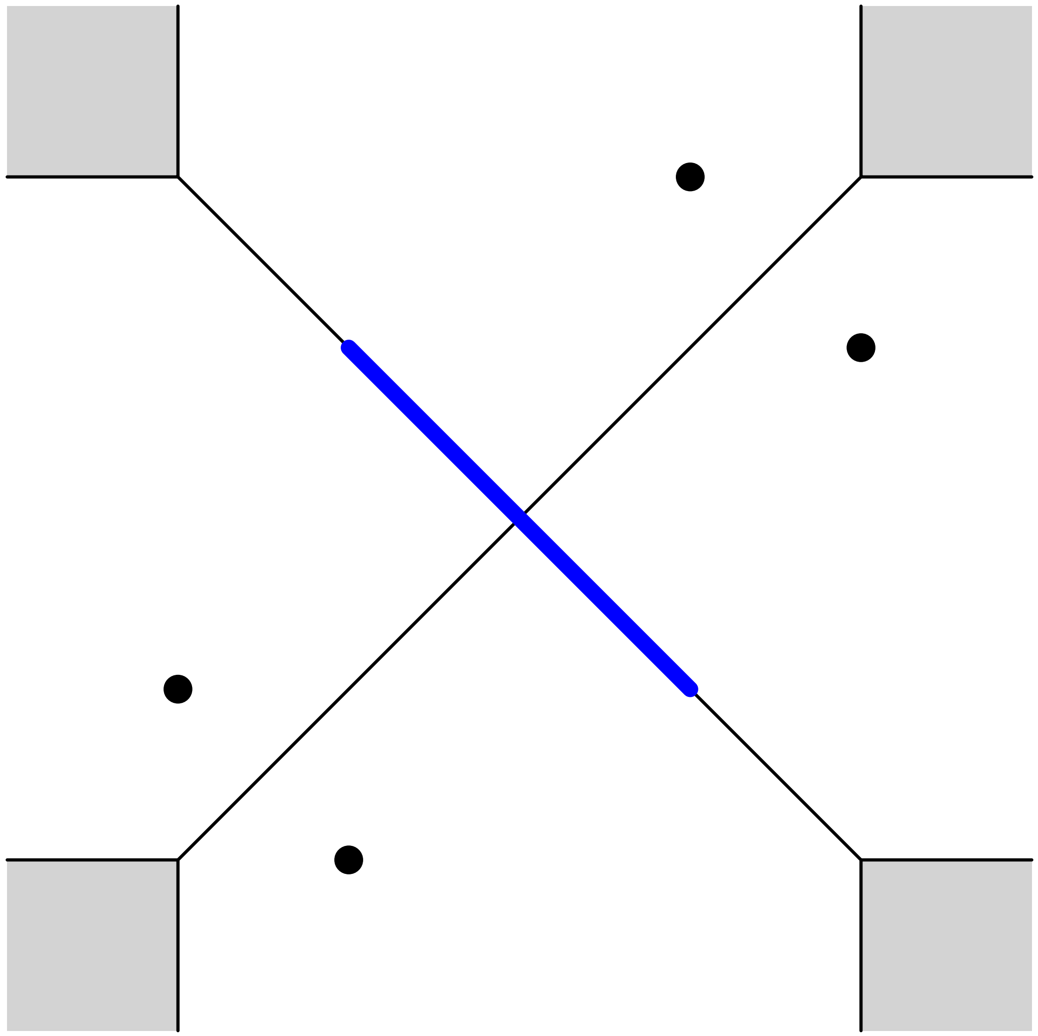
マンハッタン距離のボロノイ図 (2)



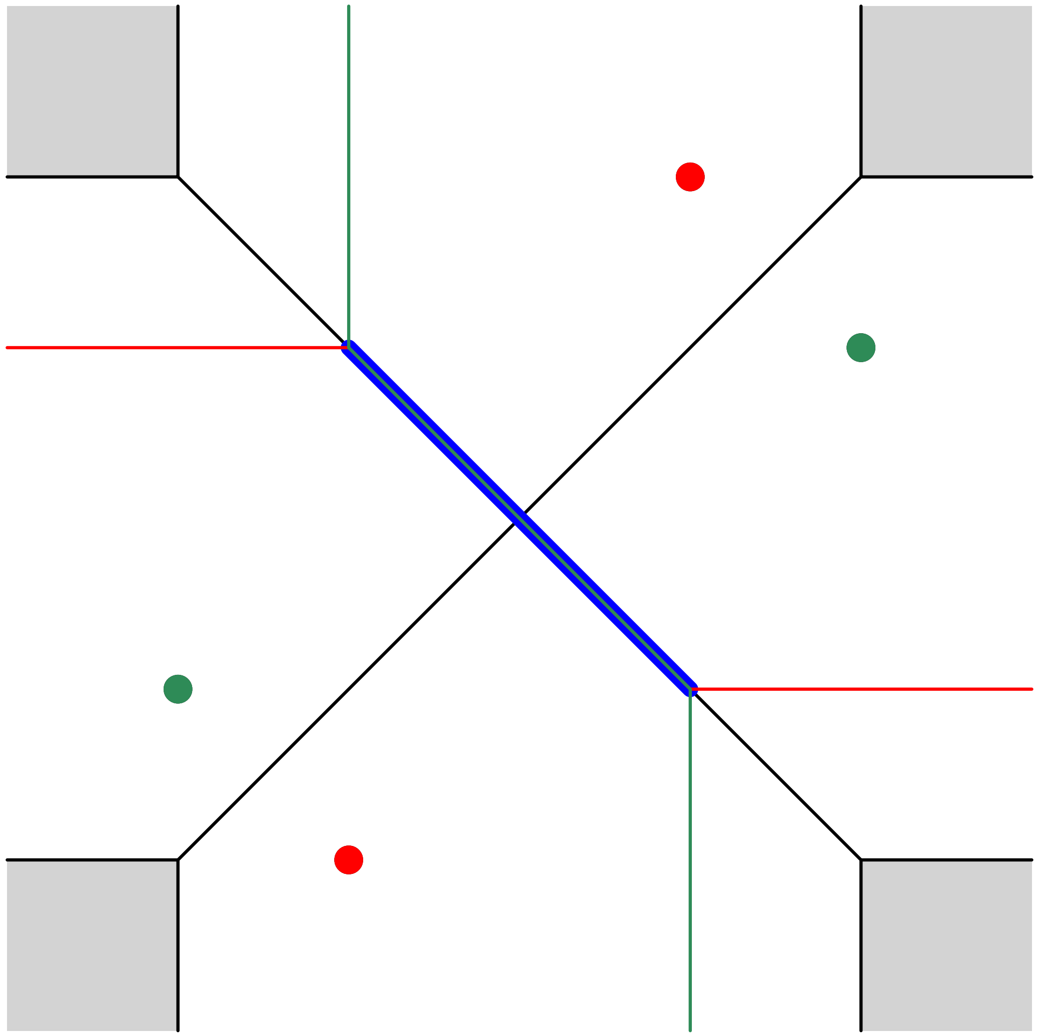
マンハッタン距離のボロノイ図 (2)



マンハッタン距離のボロノイ図 (2)



マンハッタン距離のボロノイ図 (2)



距離に関する注意

注意

- 単に「距離」と言ったら，普通は **ユークリッド距離** を表す
- 他の距離を考えるときは，それを明確に述べる

後半 (高次元) では次を扱う予定

- 距離とみなしてよいものは何か

  (距離の公理)

- 距離を表す図形 (円板) は何か

  (距離とノルムと凸集合の関係)

まとめ

今日の目標

ボロノイ図の基本的な性質を理解して，証明できる

- デローネ三角形分割との双対性
- ユークリッド距離 と マンハッタン距離

ボロノイ図が応用される分野 (Wikipedia による)

- 気象学
- 文化人類学
- 言語学
- 政治学
- 生態学
- 動物行動学
- 天体物理学
- 計算物理学
- 医学的診断
- 高分子物理学
- 物質科学
- 建築
- 都市計画
- コンピュータ・グラフィックス
- ユーザ・インタフェース
- ...