

離散数理工学 (2025 年度後学期)

第3回

低次元 (3) : 近接グラフと交差グラフ

岡本 吉央 (電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 11 月 4 日

最終更新 : 2025 年 11 月 3 日 20:44

今日の目標

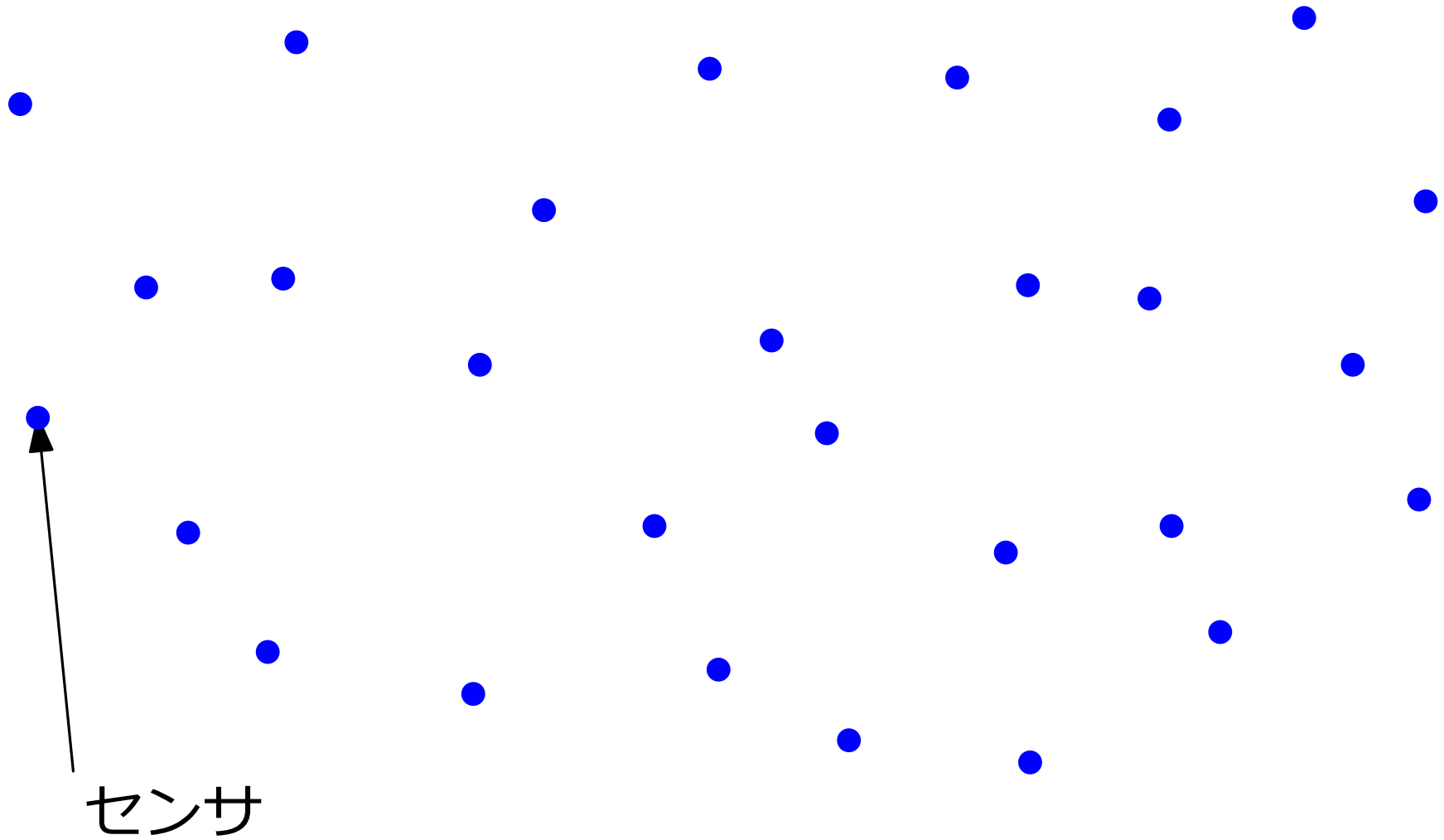
点集合から得られるグラフを使って問題解決ができる

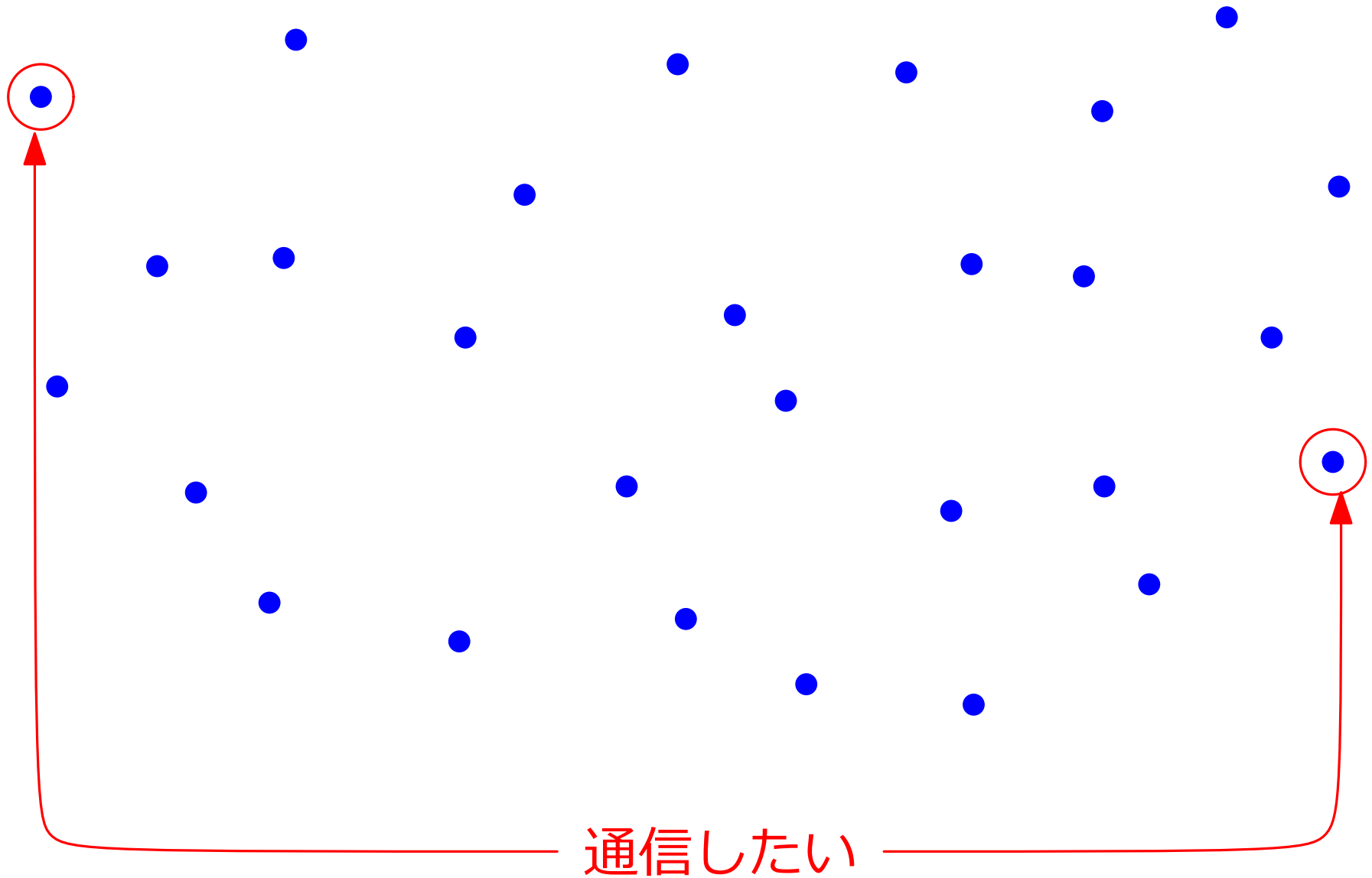
- デローネ三角形分割
- 単位円の交差グラフ

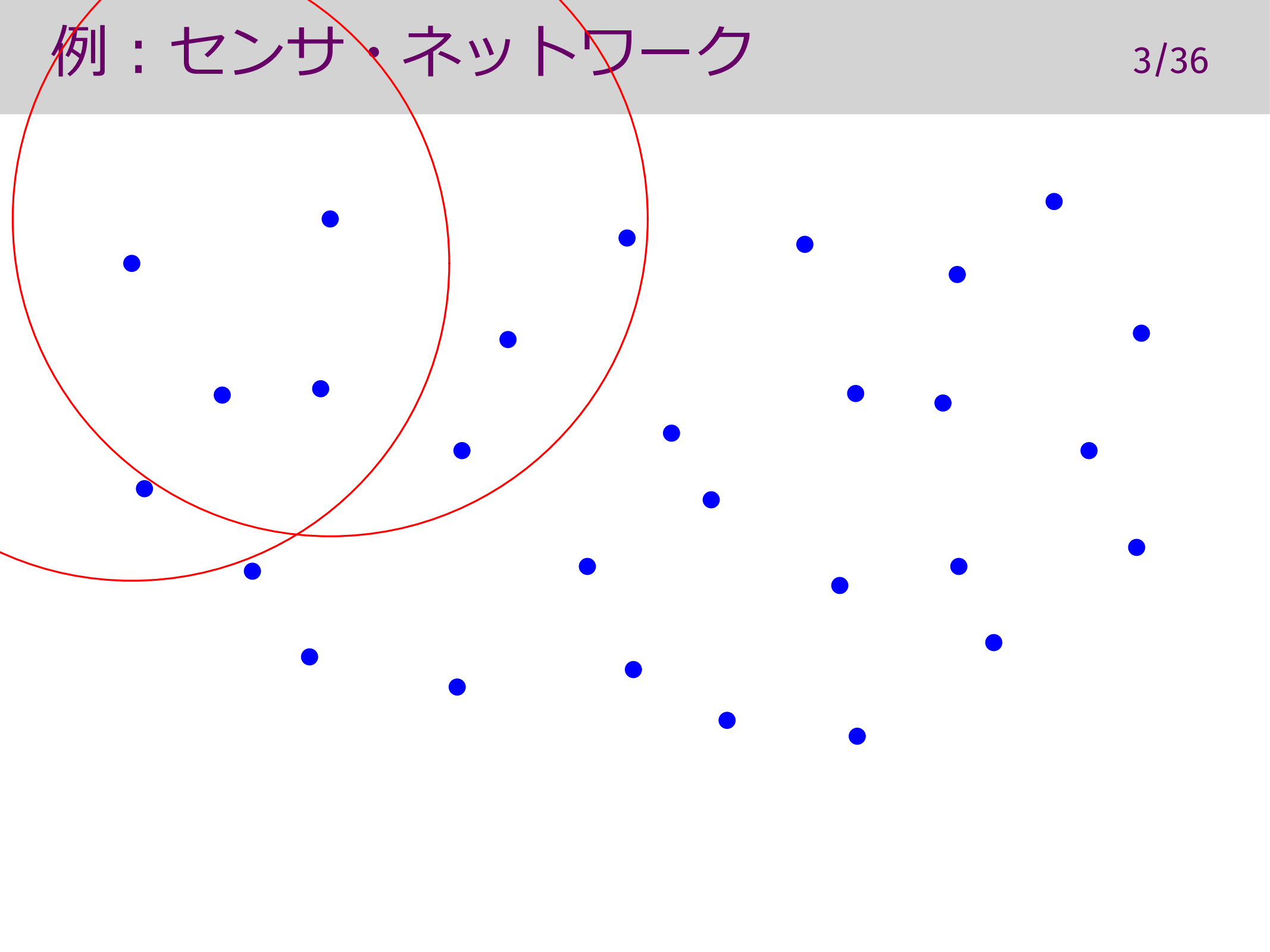
近接グラフ同士の間係を証明できる

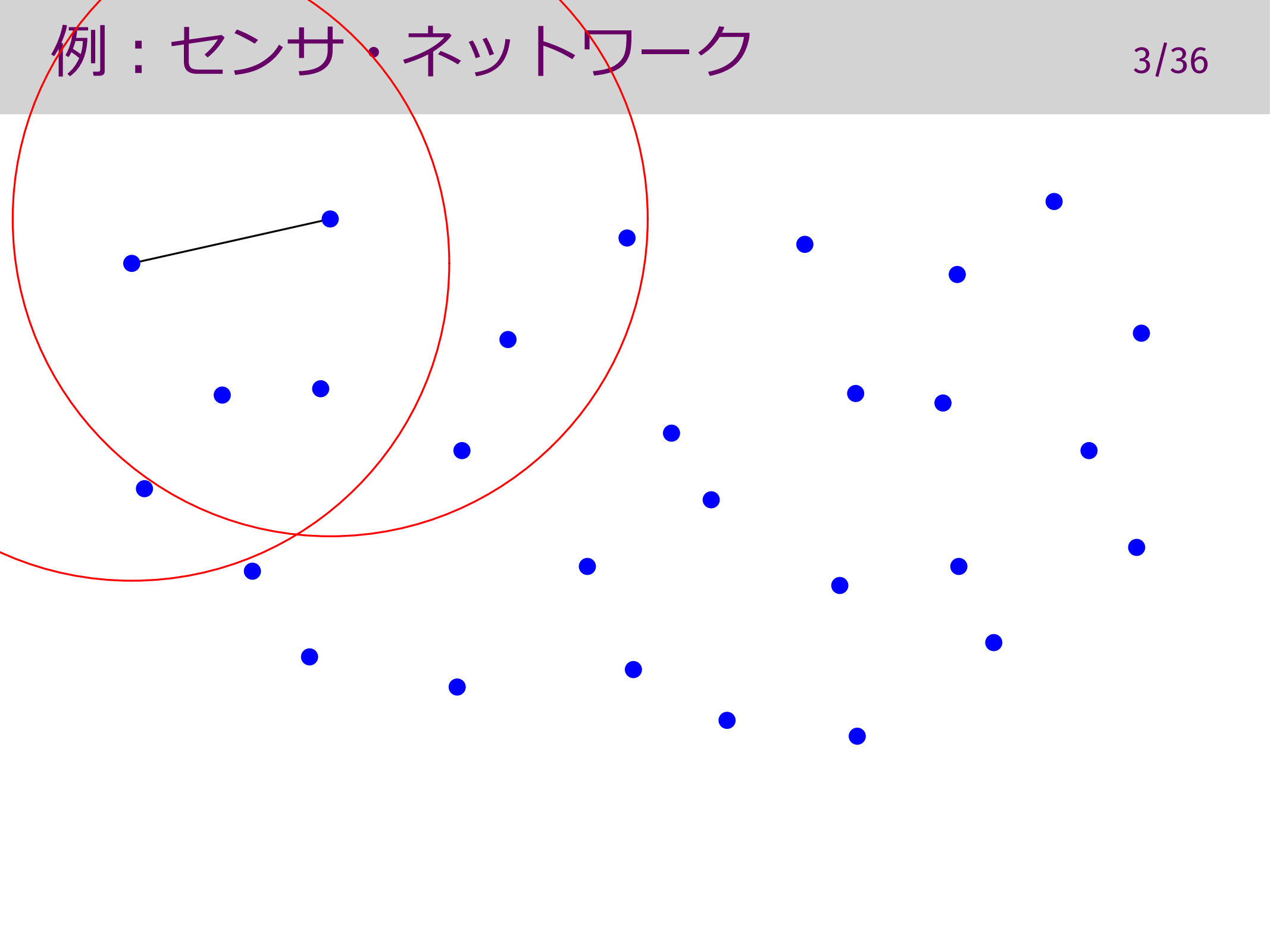
教訓

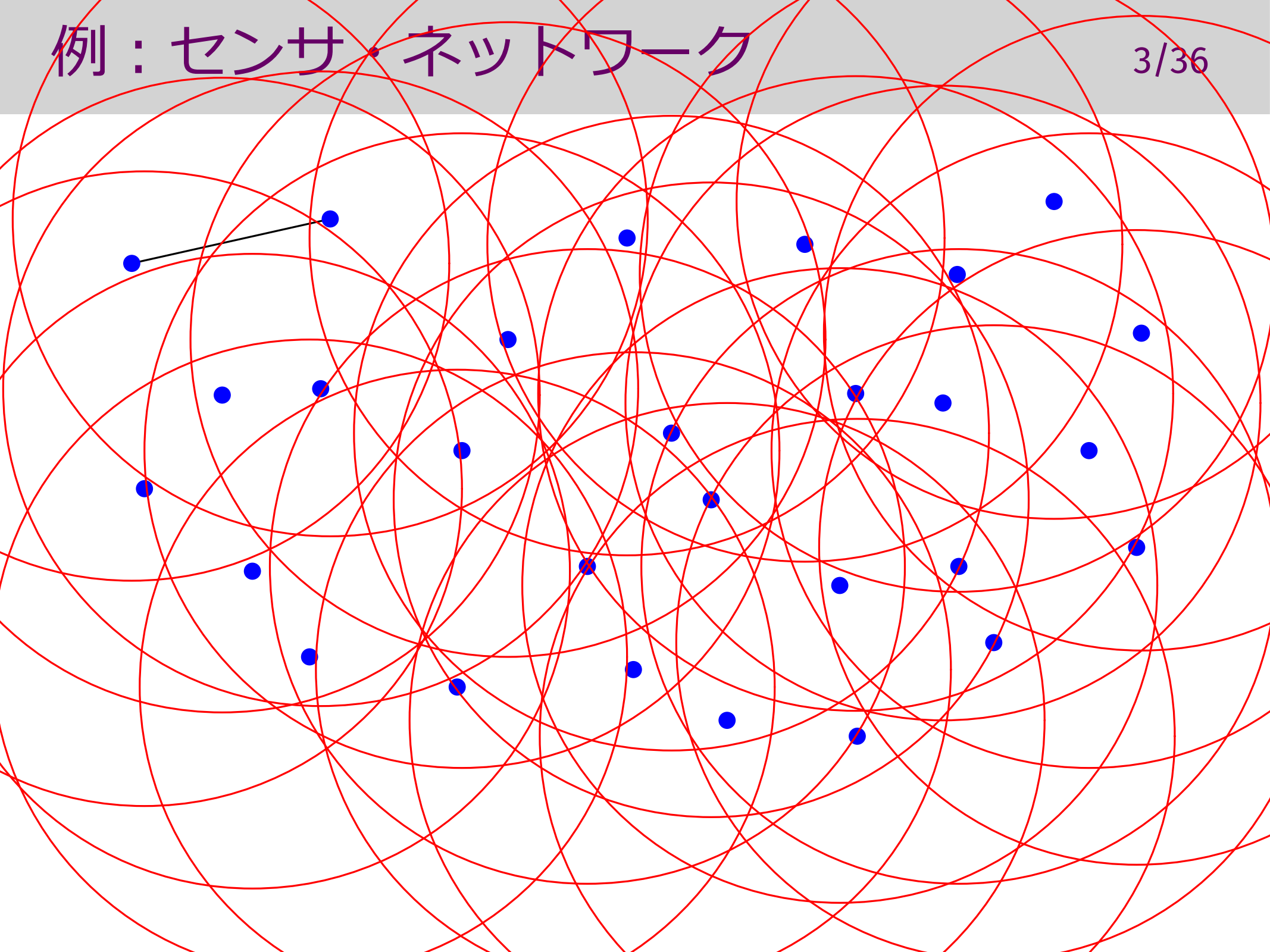
計算幾何においても、グラフは重要な役割を果たす

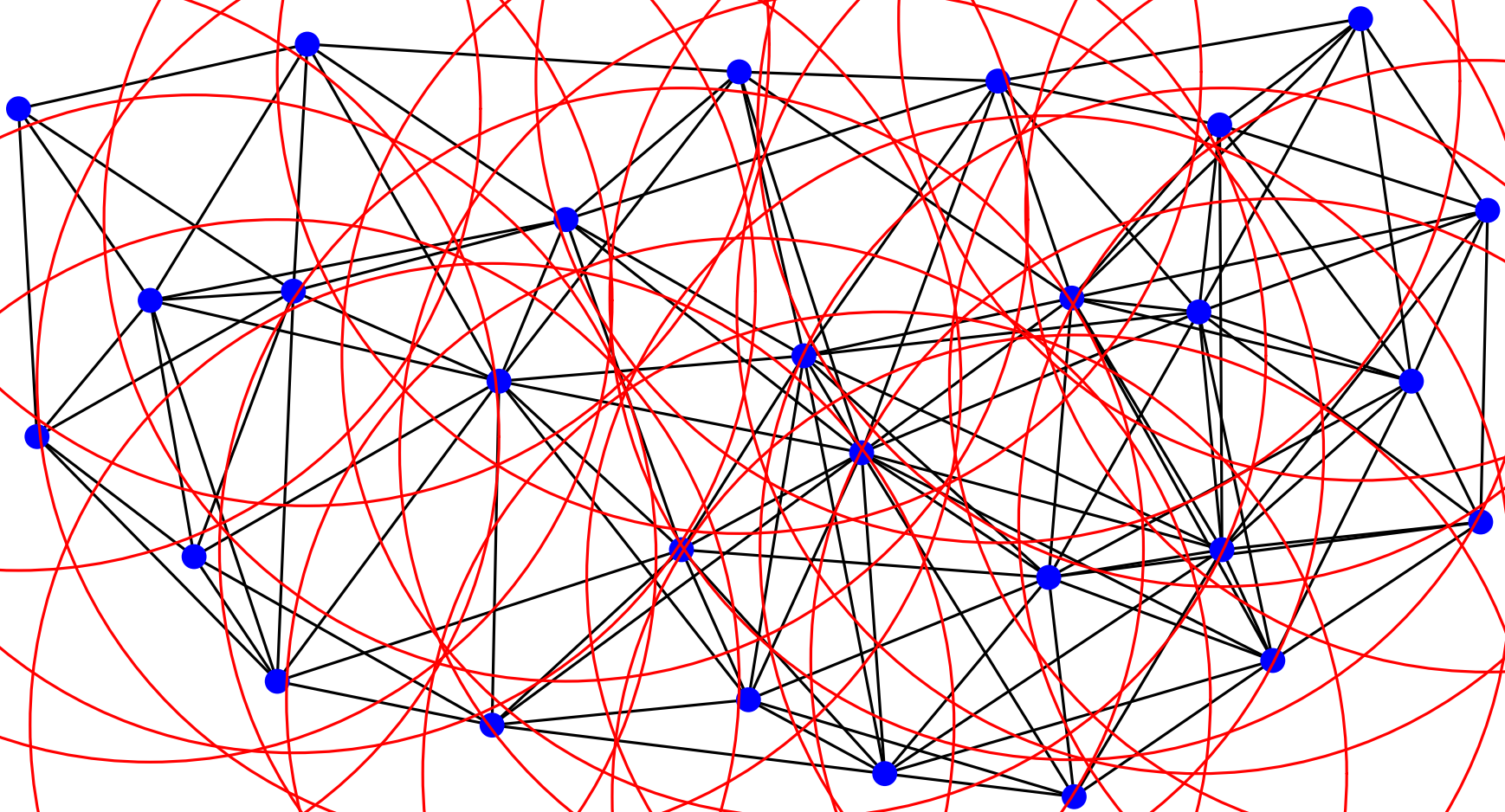


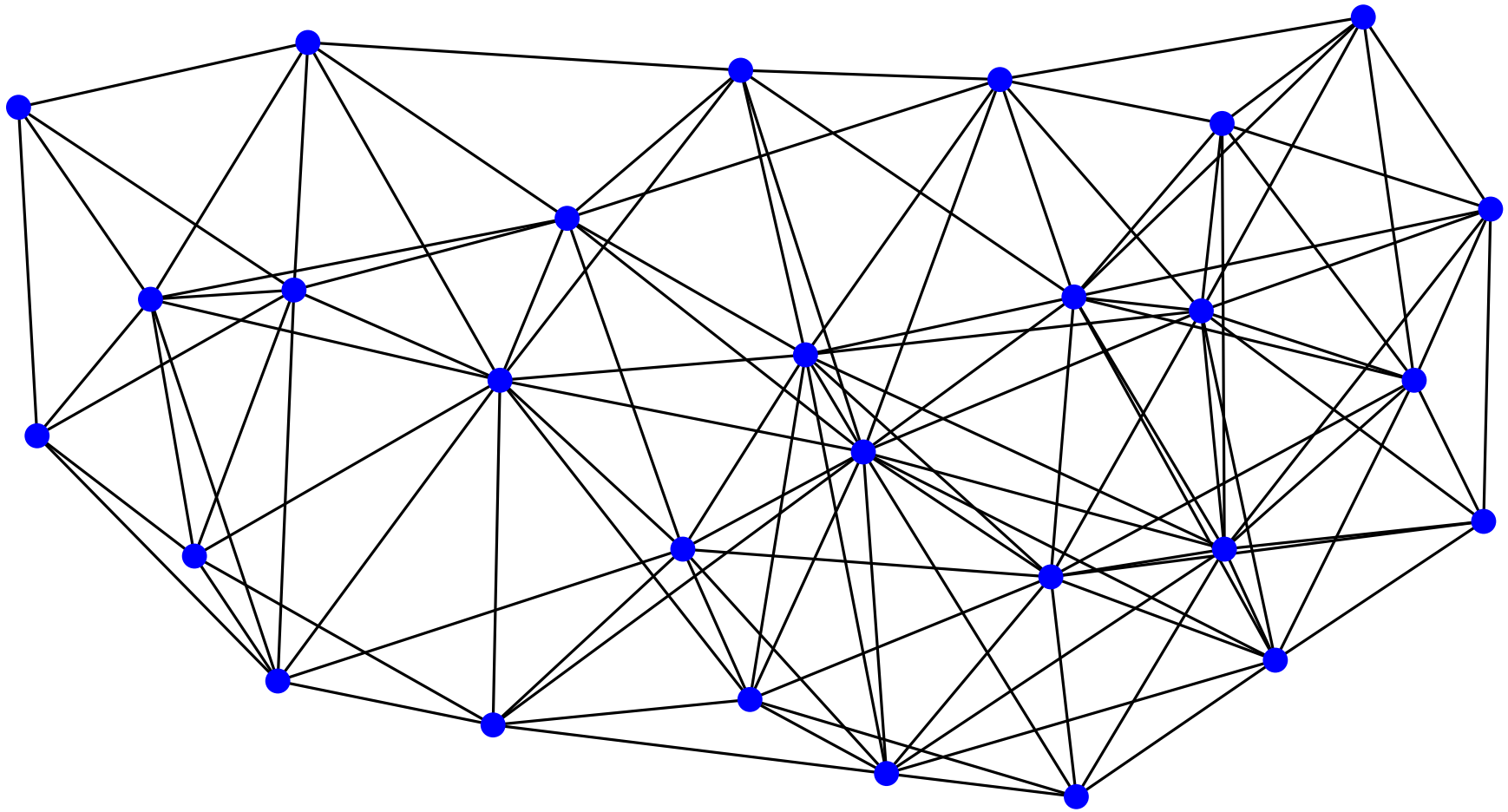


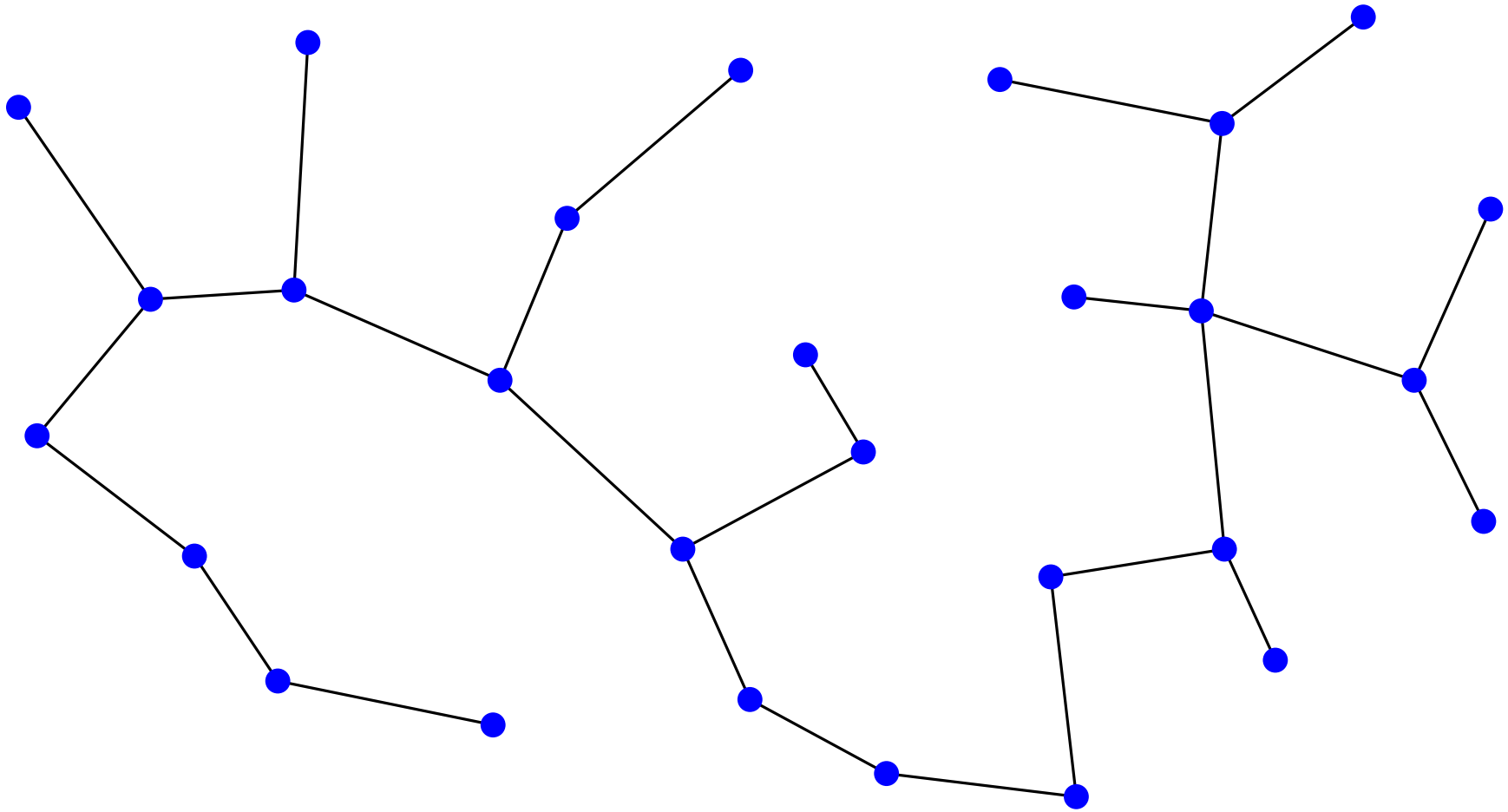


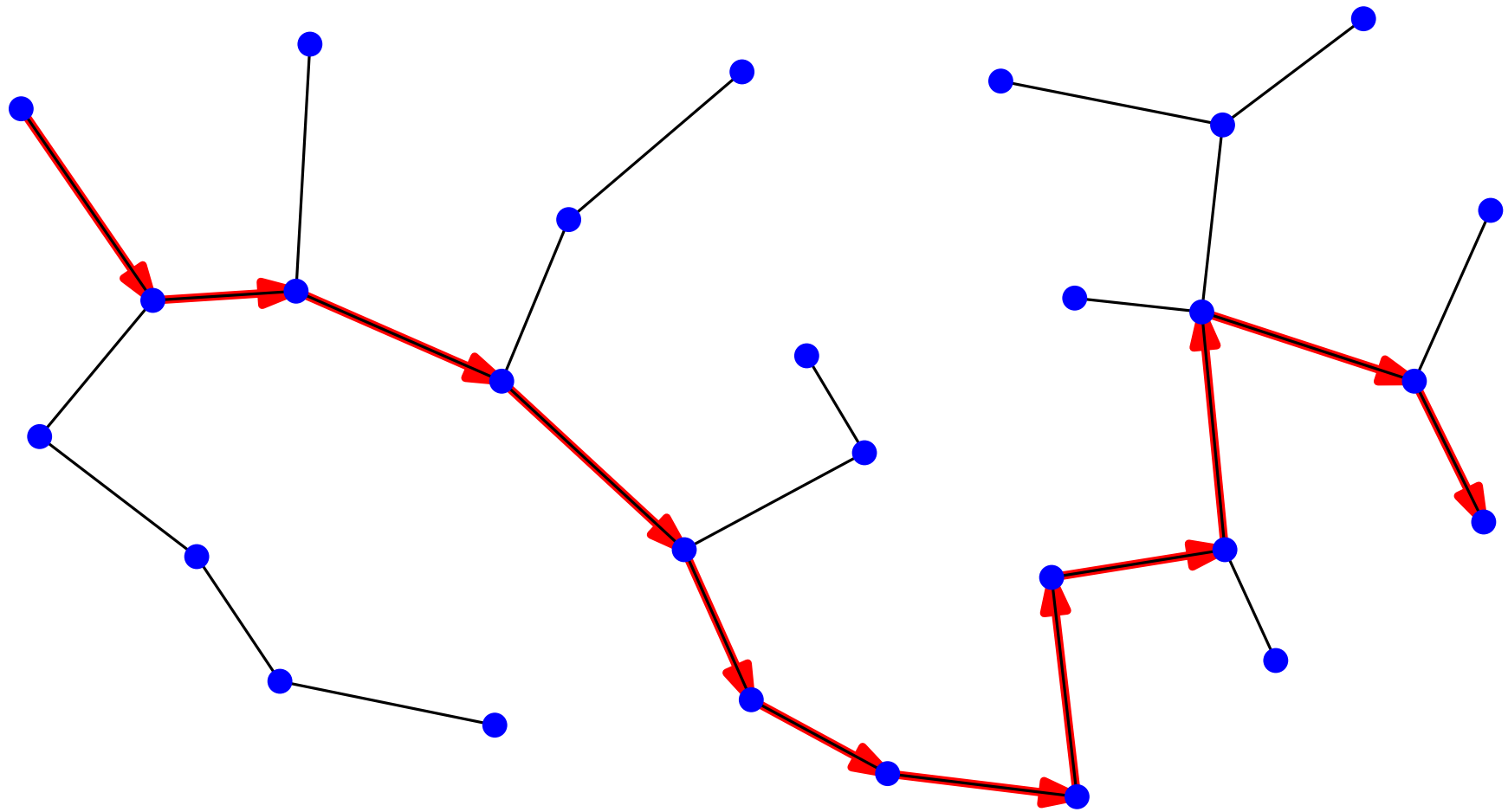












1. **グラフと幾何グラフの用語**
2. 単位円グラフとデローネ三角形分割
3. デローネ三角形分割と最小全域木
4. 他の近接グラフ

定義：無向グラフ

無向グラフ とは, 次のような対 $G = (V, E)$ のこと

- V は集合
- E は V の要素数 2 の部分集合の集合

例

- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$

定義：無向グラフ

無向グラフ とは, 次のような対 $G = (V, E)$ のこと

- V は集合
- E は V の要素数 2 の部分集合の集合

例

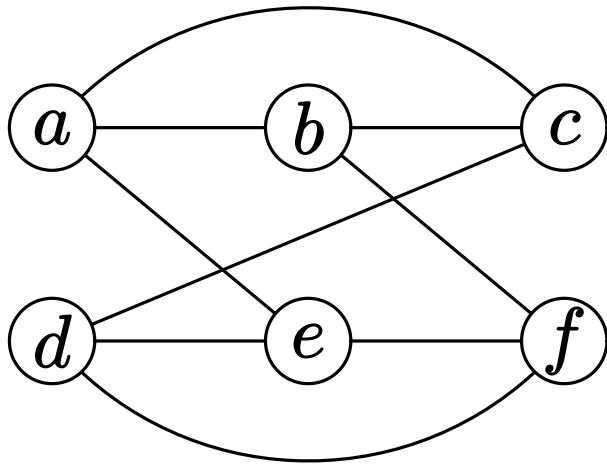
- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$

用語：無向グラフ $G = (V, E)$ において

- V は G の **頂点集合**
- V の要素は G の **頂点**
- E は G の **辺集合**
- E の要素は G の **辺**

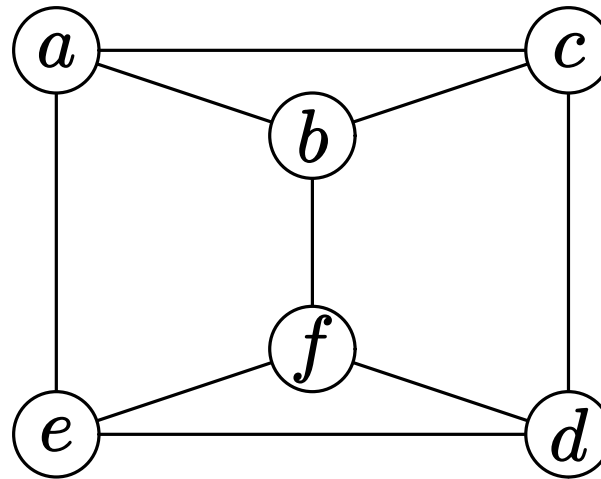
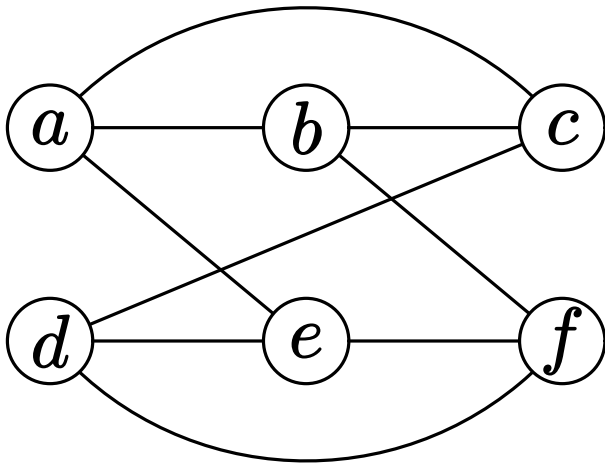
例

- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$



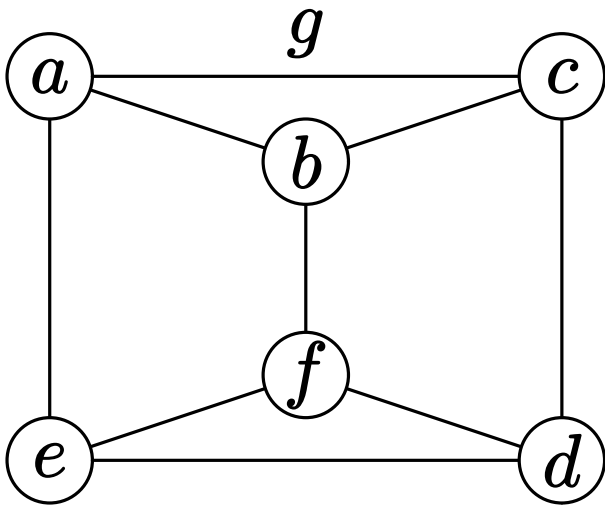
例

- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}$



用語：無向グラフ $G = (V, E)$ において

- 頂点 u, v が **隣接** しているとは, $\{u, v\} \in E$ であること
- 頂点 v が辺 e に **接続** しているとは, $v \in e$ であること

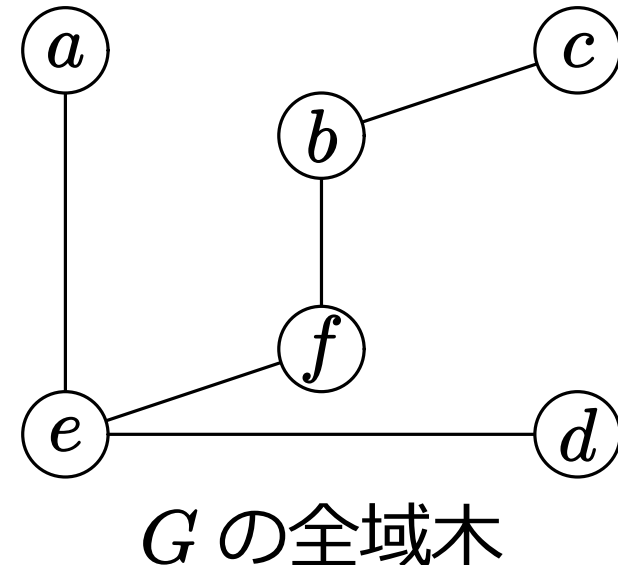
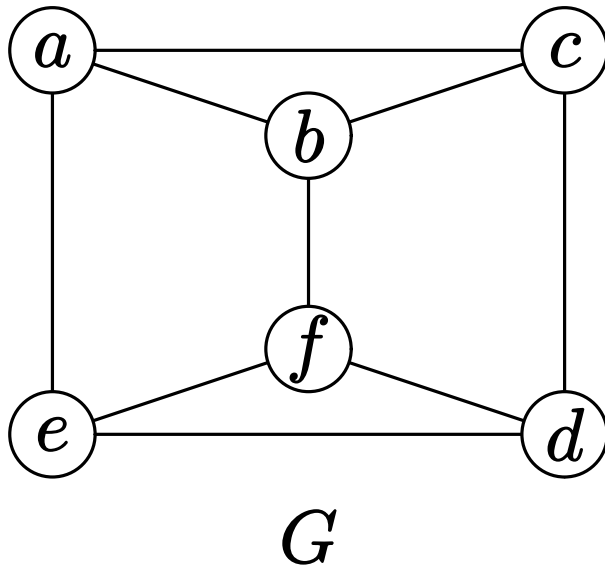


- 頂点 a と頂点 b は隣接している
- 頂点 a と頂点 d は隣接していない
- 頂点 a は辺 g に接続している
- 頂点 e は辺 g に接続していない

定義：全域木

無向グラフ $G = (V, E)$ の **全域木** とは,
無向グラフ $T = (V, E_T)$ で次を満たすもの

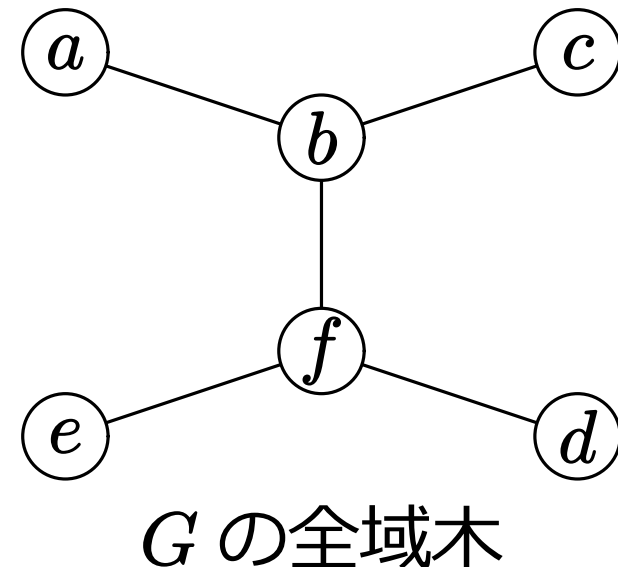
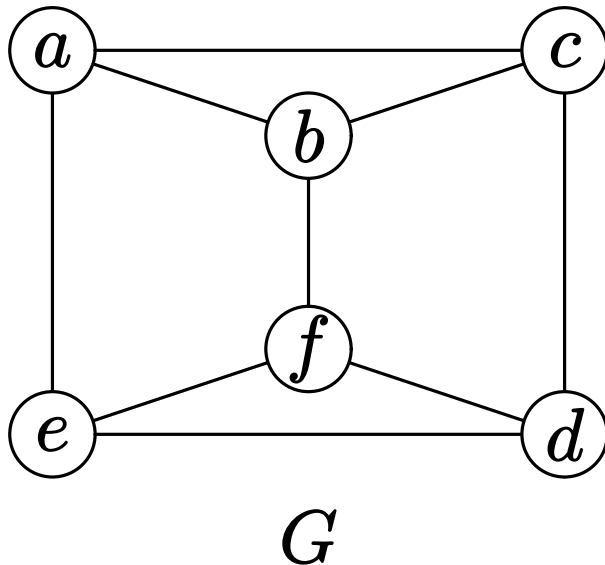
- $E_T \subseteq E$
- T は連結で閉路を含まない



定義：全域木

無向グラフ $G = (V, E)$ の **全域木** とは,
無向グラフ $T = (V, E_T)$ で次を満たすもの

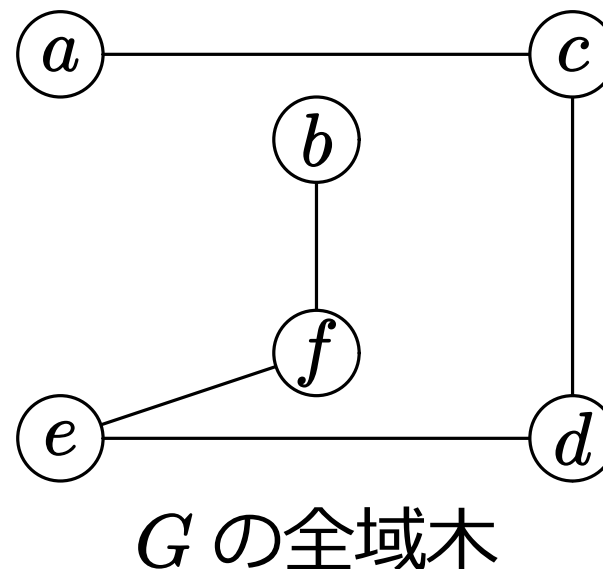
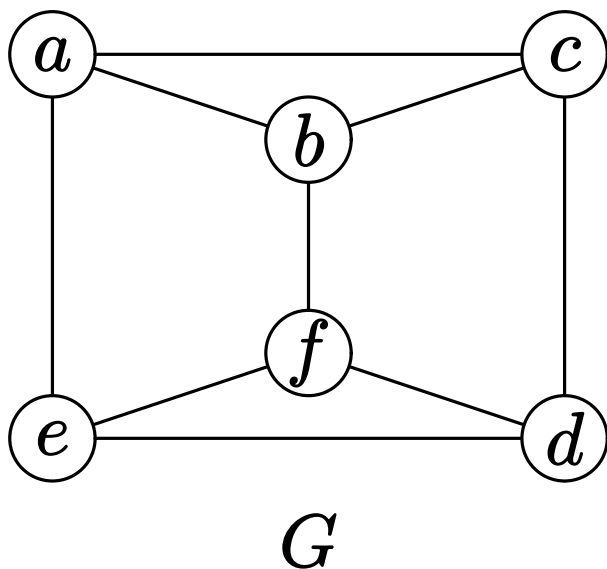
- $E_T \subseteq E$
- T は連結で閉路を含まない



定義：全域木

無向グラフ $G = (V, E)$ の **全域木** とは,
無向グラフ $T = (V, E_T)$ で次を満たすもの

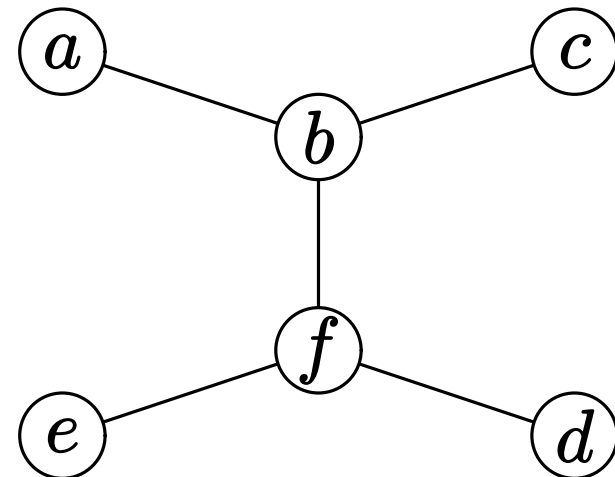
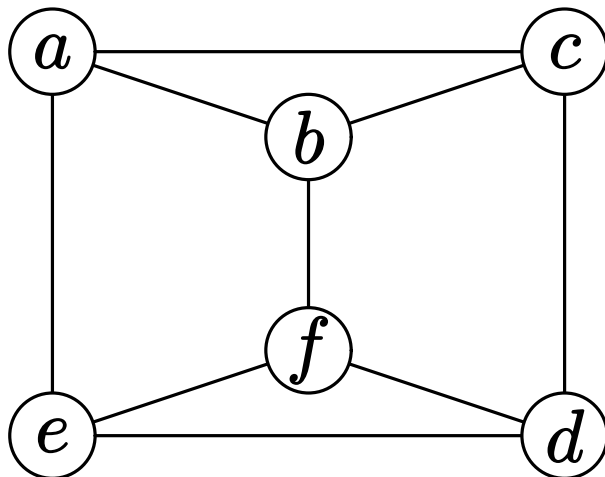
- $E_T \subseteq E$
- T は連結で閉路を含まない



無向グラフ $G = (V, E)$, G の全域木 $T = (V, E_T)$

性質 (証明は省略)

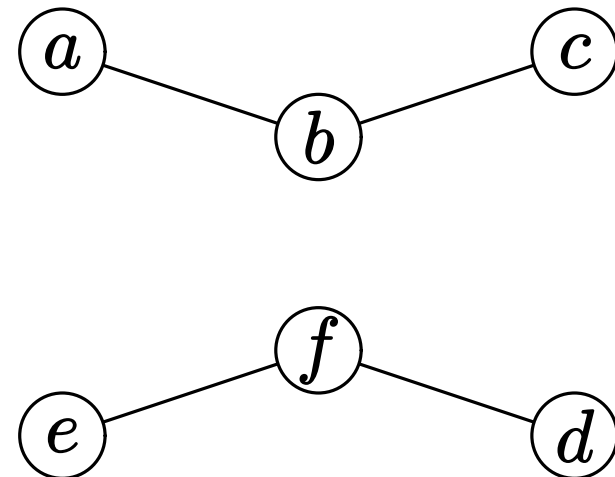
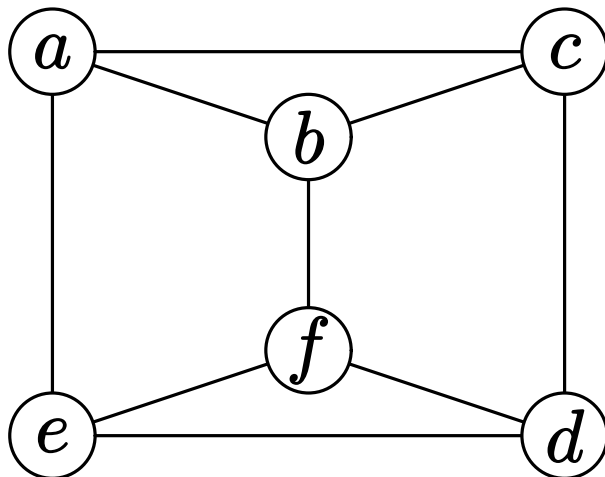
1. T には, 任意の 2 頂点間を結ぶ道 (パス) が一意に存在する
2. 任意の辺 $e \in E_T$ を T から取り除くと, $T - e$ は 2 つの連結成分に分かれる
3. 任意の辺 $e \in E - E_T$ を T に付け加えると, $T + e$ には閉路がちょうど 1 つできる



無向グラフ $G = (V, E)$, G の全域木 $T = (V, E_T)$

性質 (証明は省略)

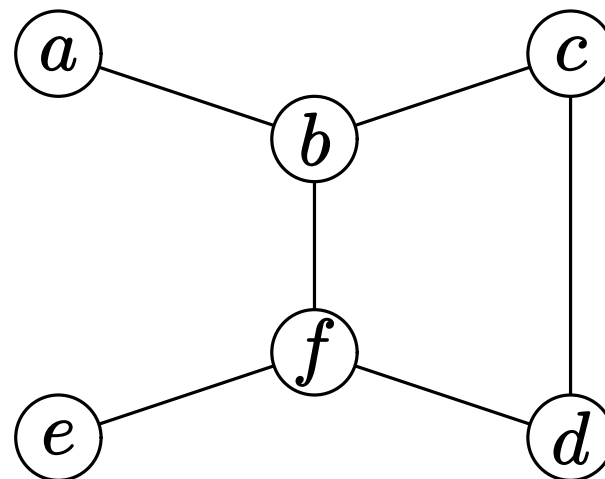
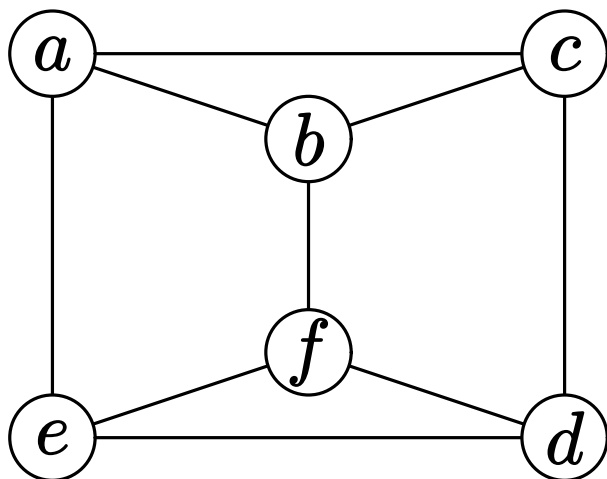
1. T には, 任意の 2 頂点間を結ぶ道 (パス) が一意に存在する
2. 任意の辺 $e \in E_T$ を T から取り除くと, $T - e$ は 2 つの連結成分に分かれる
3. 任意の辺 $e \in E - E_T$ を T に付け加えると, $T + e$ には閉路がちょうど 1 つできる



無向グラフ $G = (V, E)$, G の全域木 $T = (V, E_T)$

性質 (証明は省略)

1. T には, 任意の 2 頂点間を結ぶ道 (パス) が一意に存在する
2. 任意の辺 $e \in E_T$ を T から取り除くと, $T - e$ は 2 つの連結成分に分かれる
3. 任意の辺 $e \in E - E_T$ を T に付け加えると, $T + e$ には閉路がちょうど 1 つできる

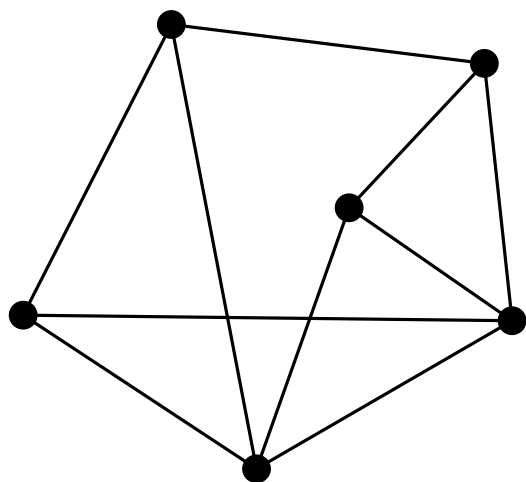


注：幾何グラフはここまでの定義に基づくグラフではない

定義：幾何グラフ

幾何グラフ とは次のような対 $G = (V, E)$

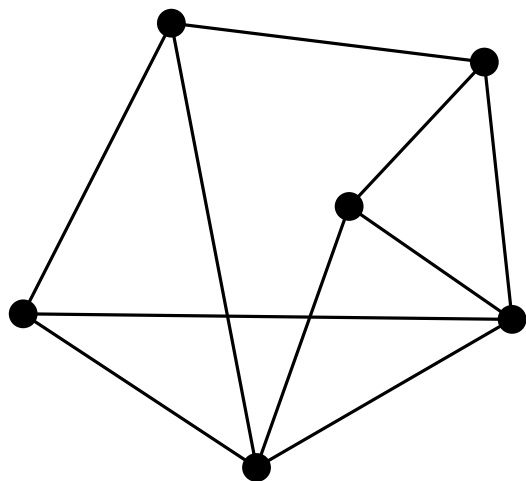
- V は平面上の点の集合
- E は V の 2 点を結ぶ線分の集合



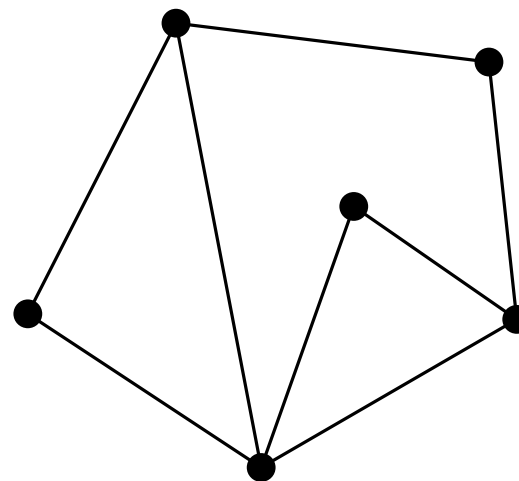
幾何グラフでも, 頂点, 辺という用語を使う

定義：非交差幾何グラフ

幾何グラフ G が **非交差** であるとは
その異なる 2 辺が端点以外に共有点を持たないこと



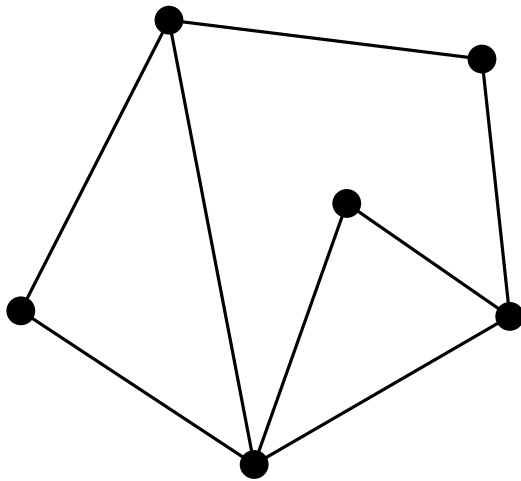
非交差幾何グラフ
ではない



非交差幾何グラフ
である

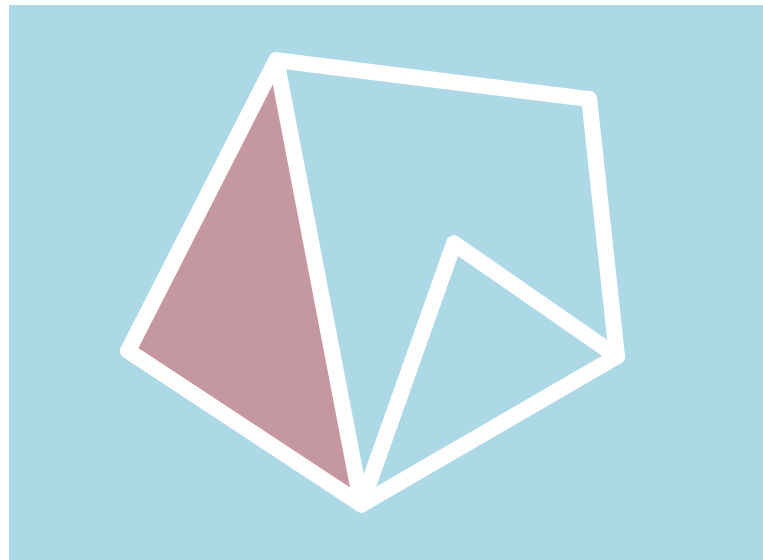
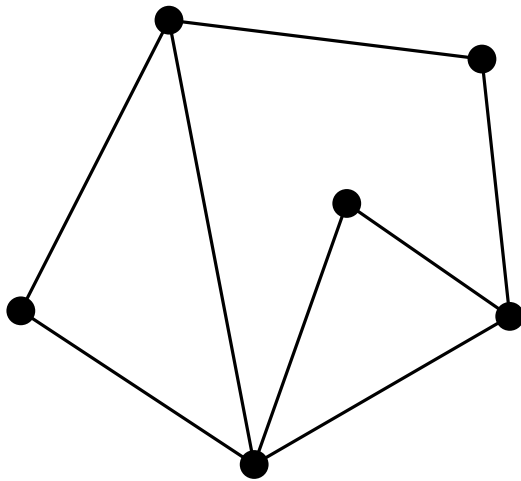
定義：非交差幾何グラフの面

非交差幾何グラフ $G = (V, E)$ の **面** とは,
 $\mathbb{R}^2 - E$ の連結成分のこと



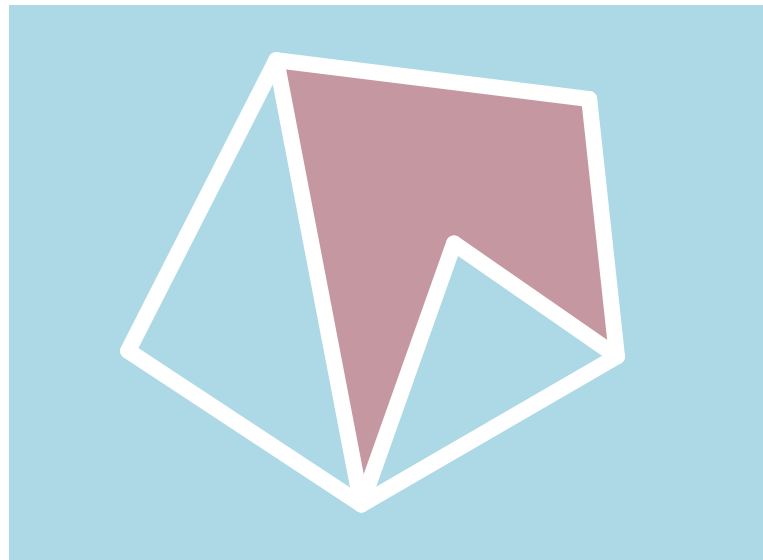
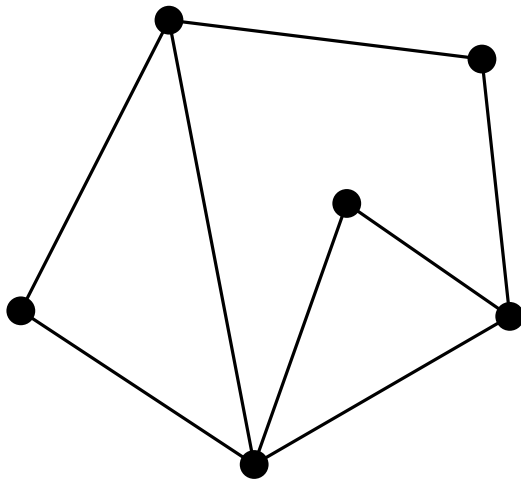
定義：非交差幾何グラフの面

非交差幾何グラフ $G = (V, E)$ の **面** とは,
 $\mathbb{R}^2 - E$ の連結成分のこと



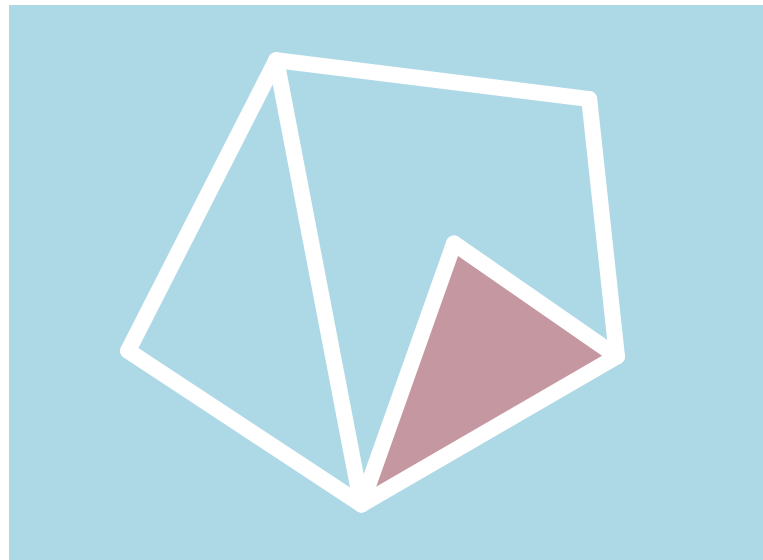
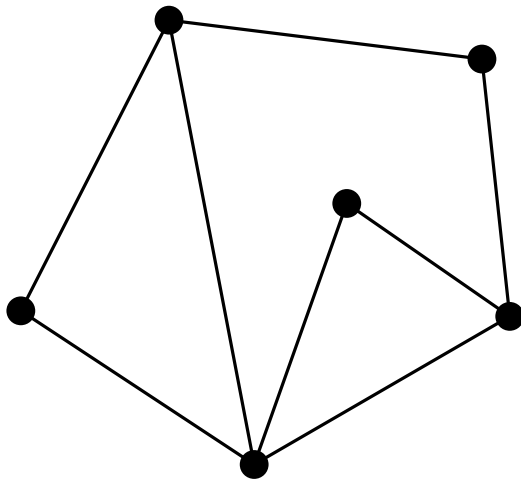
定義：非交差幾何グラフの面

非交差幾何グラフ $G = (V, E)$ の **面** とは,
 $\mathbb{R}^2 - E$ の連結成分のこと



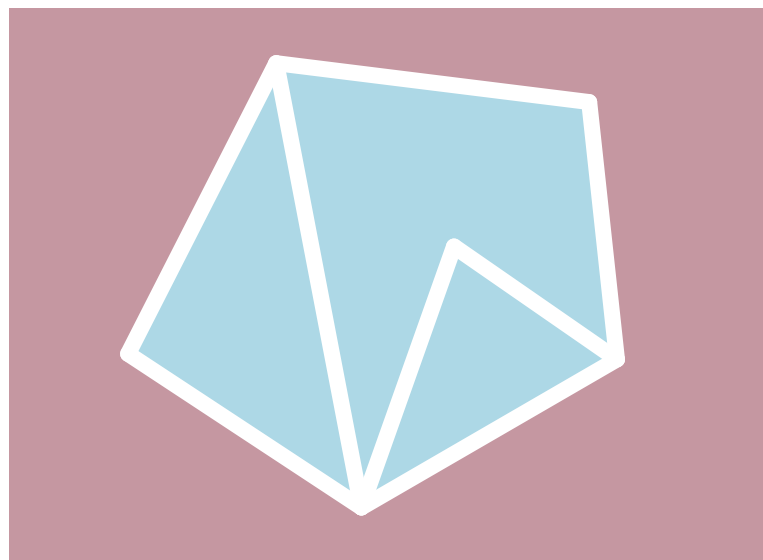
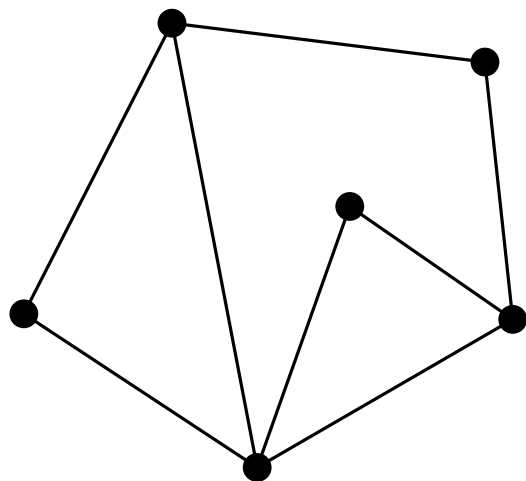
定義：非交差幾何グラフの面

非交差幾何グラフ $G = (V, E)$ の **面** とは,
 $\mathbb{R}^2 - E$ の連結成分のこと



定義：非交差幾何グラフの面

非交差幾何グラフ $G = (V, E)$ の **面** とは,
 $\mathbb{R}^2 - E$ の連結成分のこと

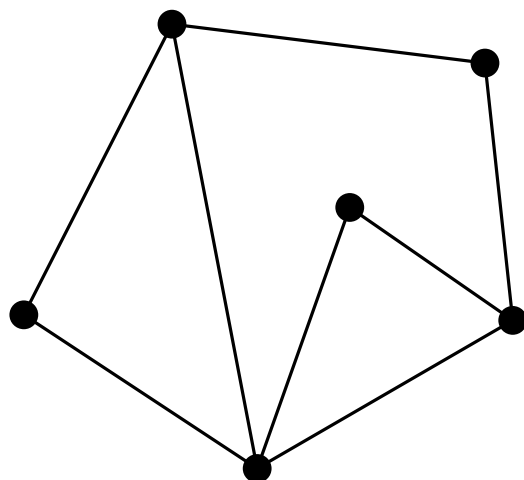


必ず, 1つの面は非有界

性質：オイラーの公式 (証明は省略)

任意の連結な非交差幾何グラフ G において, 次が成立

$$\text{頂点数} - \text{辺数} + \text{面数} = 2$$



例

- 頂点数 = 6
- 辺数 = 8
- 面数 = 4

$$\therefore \text{頂点数} - \text{辺数} + \text{面数} = 2$$

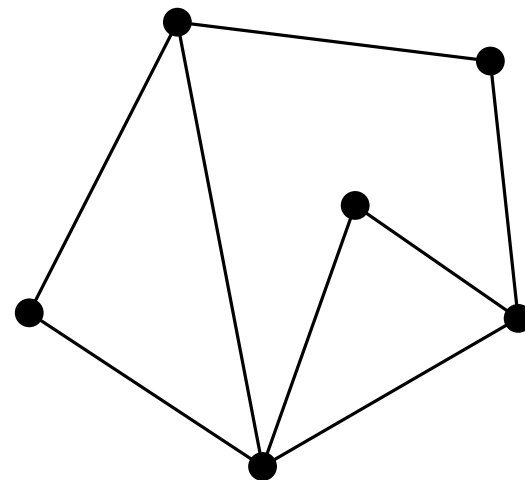
性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の非交差幾何グラフにおいて,

- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

略証：各辺の両側に石を置いて，石の総数を数える

- 辺に着目すると，石の総数 $= 2 \cdot$ 辺数
- 面に着目すると，石の総数 $\geq 3 \cdot$ 面数
- $\therefore 2 \cdot$ 辺数 $\geq 3 \cdot$ 面数



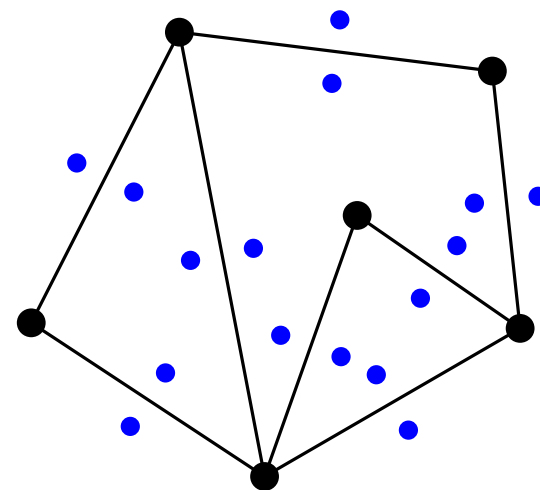
性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の非交差幾何グラフにおいて,

- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

略証：各辺の両側に石を置いて，石の総数を数える

- 辺に着目すると，石の総数 $= 2 \cdot$ 辺数
- 面に着目すると，石の総数 $\geq 3 \cdot$ 面数
- $\therefore 2 \cdot$ 辺数 $\geq 3 \cdot$ 面数



性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の非交差幾何グラフにおいて,

- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

性質：オイラーの公式 (証明は省略)

任意の連結な非交差幾何グラフ G において, 次が成立

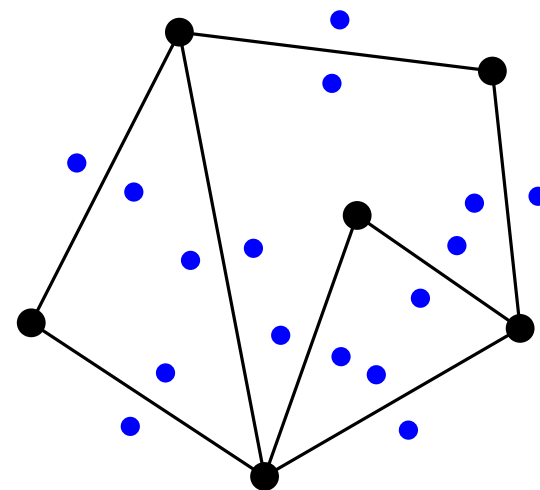
$$\text{頂点数} - \text{辺数} + \text{面数} = 2$$

略証：各辺の両側に石を置いて, 石の総数を数える

- 辺に着目すると, 石の総数 $= 2 \cdot \text{辺数}$
- 面に着目すると, 石の総数 $\geq 3 \cdot \text{面数}$
- $\therefore 2 \cdot \text{辺数} \geq 3 \cdot \text{面数}$
- オイラーの公式より

$$3 \cdot \text{面数} = -3n + 3 \cdot \text{辺数} + 6,$$

$$2 \cdot \text{辺数} = 2n + 2 \cdot \text{面数} - 4$$



性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の非交差幾何グラフにおいて,

- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

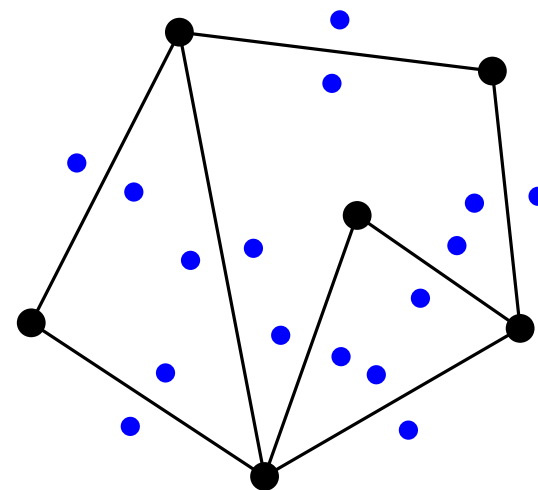
性質：オイラーの公式 (証明は省略)

任意の連結な非交差幾何グラフ G において, 次が成立

$$\text{頂点数} - \text{辺数} + \text{面数} = 2$$

略証：各辺の両側に石を置いて, 石の総数を数える

- 辺に着目すると, 石の総数 $= 2 \cdot \text{辺数}$
- 面に着目すると, 石の総数 $\geq 3 \cdot \text{面数}$
- $\therefore 2 \cdot \text{辺数} \geq 3 \cdot \text{面数}$
- オイラーの公式より
$$3 \cdot \text{面数} = -3n + 3 \cdot \text{辺数} + 6,$$
$$2 \cdot \text{辺数} = 2n + 2 \cdot \text{面数} - 4$$
- $\therefore \text{辺数} \leq 3n - 6, \text{面数} \leq 2n - 4$



□

性質：非交差幾何グラフの辺数と面数

頂点数 $n \geq 3$ の任意の非交差幾何グラフにおいて,

- 辺数 $\leq 3n - 6$
- 面数 $\leq 2n - 4$

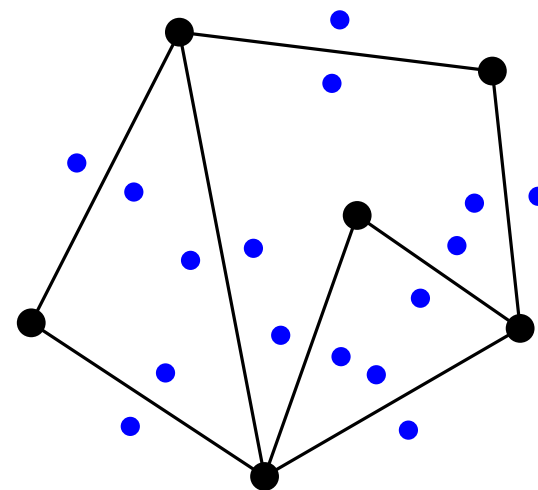
性質：オイラーの公式 (証明は省略)

任意の連結な非交差幾何グラフ G において, 次が成立

$$\text{頂点数} - \text{辺数} + \text{面数} = 2$$

略証：各辺の両側に石を置いて, 石の総数を数える

- 辺に着目すると, 石の総数 $= 2 \cdot \text{辺数}$
- 面に着目すると, 石の総数 $\geq 3 \cdot \text{面数}$?
- $\therefore 2 \cdot \text{辺数} \geq 3 \cdot \text{面数}$
- オイラーの公式より
$$3 \cdot \text{面数} = -3n + 3 \cdot \text{辺数} + 6,$$
$$2 \cdot \text{辺数} = 2n + 2 \cdot \text{面数} - 4$$
- $\therefore \text{辺数} \leq 3n - 6, \text{面数} \leq 2n - 4$

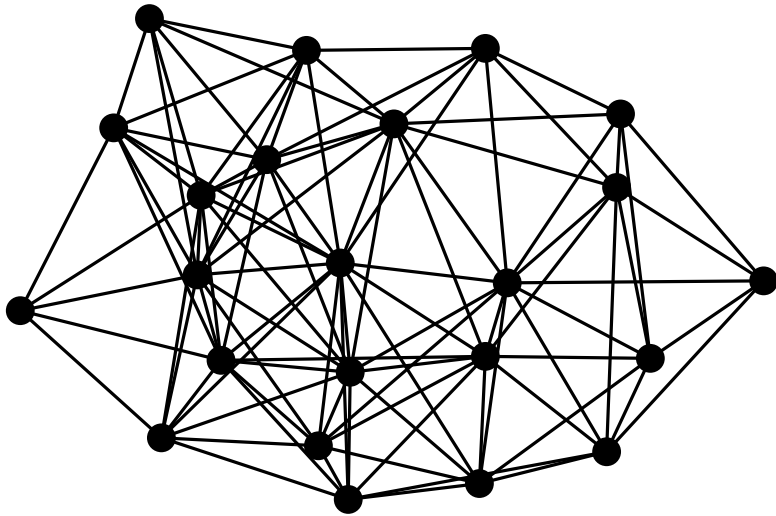


1. グラフと幾何グラフの用語
2. **単位円グラフとデローネ三角形分割**
3. デローネ三角形分割と最小全域木
4. 他の近接グラフ

定義：単位円グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **単位円グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

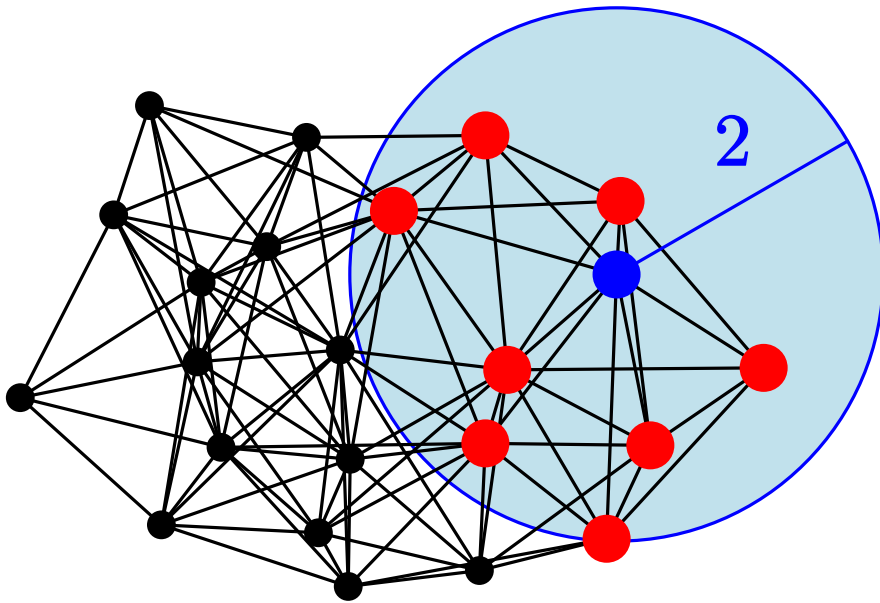
$$\bullet E = \{ \text{線分 } \overline{pq} \mid p, q \in P, \overline{pq} \text{ の長さ} \leq 2 \}$$



定義：単位円グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **単位円グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

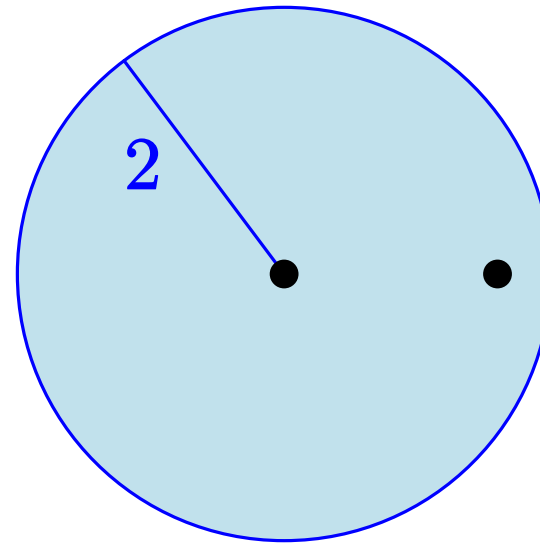
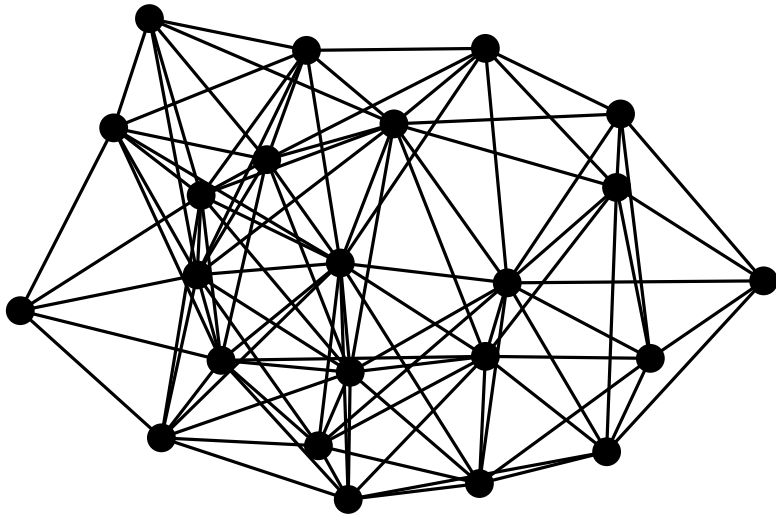
$$\bullet E = \{\text{線分 } \overline{pq} \mid p, q \in P, \overline{pq} \text{ の長さ} \leq 2\}$$



定義：単位円グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **単位円グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

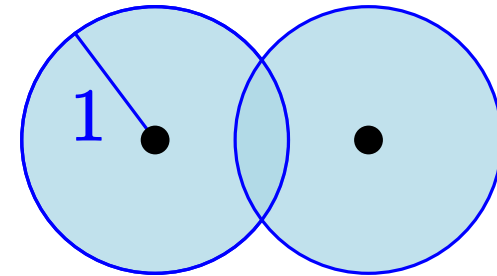
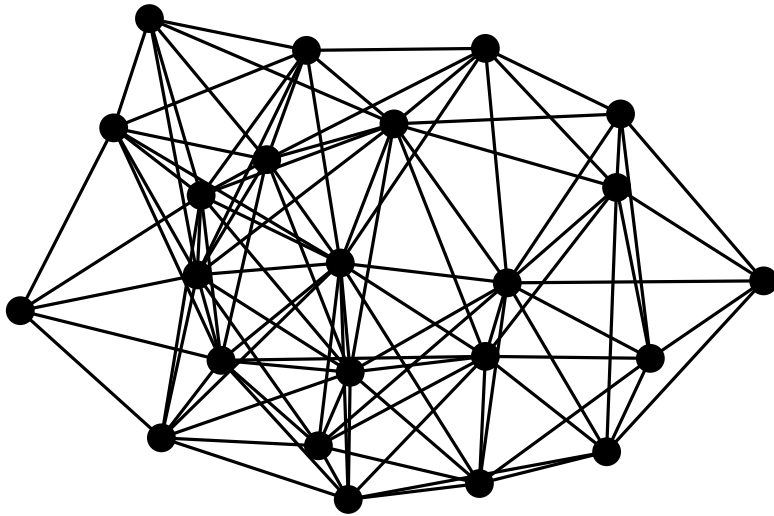
$$\bullet E = \{ \text{線分 } \overline{pq} \mid p, q \in P, \overline{pq} \text{ の長さ} \leq 2 \}$$



定義：単位円グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **単位円グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

$$\bullet E = \{\text{線分 } \overline{pq} \mid p, q \in P, \overline{pq} \text{ の長さ} \leq 2\}$$



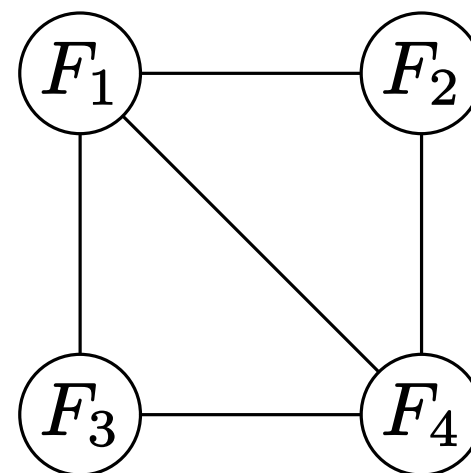
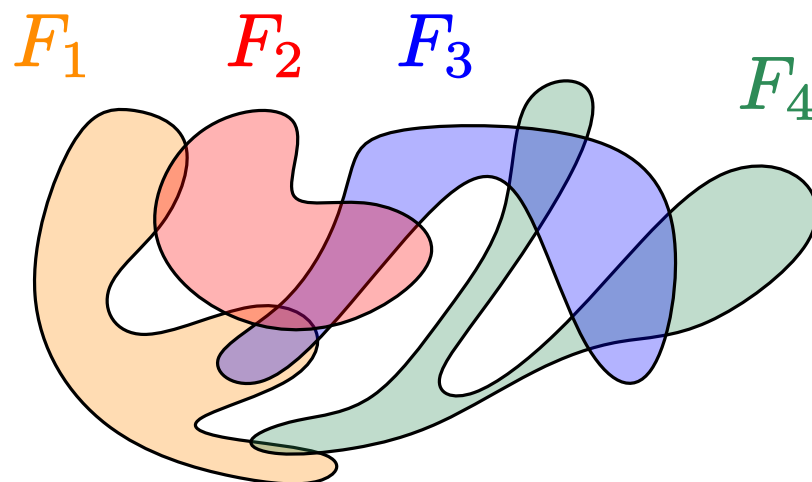
単位円の交差グラフ と呼ぶ

平面図形の集合 $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$

定義：交差グラフ

$\mathcal{F}$ の **交差グラフ** とは次で定義されるグラフ $G = (V, E)$

- $V = \mathcal{F}$
- $E = \{\{F_i, F_j\} \mid i \neq j, F_i \cap F_j \neq \emptyset\}$

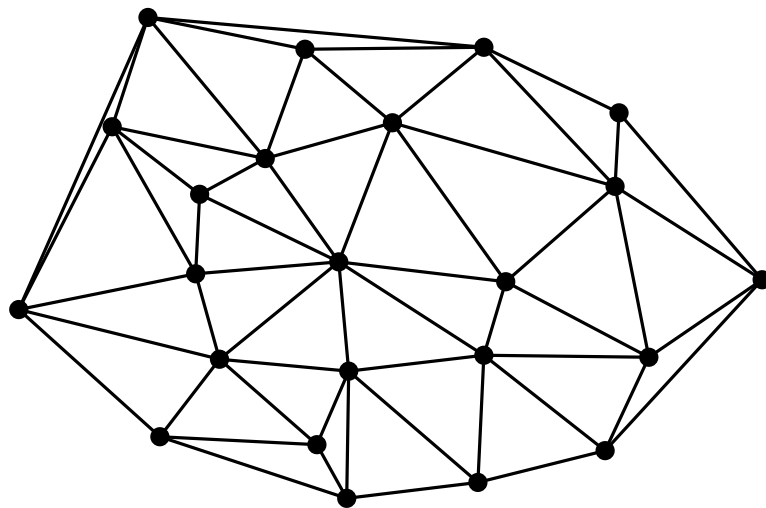


前ページの単位円グラフは,
本ページの単位円の交差グラフを幾何グラフとして表したもの

定義：デローネ・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **デローネ・グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

$$\bullet E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \exists \text{円板 } D: \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$$



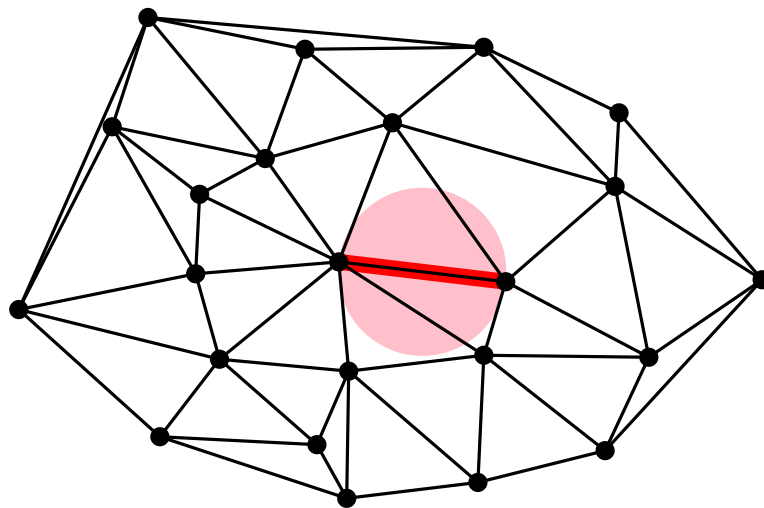
「近い」ような2つの点は
辺で結ばれる

P のデローネ・グラフ と呼ぶ

定義：デローネ・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **デローネ・グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

$$E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \exists \text{円板 } D: \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$$



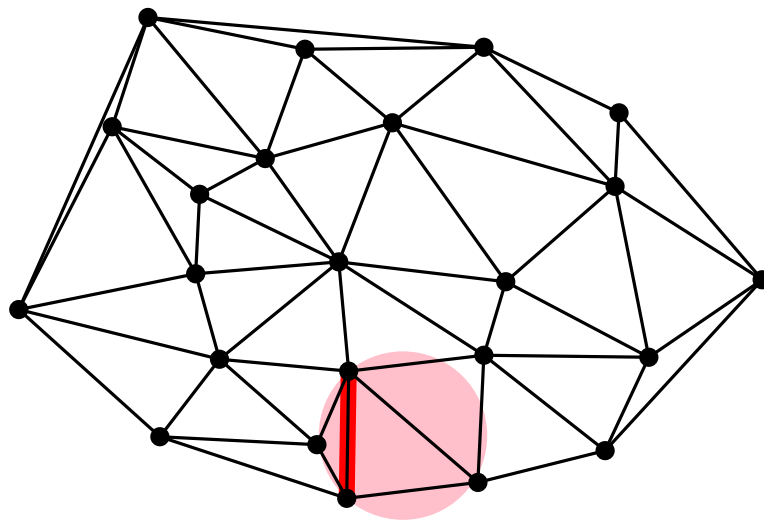
「近い」ような2つの点は
辺で結ばれる

P のデローネ・グラフ と呼ぶ

定義：デローネ・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **デローネ・グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

$$\bullet E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \exists \text{円板 } D: \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$$



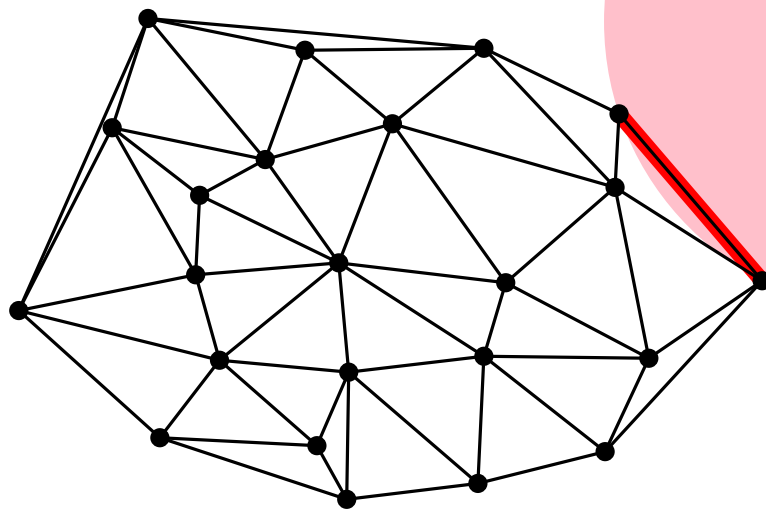
「近い」ような2つの点は
辺で結ばれる

P のデローネ・グラフ と呼ぶ

定義：デローネ・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **デローネ・グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

$$E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \exists \text{円板 } D: \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$$



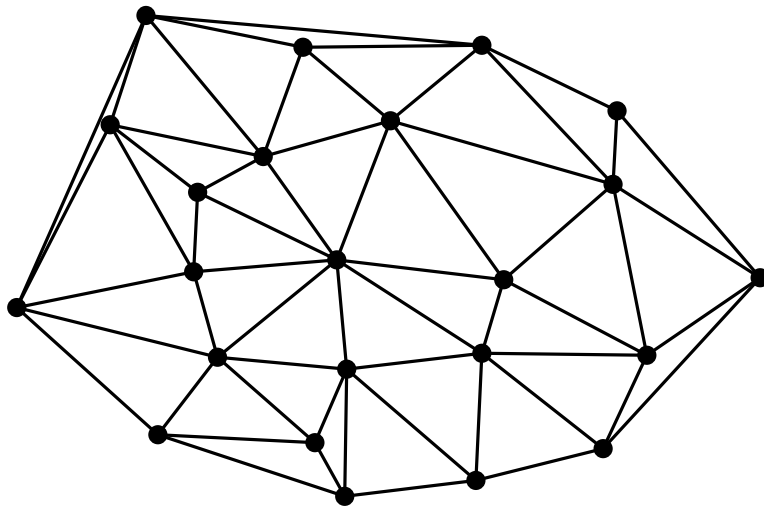
「近い」ような2つの点は
辺で結ばれる

P のデローネ・グラフ と呼ぶ

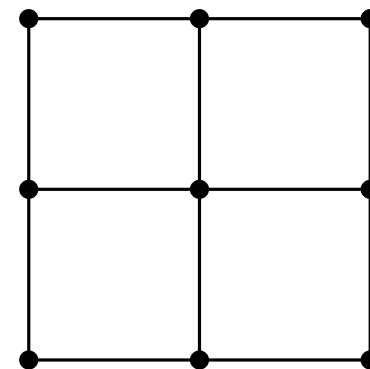
定義：デローネ・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **デローネ・グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

$$E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \exists \text{円板 } D: \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$$



「近い」ような2つの点は
辺で結ばれる



P のデローネ・グラフ と呼ぶ



ボリス・デローネ (ドロネー)

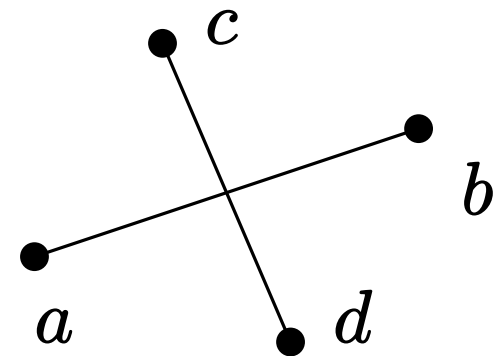
Boris Delone (Delaunay)

(1890–1980)

性質：デローネ・グラフは非交差

デローネ・グラフは非交差幾何グラフである

証明：2 辺 $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ が交差すると仮定する

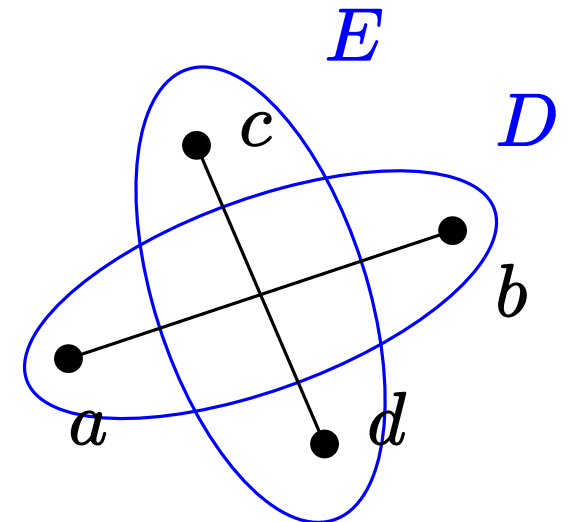


性質：デローネ・グラフは非交差

デローネ・グラフは非交差幾何グラフである

証明：2 辺 $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ が交差すると仮定する

- a, b のみを含む円板 D と
 c, d のみを含む円板 E が存在

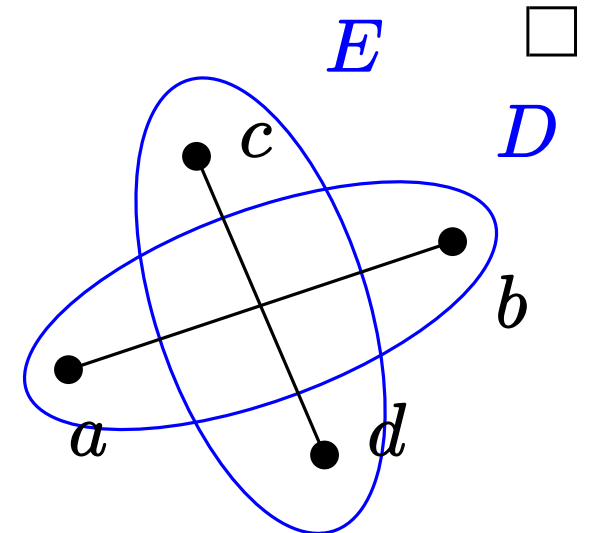


性質：デローネ・グラフは非交差

デローネ・グラフは非交差幾何グラフである

証明：2 辺 $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ が交差すると仮定する

- a, b のみを含む円板 D と
 c, d のみを含む円板 E が存在
- D の境界と E の境界は 4 点で交わる
- これは 2 つの円周が高々 2 点でしか交わらないことに矛盾



性質：デローネ・グラフは非交差

デローネ・グラフは非交差幾何グラフである

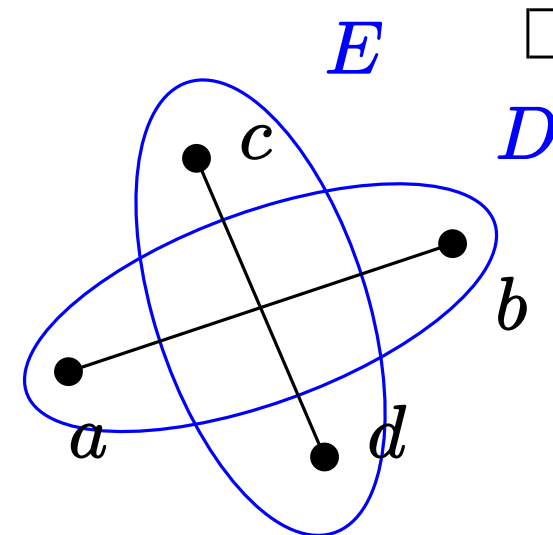
証明：2 辺 $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ が交差すると仮定する

- a, b のみを含む円板 D と c, d のみを含む円板 E が存在
- D の境界と E の境界は 4 点で交わる
- これは 2 つの円周が高々 2 点でしか交わらないことに矛盾

□

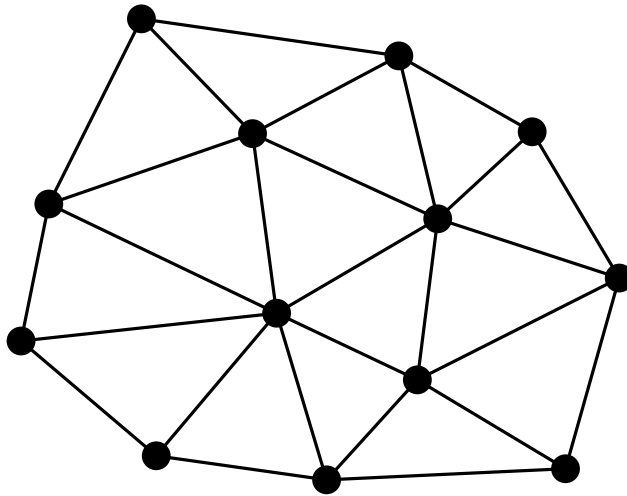
帰結：頂点数 ≥ 3 のとき,

$$\text{辺数} \leq 3 \cdot \text{頂点数} - 6$$



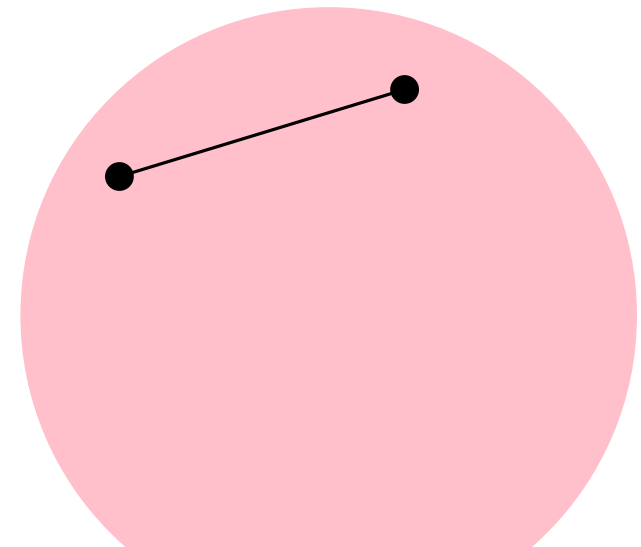
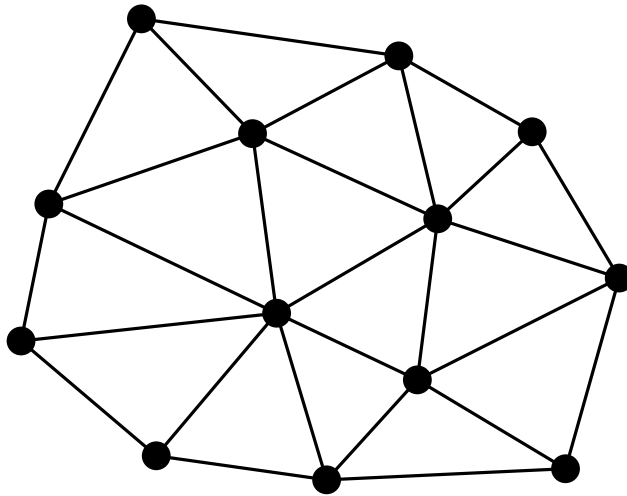
性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において, すべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
 P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である



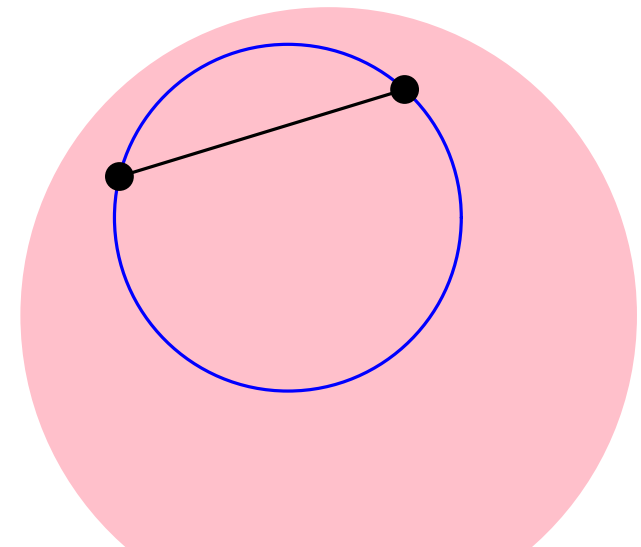
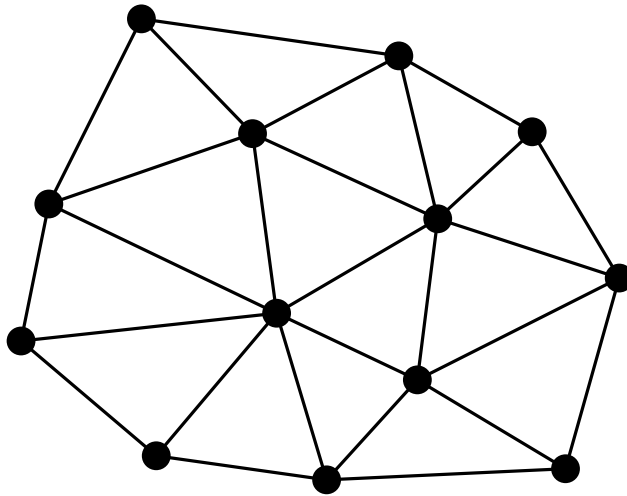
性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において, すべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
 P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である



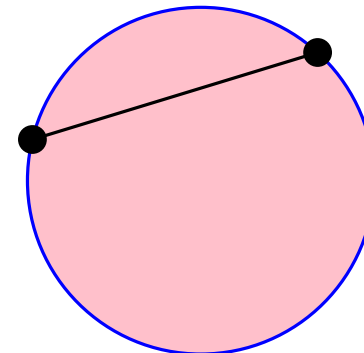
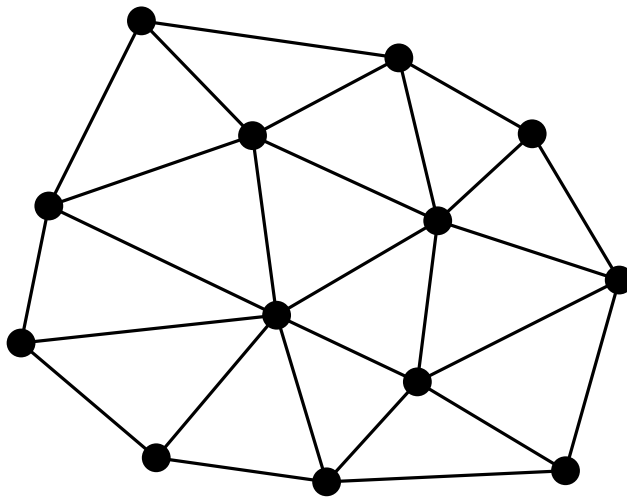
性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において, すべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
 P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である



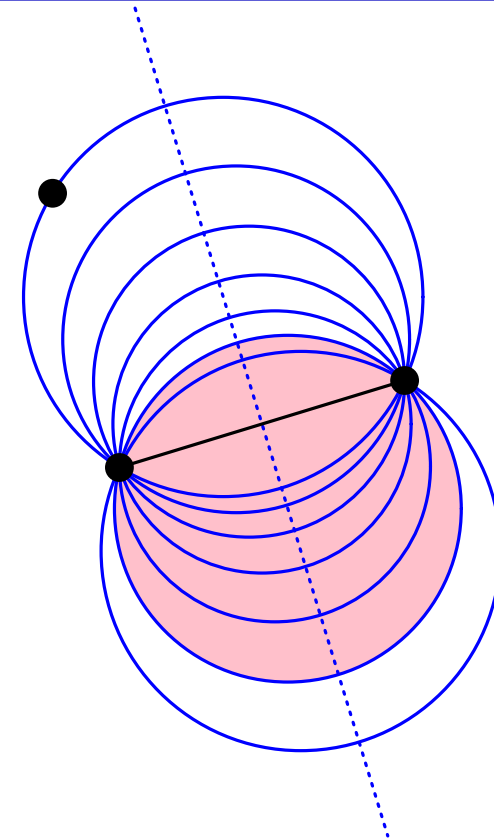
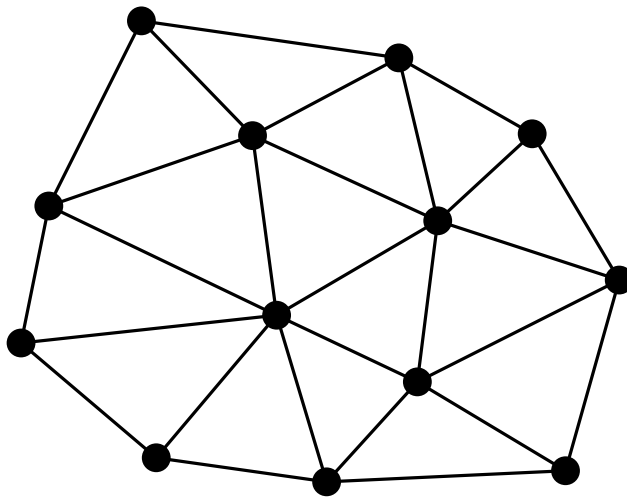
性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において, すべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
 P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である



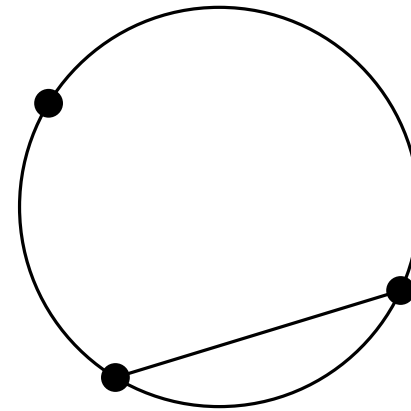
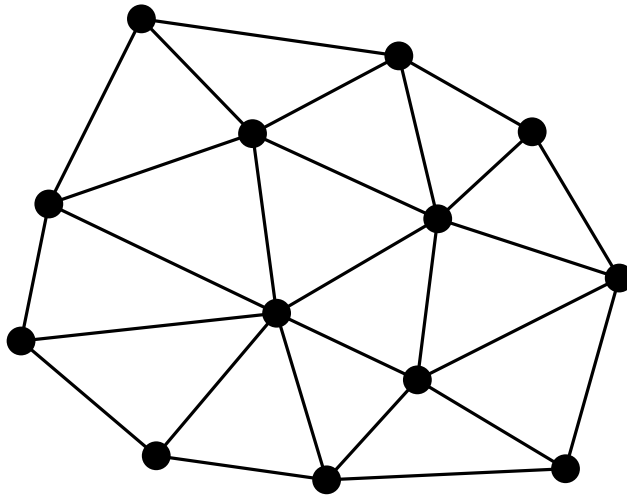
性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において, すべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
 P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である



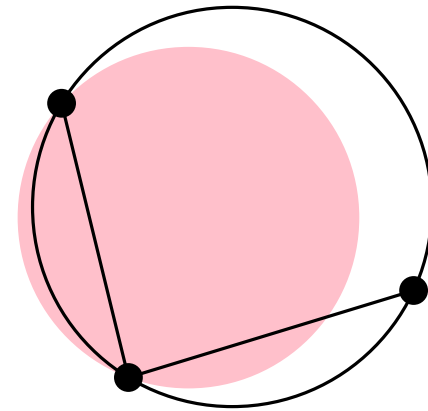
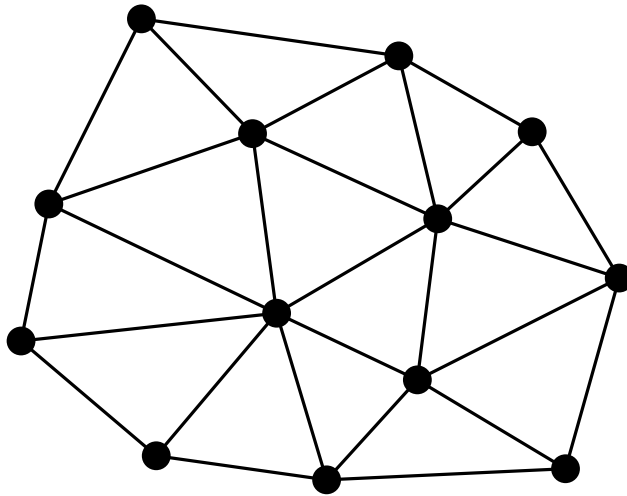
性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において, すべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
 P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である



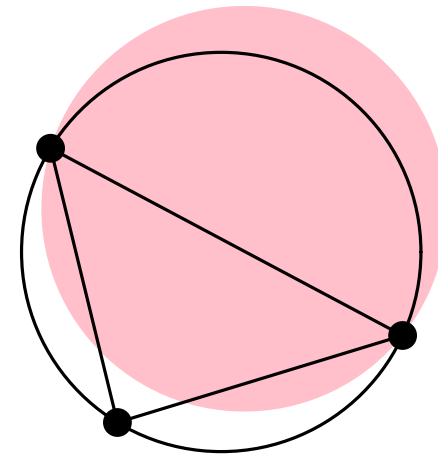
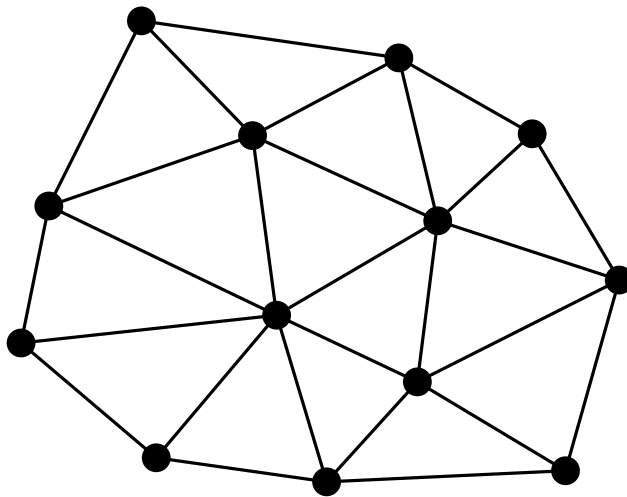
性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において, すべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
 P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である



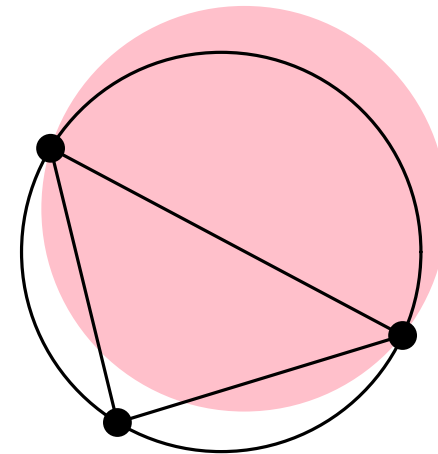
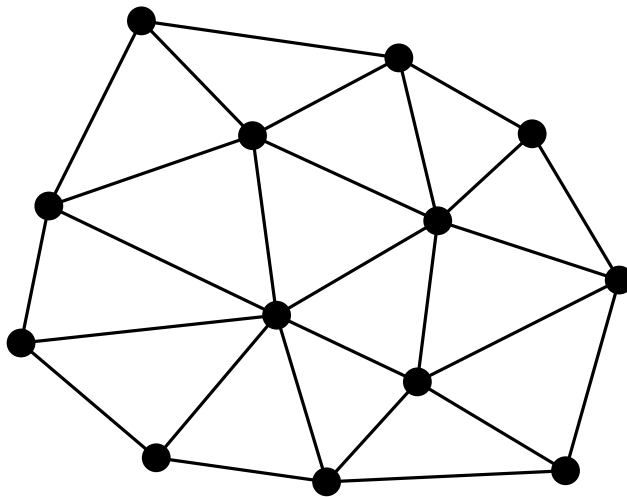
性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において, すべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
 P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である



性質：デローネ・グラフの有界面

平面上の点集合 P において, すべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$
 P を頂点集合とするデローネ・グラフの有界面は
どれも三角形である



証明：演習問題 (文章として書き起こしてみよ)

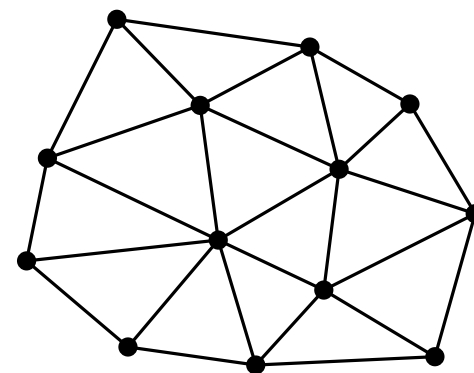
定義：デローネ三角形分割

平面上の点集合 P の **デローネ三角形分割** とは,
 P のデローネ・グラフの有界面の集合で,
それらがすべて三角形であるようなもののこと

先ほどの性質の帰結：

P のすべてが 1 直線上になく,
どの 4 点も 1 円周上にない $\Rightarrow$

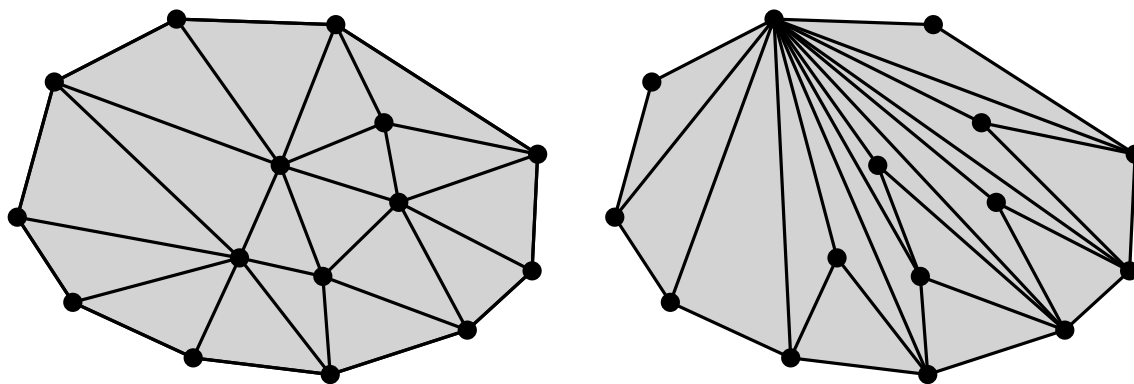
P のデローネ三角形分割は存在する



定義：点集合の三角形分割

平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の **三角形分割** とは
三角形の集まり $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ で次を満たすもの

1. t_i の頂点は P の点
2. P の点はある t_i の頂点
3. $\text{CH}(P) = t_1 \cup t_2 \cup \dots \cup t_m$
4. $t_i \cap t_j$ は空集合か共通の頂点か共通の辺 ($i \neq j$)

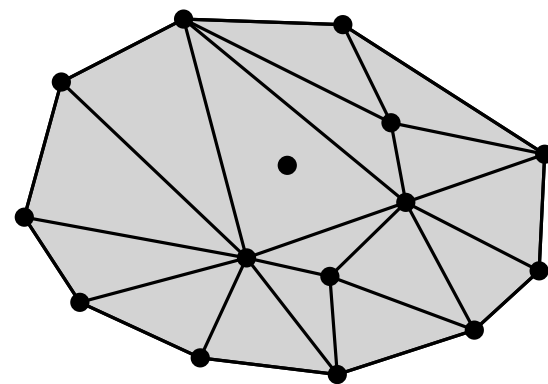
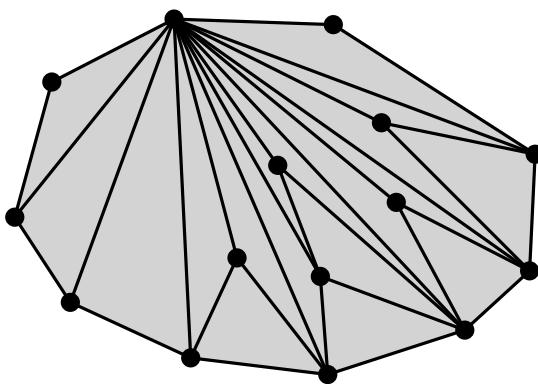
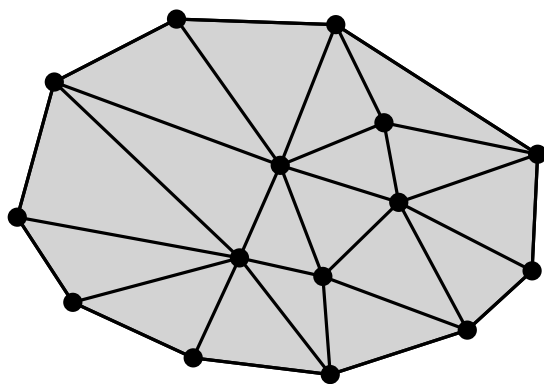


条件 2 を課さないものを P の三角形分割と呼ぶこともある

定義：点集合の三角形分割

平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の **三角形分割** とは
三角形の集まり $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ で次を満たすもの

1. t_i の頂点は P の点
2. P の点はある t_i の頂点
3. $\text{CH}(P) = t_1 \cup t_2 \cup \dots \cup t_m$
4. $t_i \cap t_j$ は空集合か共通の頂点か共通の辺 ($i \neq j$)

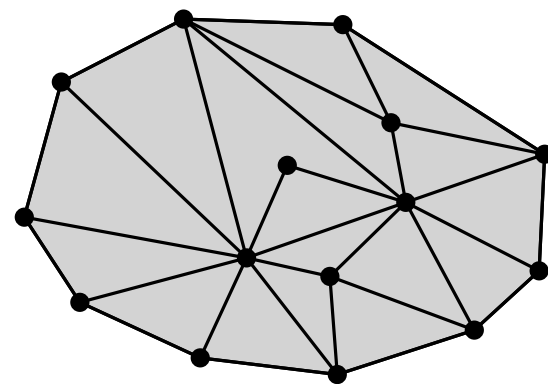
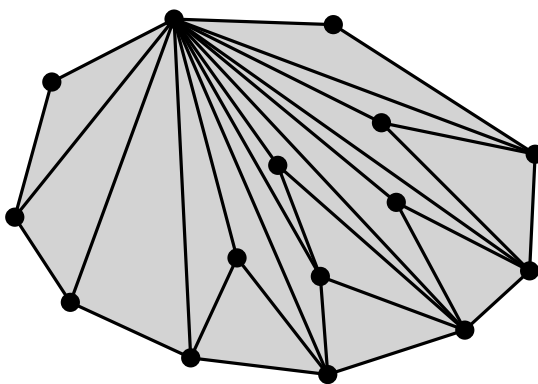
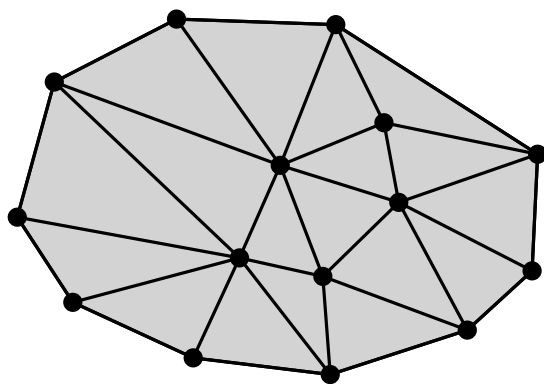


条件 2 を課さないものを P の三角形分割と呼ぶこともある

定義：点集合の三角形分割

平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の **三角形分割** とは
三角形の集まり $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ で次を満たすもの

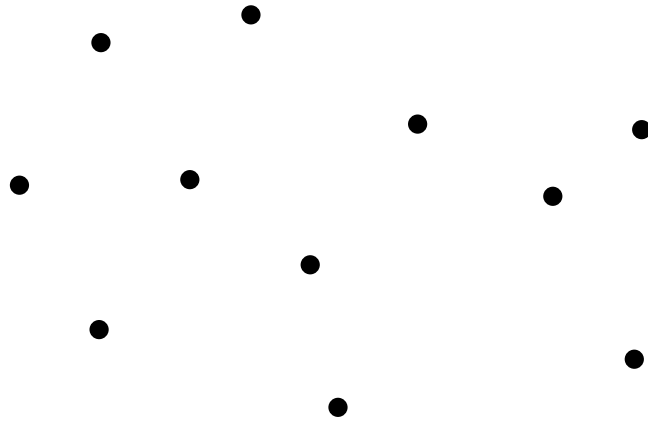
1. t_i の頂点は P の点
2. P の点はある t_i の頂点
3. $\text{CH}(P) = t_1 \cup t_2 \cup \dots \cup t_m$
4. $t_i \cap t_j$ は空集合か共通の頂点か共通の辺 ($i \neq j$)



条件 2 を課さないものを P の三角形分割と呼ぶこともある

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

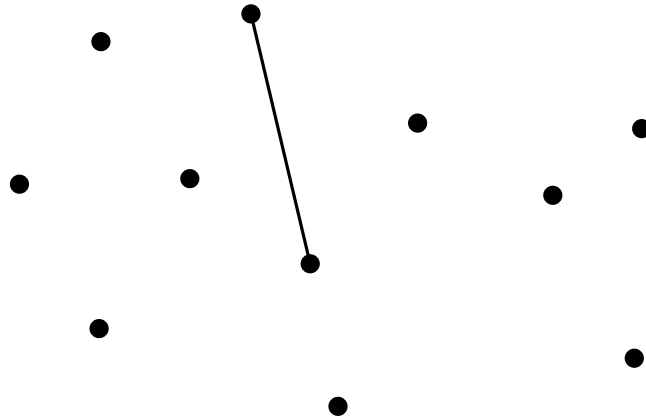
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

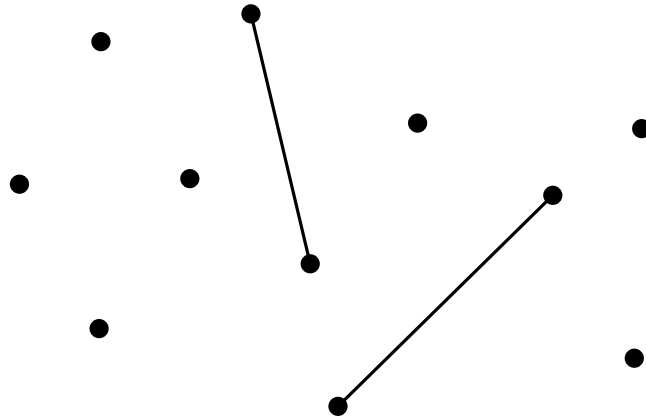
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

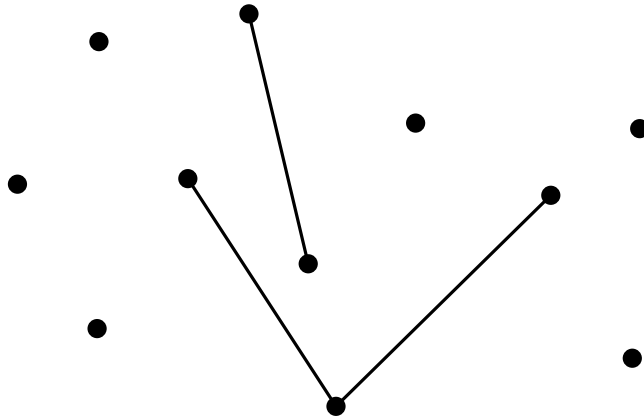
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

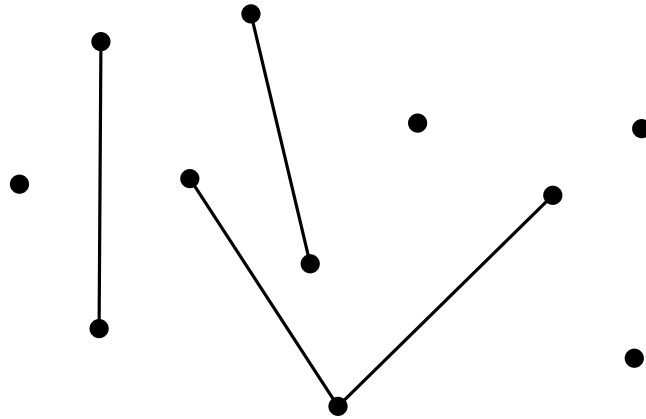
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\rightsquigarrow$ 三角形分割 24/36

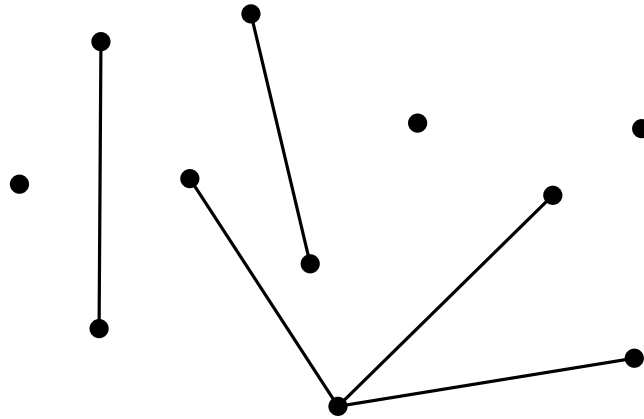
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び、それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

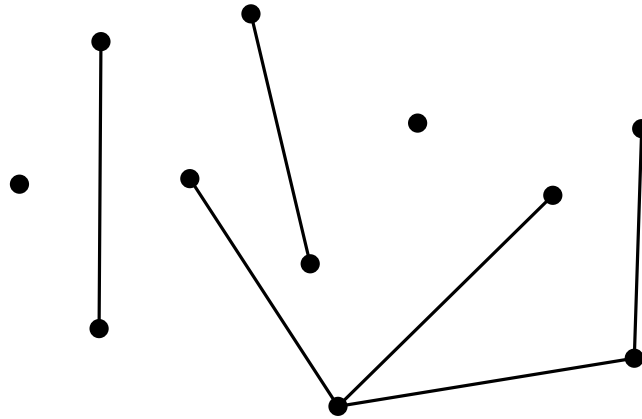
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

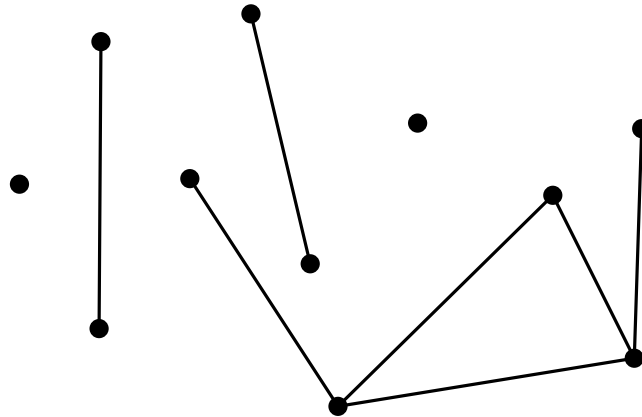
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

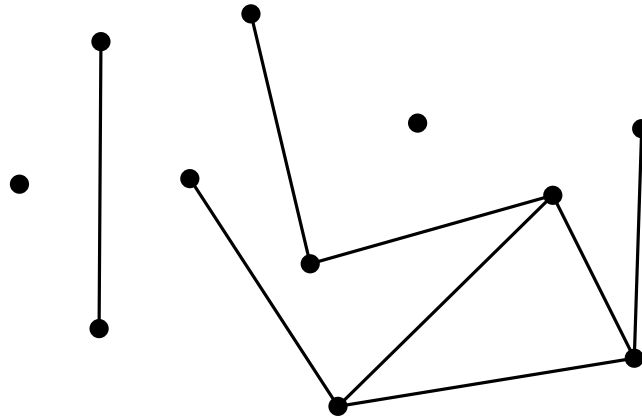
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び、それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

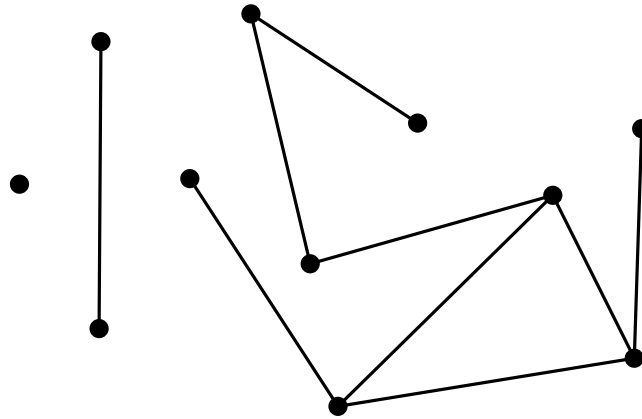
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

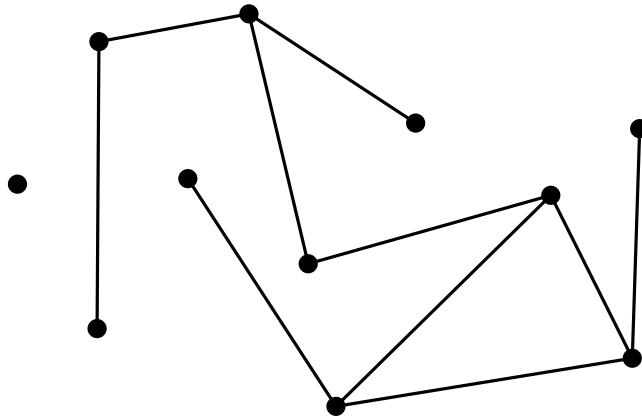
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

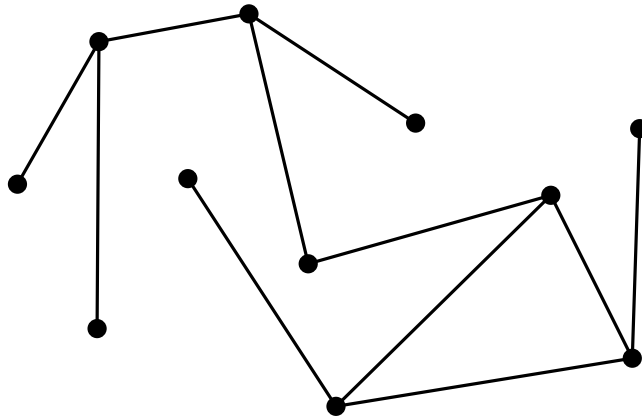
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

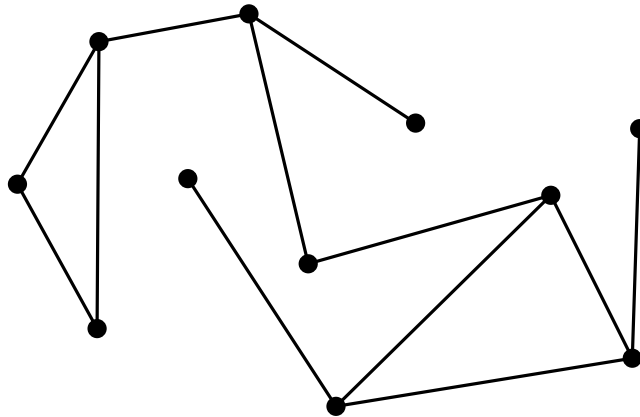
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

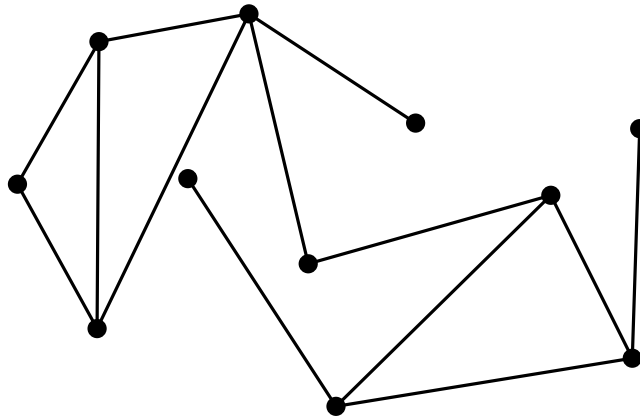
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

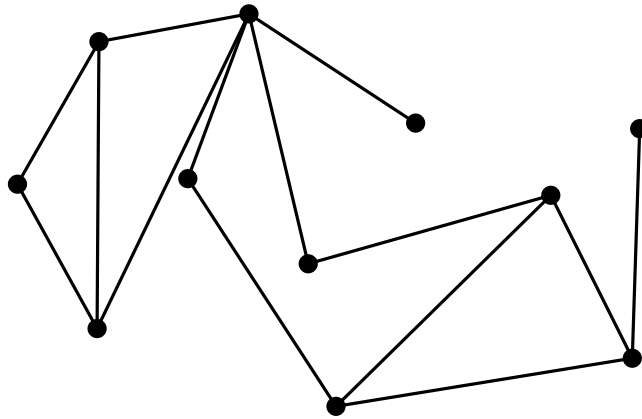
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

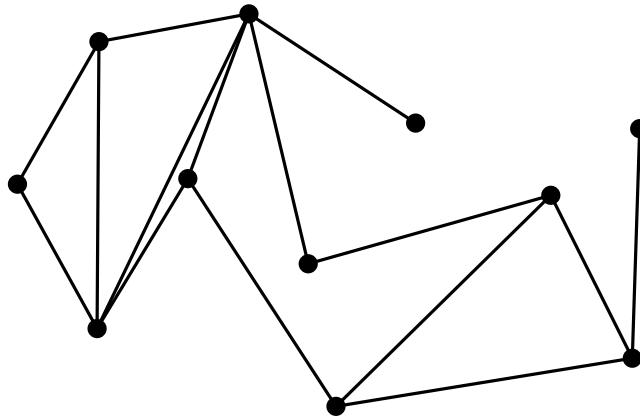
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

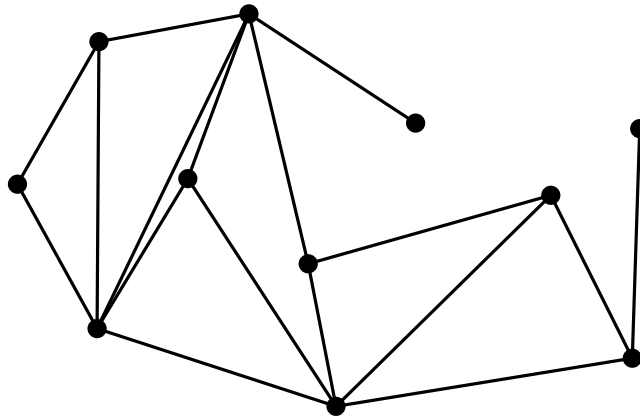
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

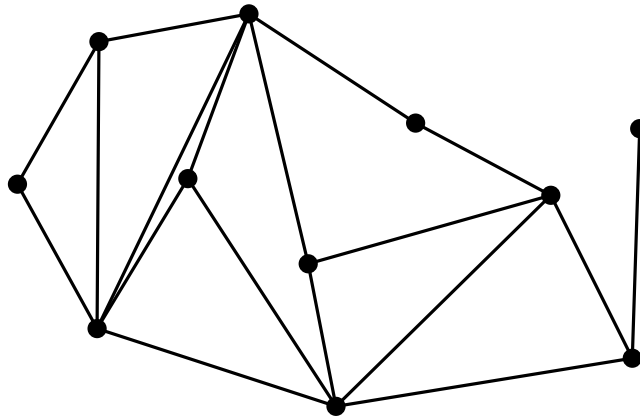
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

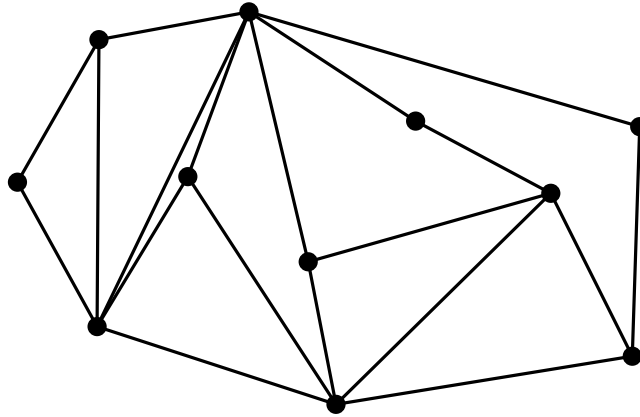
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

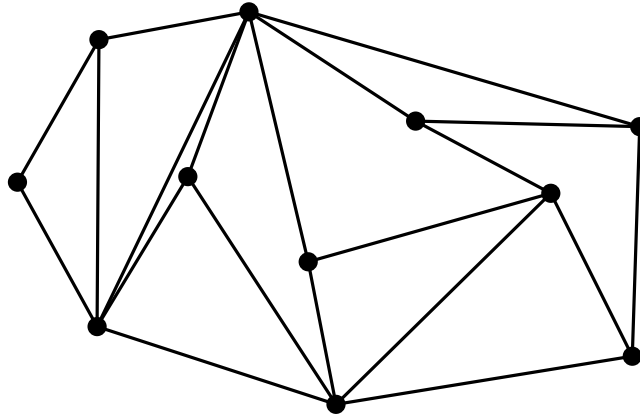
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

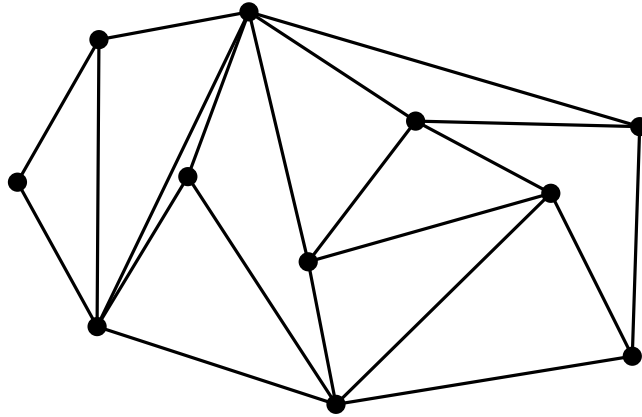
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

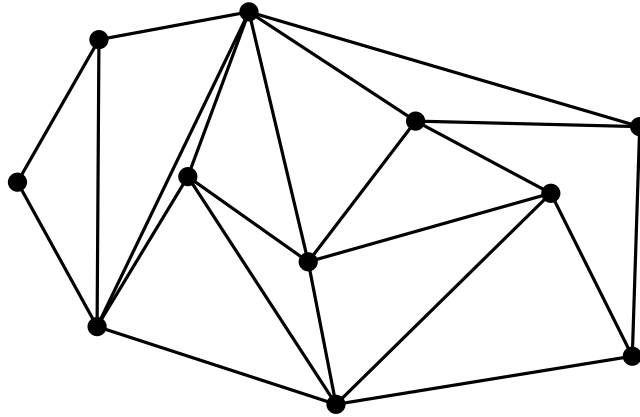
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

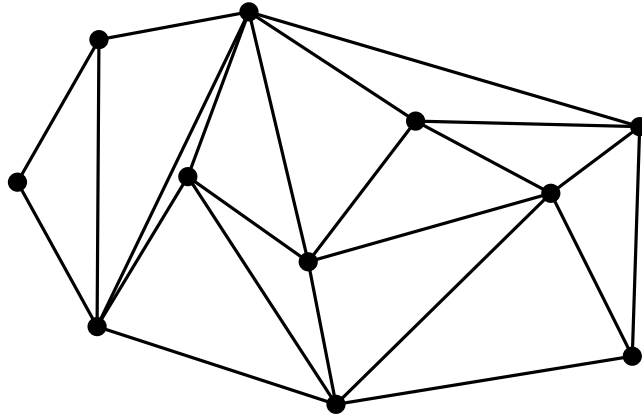
仮定 : P のすべてが 1 直線上にない



P の点を線分で結び, それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

仮定 : P のすべてが 1 直線上にない

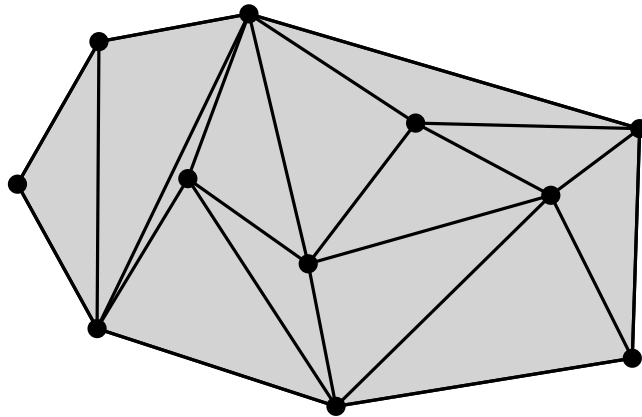


P の点を線分で結び、それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

$\leadsto$ 可能なかぎり続けると、 P の三角形分割が得られる

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

仮定 : P のすべてが 1 直線上にない

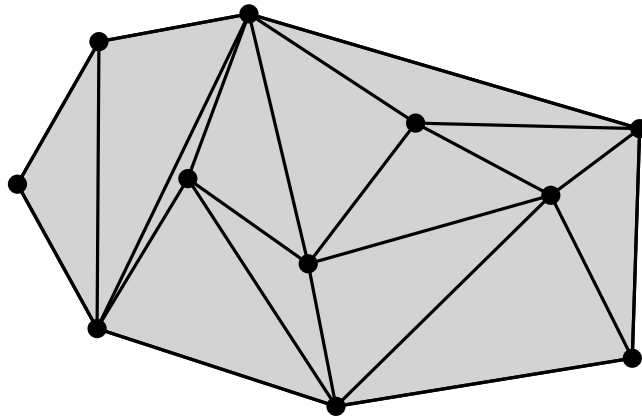


P の点を線分で結び、それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

$\leadsto$ 可能なかぎり続けると, P の三角形分割が得られる

極大な非交差幾何グラフ $\leadsto$ 三角形分割 24/36

仮定 : P のすべてが 1 直線上にない

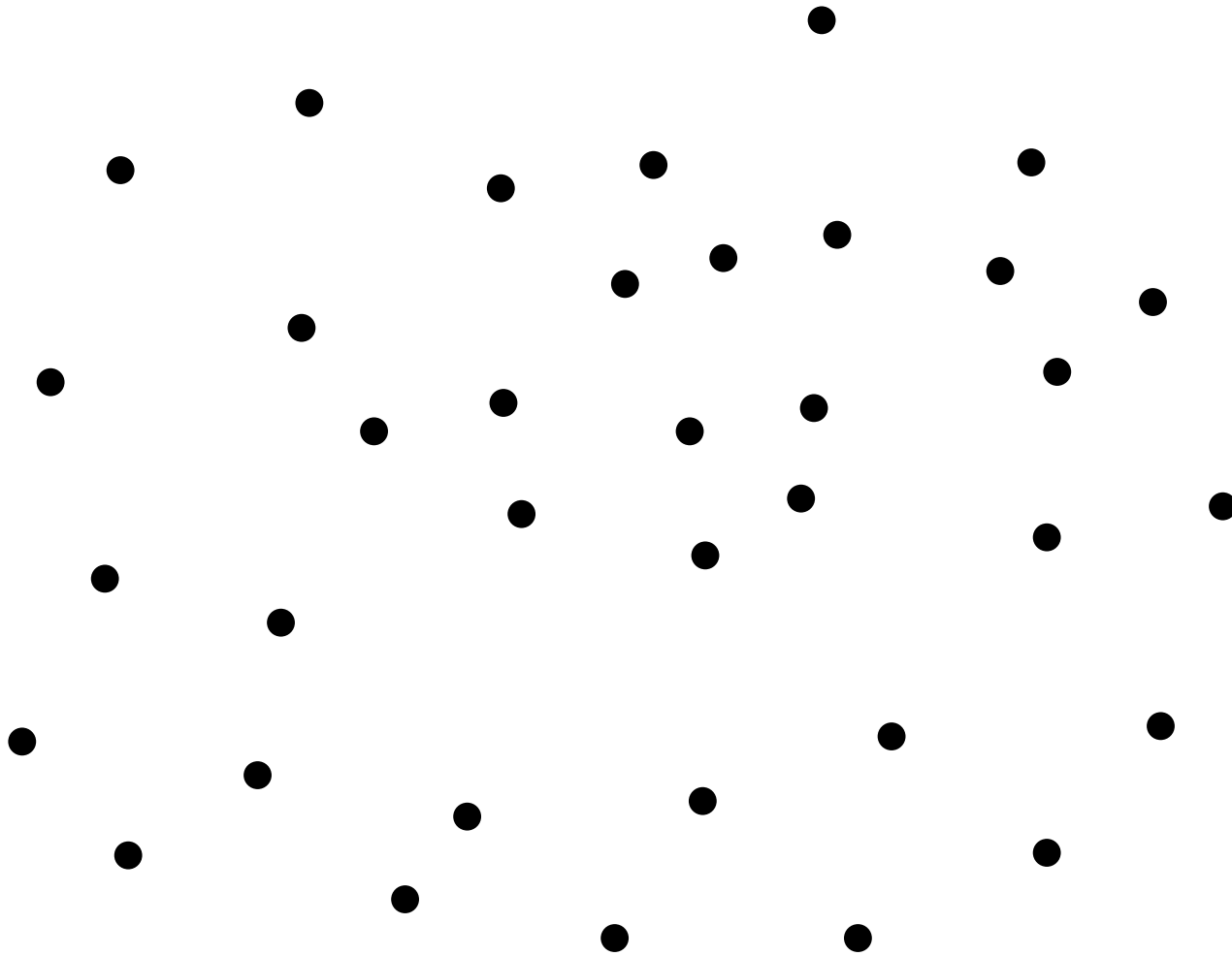


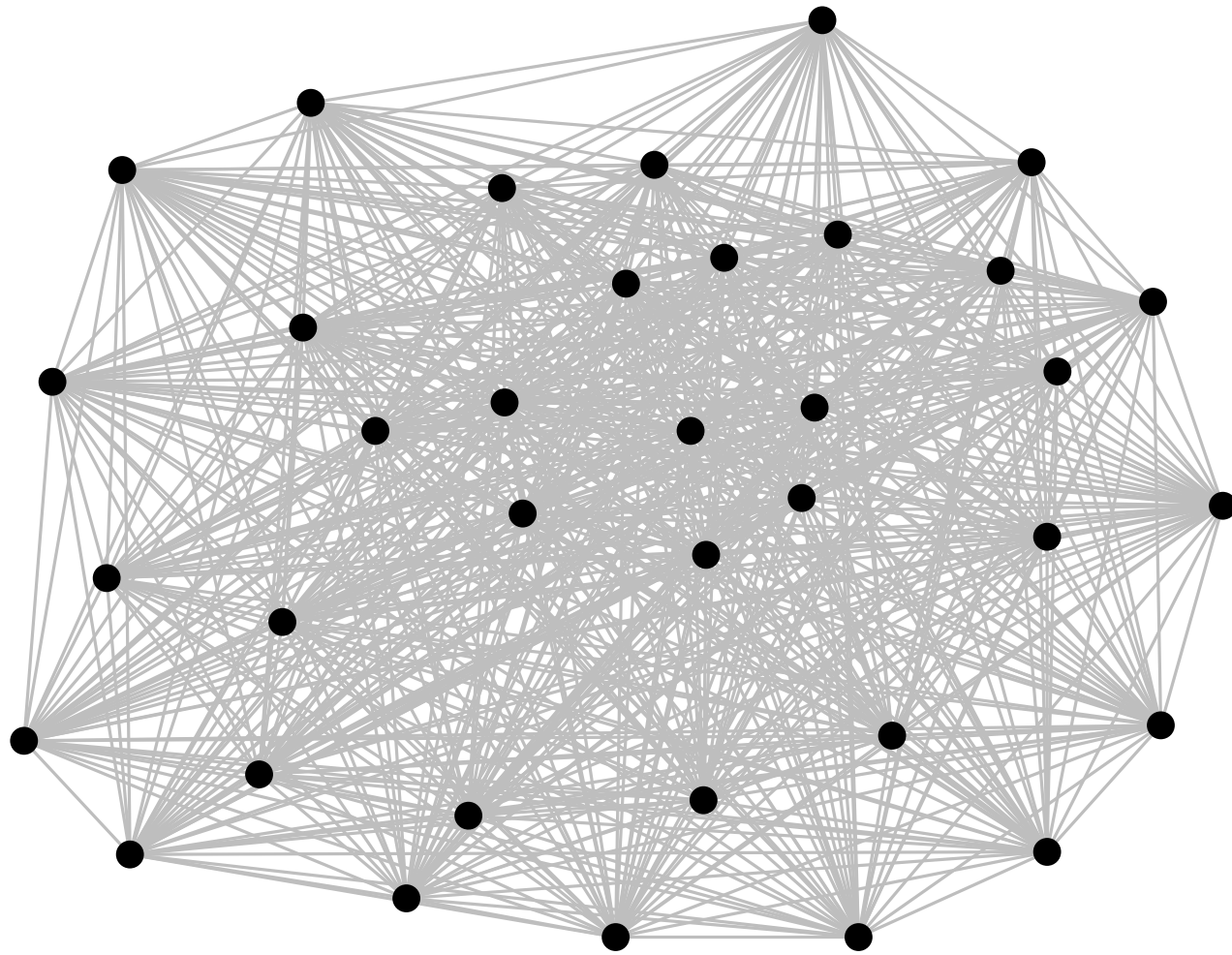
P の点を線分で結び、それらが交差しないようにする
(P の他の点を相対的内部に含まないようにもする)

$\leadsto$ 可能なかぎり続けると、 P の三角形分割が得られる

以後、 P の三角形分割と
三角形分割の辺からできる幾何グラフを
区別しないこともある

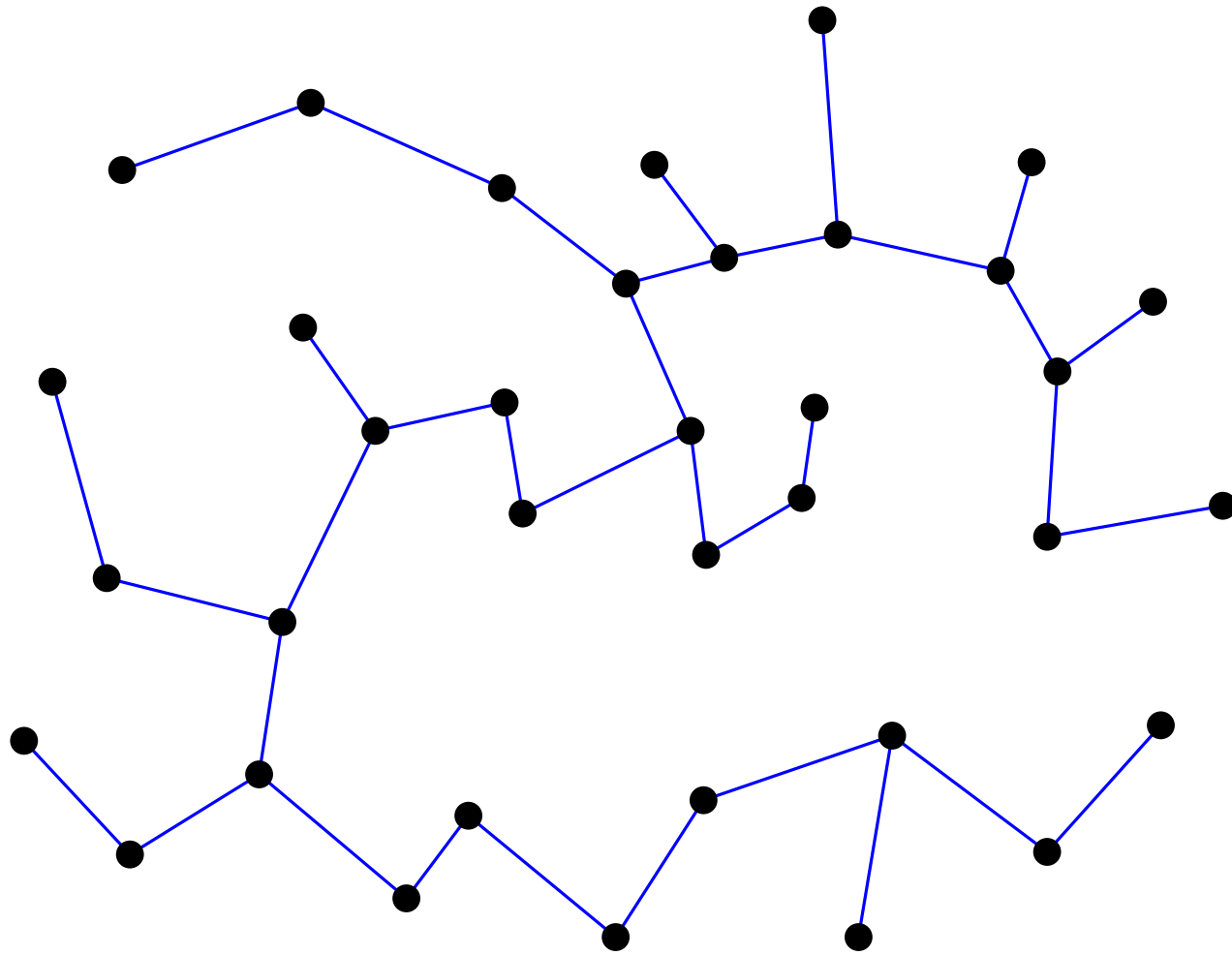
1. グラフと幾何グラフの用語
2. 単位円グラフとデローネ三角形分割
3. **デローネ三角形分割と最小全域木**
4. 他の近接グラフ





完全幾何グラフ = すべての2点間を線分で結ぶ

辺の重み = 線分の長さ



完全幾何グラフ = すべての2点間を線分で結ぶ

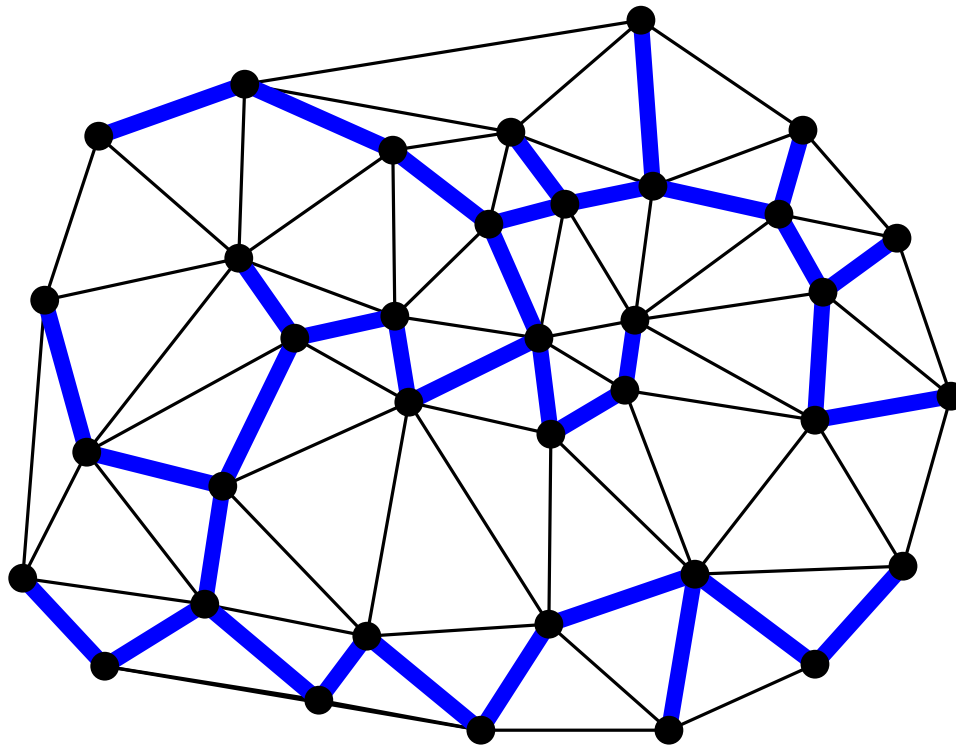
辺の重み = 線分の長さ

有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$, P を頂点集合とする完全幾何グラフ G

性質：最小全域木とデローネ・グラフ

e が G の最小全域木の辺

$\Rightarrow e$ は P のデローネ・グラフの辺

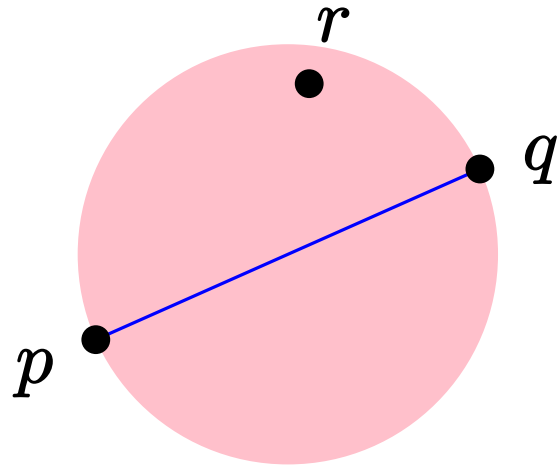


証明：最小全域木 T の辺 $\overline{pq}$ がデローネ・グラフの辺ではないと仮定する



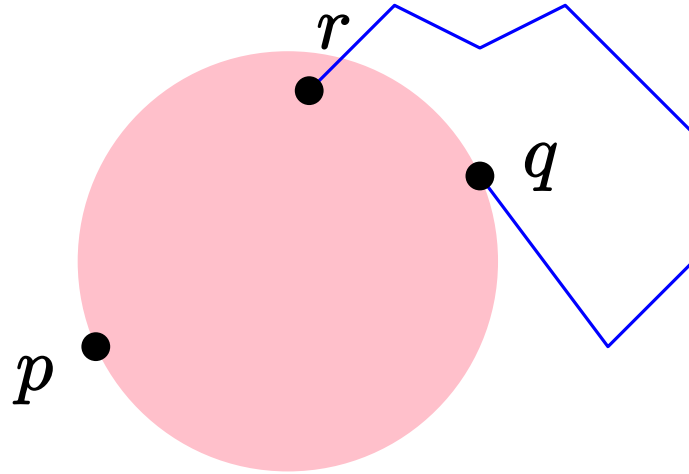
- $\overline{pq}$ を直径とする円板は P の他の点を含む
($\because$ デローネ・グラフの定義)
- そのような点を 1 つ取り, r とする

証明：最小全域木 T の辺 $\overline{pq}$ がデローネ・グラフの辺ではないと仮定する



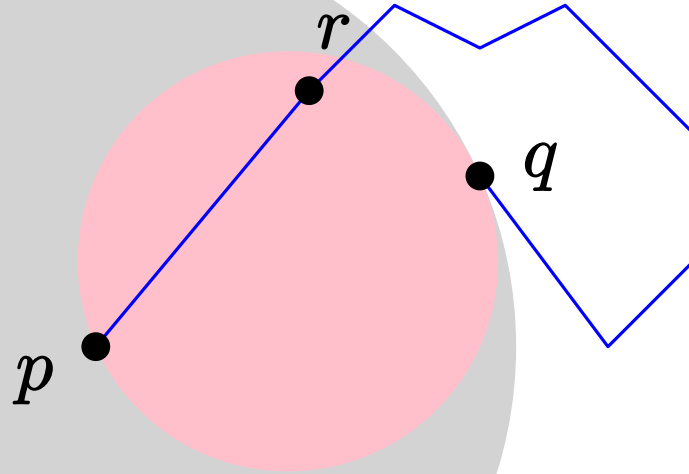
- $\overline{pq}$ を直径とする円板は P の他の点を含む
($\because$ デローネ・グラフの定義)
- そのような点を 1 つ取り, r とする

証明：最小全域木 T の辺 pq がデローネ・グラフの辺ではないと仮定する



- pq を直径とする円板は P の他の点を含む
($\because$ デローネ・グラフの定義)
- そのような点を 1 つ取り, r とする
- この最小全域木から pq を取り除いたとき,
 r から p にたどり着けないとする

証明：最小全域木 T の辺 pq がデローネ・グラフの辺ではないと仮定する



- pq を直径とする円板は P の他の点を含む
($\because$ デローネ・グラフの定義)
- そのような点を 1 つ取り, r とする
- この最小全域木から pq を取り除いたとき,
 r から p にたどり着けないとする
- pr を付け加えると, T よりも重みの小さな全域木が得られ, T が最小全域木であったことに矛盾

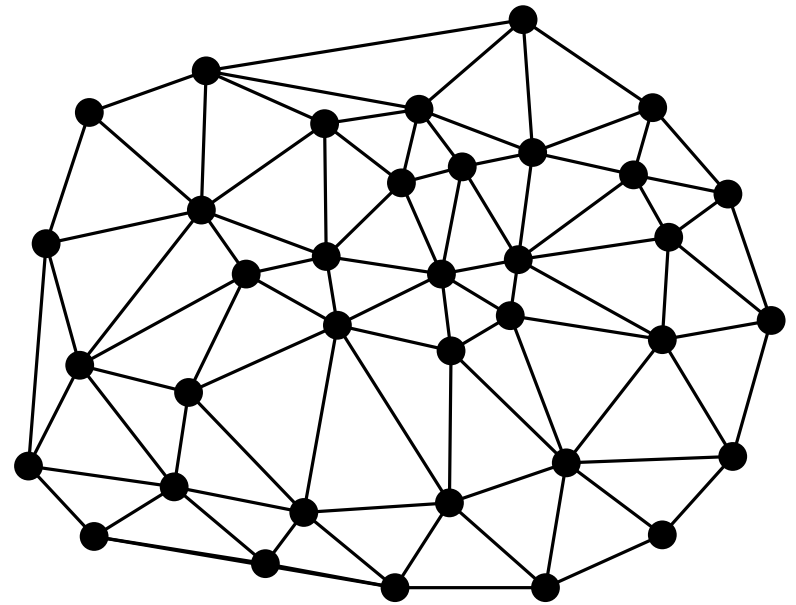
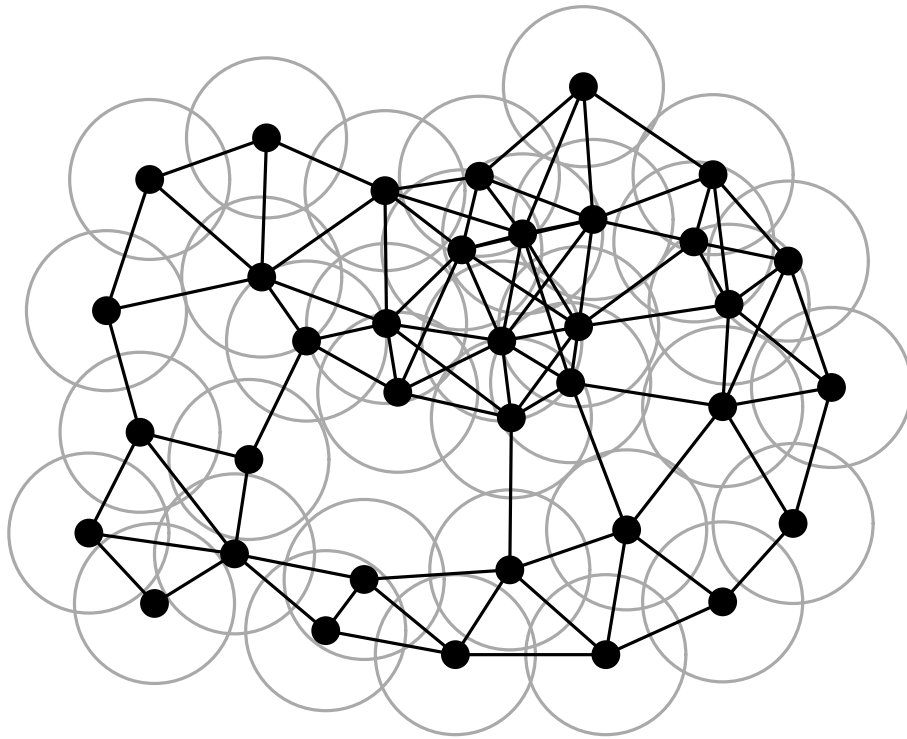
□

有限点集合 P , P を頂点集合とする単位円グラフ G

性質：単位円グラフの最小全域木

e が G の最小全域木の辺

$\Rightarrow e$ は P のデローネ・グラフの辺



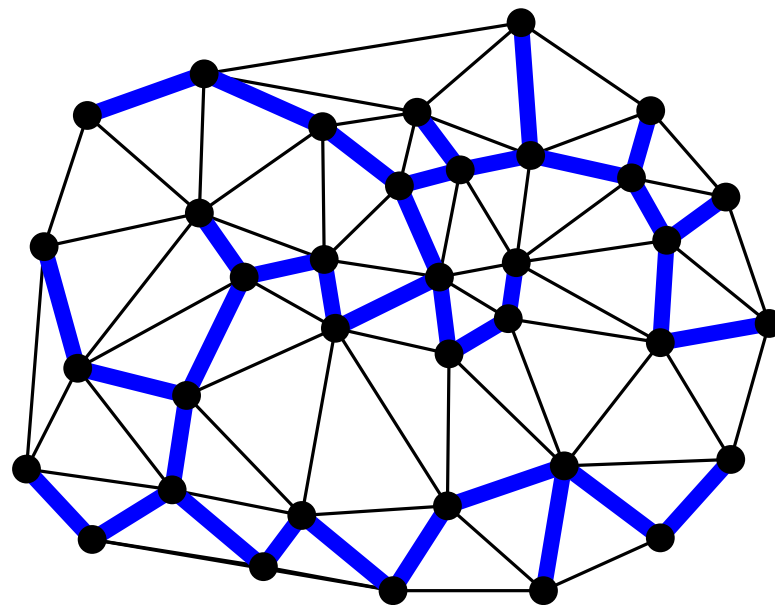
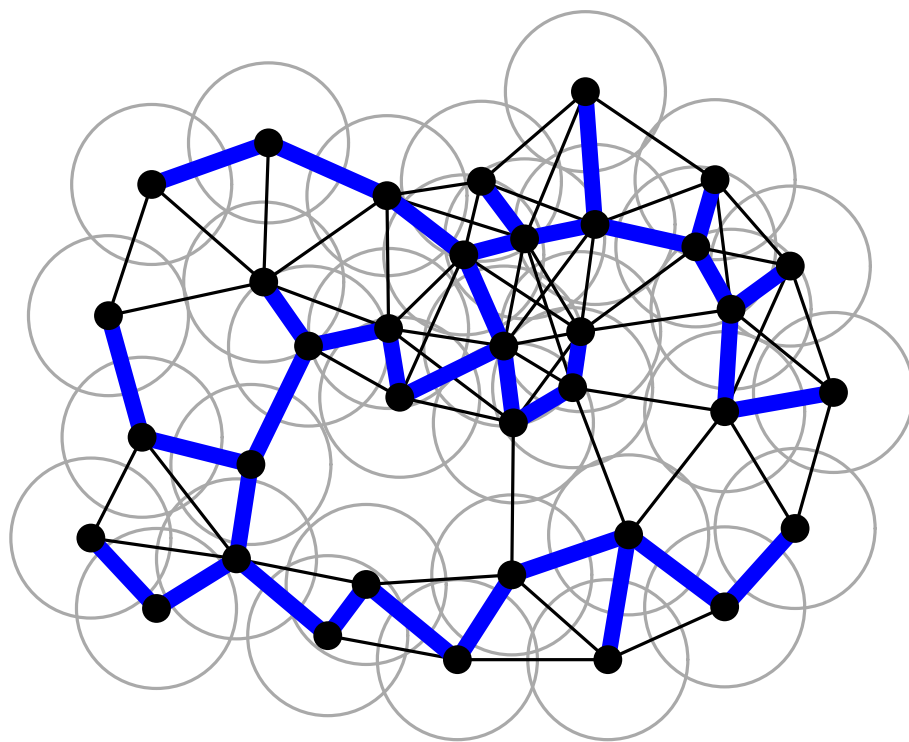
証明：演習問題

有限点集合 P , P を頂点集合とする単位円グラフ G

性質：単位円グラフの最小全域木

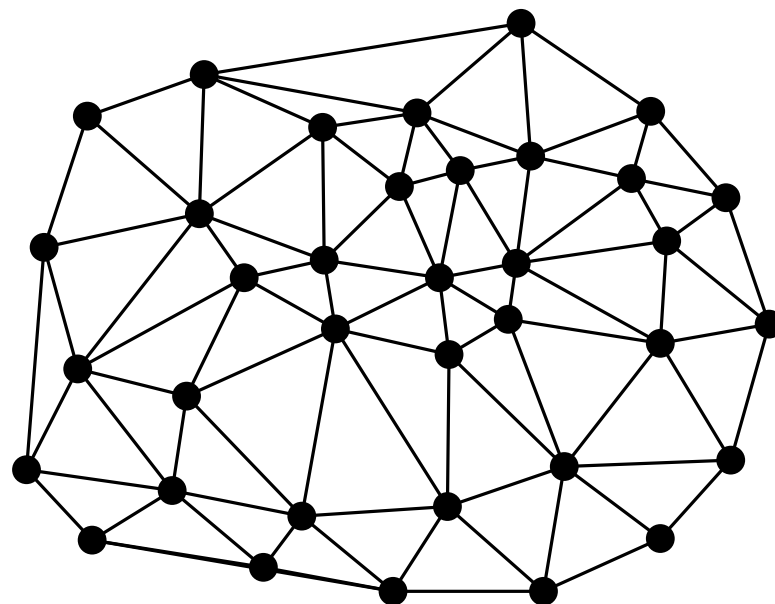
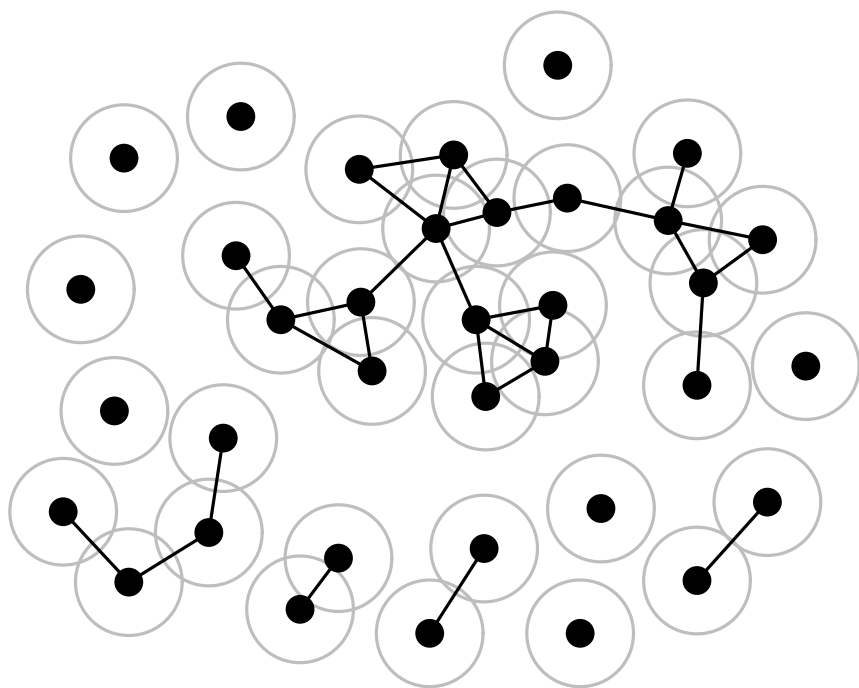
e が G の最小全域木の辺

$\Rightarrow e$ は P のデローネ・グラフの辺



証明：演習問題

単位円グラフが連結でないとき，全域木は存在しない



性質 (再掲)：単位円グラフの最小全域木

e が G の最小全域木の辺

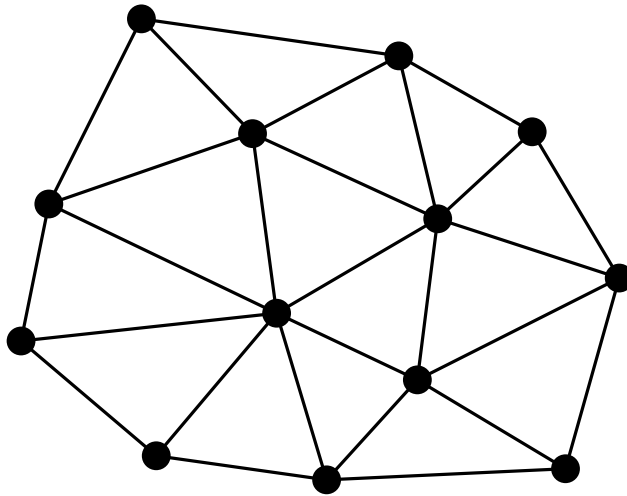
$\Rightarrow e$ は P のデローネ・グラフの辺

1. グラフと幾何グラフの用語
2. 単位円グラフとデローネ三角形分割
3. デローネ三角形分割と最小全域木
4. **他の近接グラフ**

定義 (非形式)：近接グラフ

点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ を頂点集合とする **近接グラフ** とは
ある意味で近い 2 点を辺とする幾何グラフ

デローネ・グラフにおける近さ：
他の点を含まない円板の存在

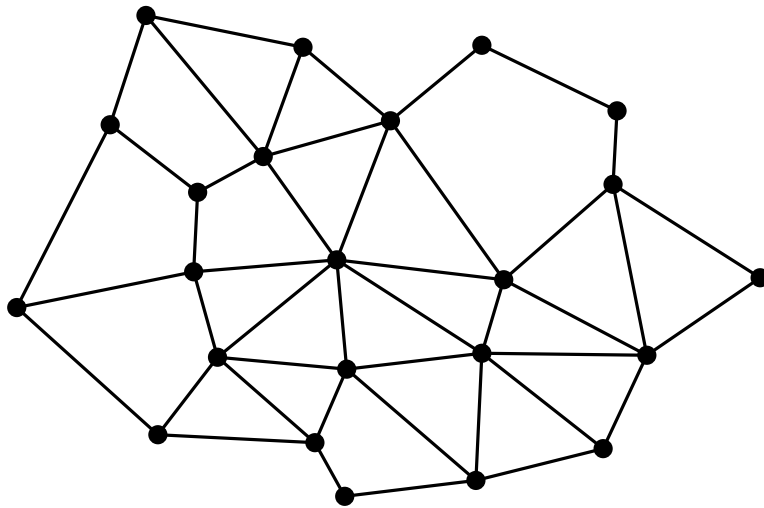


他の近さを考える $\leadsto$ 他の幾何グラフが得られる

定義：ガブリエル・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **ガブリエル・グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

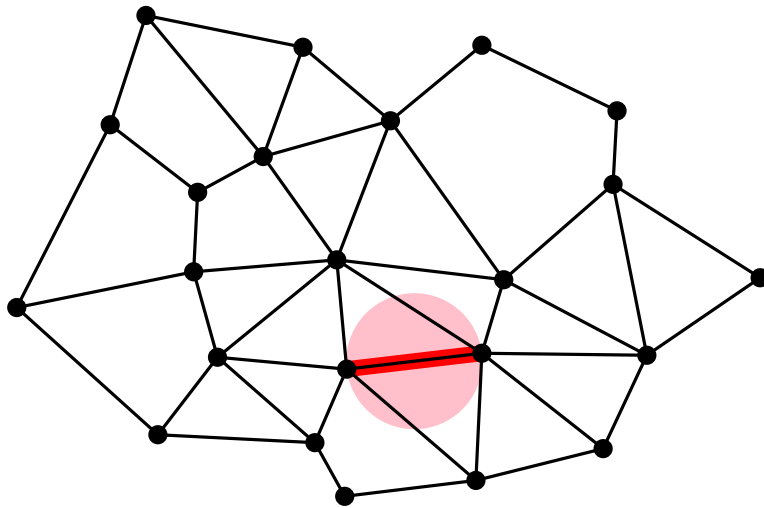
$$\bullet E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \overline{pq} \text{ を直径とする円板 } D \text{ に対して,} \\ \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$$



定義：ガブリエル・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **ガブリエル・グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

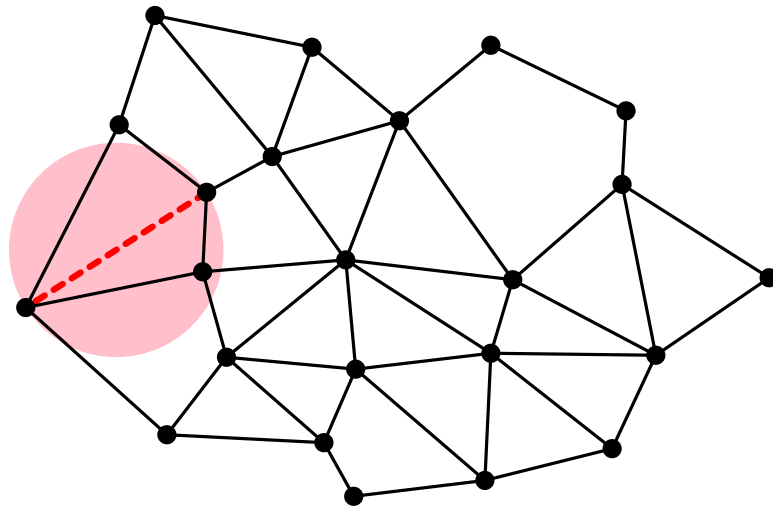
$$\bullet E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \overline{pq} \text{ を直径とする円板 } D \text{ に対して,} \\ \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$$



定義：ガブリエル・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **ガブリエル・グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

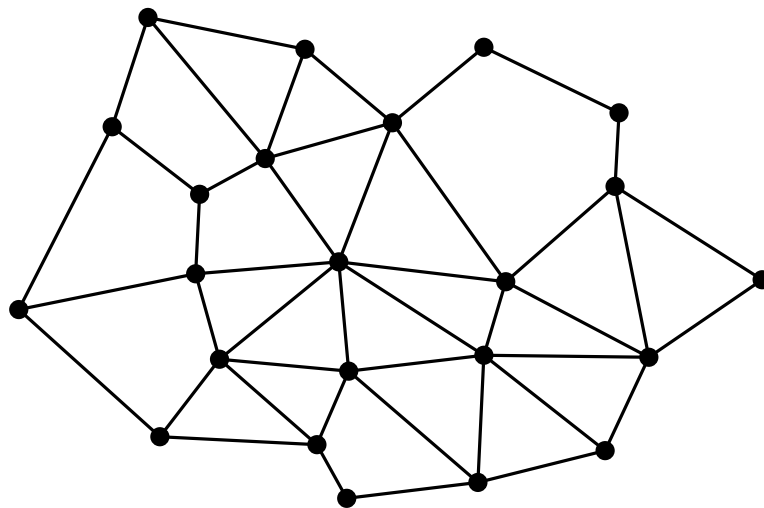
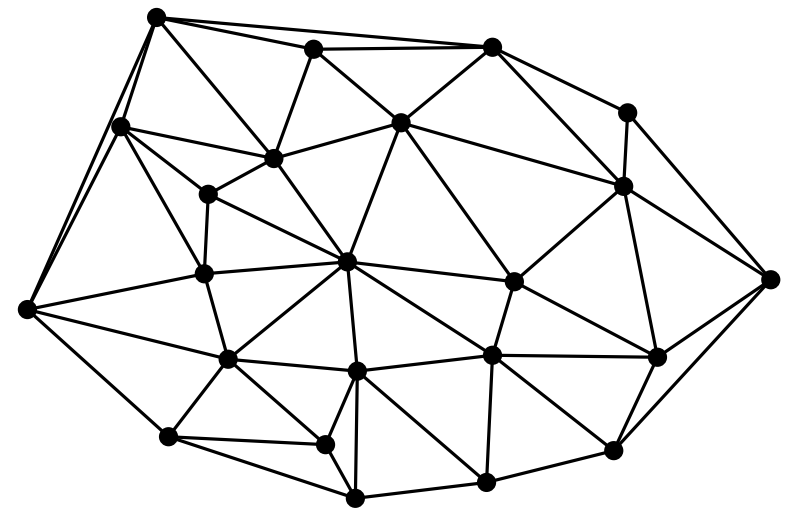
$$\bullet E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \overline{pq} \text{ を直径とする円板 } D \text{ に対して,} \\ \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$$



定義：ガブリエル・グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **ガブリエル・グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

$$E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ \overline{pq} \text{ を直径とする円板 } D \text{ に対して,} \\ \{p, q\} = D \cap P \end{array} \right\}$$

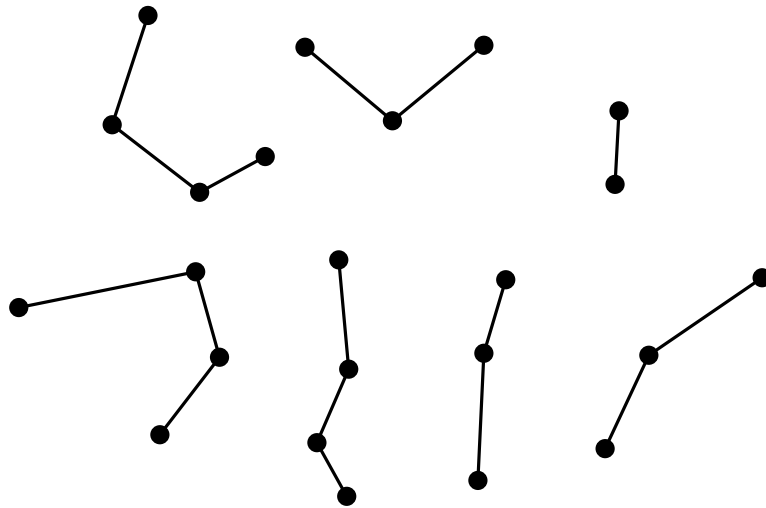
 $\cong$ 

デローネ・グラフ

定義：最近点グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **最近点グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

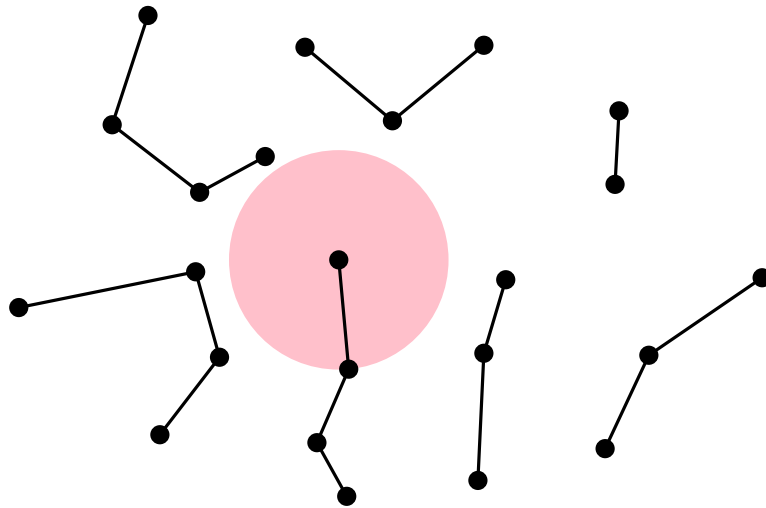
$$\bullet E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ |\overline{pq}| = \min\{|\overline{pr}| \mid r \in P - \{p\}\} \end{array} \right\}$$



定義：最近点グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **最近点グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

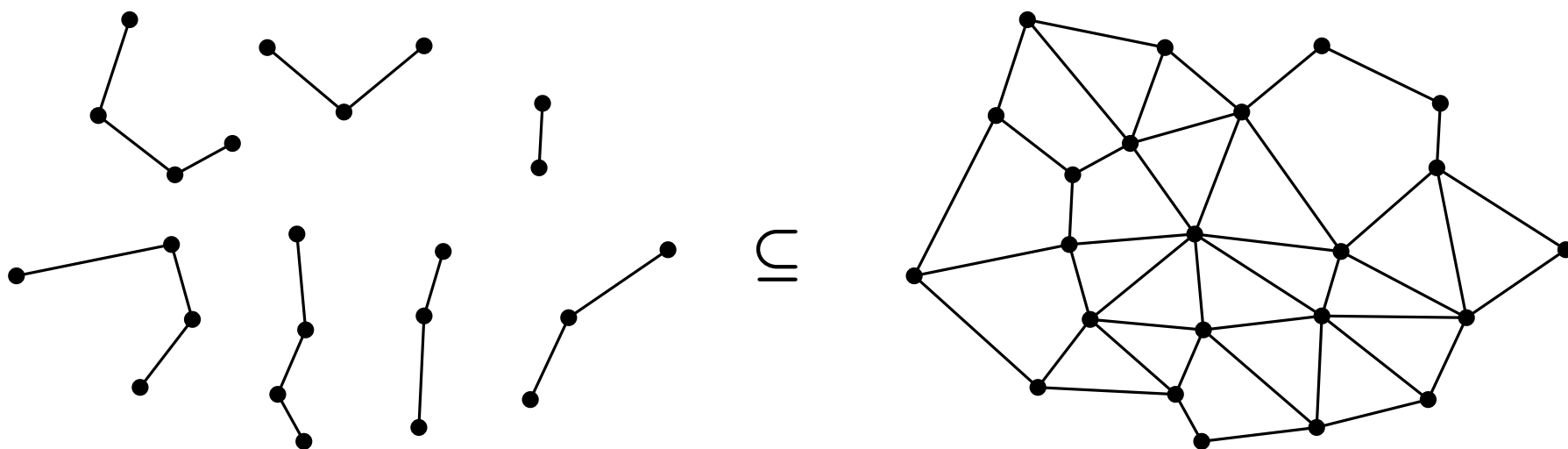
$$\bullet E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ |\overline{pq}| = \min\{|\overline{pr}| \mid r \in P - \{p\}\} \end{array} \right\}$$



定義：最近点グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **最近点グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

$$\bullet E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ |\overline{pq}| = \min\{|\overline{pr}| \mid r \in P - \{p\}\} \end{array} \right\}$$

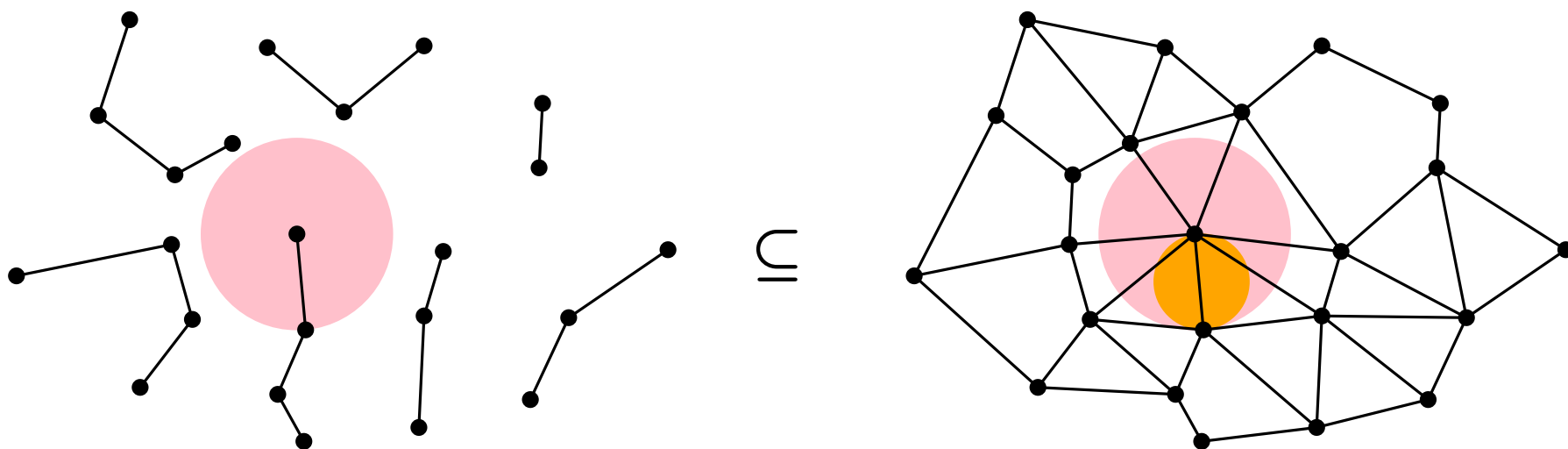


ガブリエル・グラフ

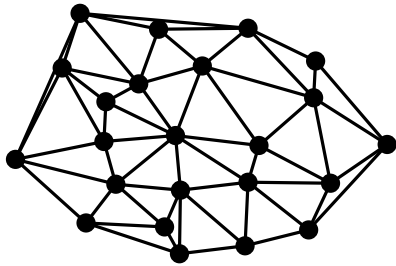
定義：最近点グラフ

平面上の点集合 P を頂点集合とする **最近点グラフ** とは、次の集合 E を辺集合とする幾何グラフ

$$E = \left\{ \text{線分 } \overline{pq} \mid \begin{array}{l} p, q \in P, \\ |\overline{pq}| = \min\{|\overline{pr}| \mid r \in P - \{p\}\} \end{array} \right\}$$

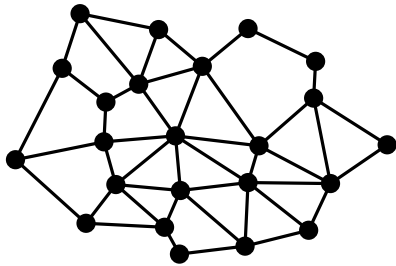


ガブリエル・グラフ



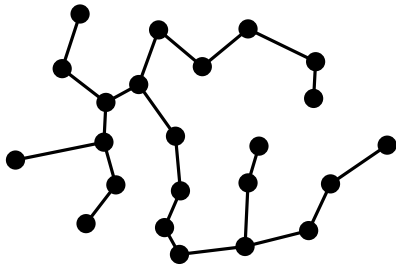
デローネ・グラフ

UI



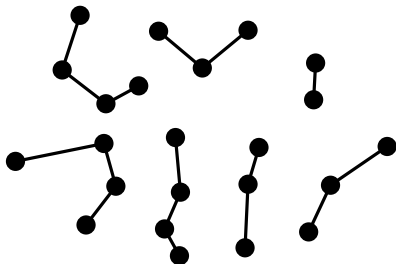
ガブリエル・グラフ

UI (演習問題)



最小全域木

UI (演習問題)



最近点グラフ

今日の目標

点集合から得られるグラフを使って問題解決ができる

- デローネ三角形分割
- 単位円の交差グラフ

近接グラフ同士の間係を証明できる

教訓

計算幾何においても、グラフは重要な役割を果たす