

離散数理工学 (2025 年度後学期)

第2回

低次元 (2) : 点配置と直線配置

岡本 吉央 (電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 10 月 28 日

最終更新 : 2025 年 10 月 18 日 11:20

今日の目標

点と直線の双対変換 を使って，問題を解決できる

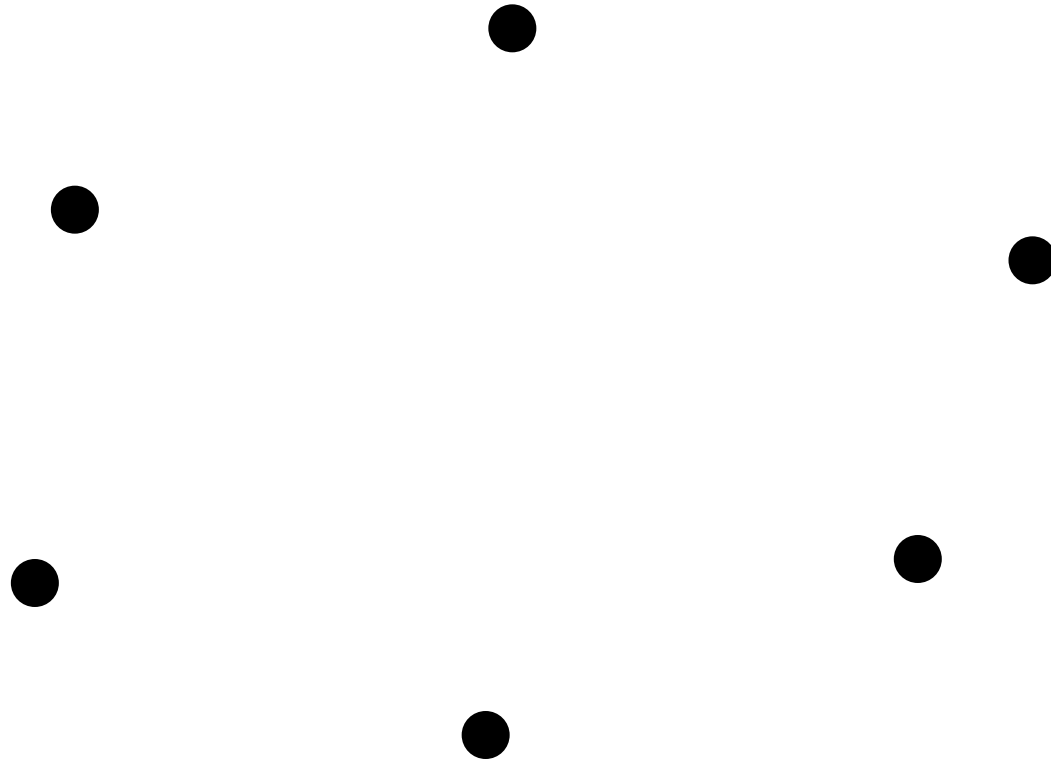
- 例：凸包の計算

教訓

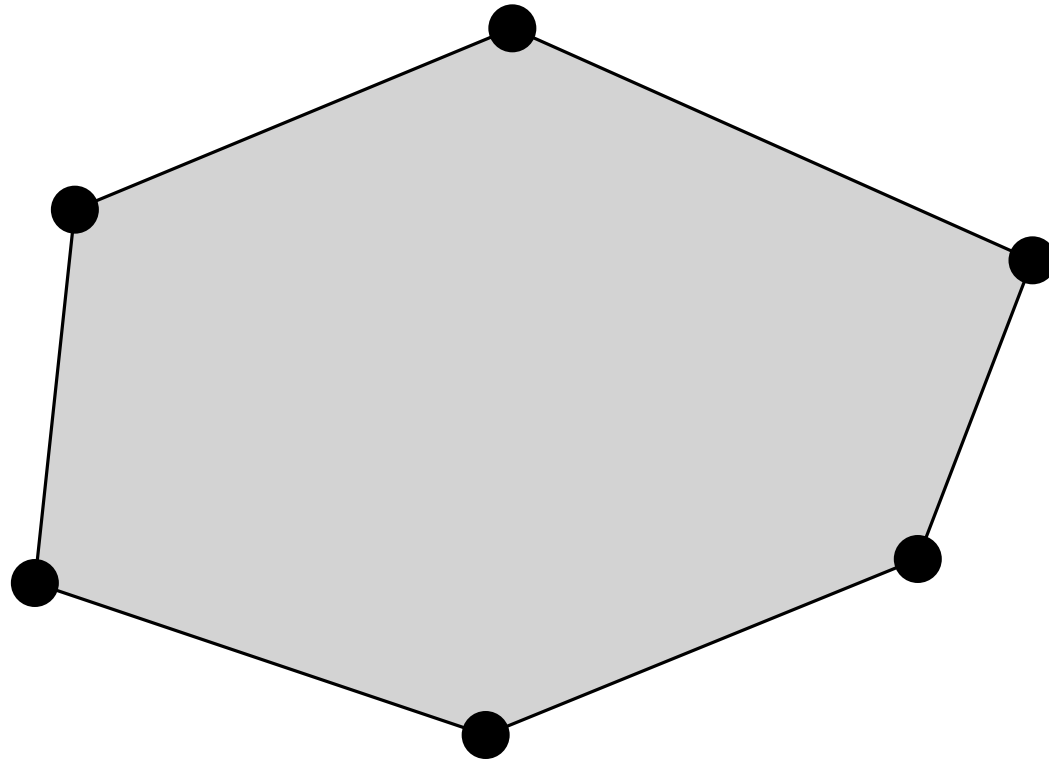
ひとつの対象を さまざまな視点から 眺める

1. **凸多角形を記述する方法**
2. 点と直線の双対変換
3. 直線配置
4. 双対変換と凸多角形

頂点集合から一意に決まる



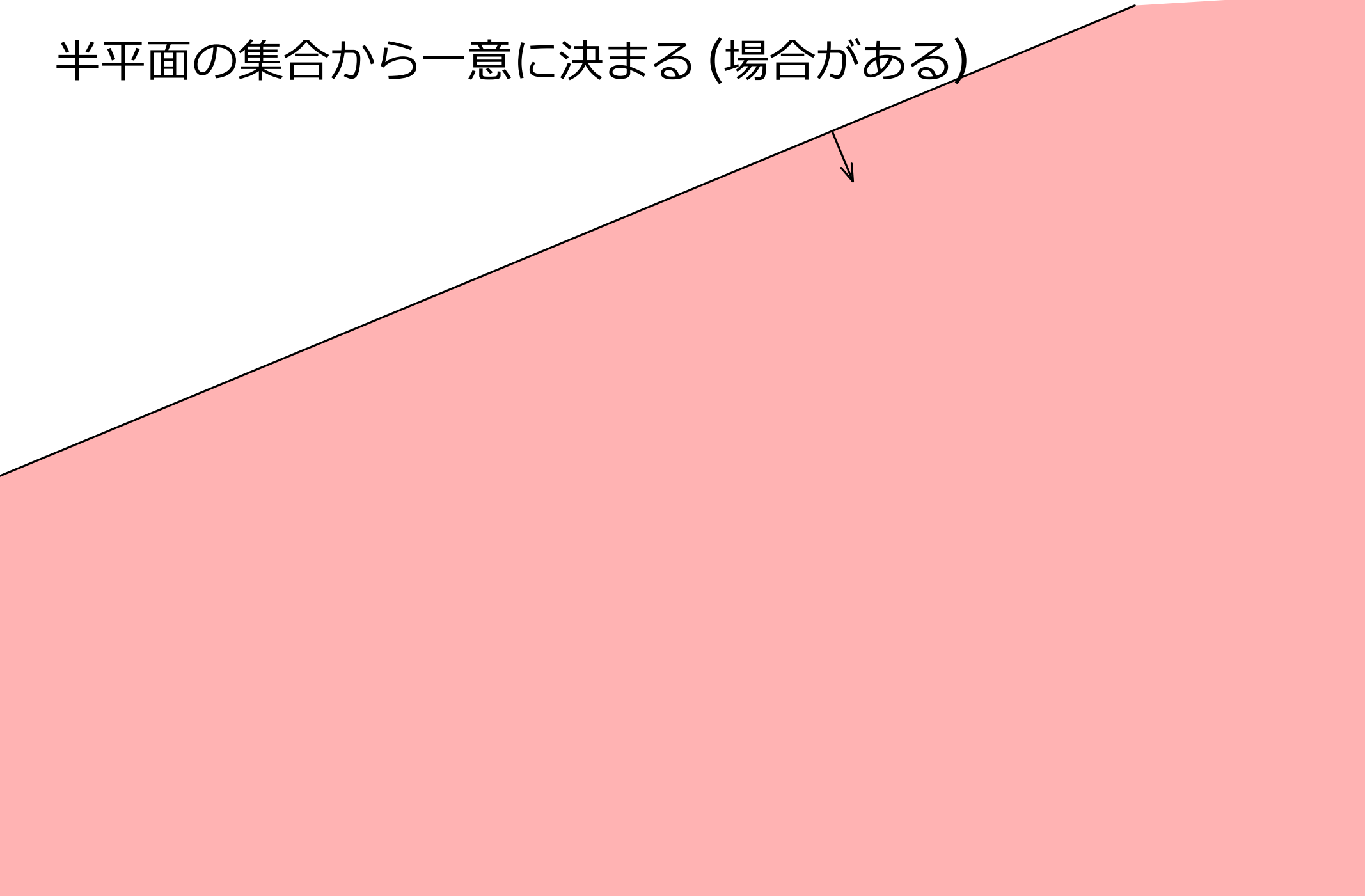
頂点集合から一意に決まる



凸多角形の半平面による記述：例

5/38

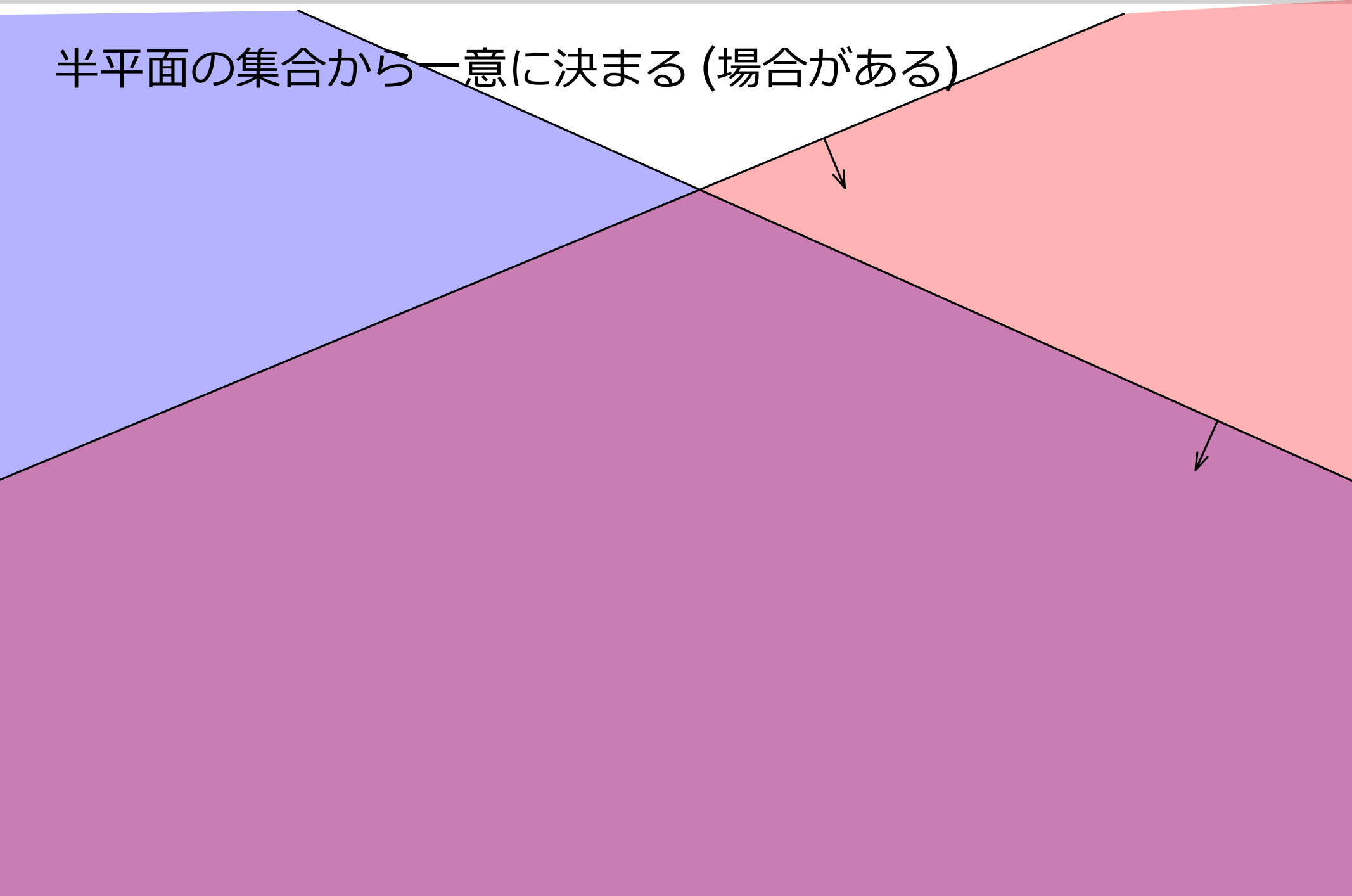
半平面の集合から一意に決まる (場合がある)



凸多角形の半平面による記述：例

5/38

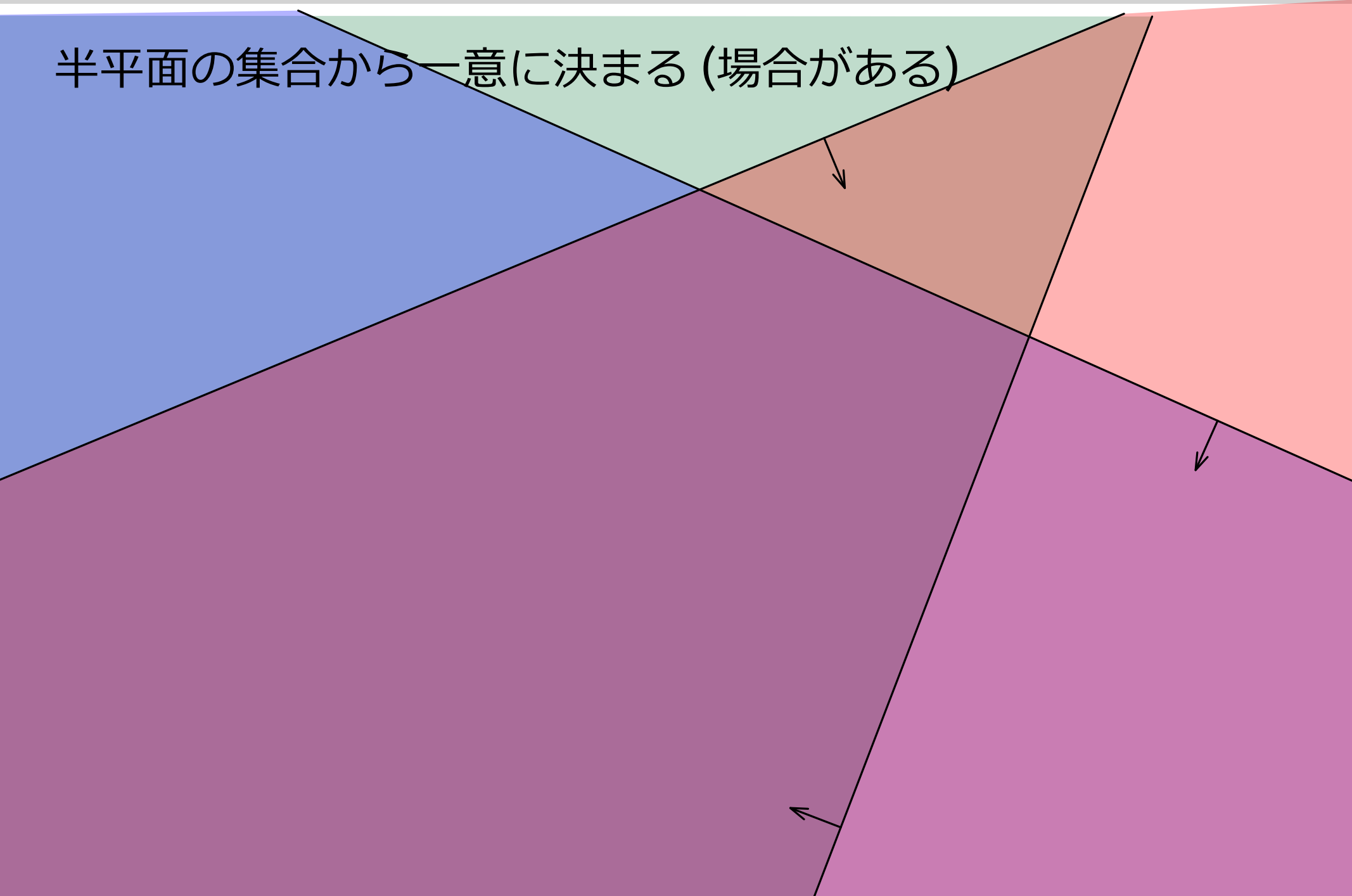
半平面の集合から一意に決まる (場合がある)



凸多角形の半平面による記述：例

5/38

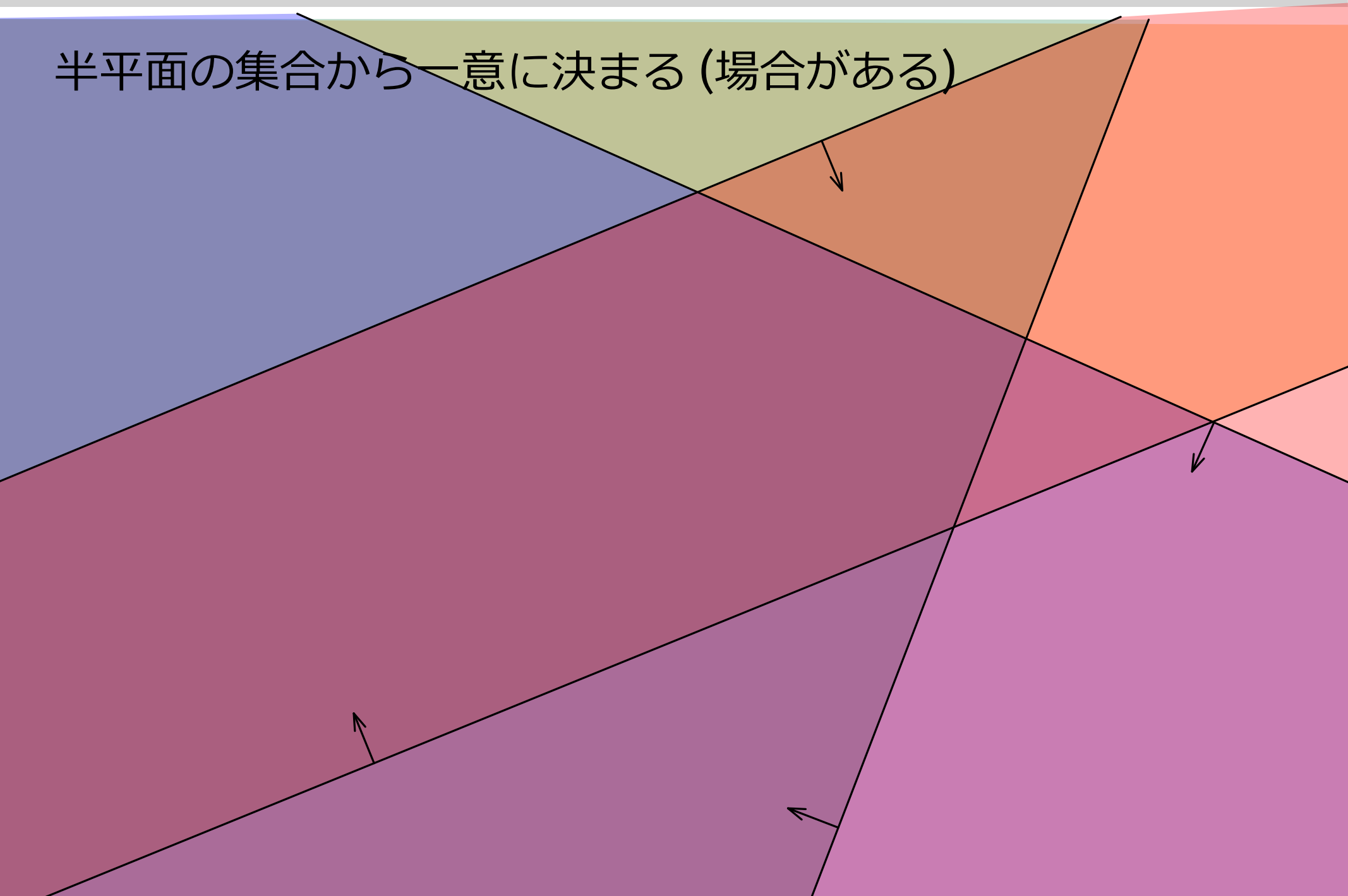
半平面の集合から一意に決まる (場合がある)



凸多角形の半平面による記述：例

5/38

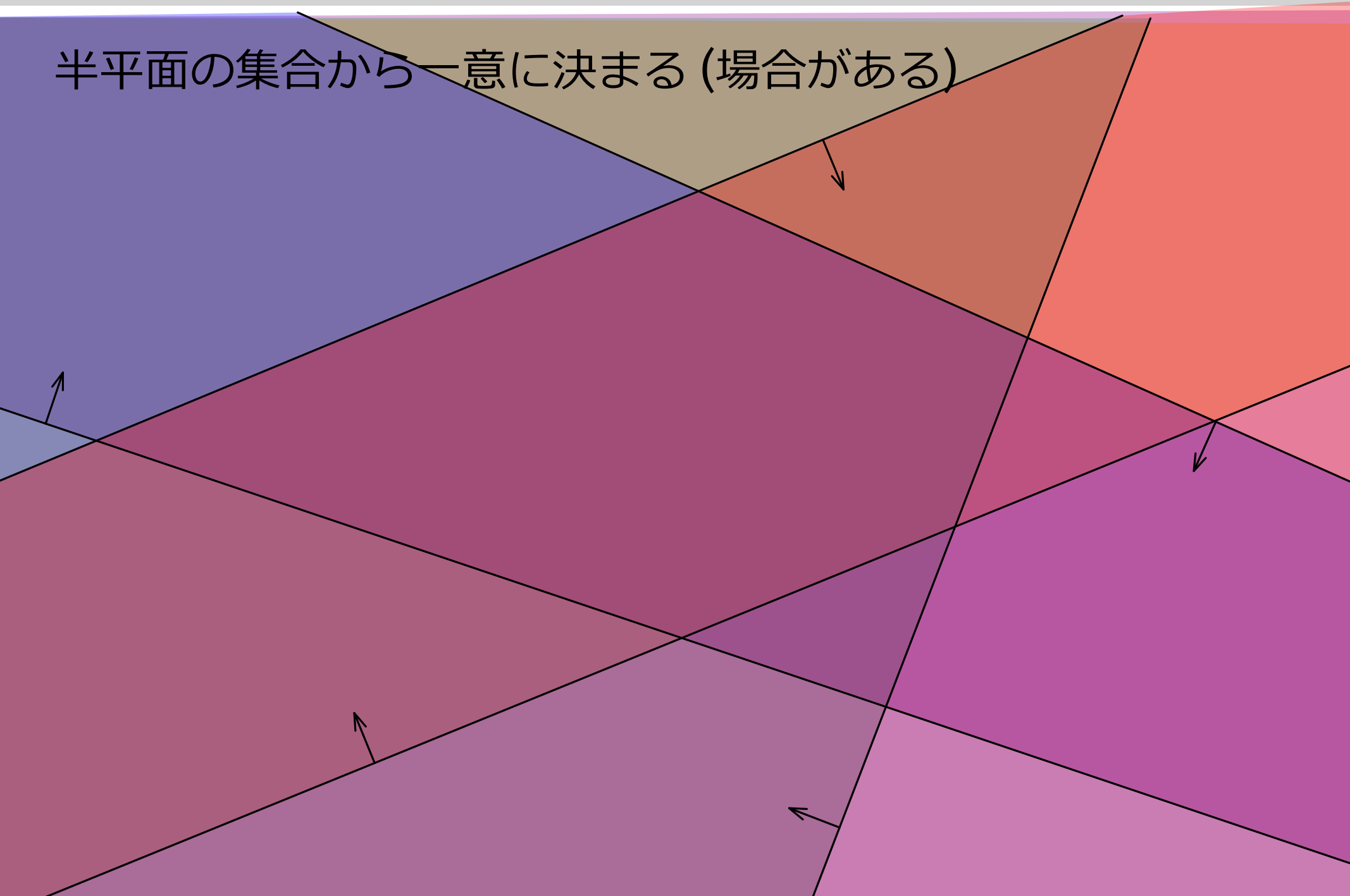
半平面の集合から一意に決まる (場合がある)



凸多角形の半平面による記述：例

5/38

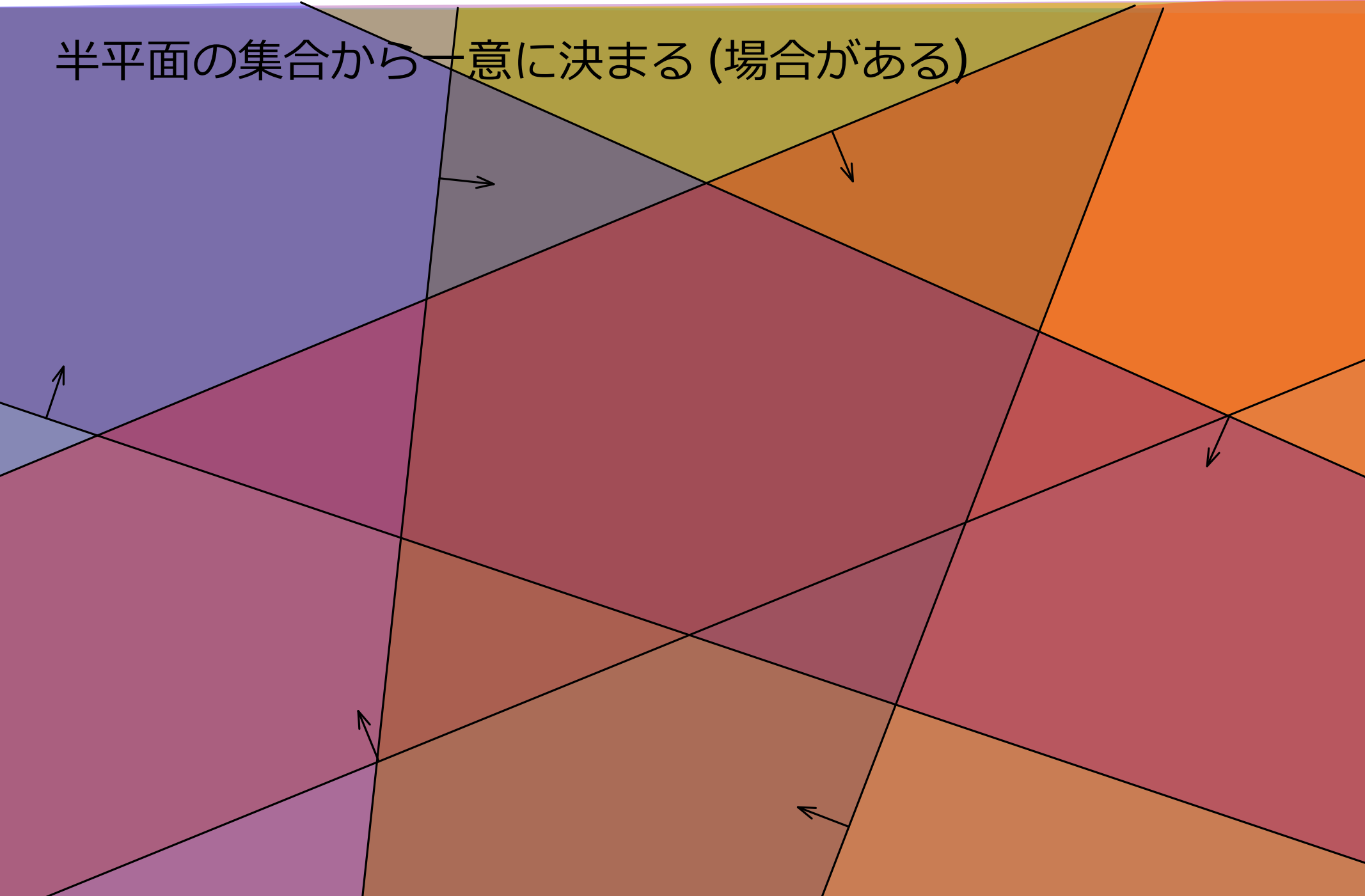
半平面の集合から一意に決まる (場合がある)



凸多角形の半平面による記述：例

5/38

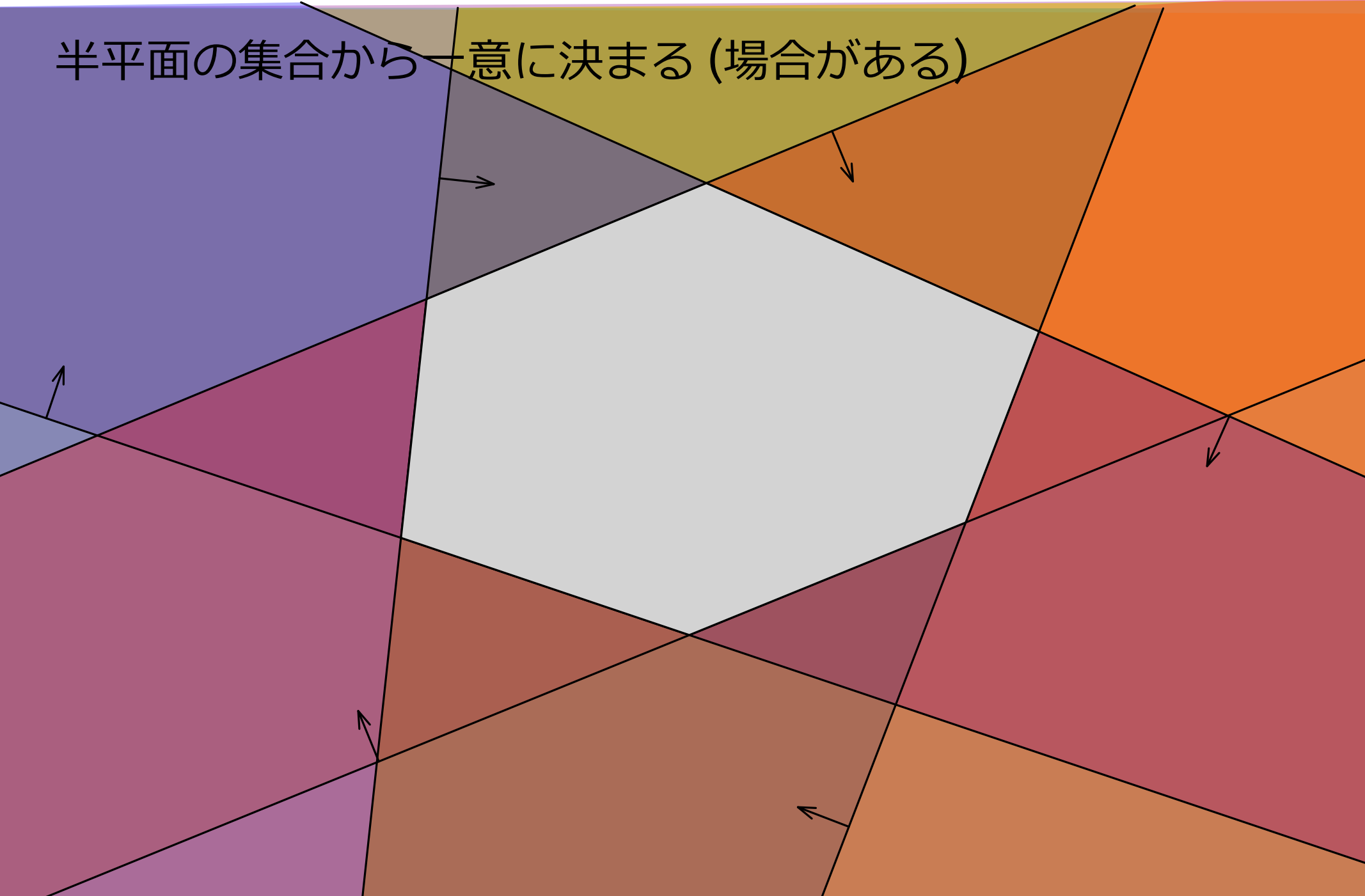
半平面の集合から一意に決まる (場合がある)



凸多角形の半平面による記述：例

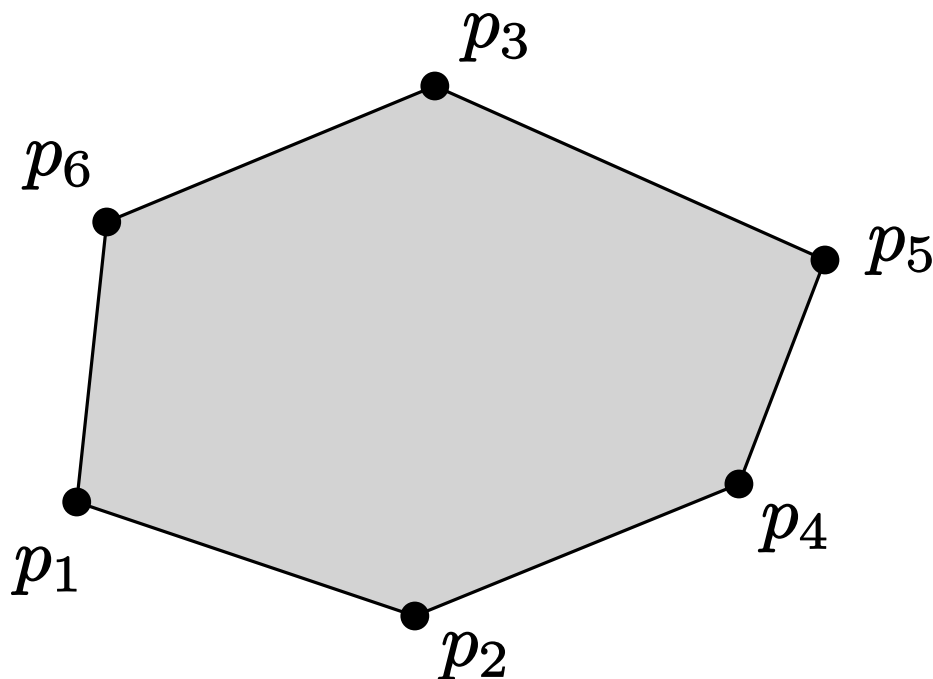
5/38

半平面の集合から一意に決まる (場合がある)



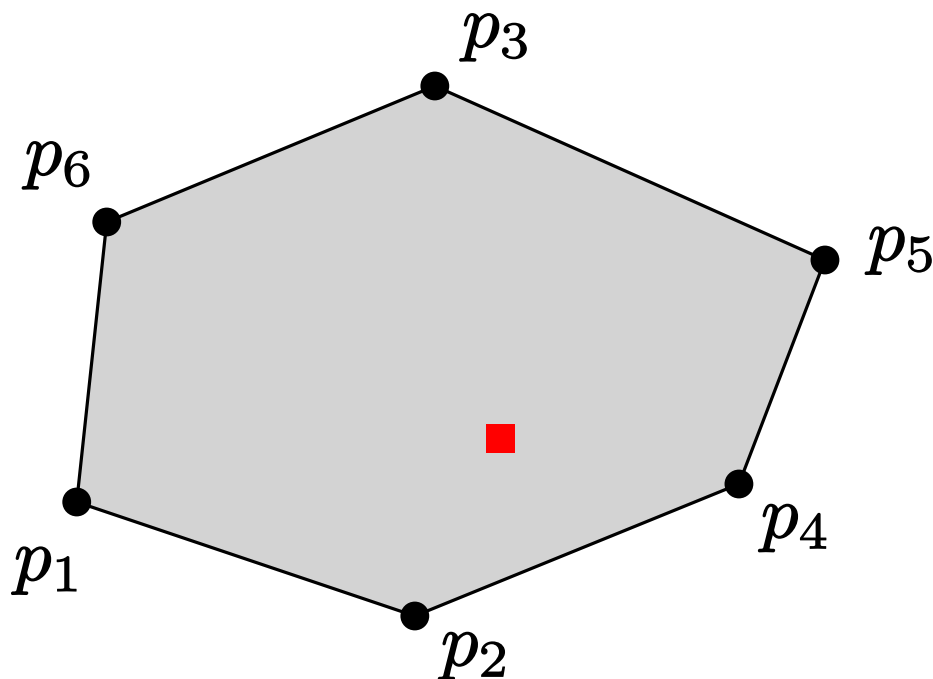
頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



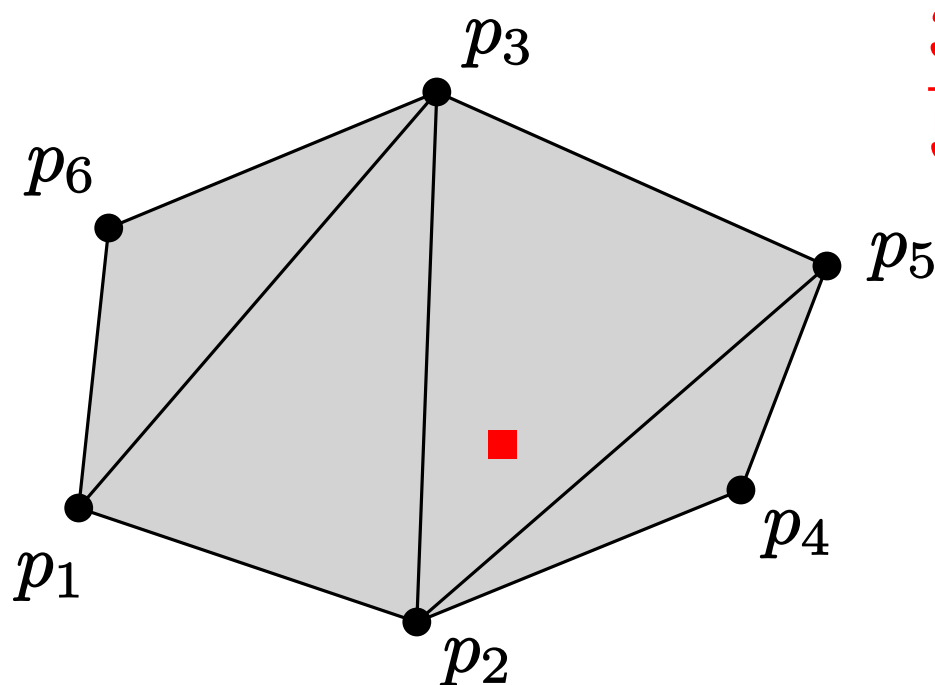
頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

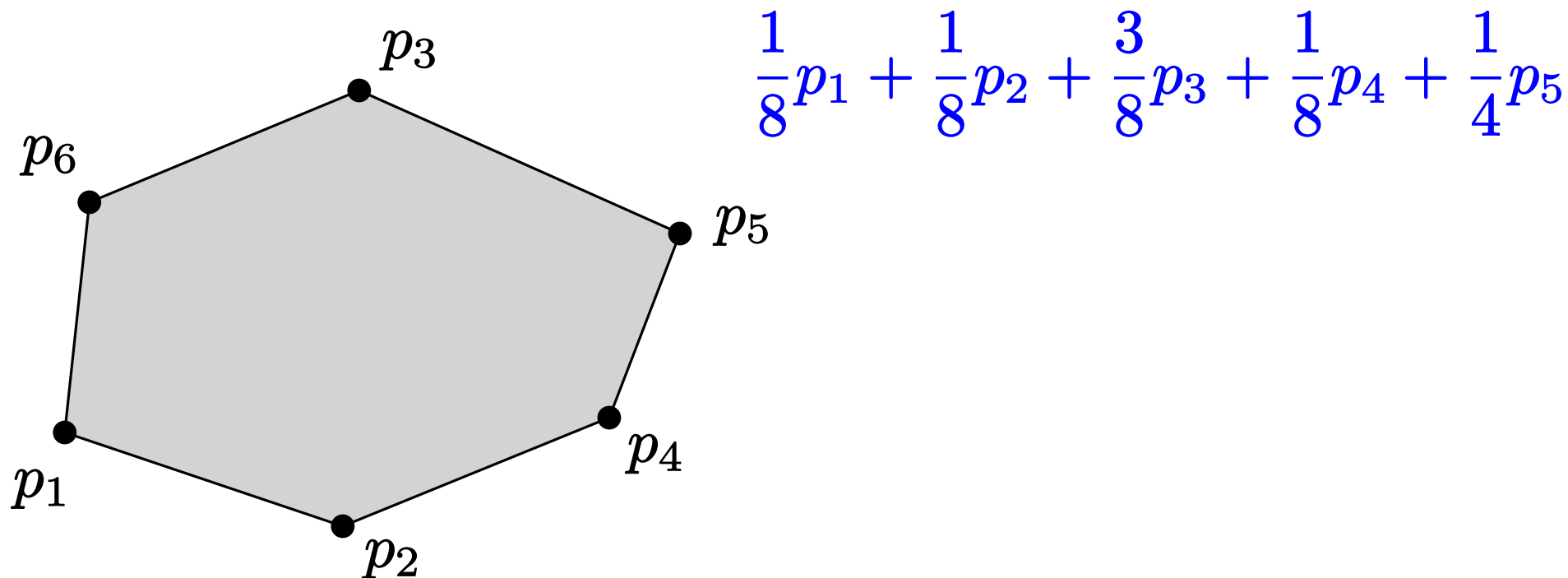
$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



$$\frac{3}{5}p_2 + \frac{1}{5}p_3 + \frac{1}{5}p_5$$

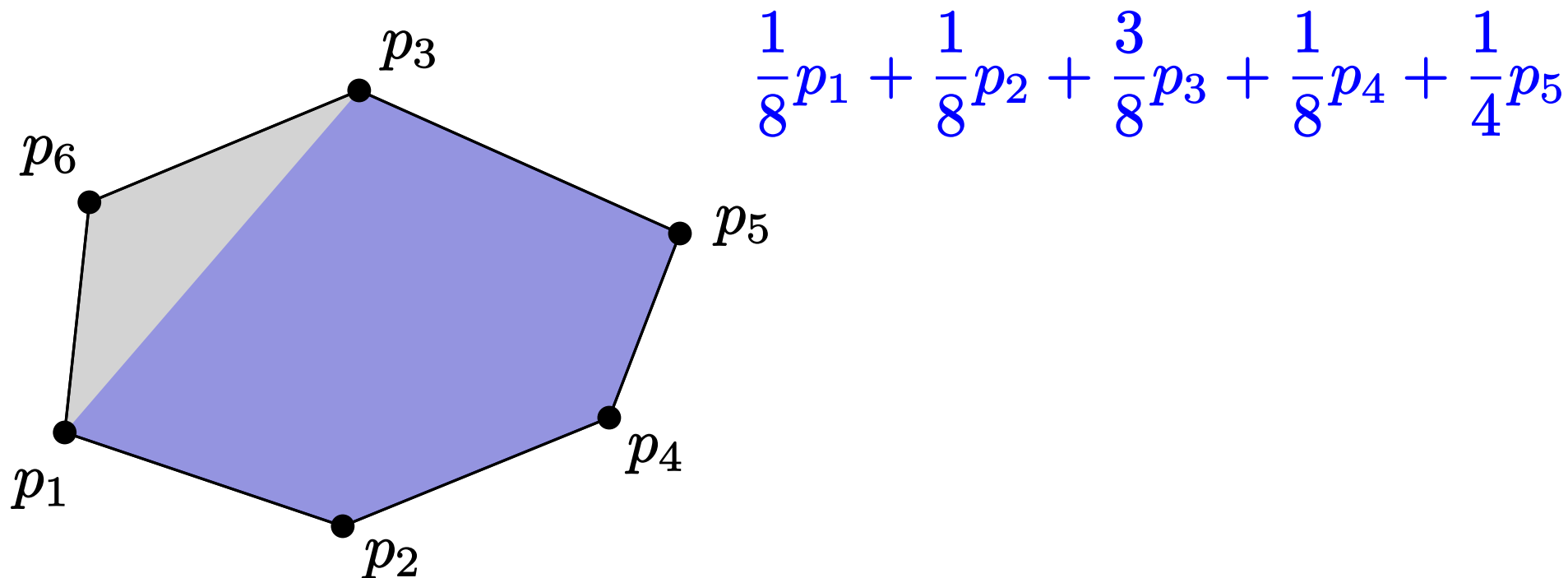
頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



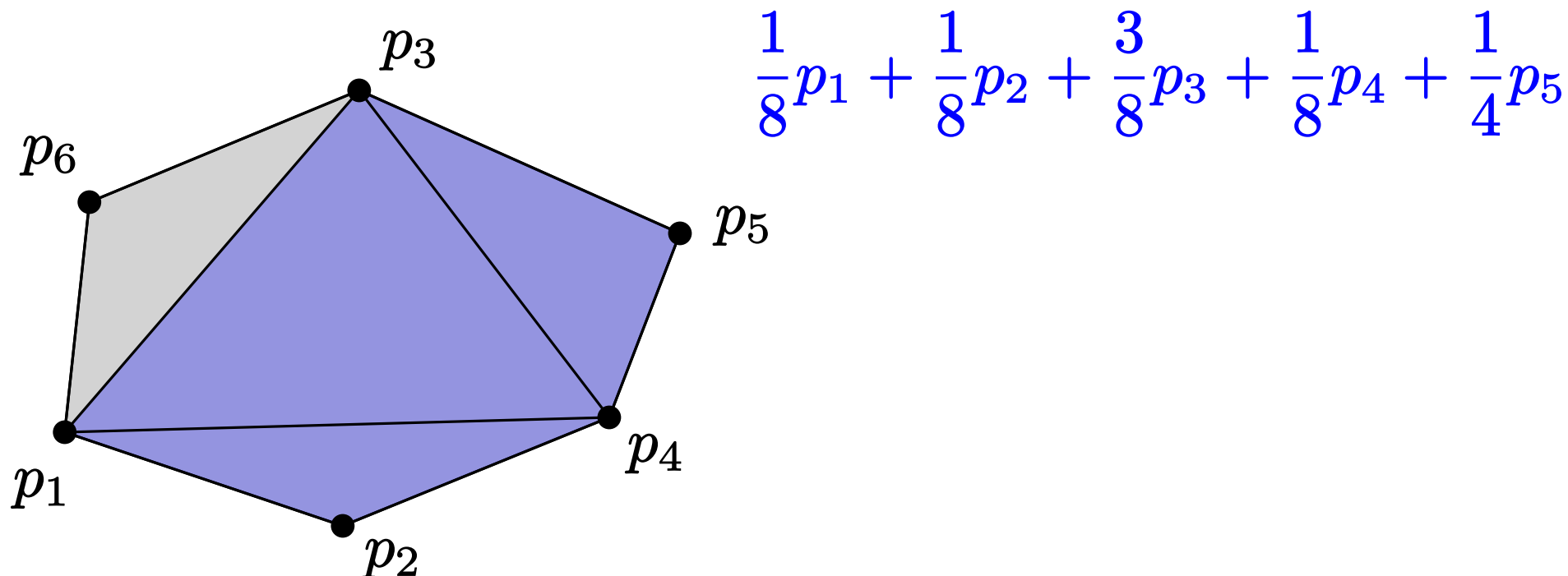
頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



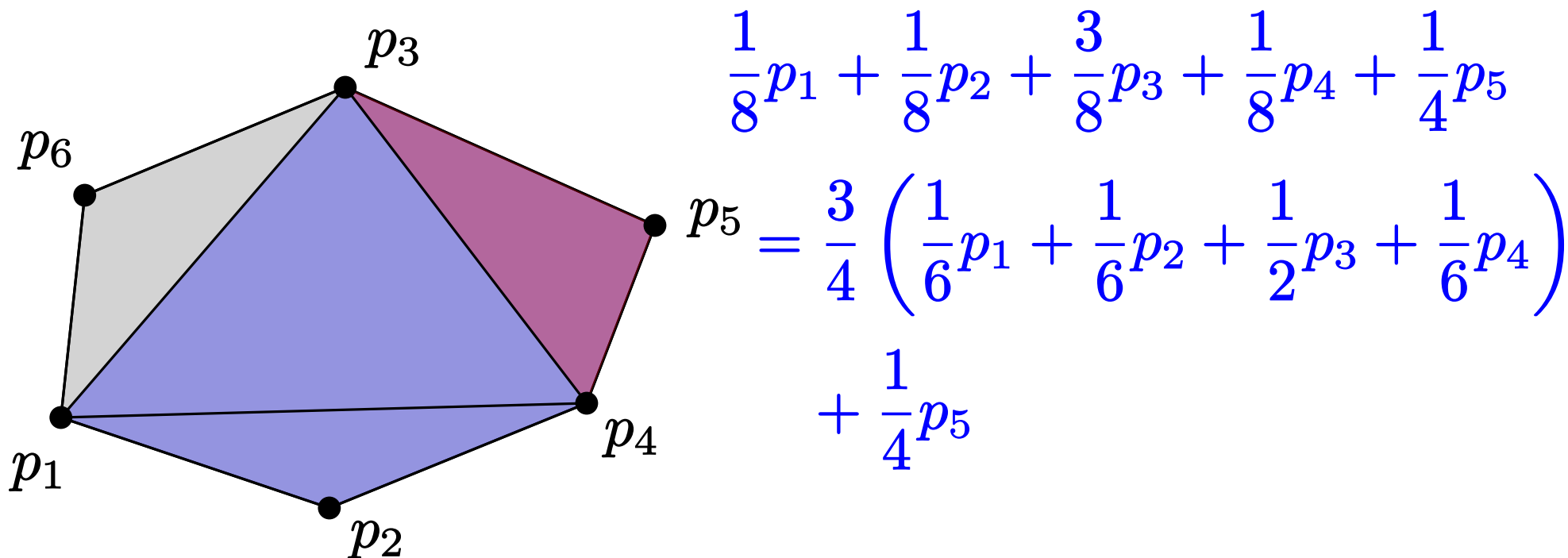
頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



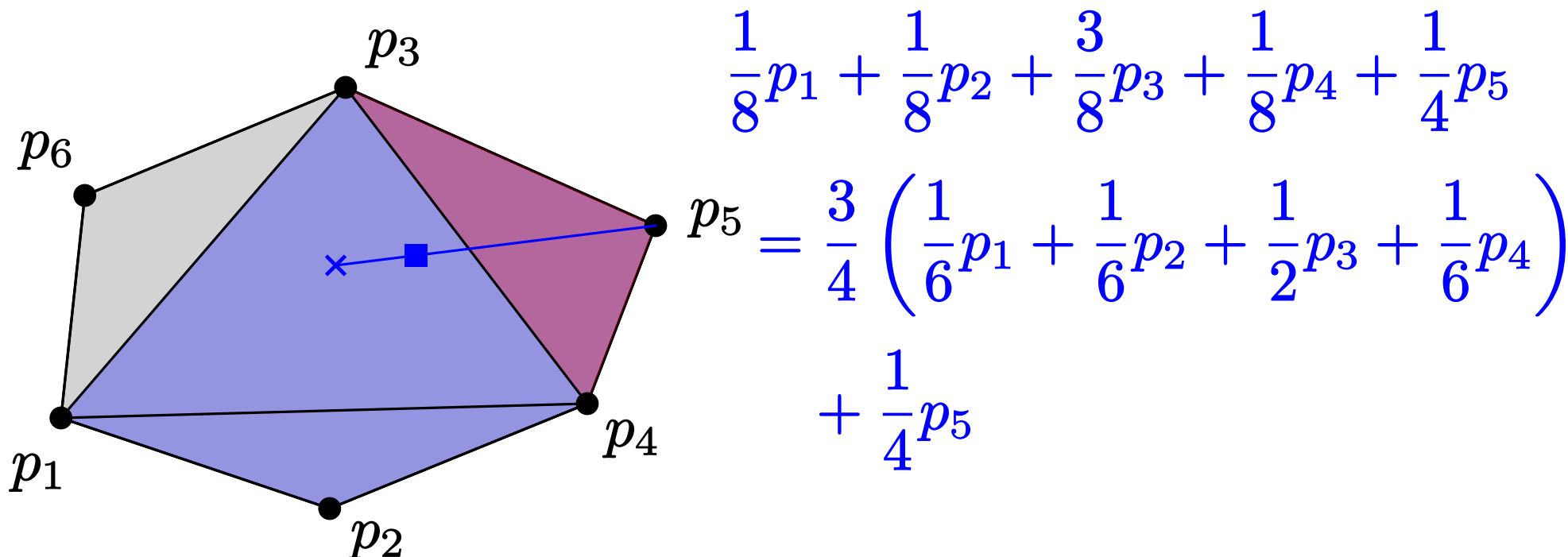
頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



頂点の集合を $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とする凸多角形 P は次のように書ける

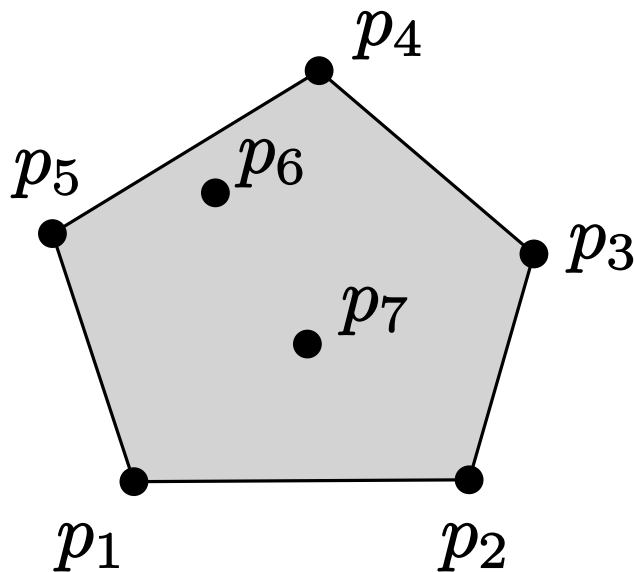
$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



$V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ が凸多角形の頂点集合でなくても、
次の集合は凸多角形になる

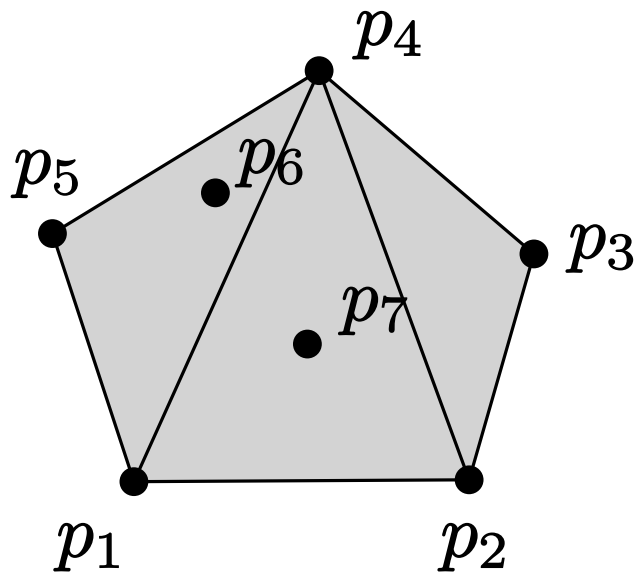
$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7$$



$V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ が凸多角形の頂点集合でなくても、
次の集合は凸多角形になる

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

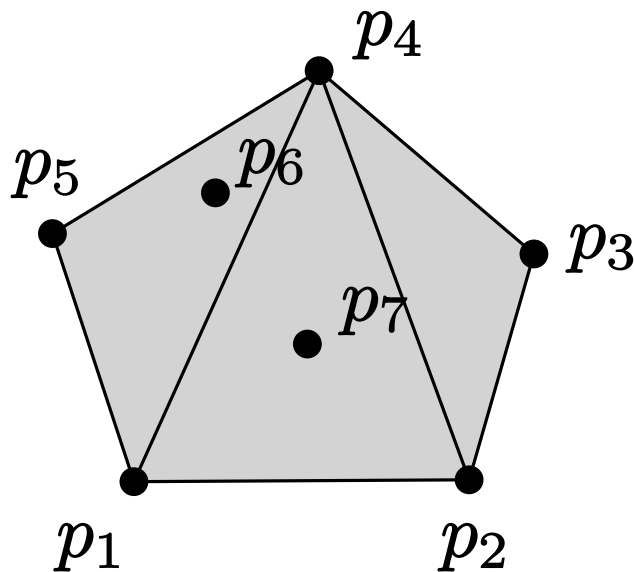


$$\frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7$$

$$= \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_4 \right)$$

$V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ が凸多角形の頂点集合でなくても、
次の集合は凸多角形になる

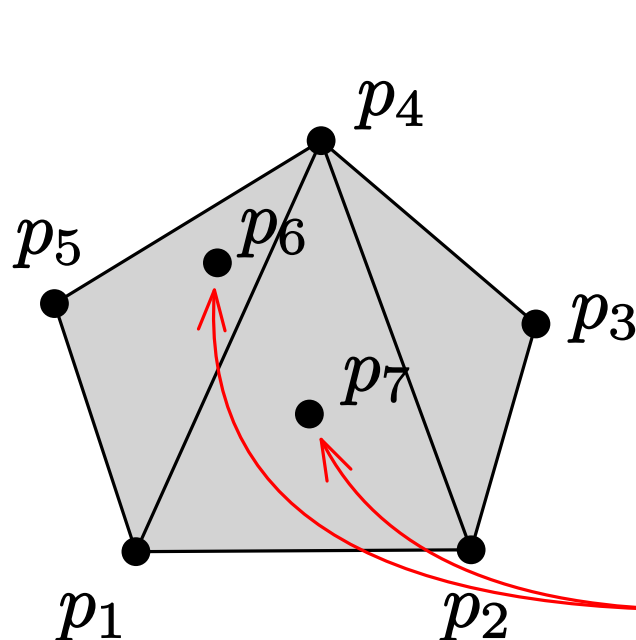
$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7 \\ &= \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_4 \right) \\ &= \frac{4}{15}p_1 + \frac{4}{15}p_2 + \frac{1}{15}p_4 + \frac{2}{5}p_5 \end{aligned}$$

$V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ が凸多角形の頂点集合でなくても、
次の集合は凸多角形になる

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$



$$\frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7$$

$$= \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_5 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_4 \right)$$

$$= \frac{4}{15}p_1 + \frac{4}{15}p_2 + \frac{1}{15}p_4 + \frac{2}{5}p_5$$

凸多角形を定めるうえで 冗長な点

定義：凸結合

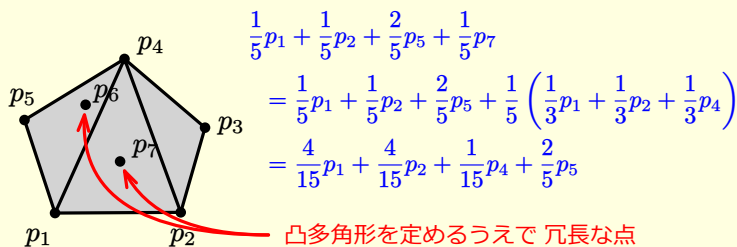
点 $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$ の **凸結合** とは,
次のような点 $p \in \mathbb{R}^2$ のこと

$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ となる実数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ が存在して,

$$p = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$$

$V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ が凸多角形の頂点集合でなくても,
次の集合は凸多角形になる

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$



定義：凸包

点集合 $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の **凸包** とは, 次の集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

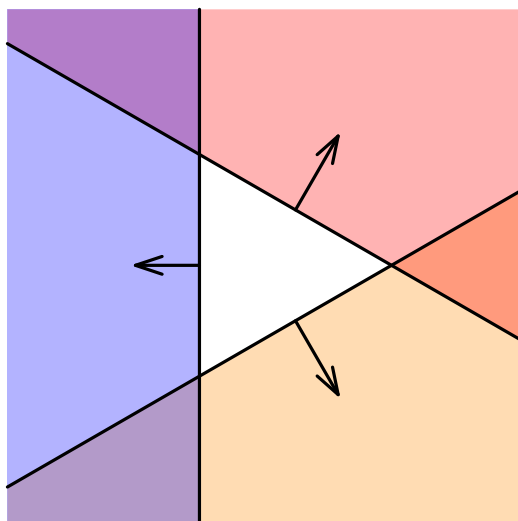
V の凸包を $\text{CH}(V)$ と書くことがある

注

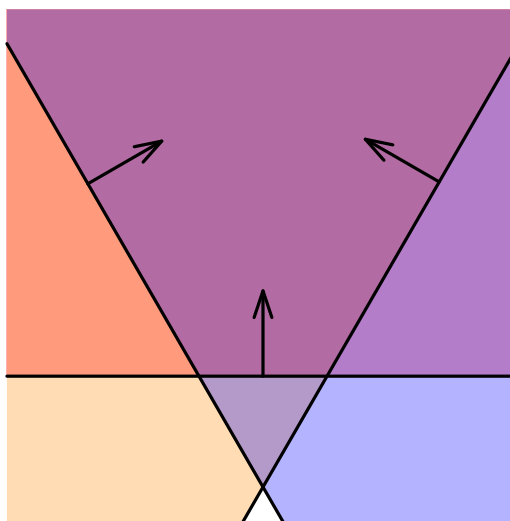
- $\text{CH}(V)$ が凸多角形であるとは限らない
- 凸包の記法は文献によって異なる
(他の記法の例: $\text{conv}(V)$)

半平面 $h_1, h_2, \dots, h_n$ の共通部分が非空で有界であるとき,
それは 1 点か 線分か 凸多角形を表す

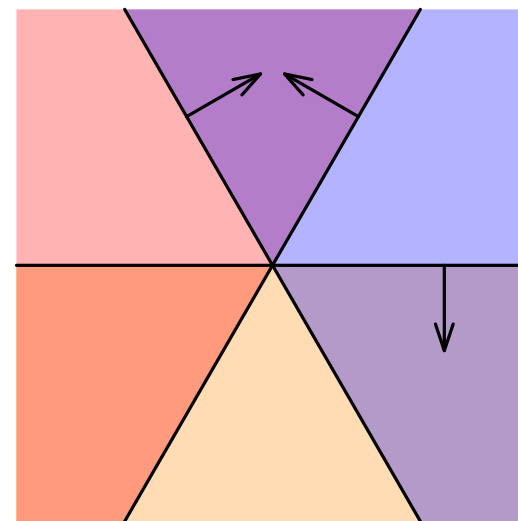
$$P = h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_n$$



空

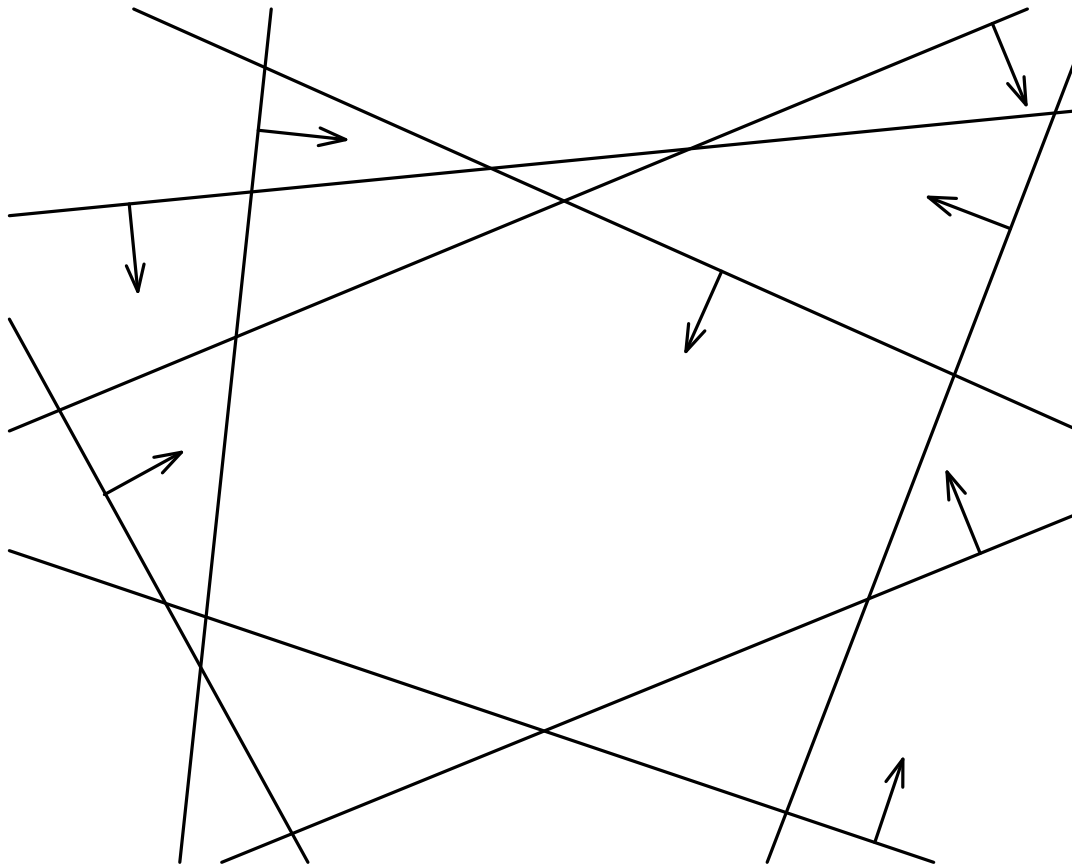


非有界

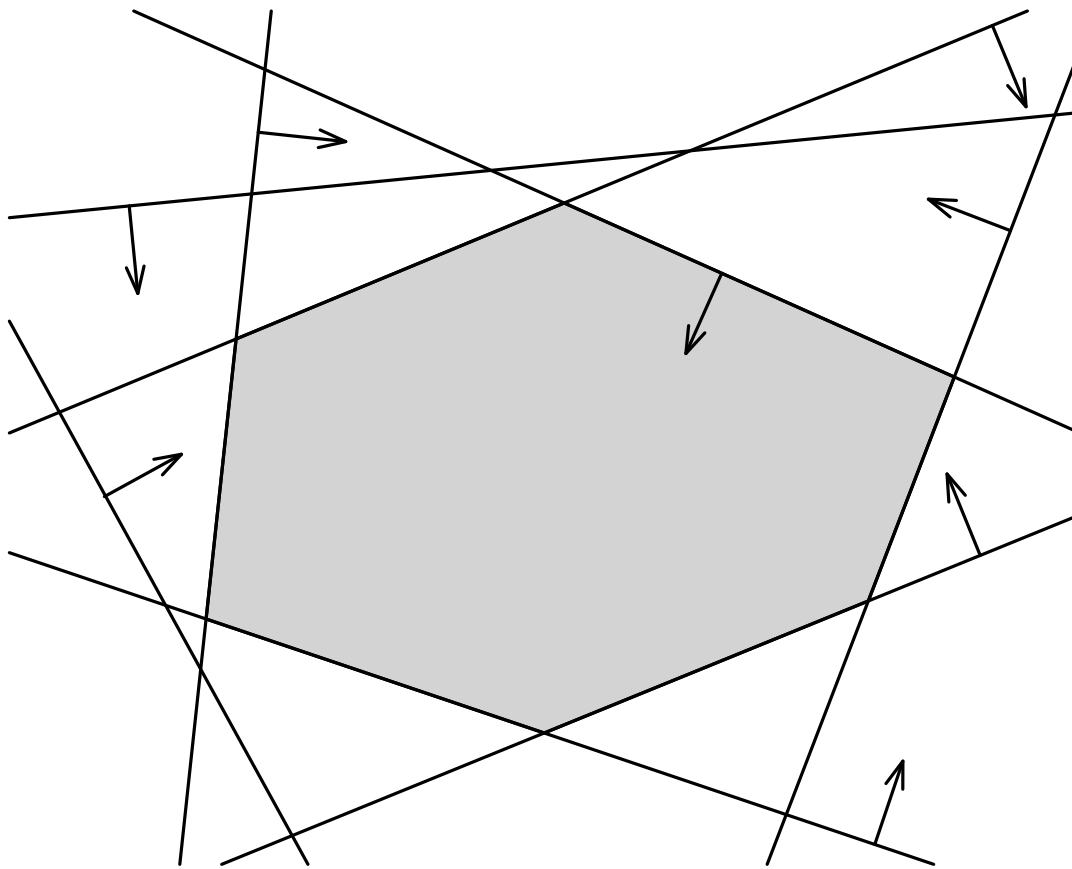


1 点

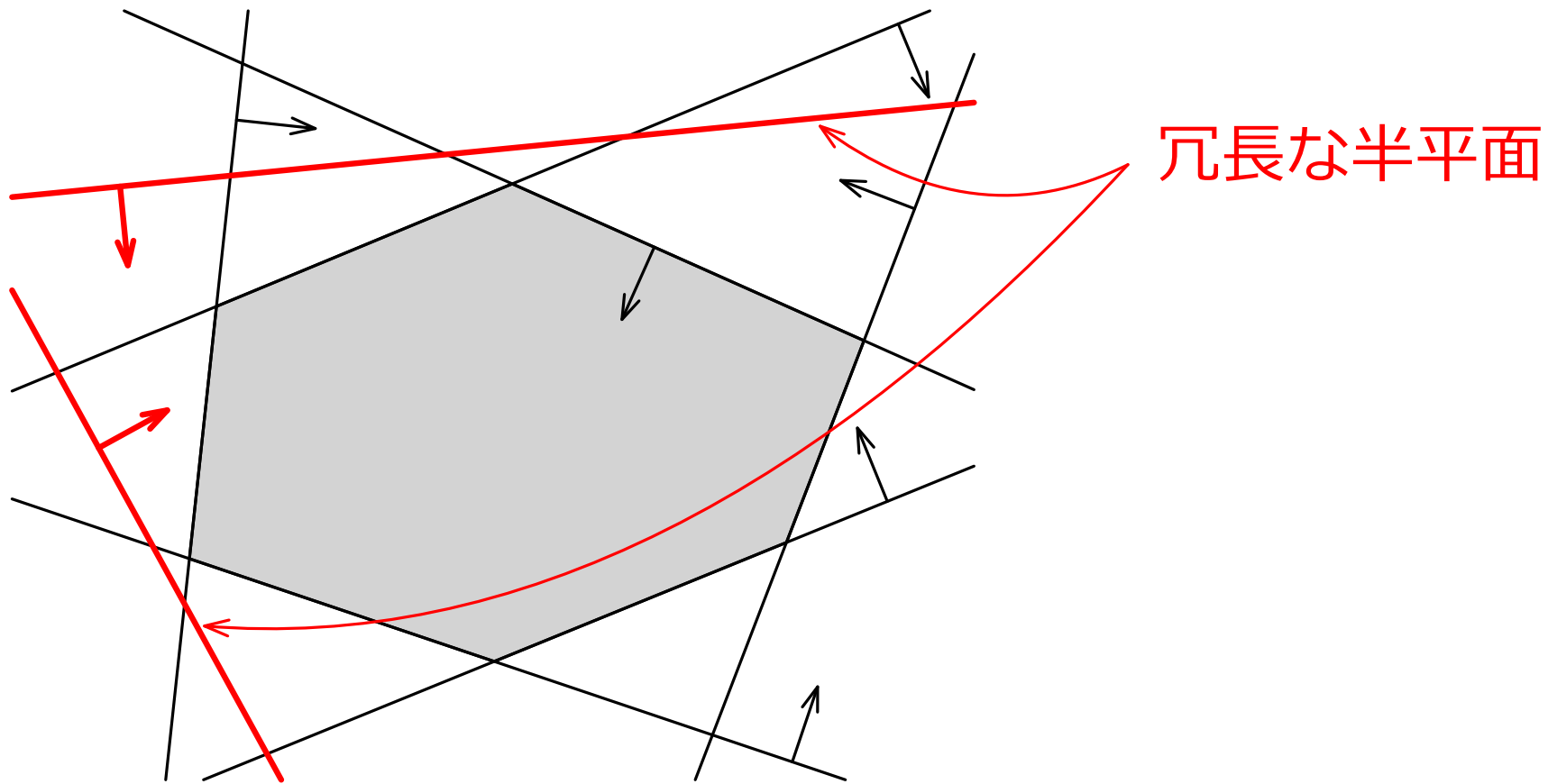
半平面 $h_1, h_2, \dots, h_n$ の共通部分が凸多角形 P であっても,
 $h_1, h_2, \dots, h_n$ のすべてが P の辺を定める必要はない



半平面 $h_1, h_2, \dots, h_n$ の共通部分が凸多角形 P であっても,
 $h_1, h_2, \dots, h_n$ のすべてが P の辺を定める必要はない



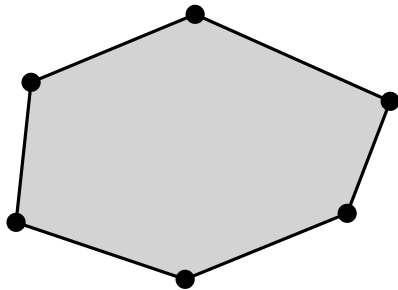
半平面 $h_1, h_2, \dots, h_n$ の共通部分が凸多角形 P であっても,
 $h_1, h_2, \dots, h_n$ のすべてが P の辺を定める必要はない



凸多角形は…

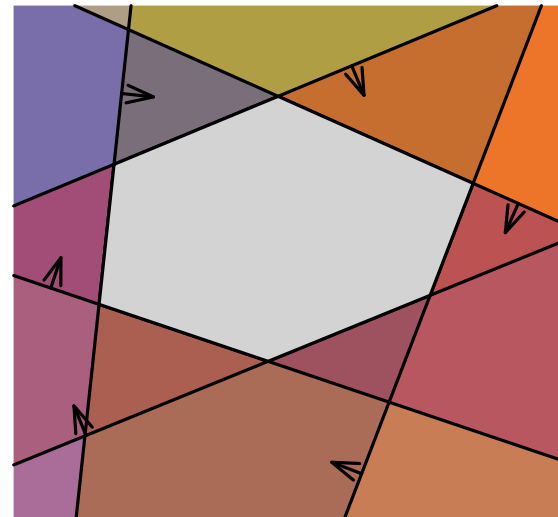
点集合の凸包

冗長な点がある場合あり



半平面集合の共通部分

冗長な半平面がある場合あり



課題

この2つの記述の関係は？

例えば、次の2つの問題を考える

問題1：頂点記述構成問題

入力： 点集合 $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

出力： 凸包 $\text{CH}(V)$ の頂点集合 (反時計回りに)

問題2：半平面記述構成問題

入力： 半平面の集合 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$

出力： 共通部分 $\bigcap_{i=1}^n h_i$ の辺集合 (反時計回りに)

課題

この2つの問題を解くアルゴリズムの間の関係は？

例えば, 次の2つの問題を考える

問題1: 頂点記述構成問題

入力: 点集合 $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

出力: 凸包 $\text{CH}(V)$ の頂点集合 (反時計回りに)

問題2: 半平面記述構成問題

入力: 半平面の集合 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$

出力: 共通部分 $\bigcap_{i=1}^n h_i$ の辺集合 (反時計回りに)

課題

この2つの問題を解くアルゴリズムの間の関係は？

解答

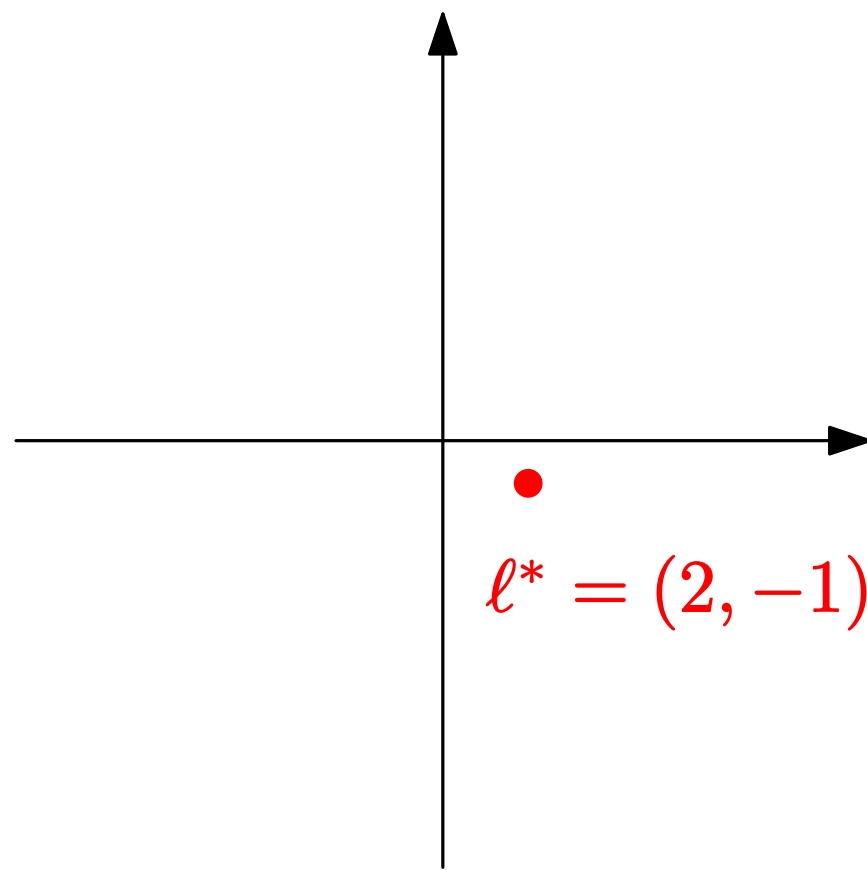
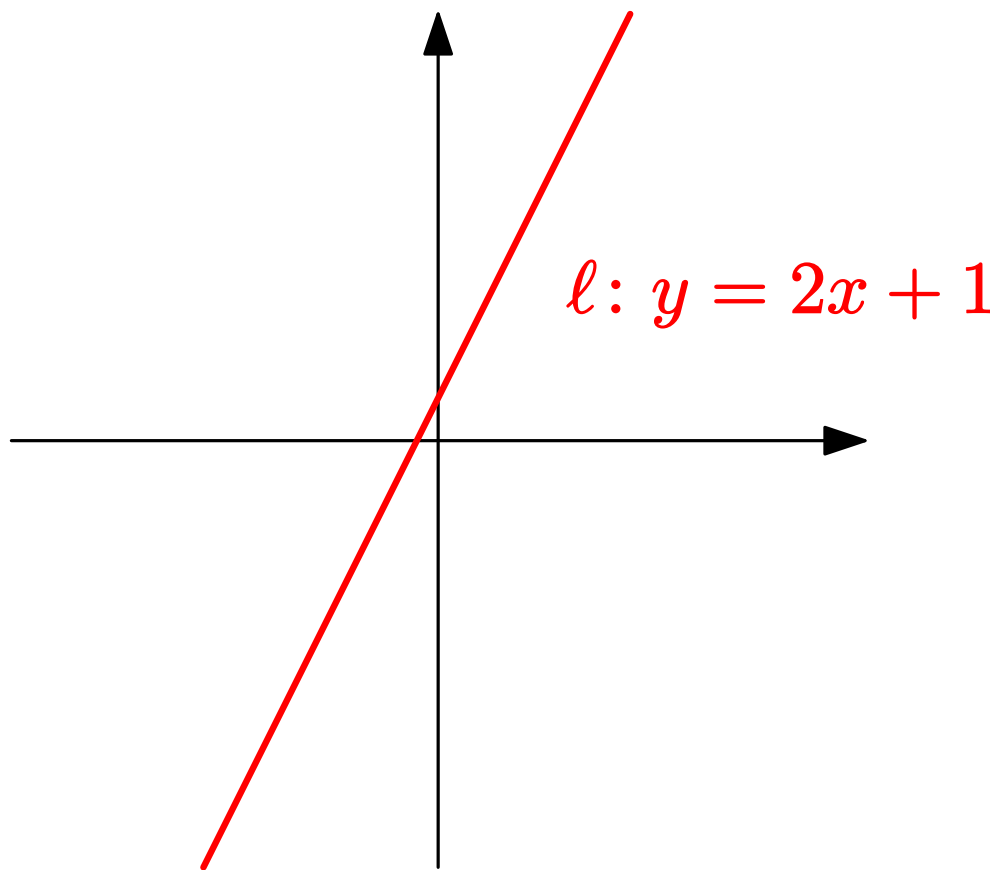
一方を解くアルゴリズムがあれば,
もう一方を解くアルゴリズムが **自動的に** 得られる

道具: 双対変換

1. 凸多角形を記述する方法
2. **点と直線の双対変換**
3. 直線配置
4. 双対変換と凸多角形

双対変換

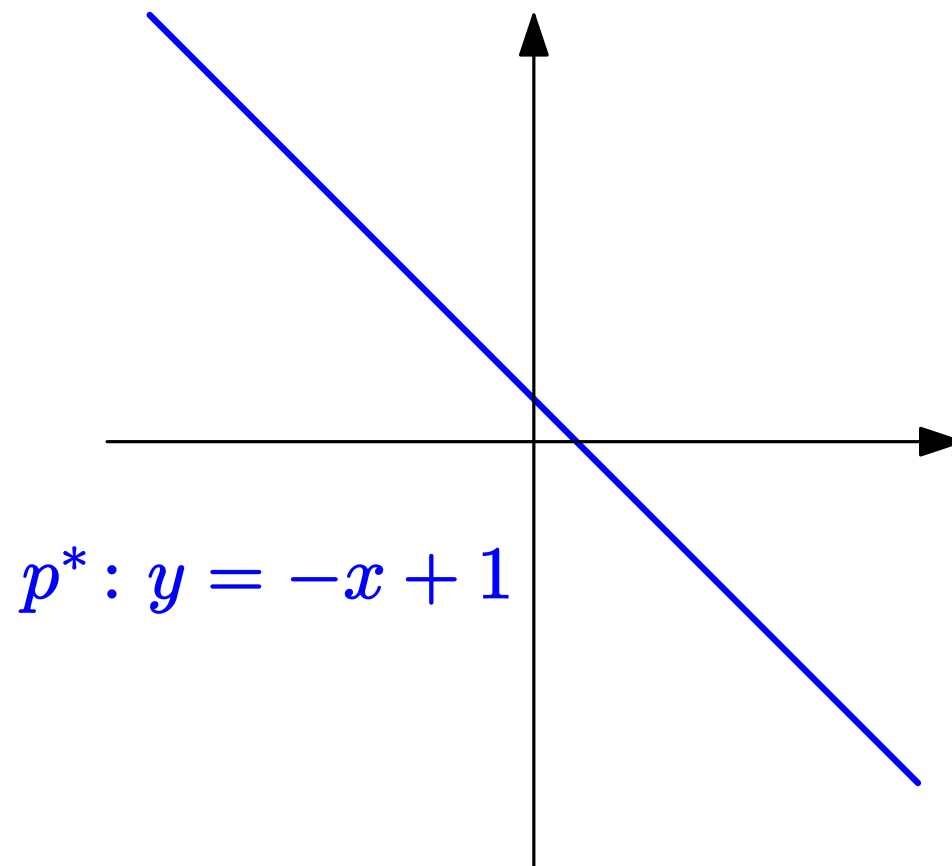
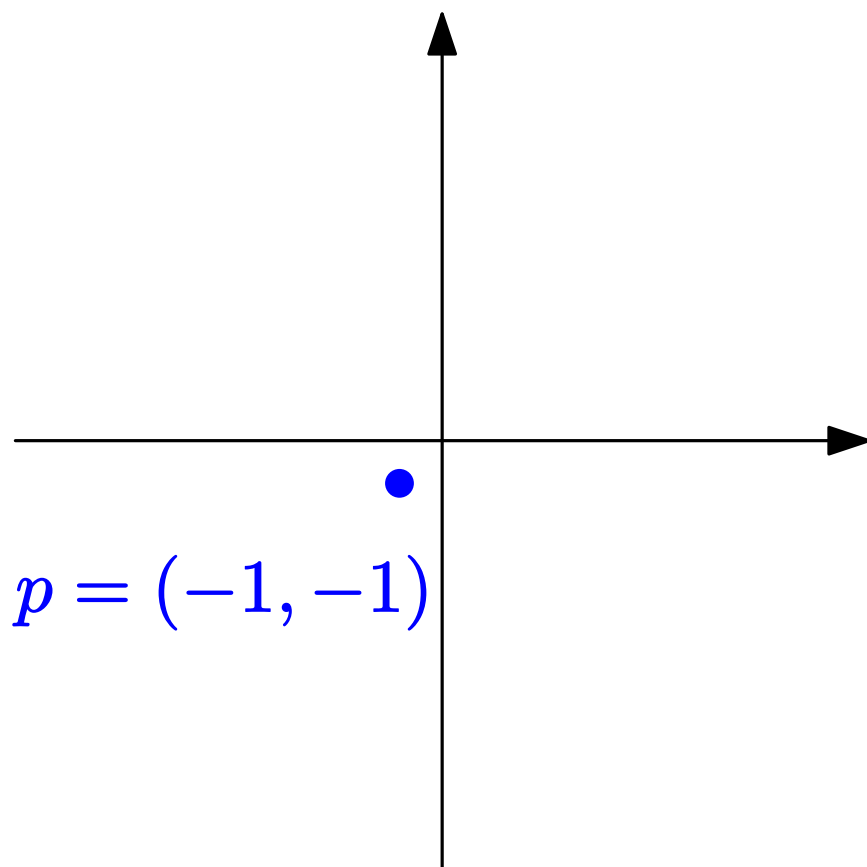
直線 $l: y = ax + b$ を点 $l^* = (a, -b)$ に変換する



注： y 軸に平行な直線は変換できない

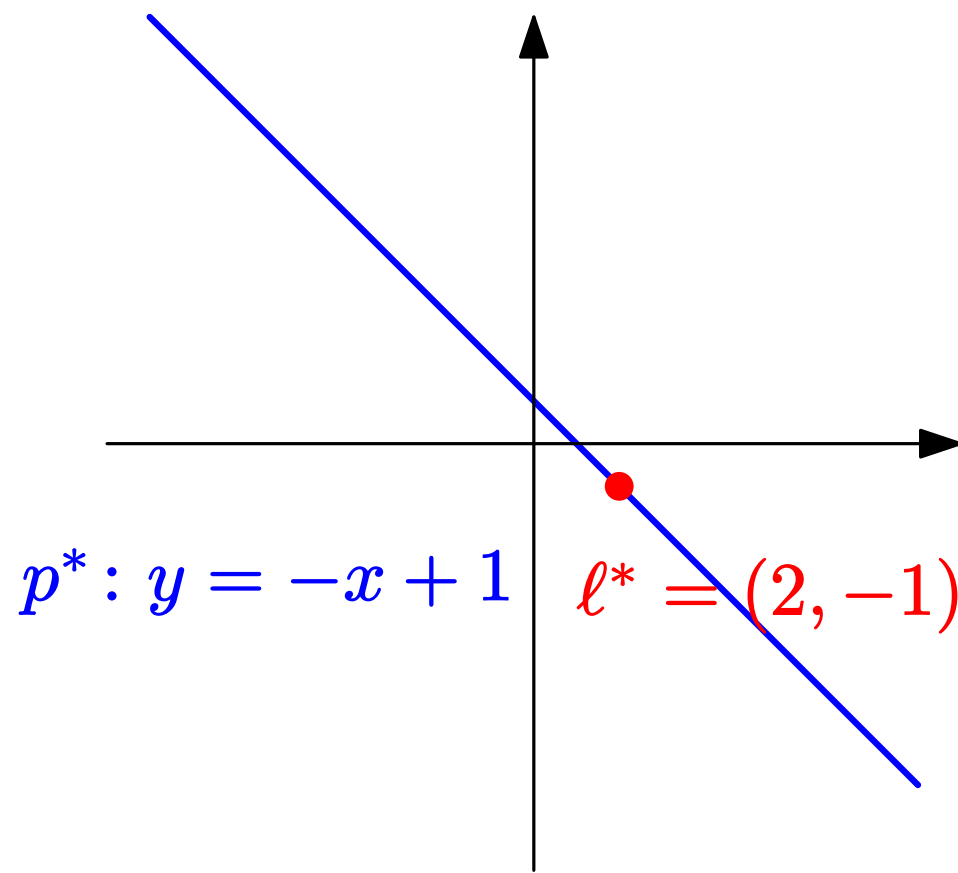
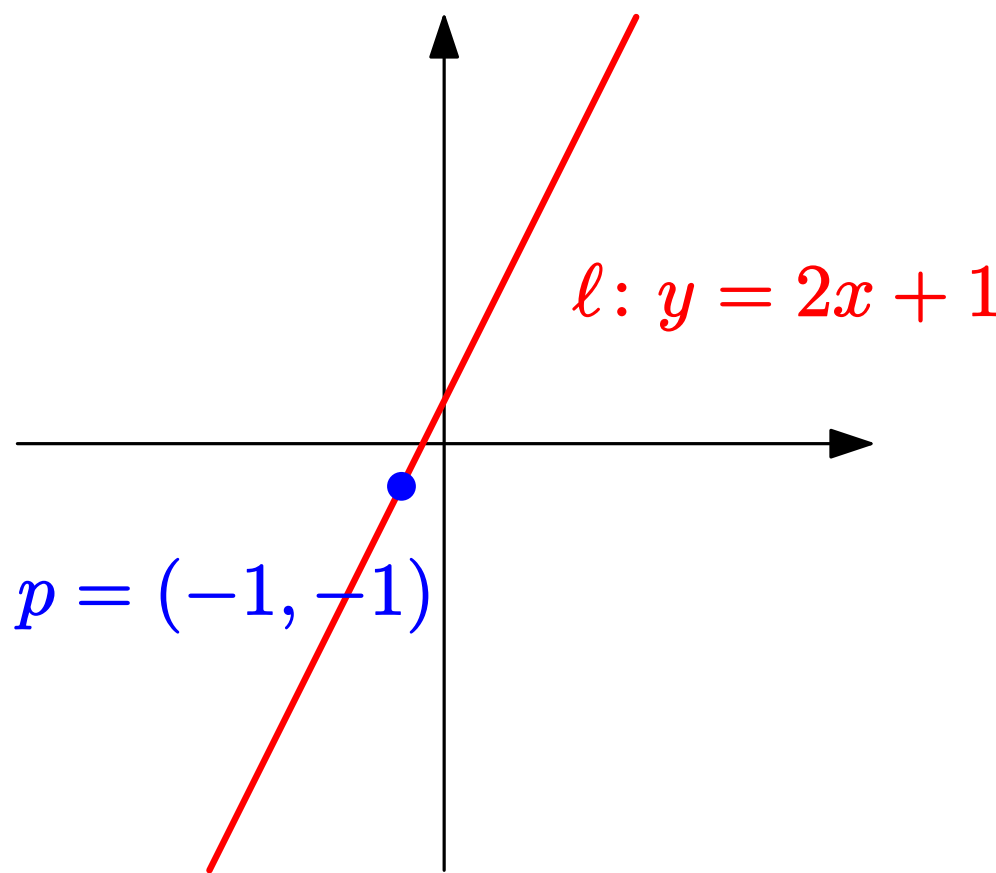
双対変換

点 $p = (a, b)$ を直線 $p^* : y = ax - b$ に変換する



双対変換

- 直線 $\ell: y = ax + b$ を点 $\ell^* = (a, -b)$ に変換する
- 点 $p = (a, b)$ を直線 $p^*: y = ax - b$ に変換する



双対変換

- 直線 $\ell: y = ax + b$ を点 $\ell^* = (a, -b)$ に変換する
- 点 $p = (a, b)$ を直線 $p^*: y = ax - b$ に変換する

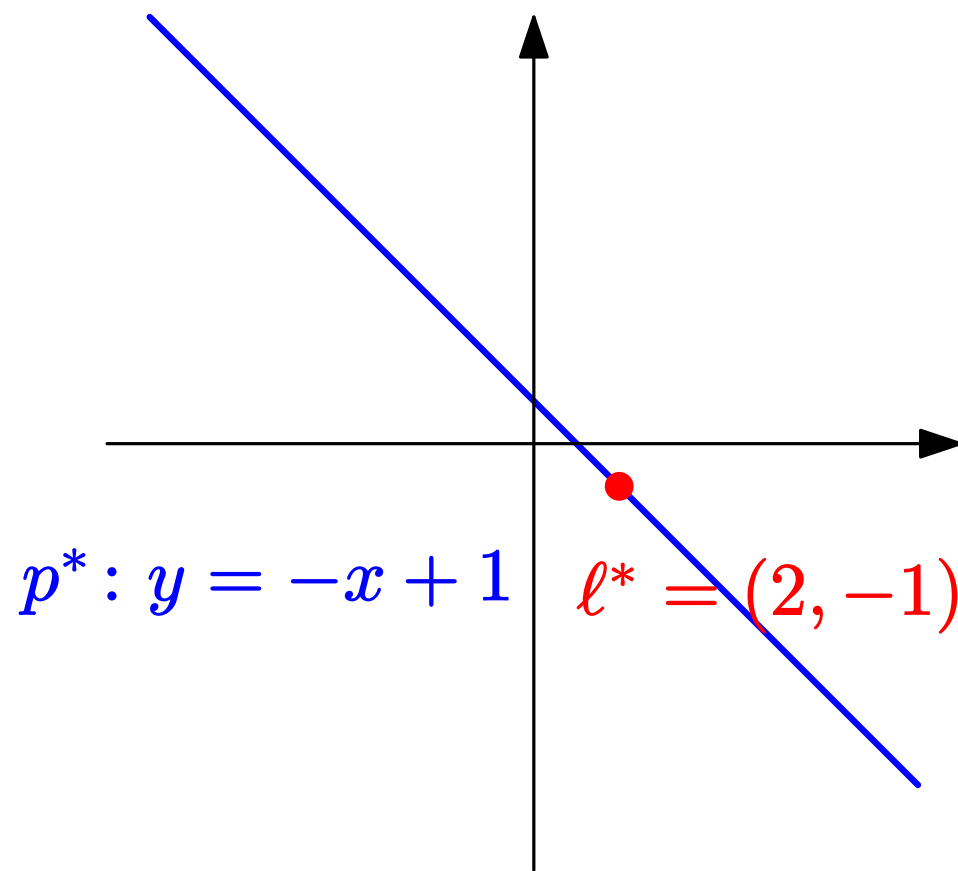
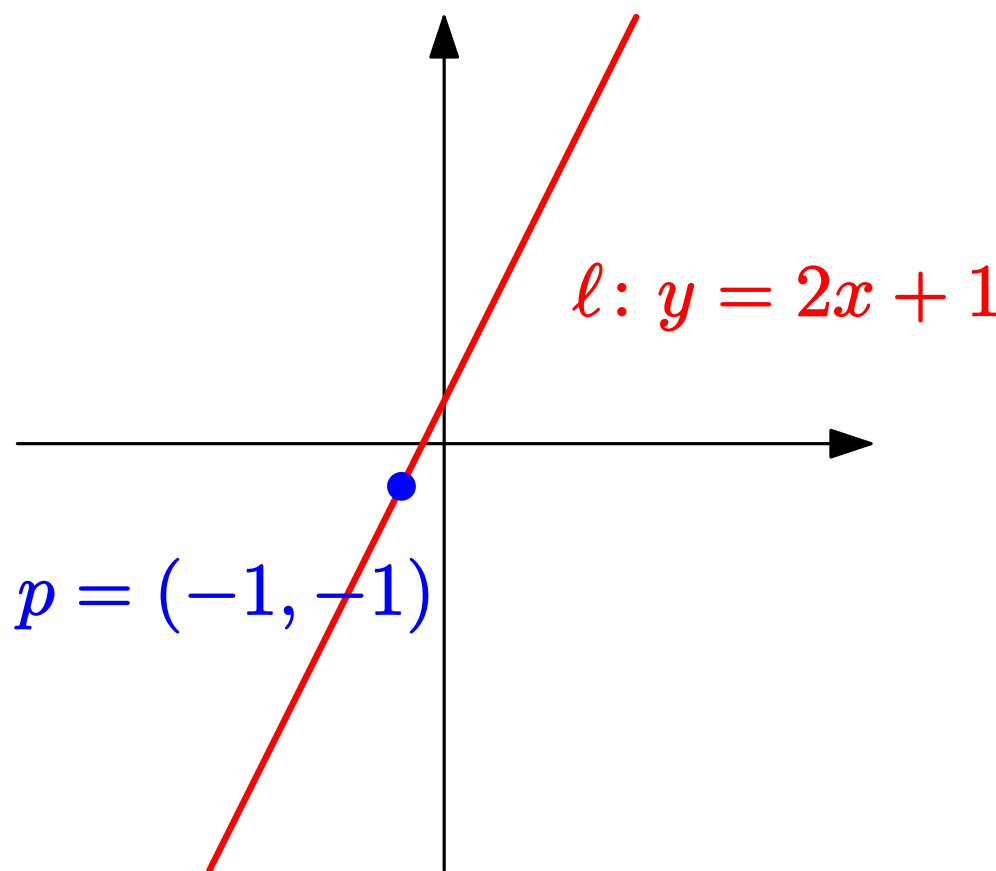
$$\begin{aligned}\ell: y = ax + b &\xrightarrow{\text{双対変換}} \ell^* = (a, -b) \\ &\xrightarrow{\text{双対変換}} \ell^{**}: y = ax - (-b) = ax + b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p = (a, b) &\xrightarrow{\text{双対変換}} p^*: y = ax - b \\ &\xrightarrow{\text{双対変換}} p^{**} = (a, -(-b)) = (a, b)\end{aligned}$$

つまり, 変換を2回行うと, もとに戻る

性質 : 双対変換は接続関係を保存する

点 $p = (a, b)$, 直線 $\ell: y = cx + d$ に対して
点 p が直線 ℓ 上にある $\Leftrightarrow$ 点 ℓ^* が直線 p^* 上にある



性質 : 双対変換は接続関係を保存する

点 $p = (a, b)$, 直線 $\ell: y = cx + d$ に対して
点 p が直線 ℓ 上にある $\Leftrightarrow$ 点 ℓ^* が直線 p^* 上にある

証明 : $\ell^* = (c, -d)$, $p^*: y = ax - b$ なので,

p が ℓ 上にある

$$\Leftrightarrow b = ca + d$$

$$\Leftrightarrow -d = ac - b$$

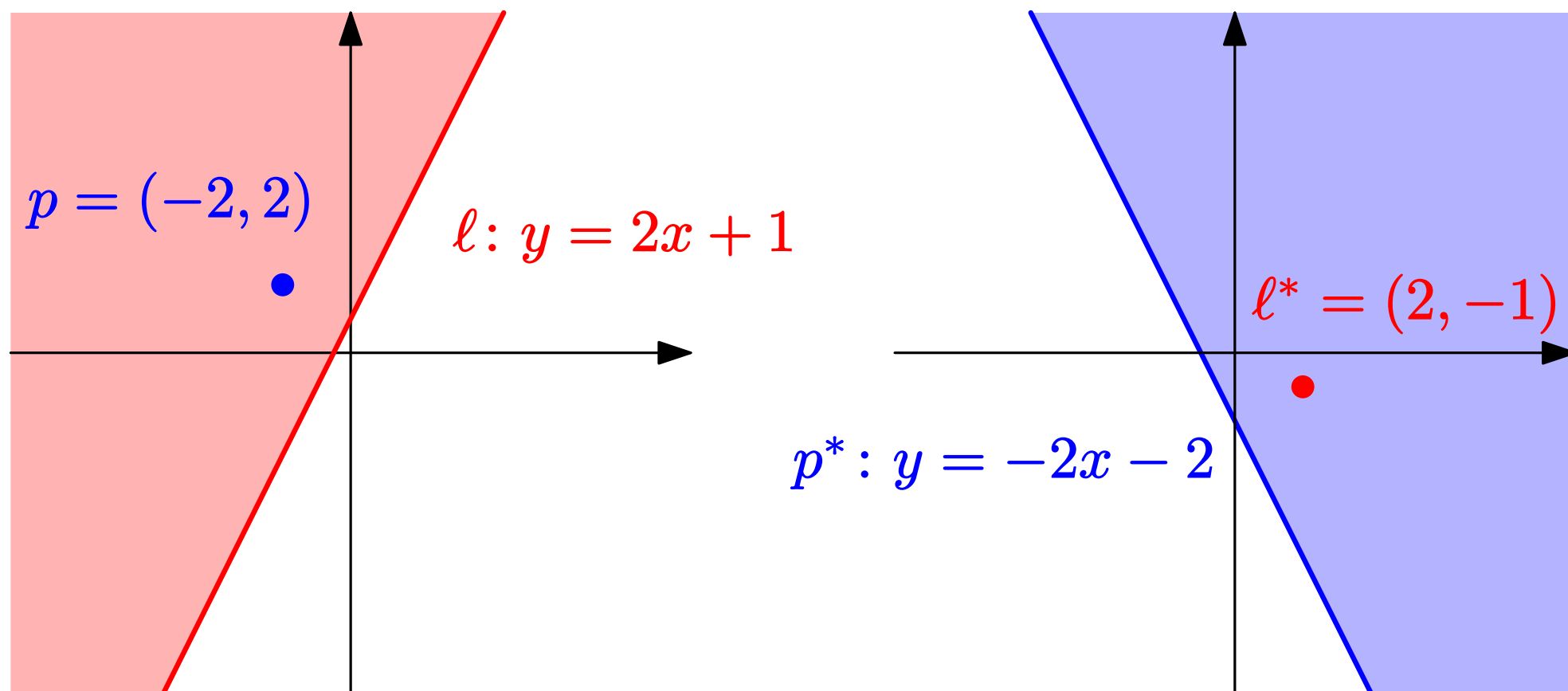
$$\Leftrightarrow \text{点 } (c, -d) \text{ が直線 } y = ax - b \text{ 上にある}$$

$$\Leftrightarrow \ell^* \text{ が } p^* \text{ 上にある}$$



性質：双対変換は上下関係を保存する

点 $p = (a, b)$, 直線 $\ell: y = cx + d$ に対して
点 p が直線 ℓ の上側にある (下側にある)
 $\Leftrightarrow$ 点 ℓ^* が直線 p^* の上側にある (下側にある)



性質：双対変換は上下関係を保存する

点 $p = (a, b)$, 直線 $\ell: y = cx + d$ に対して
点 p が直線 ℓ の上側にある (下側にある)
 $\Leftrightarrow$ 点 ℓ^* が直線 p^* の上側にある (下側にある)

証明： $\ell^* = (c, -d)$, $p^*: y = ax - b$ なので,

p が ℓ の上側にある

$$\Leftrightarrow b \geq ca + d$$

$$\Leftrightarrow -d \geq ac - b$$

$\Leftrightarrow$ 点 $(c, -d)$ が直線 $y = ax - b$ の上側にある

$\Leftrightarrow \ell^*$ が p^* の上側にある

□

注：「上側」を「 $>$ 」で定義しても証明は同様

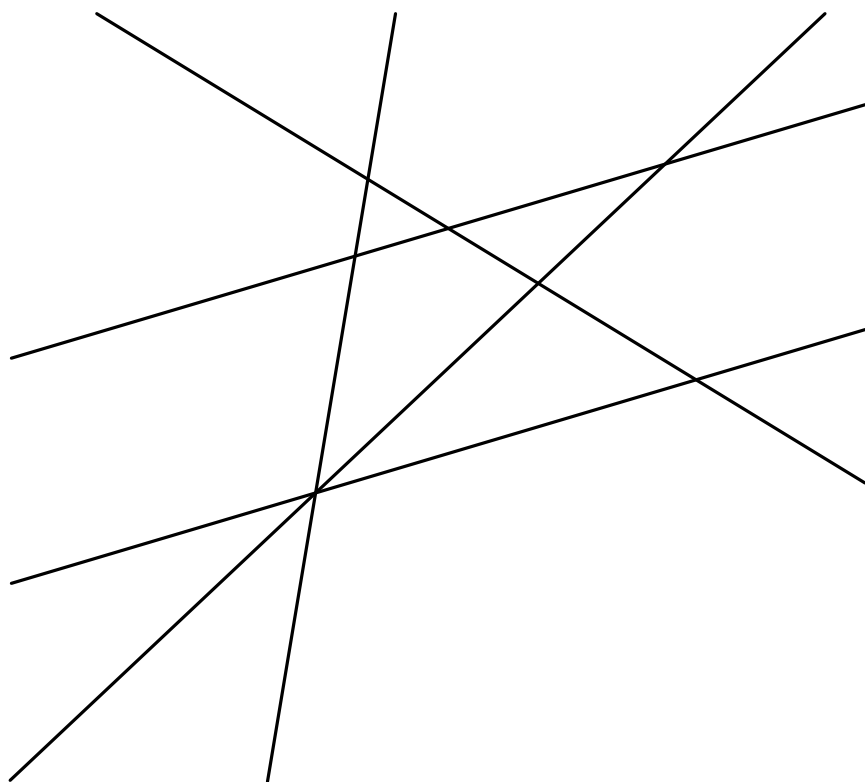
「下側」の証明は「 $\geq$ 」を「 $\leq$ 」に変えればできる

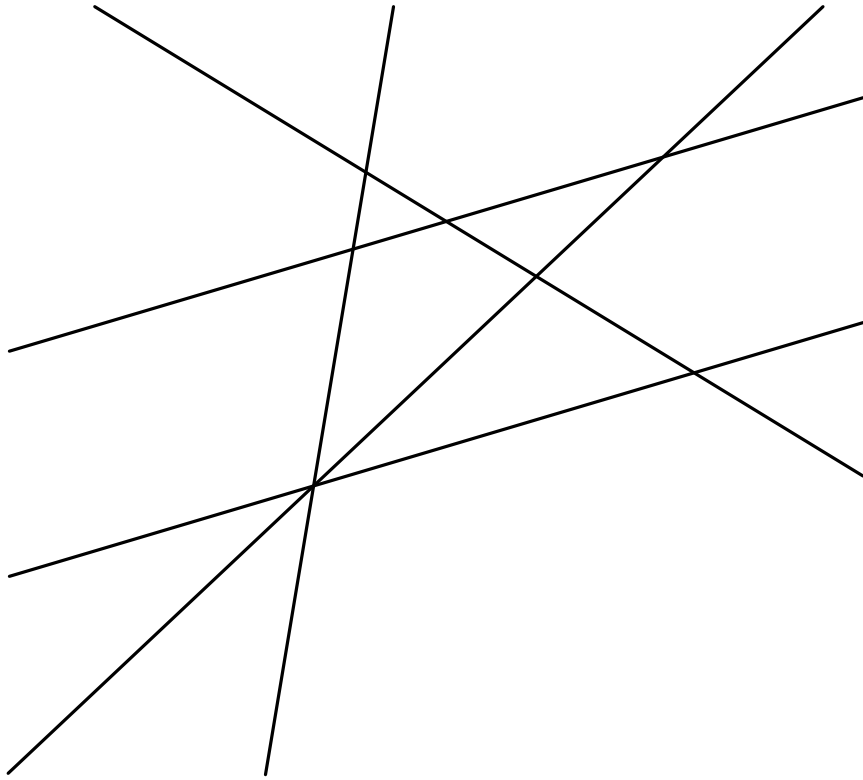
1. 凸多角形を記述する方法
2. 点と直線の双対変換
3. **直線配置**
4. 双対変換と凸多角形

定義：直線配置

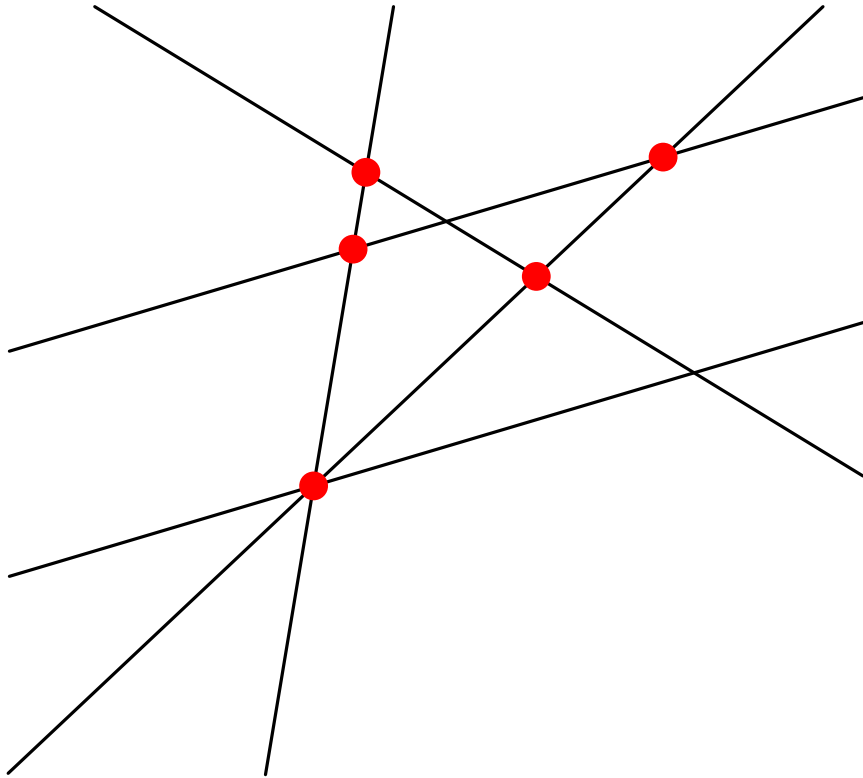
直点配置 とは 平面上の直線の集合のこと

双対変換によって、点集合は直線配置に写される





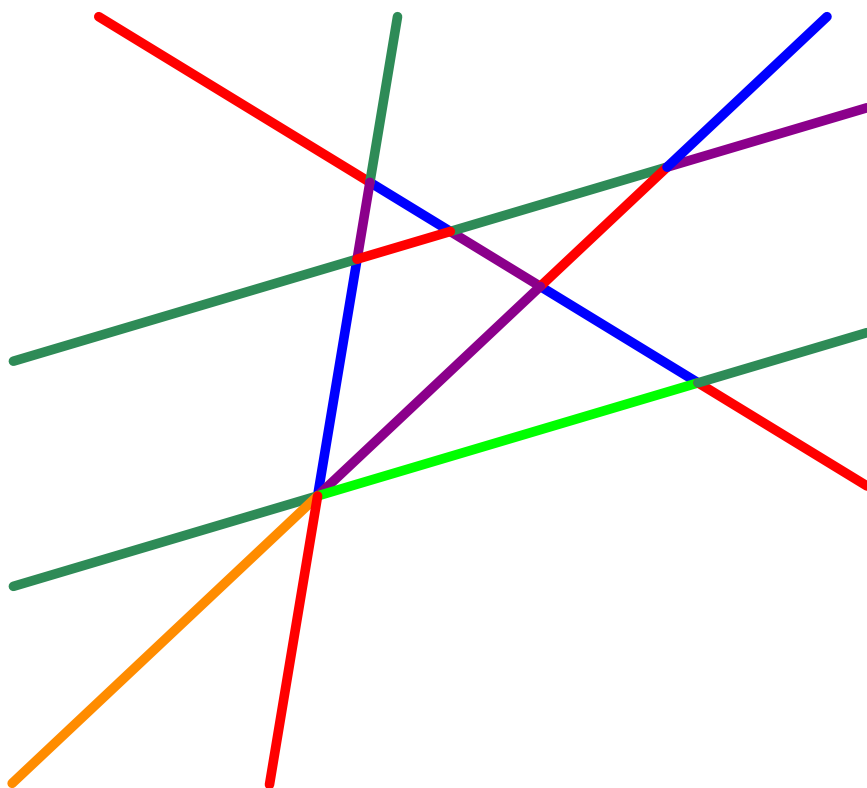
直線：5 個 (5 本)



直線 : 5 個 (5 本)

頂点 : 5 個

直線配置の **頂点** とは, 2 直線の交点



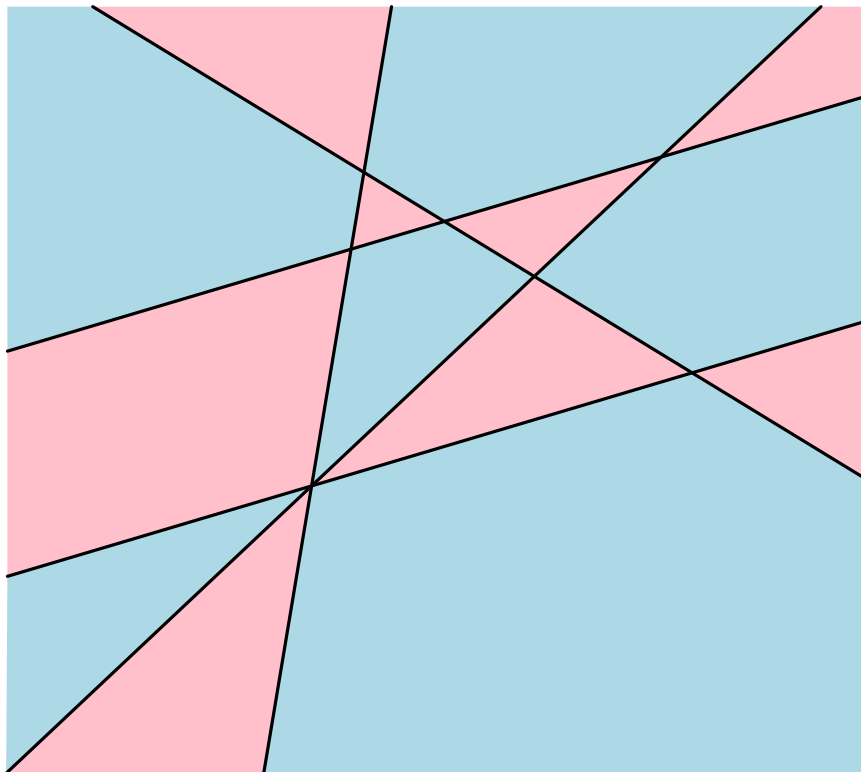
直線：5 個 (5 本)

頂点：5 個

辺：20 個 (20 本)

直線配置の **頂点** とは, 2 直線の交点

直線配置の **辺** とは, 頂点で分けられた直線の一部



直線：5 個 (5 本)

頂点：5 個

辺：20 個 (20 本)

セル：14 個

直線配置の **頂点** とは, 2 直線の交点

直線配置の **辺** とは, 頂点で分けられた直線の一部

直線配置の **セル** (胞) とは, 直線で分けられた平面の一部

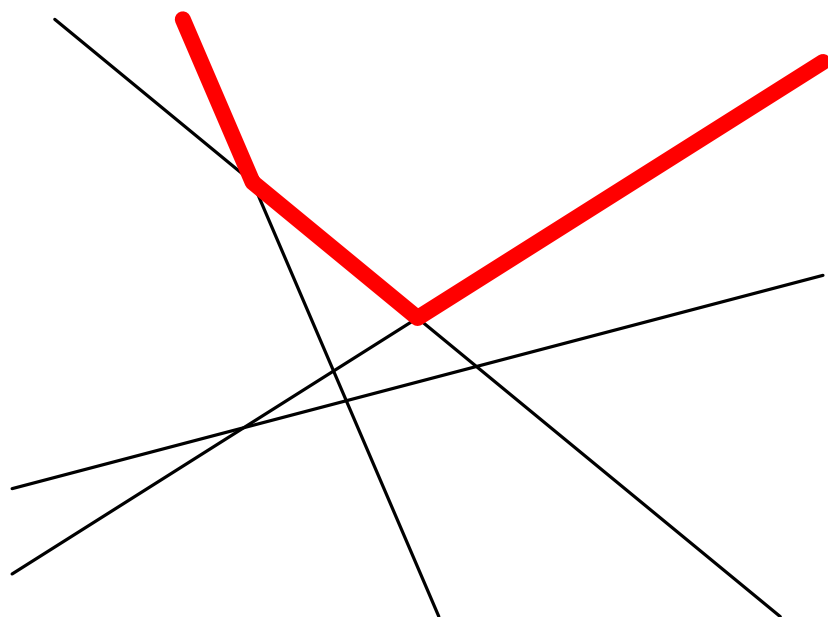
直線配置 $A = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$, $l_i: y = a_i x + b_i$

定義：上側エンベロープ (上側包絡線)

A の **上側エンベロープ** とは, 次の関数 $\bar{e}$ のグラフ

$$\bar{e}(x) = \max\{a_i x + b_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

$\bar{e}$ 自体を A の上側エンベロープと呼ぶこともある



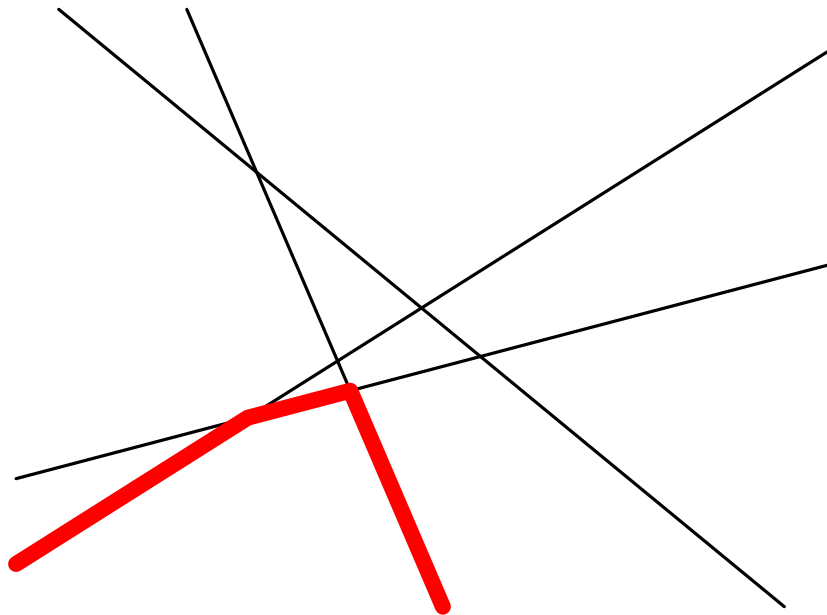
直線配置 $A = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$, $\ell_i: y = a_i x + b_i$

定義：下側エンベロープ (下側包絡線)

A の **下側エンベロープ** とは, 次の関数 $\underline{e}$ のグラフ

$$\underline{e}(x) = \min\{a_i x + b_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

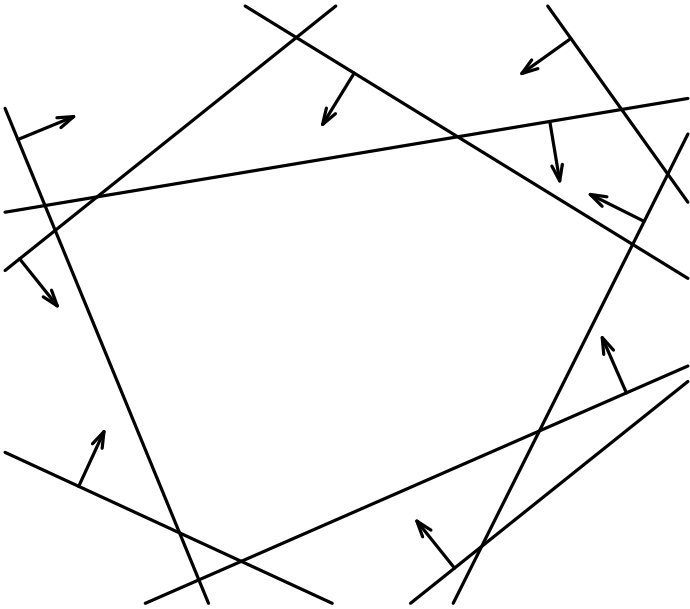
$\underline{e}$ 自体を A の下側エンベロープと呼ぶこともある



半平面の共通部分を求めるには

27/38

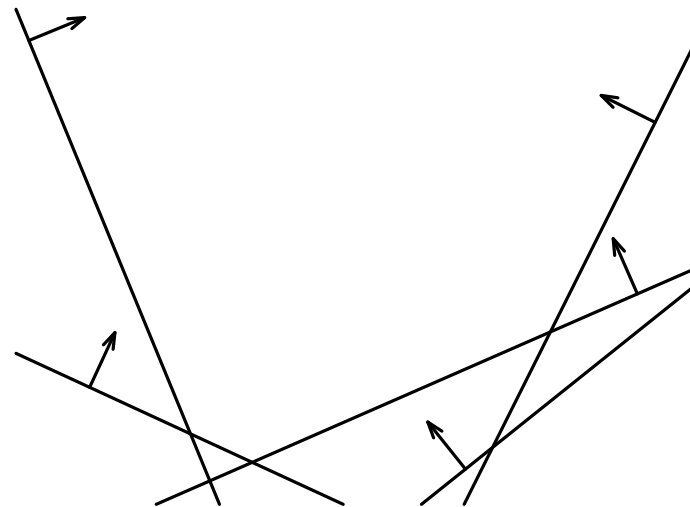
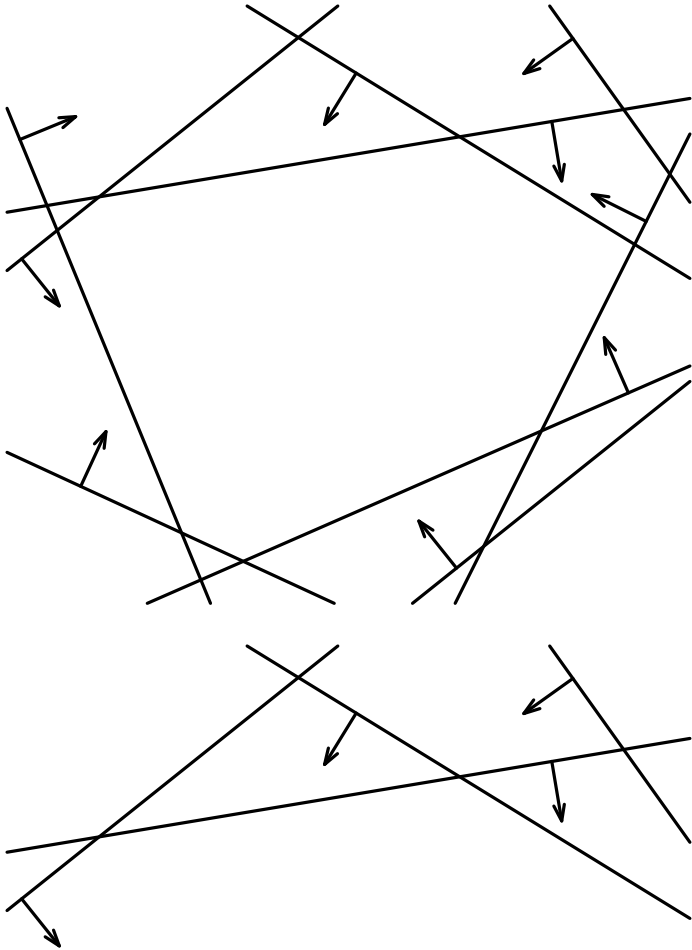
仮定： y 軸に平行な直線はない



半平面の共通部分を求めるには

27/38

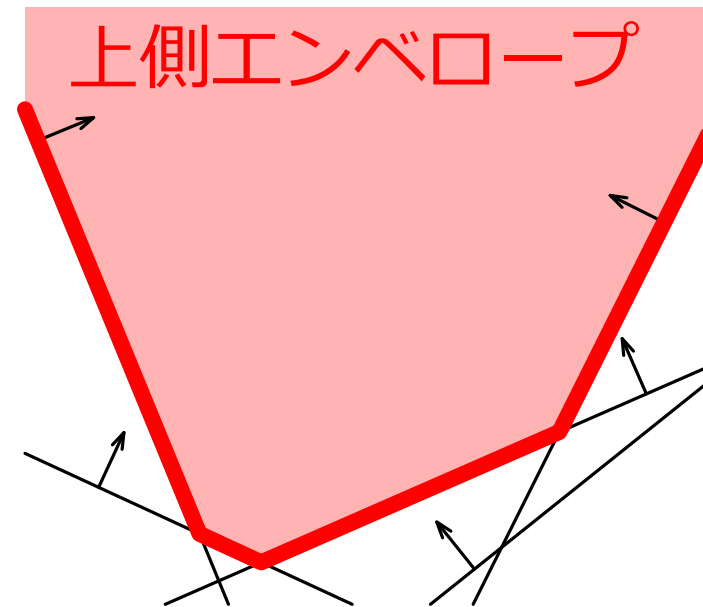
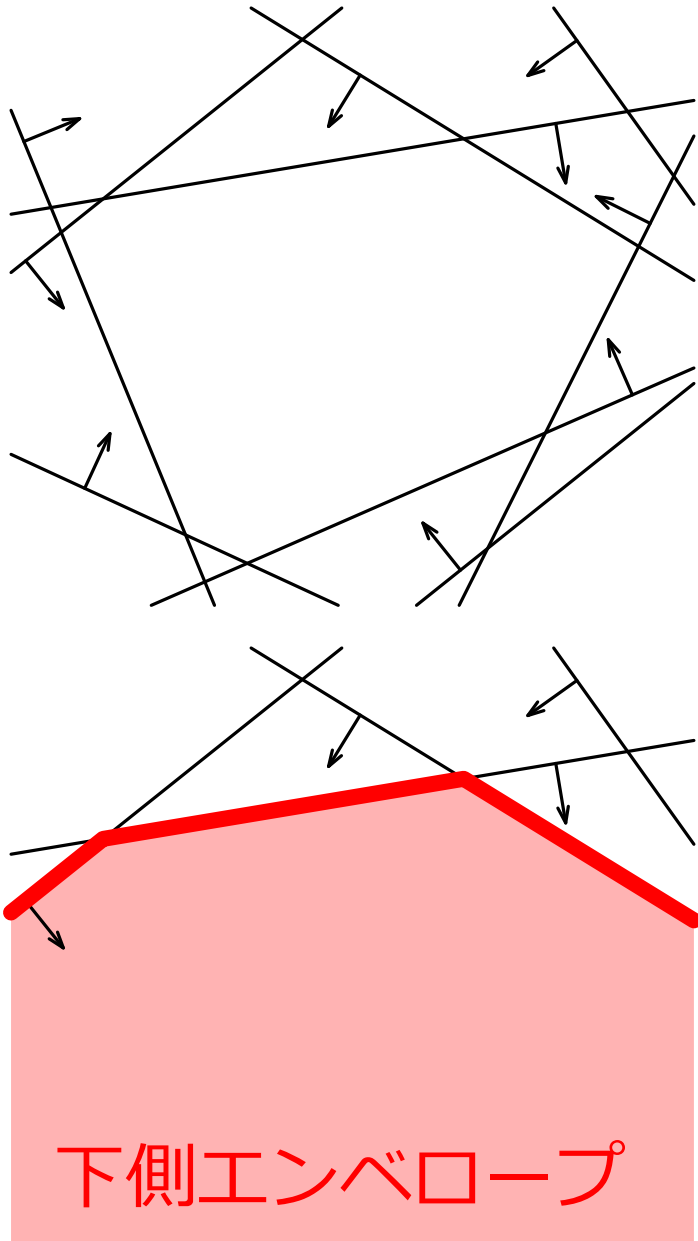
仮定： y 軸に平行な直線はない



半平面の共通部分を求めるには

27/38

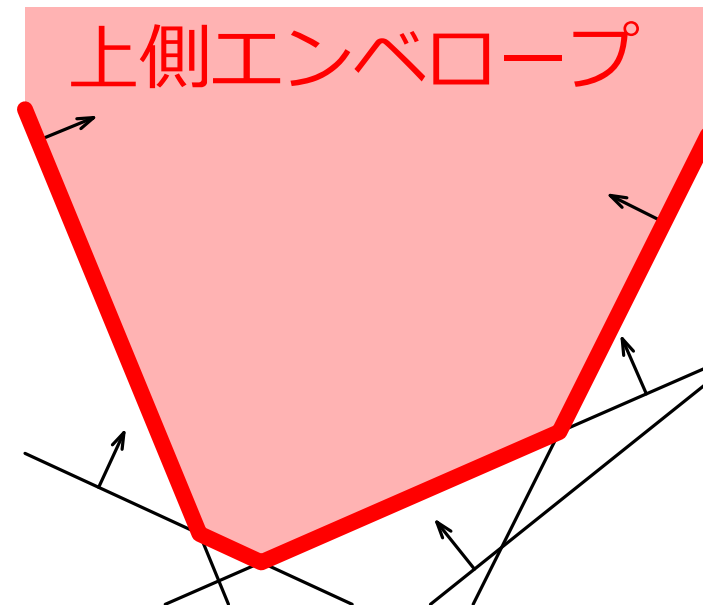
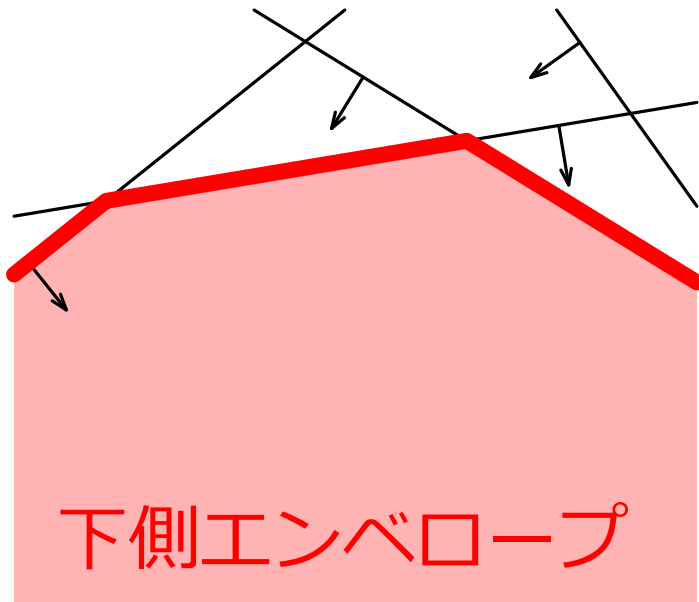
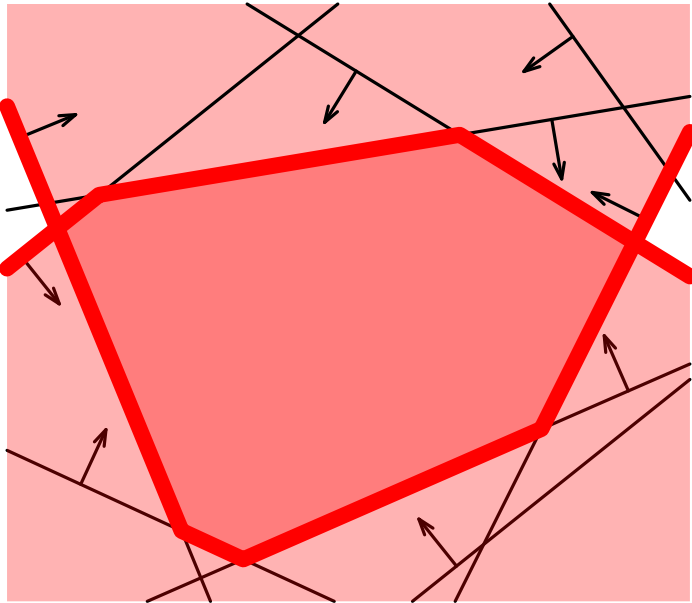
仮定： y 軸に平行な直線はない



半平面の共通部分を求めるには

27/38

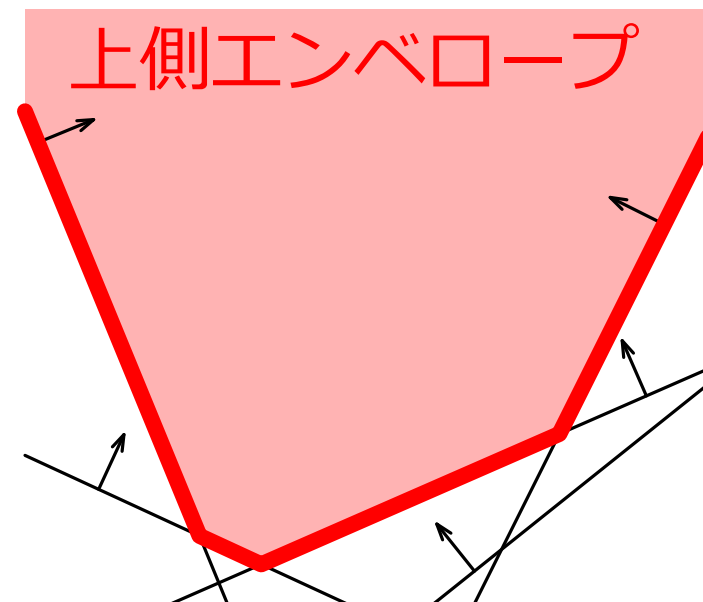
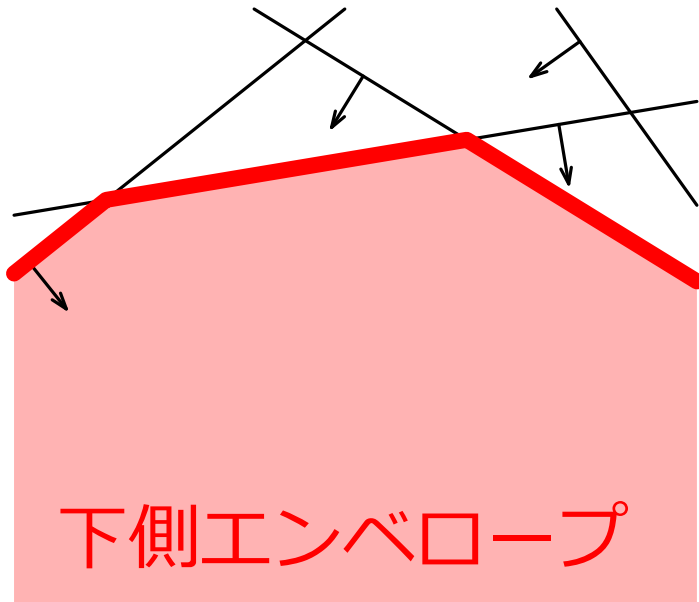
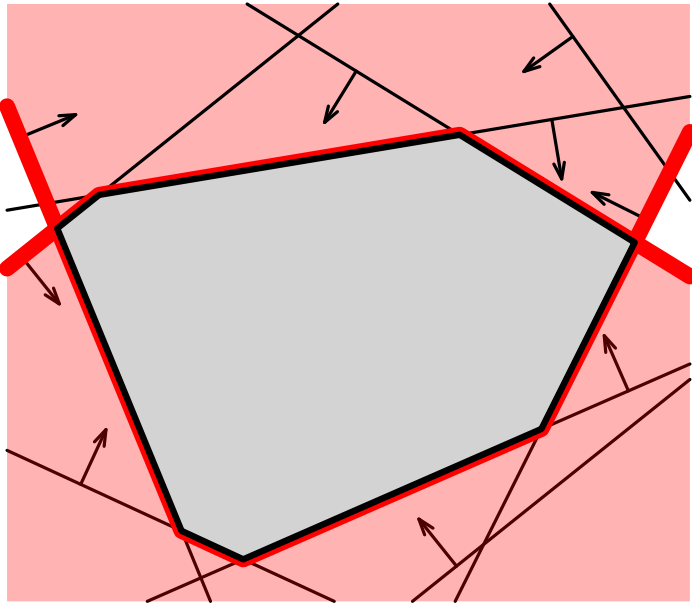
仮定： y 軸に平行な直線はない



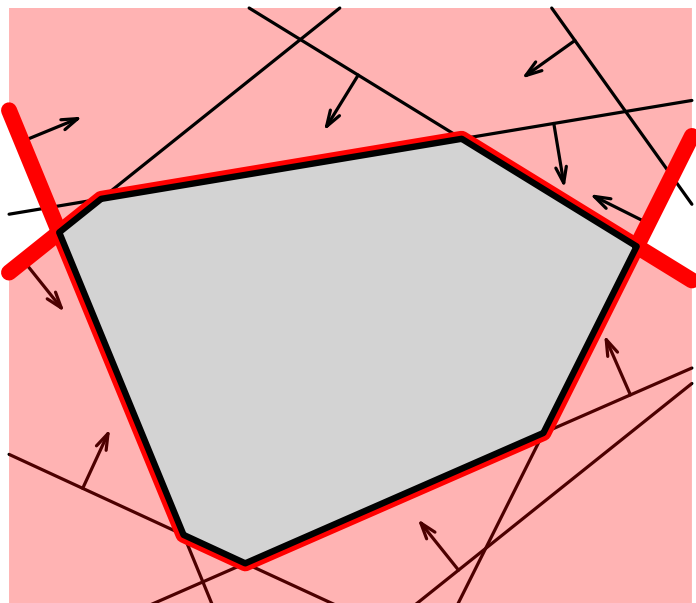
半平面の共通部分を求めるには

27/38

仮定： y 軸に平行な直線はない



仮定： y 軸に平行な直線はない

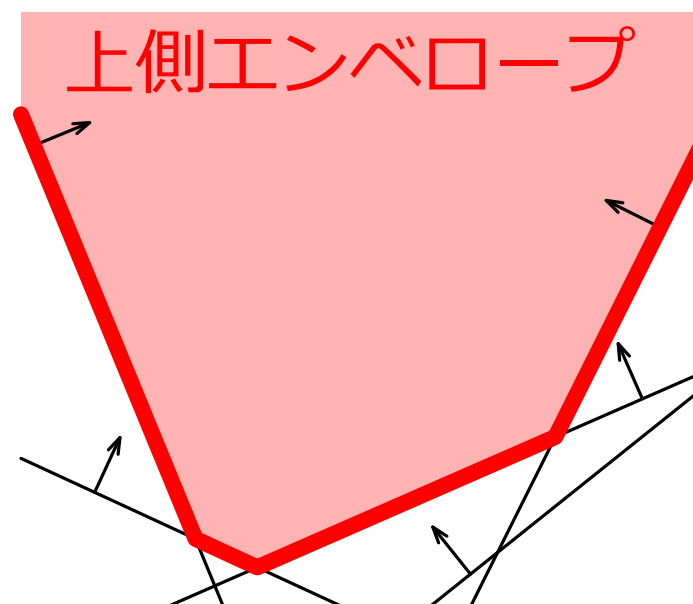
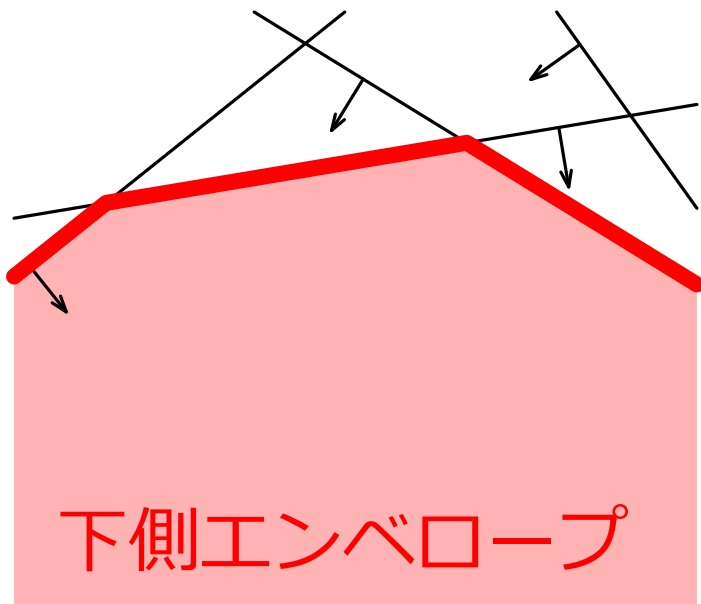


半空間の共通部分の計算

= 下側エンベロップの計算

+ 上側エンベロップの計算

+ $O(\text{直線の数})$

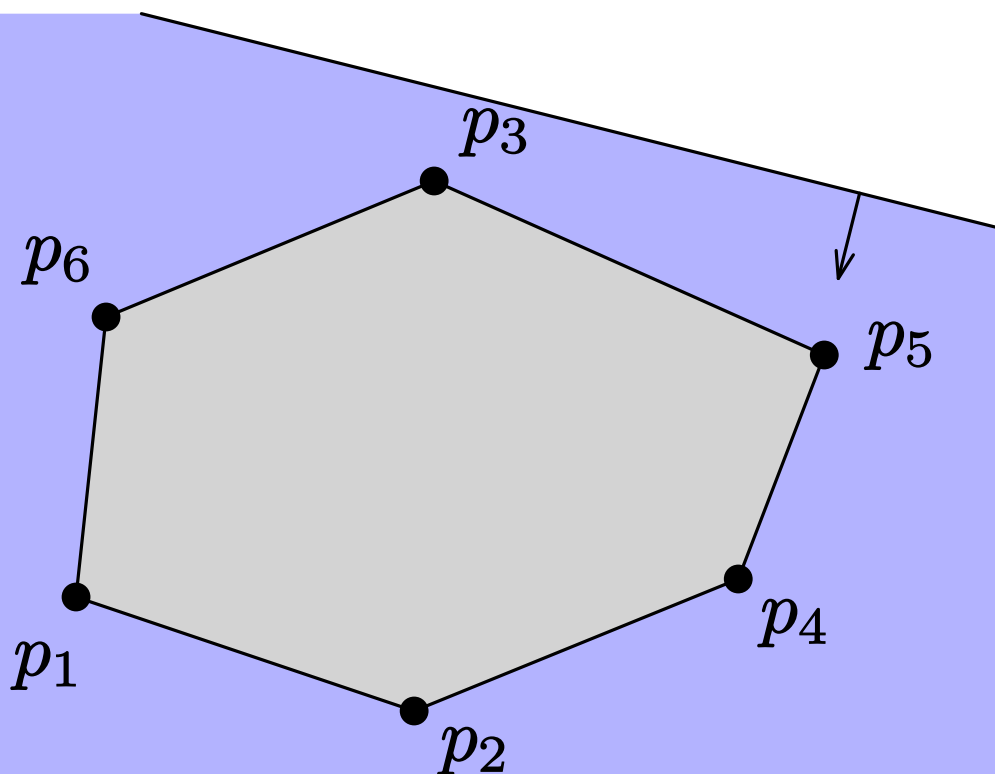


1. 凸多角形を記述する方法
2. 点と直線の双対変換
3. 直線配置
4. **双対変換と凸多角形**

性質：半平面による凸包の記述

点集合 $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の凸包は次のようにも書ける

$$\text{CH}(V) = \bigcap \{ \text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \dots, p_n \in h \}$$



定義：凸包

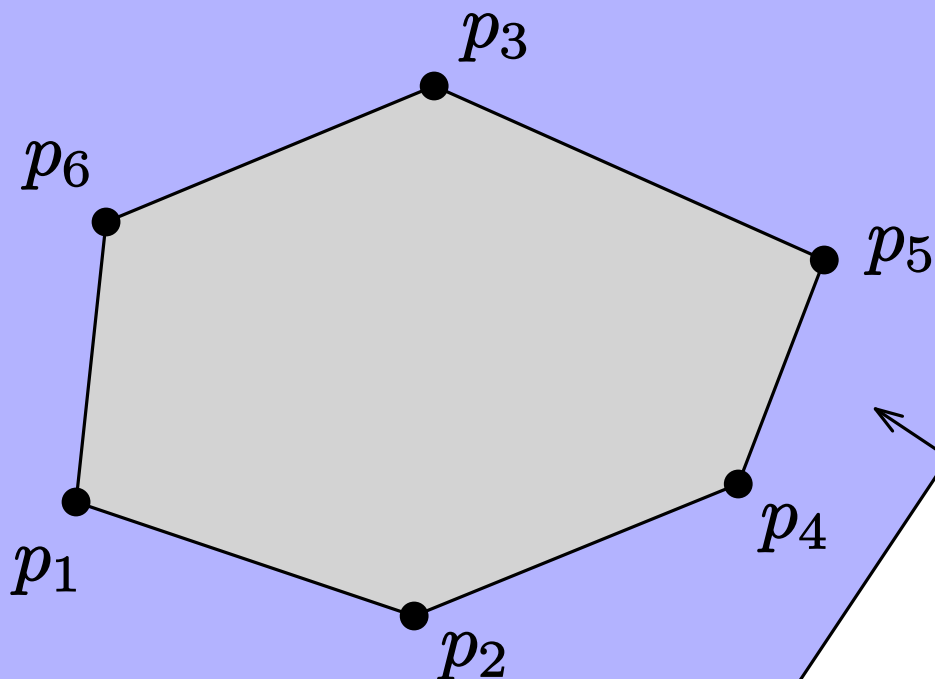
点集合 $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の **凸包** とは、次の集合

$$\text{CH}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

性質：半平面による凸包の記述

点集合 $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の凸包は次のようにも書ける

$$\text{CH}(V) = \bigcap \{ \text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \dots, p_n \in h \}$$



定義：凸包

点集合 $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の **凸包** とは、次の集合

$$\text{CH}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$$

証明： V に対して、次のように集合 A, B を定める

$$\begin{aligned} \bullet \quad A &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\} \\ \bullet \quad B &= \bigcap \{ \text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \dots, p_n \in h \} \end{aligned}$$

証明すべきことは、 $A = B$

- 以下、「 $A \subseteq B$ 」を証明する
- 「 $B \subseteq A$ 」は演習問題

証明： V に対して、次のように集合 A, B を定める

$$\begin{aligned} \bullet A &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\} \\ \bullet B &= \bigcap \{ \text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \dots, p_n \in h \} \end{aligned}$$

[$A \subseteq B$ の証明] $p \in A$ とする

- ある $\lambda_i \geq 0$ が $\sum_i \lambda_i = 1$ と $p = \sum_i \lambda_i p_i$ を満たす
- $p_1, \dots, p_n \in h$ を満たす任意の半平面 h を考える
- **[目標]** $p \in h$ を示すこと

証明： V に対して、次のように集合 A, B を定める

$$\begin{aligned} \bullet A &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\} \\ \bullet B &= \bigcap \{ \text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \dots, p_n \in h \} \end{aligned}$$

[$A \subseteq B$ の証明] $p \in A$ とする

- ある $\lambda_i \geq 0$ が $\sum_i \lambda_i = 1$ と $p = \sum_i \lambda_i p_i$ を満たす
- $p_1, \dots, p_n \in h$ を満たす任意の半平面 h を考える

h が $y \geq ax + b$ と書けるとき

- $p_i \in h$ より, $y_i \geq ax_i + b$
- $\therefore \sum_i \lambda_i y_i \geq \sum_i \lambda_i (ax_i + b) \quad (\because \lambda_i \geq 0)$
$$\begin{aligned} &= a(\sum_i \lambda_i x_i) + b(\sum_i \lambda_i) \\ &= a(\sum_i \lambda_i x_i) + b \quad (\because \sum_i \lambda_i = 1) \end{aligned}$$

証明： V に対して、次のように集合 A, B を定める

$$\begin{aligned} \bullet A &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \mid \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0 \ (i \in \{1, 2, \dots, n\}), \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{array} \right\} \\ \bullet B &= \bigcap \{ \text{半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \dots, p_n \in h \} \end{aligned}$$

[$A \subseteq B$ の証明] $p \in A$ とする

- ある $\lambda_i \geq 0$ が $\sum_i \lambda_i = 1$ と $p = \sum_i \lambda_i p_i$ を満たす
- $p_1, \dots, p_n \in h$ を満たす任意の半平面 h を考える

h が $x \geq c$ と書けるとき

- $p_i \in h$ より, $x_i \geq c$
- $\therefore \sum_i \lambda_i x_i \geq \sum_i \lambda_i c = c$

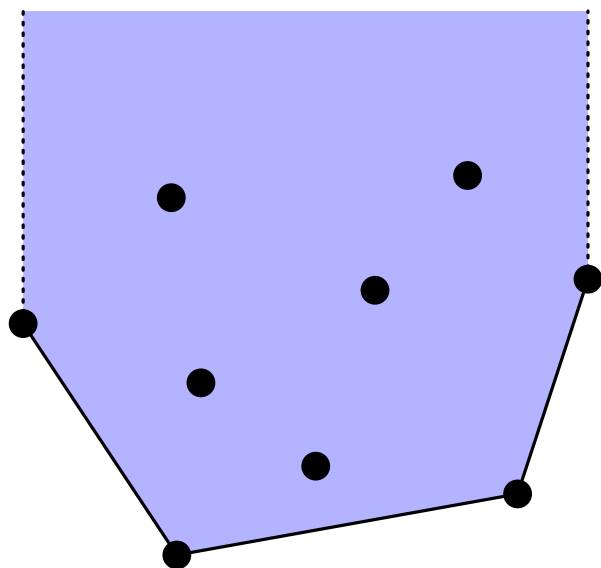
したがって、どちらの場合でも $p \in h$

□

定義：下側凸包

点集合 $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の **下側凸包** とは,

$$\bigcap \{ \text{上側半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \dots, p_n \in h \}$$



下側

= 下から凸包を見る

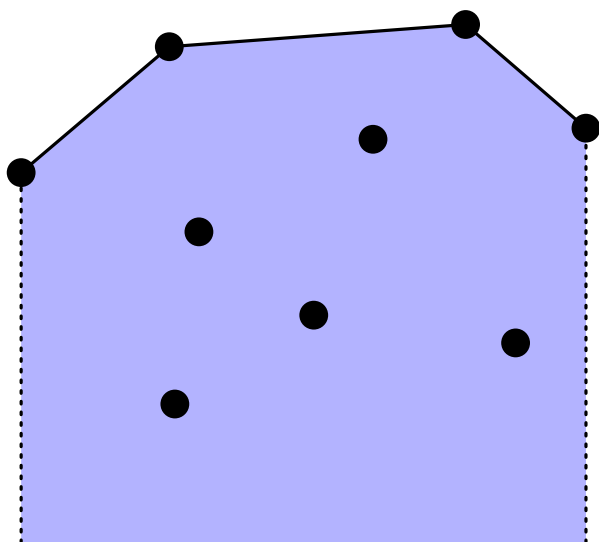
定義：上側凸包

点集合 $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ の **上側凸包** とは,

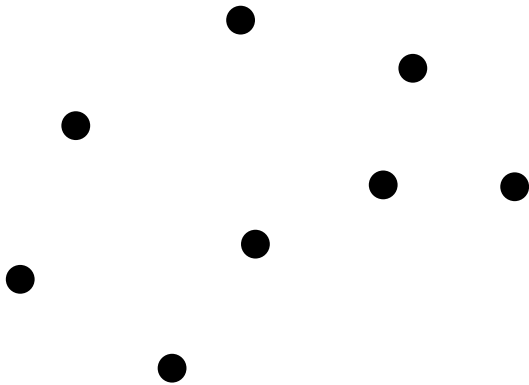
$$\bigcap \{ \text{下側半平面 } h \subseteq \mathbb{R}^2 \mid p_1, p_2, \dots, p_n \in h \}$$

上側

= 上から凸包を見る



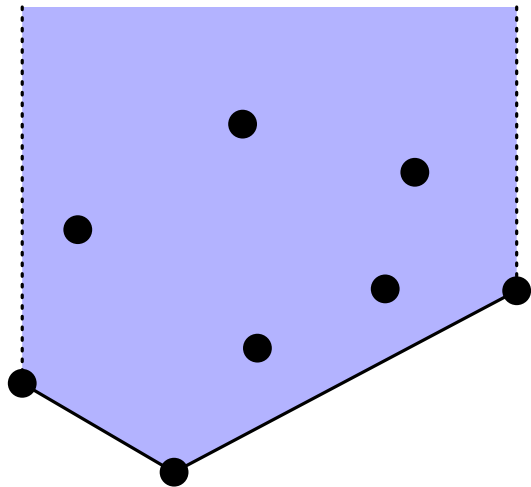
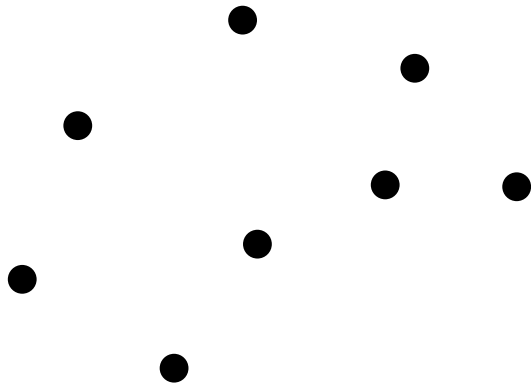
仮定：すべての点の x 座標は異なる



点集合の凸包を計算するには

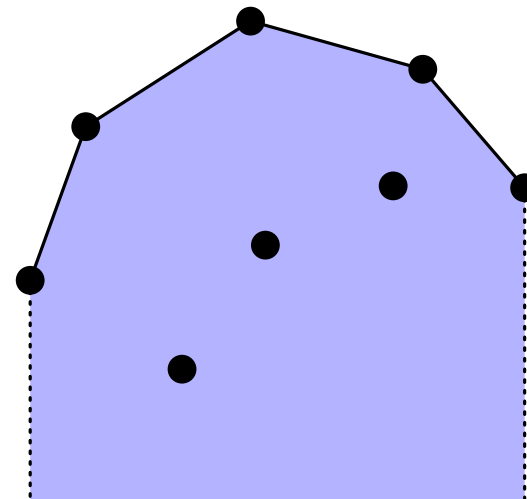
34/38

仮定：すべての点の x 座標は異なる



下側凸包

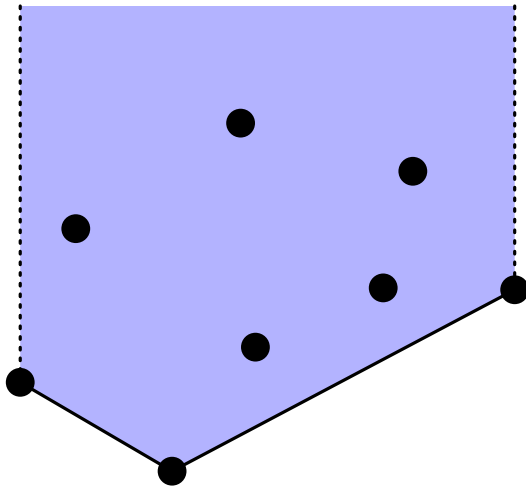
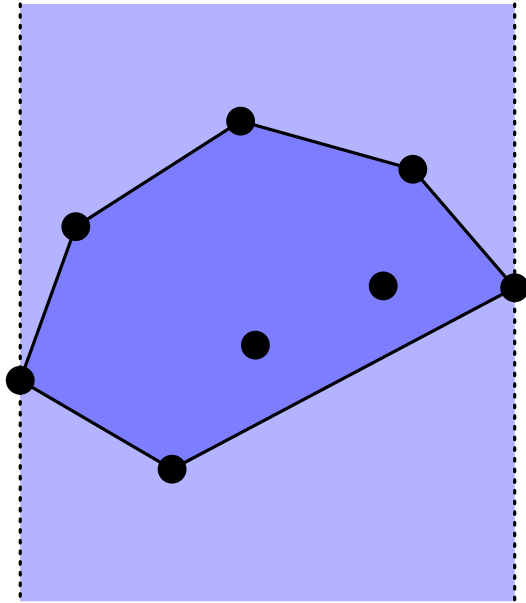
上側凸包



点集合の凸包を計算するには

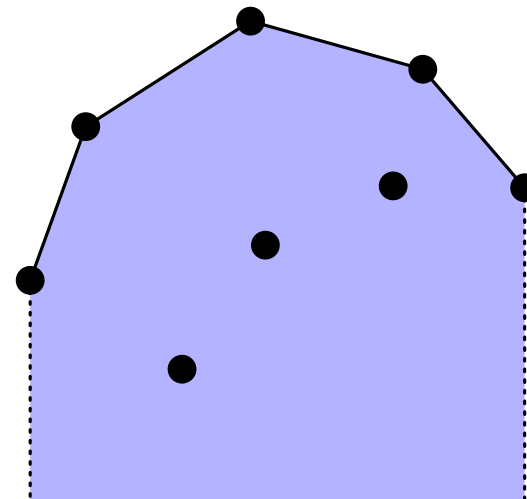
34/38

仮定：すべての点の x 座標は異なる

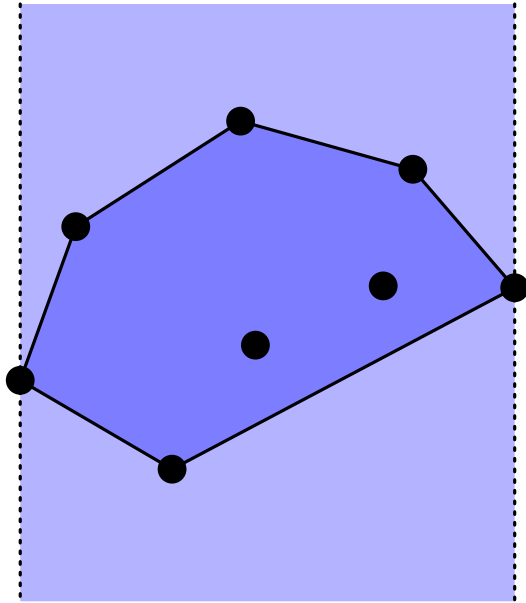


下側凸包

上側凸包



仮定：すべての点の x 座標は異なる

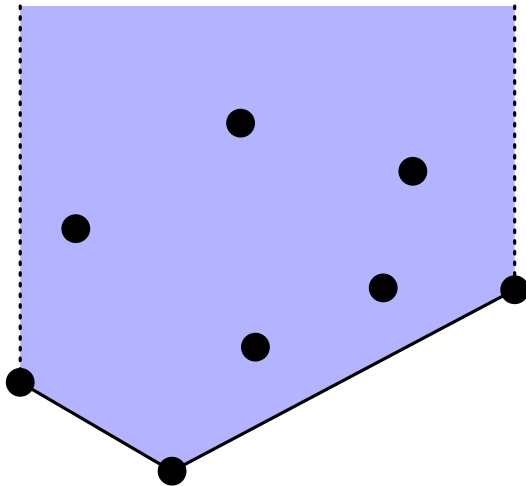


凸包の計算

= 下側凸包の計算

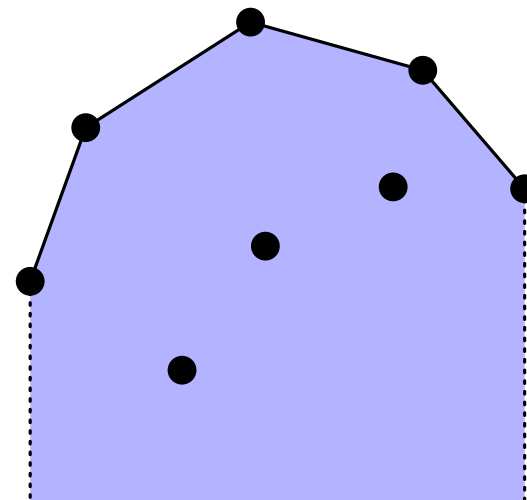
+ 上側凸包の計算

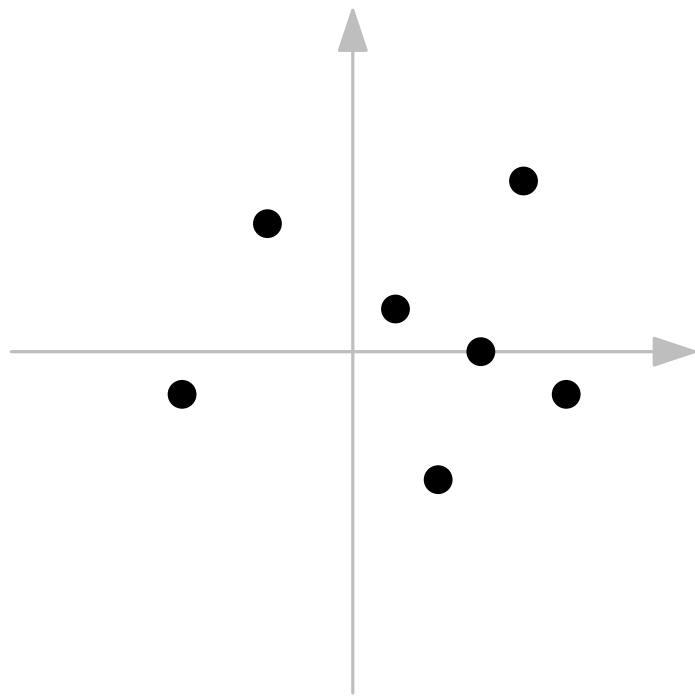
+ $O(\text{点の数})$



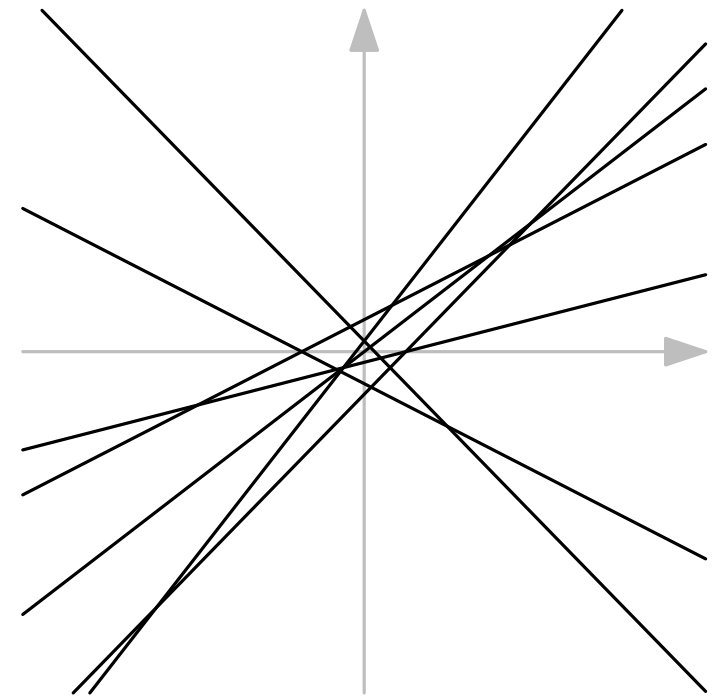
下側凸包

上側凸包

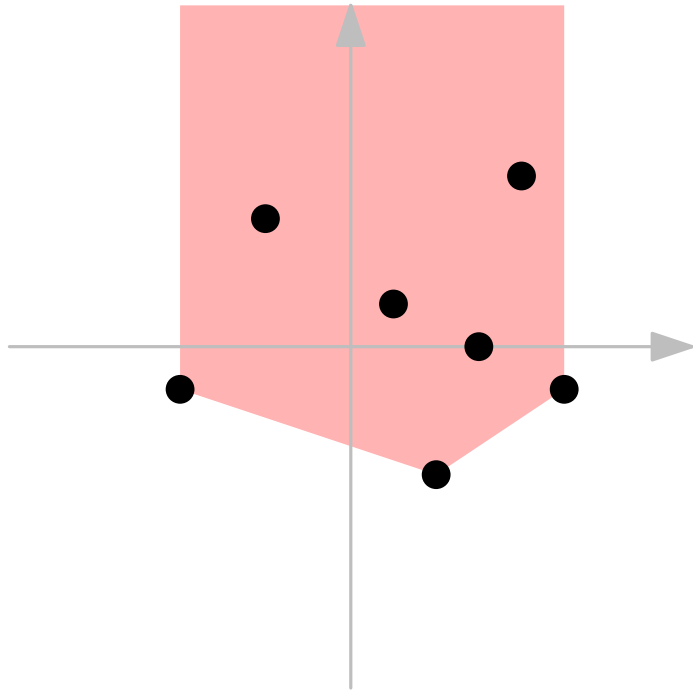




双対変換



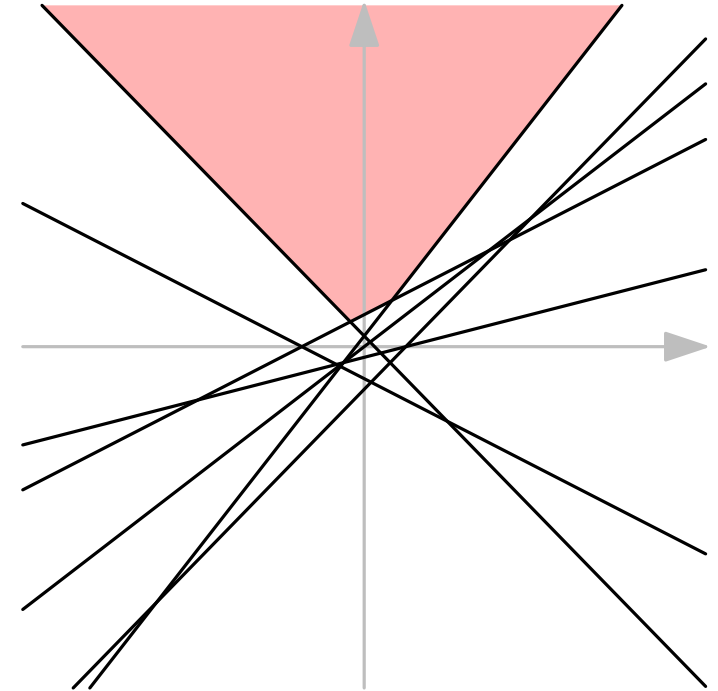
下側凸包



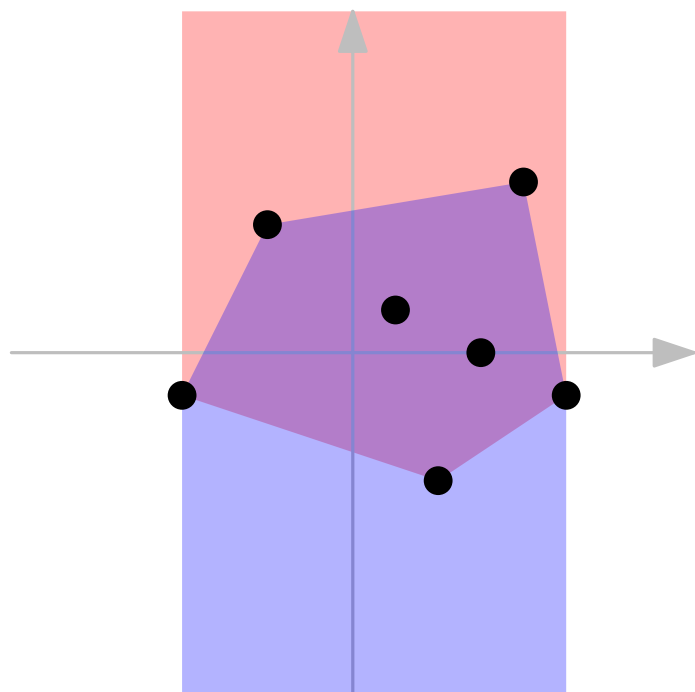
双対変換



上側エンベロープ



下側凸包

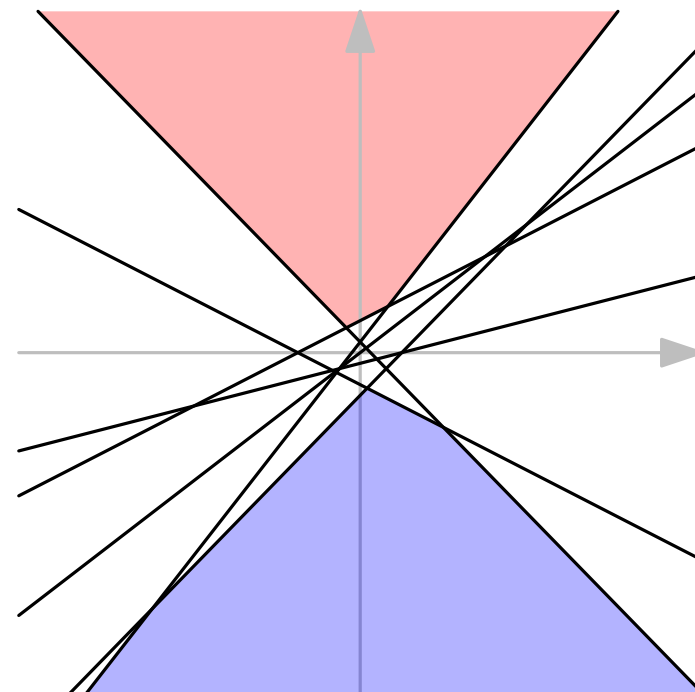


上側凸包

双対変換

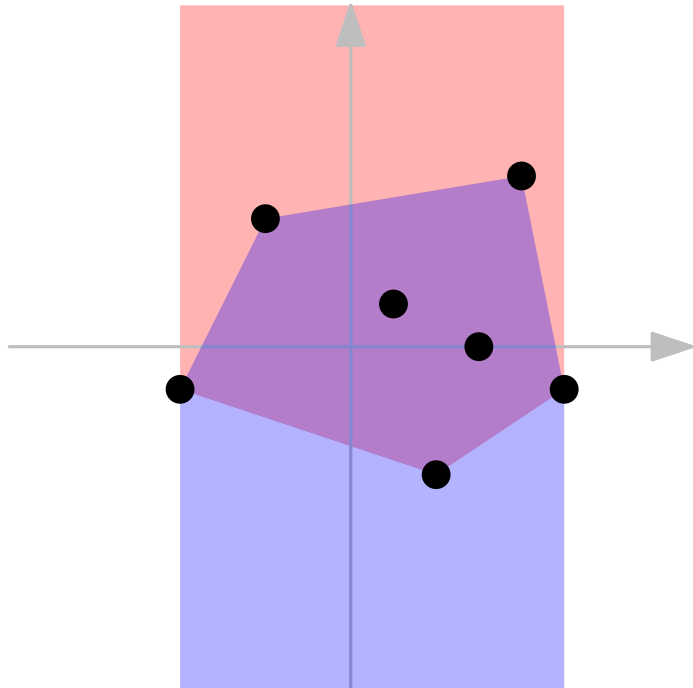


上側エンベロープ



下側エンベロープ

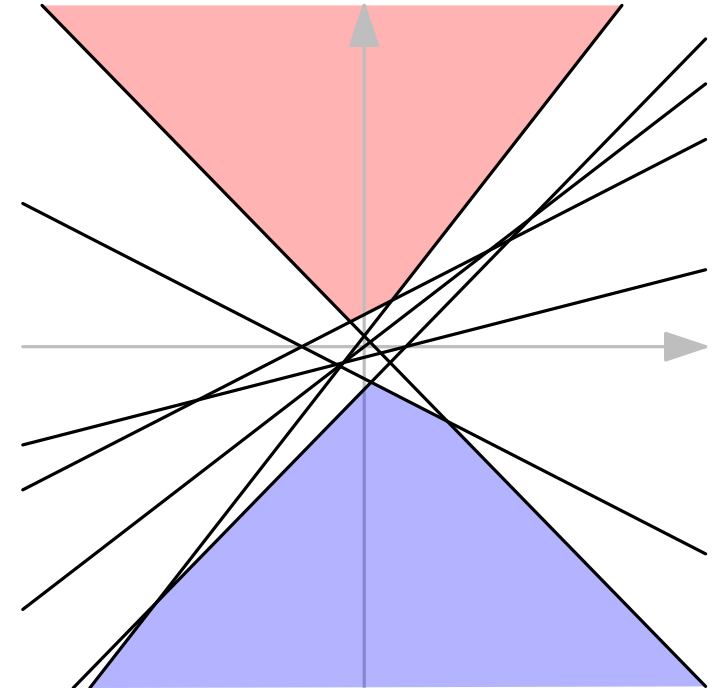
下側凸包



双対変換



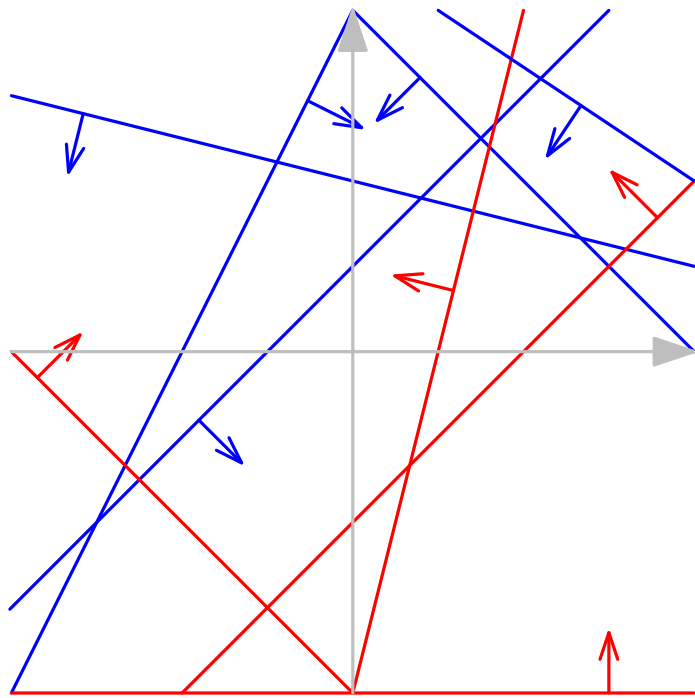
上側エンベロープ



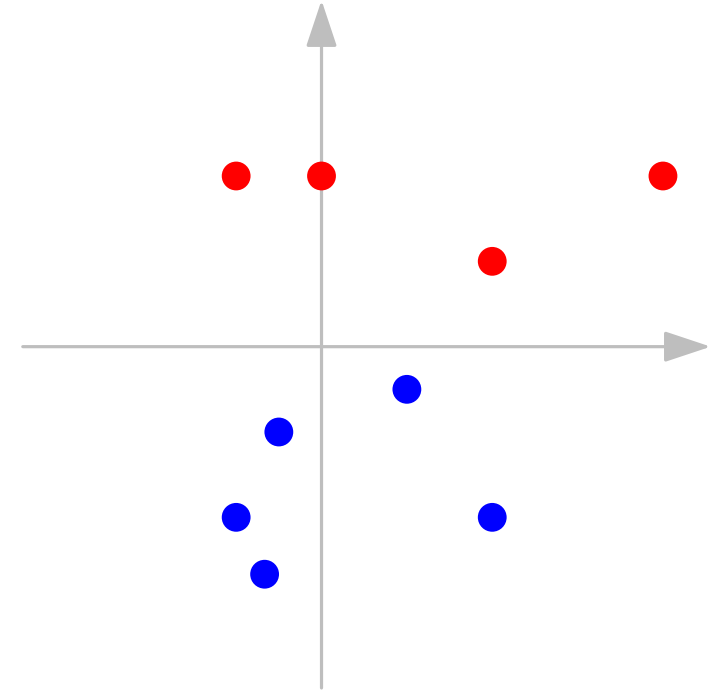
上側凸包

下側エンベロープ

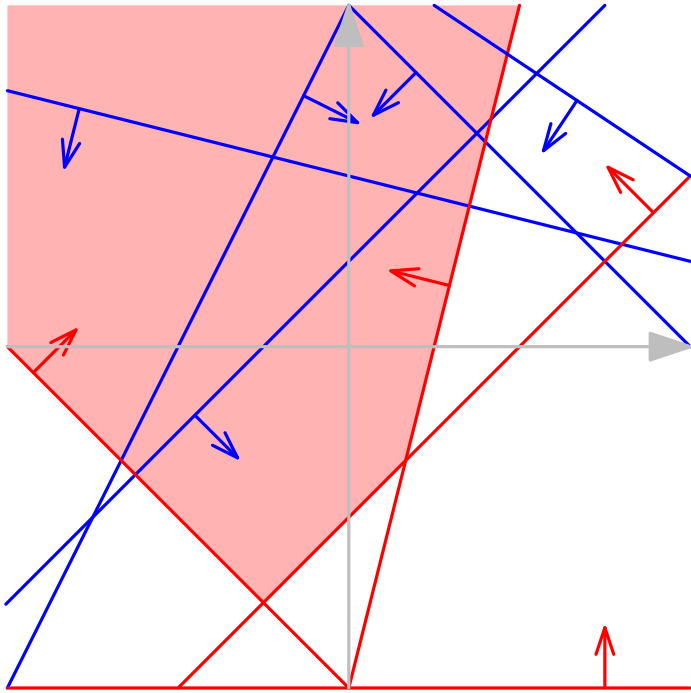
$\therefore \left\{ \begin{array}{c} \text{上側} \\ \text{下側} \end{array} \right\} \text{エンベロープから, } \left\{ \begin{array}{c} \text{下側} \\ \text{上側} \end{array} \right\} \text{凸包が分かる}$



双対変換



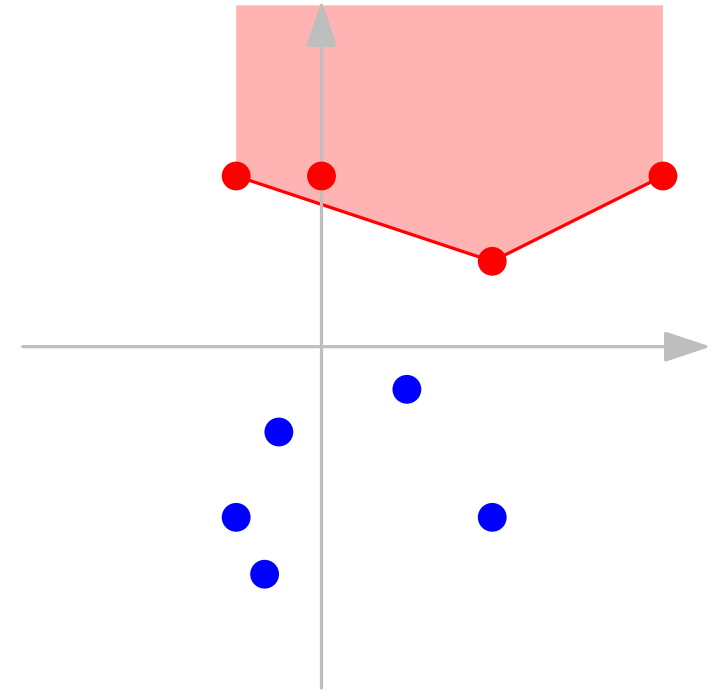
上側エンベロープ



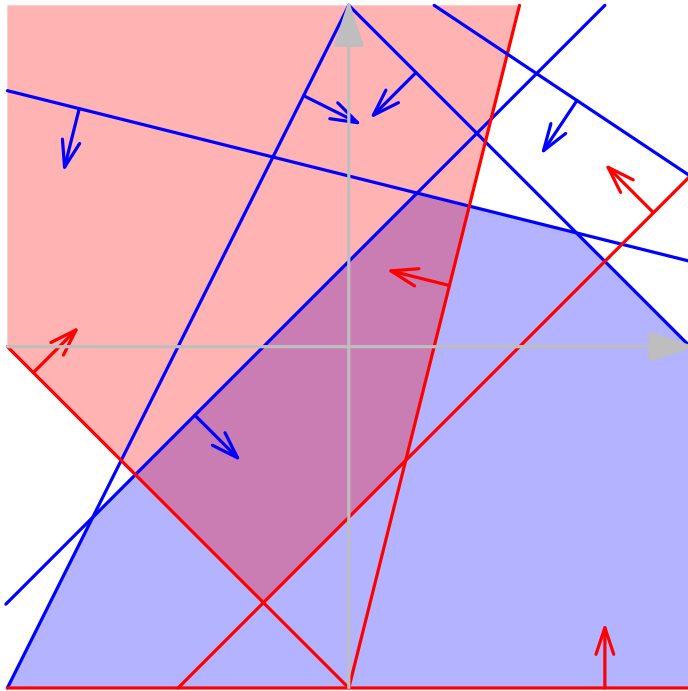
双対変換



下側凸包



上側エンベロープ

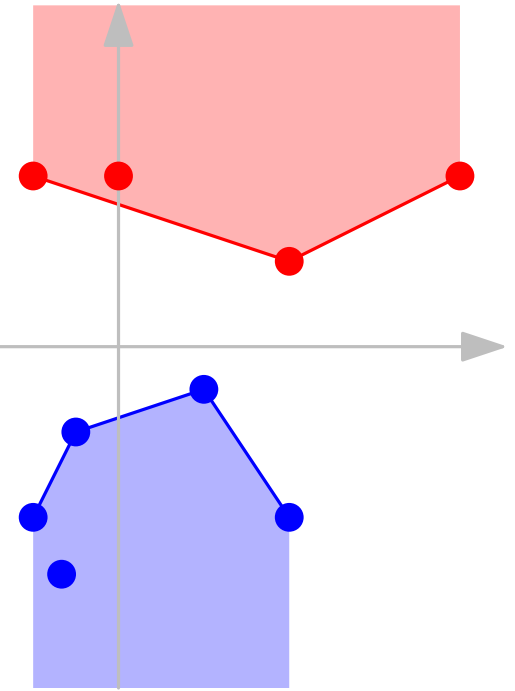


下側エンベロープ

双対変換

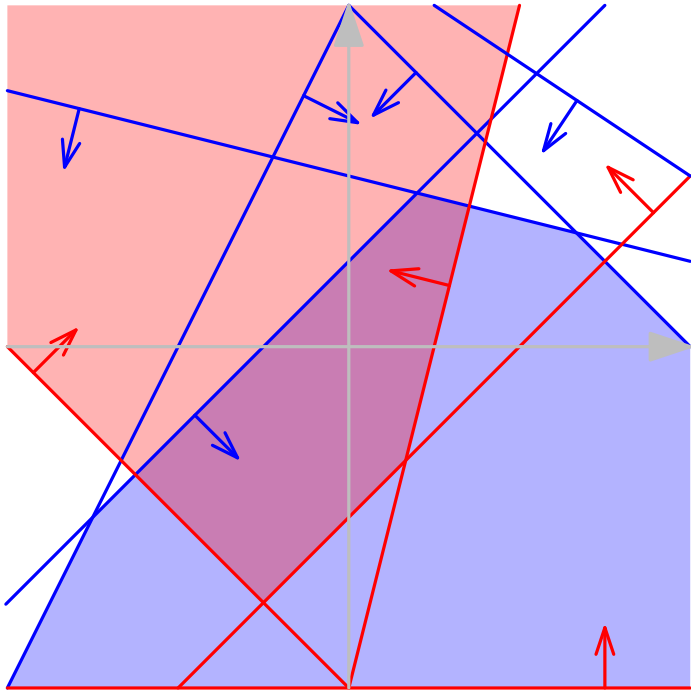


下側凸包



上側凸包

上側エンベロープ



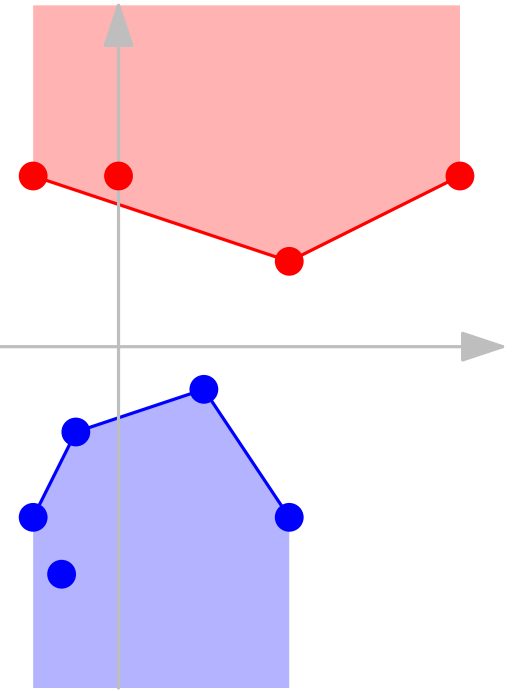
下側エンベロープ

$\therefore \left\{ \begin{array}{c} \text{下側} \\ \text{上側} \end{array} \right\}$ 凸包から, $\left\{ \begin{array}{c} \text{上側} \\ \text{下側} \end{array} \right\}$ エンベロープが分かる

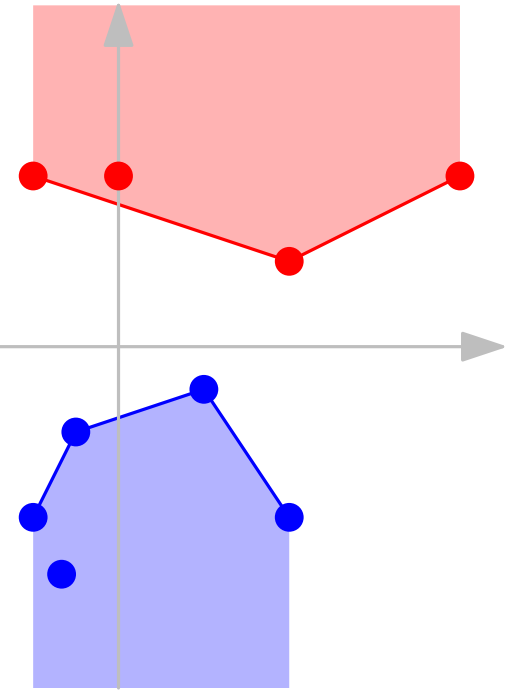
双対変換

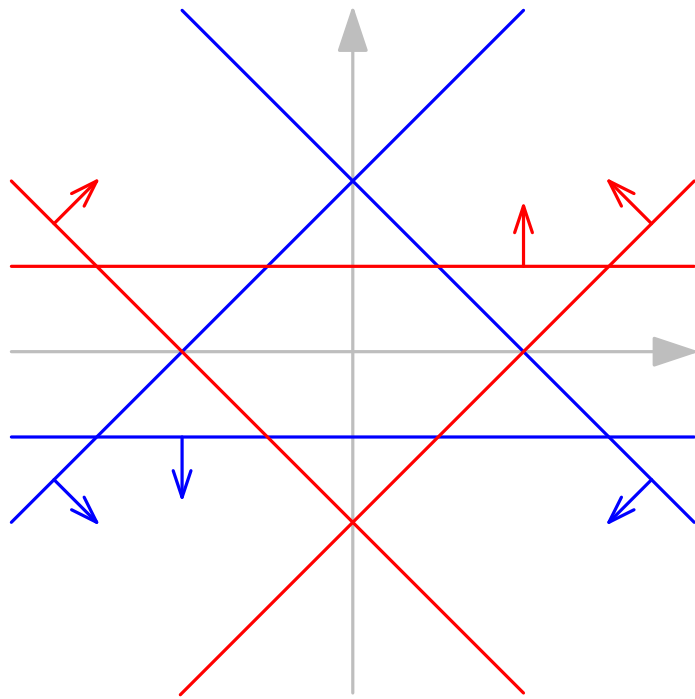


下側凸包

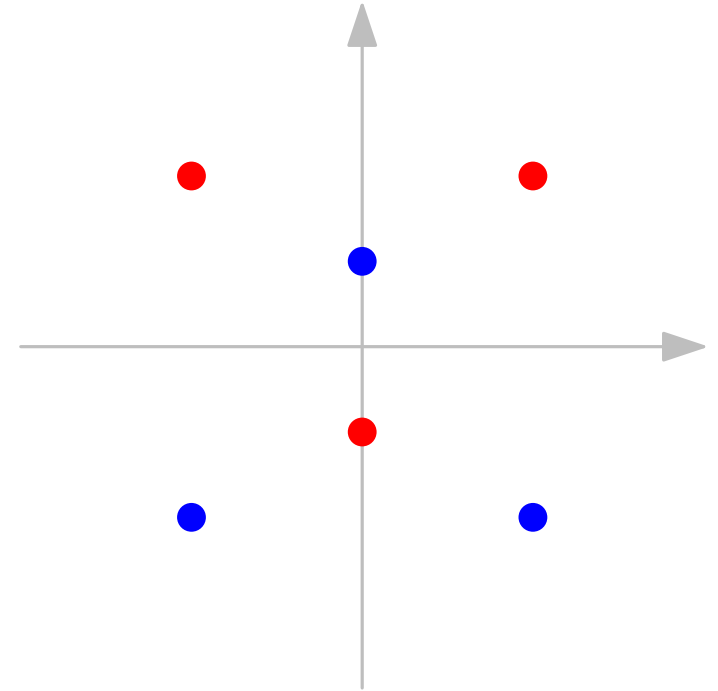


上側凸包

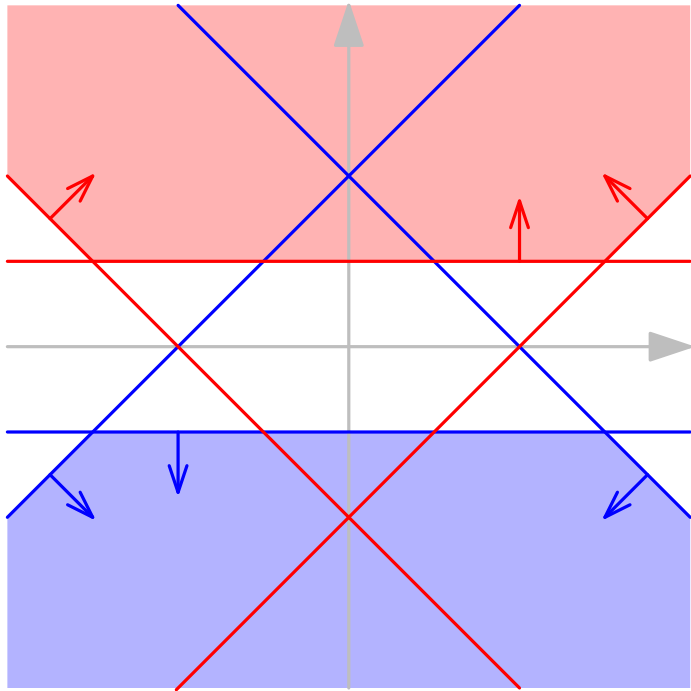




双対変換



上側エンベロープ

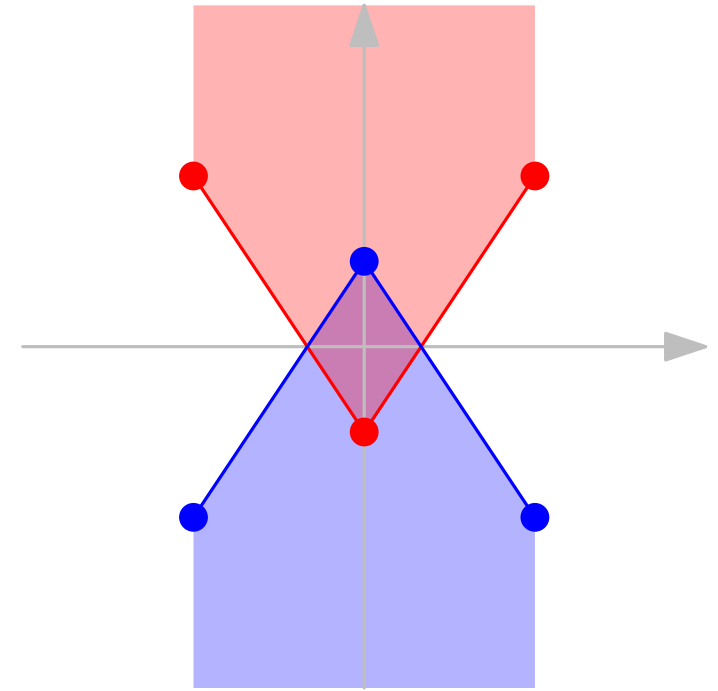


下側エンベロープ

双対変換

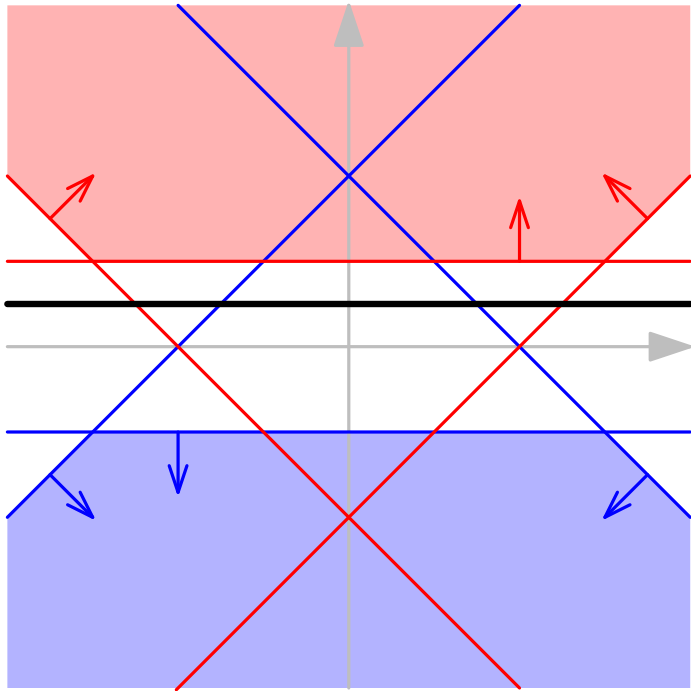


下側凸包



上側凸包

上側エンベロープ

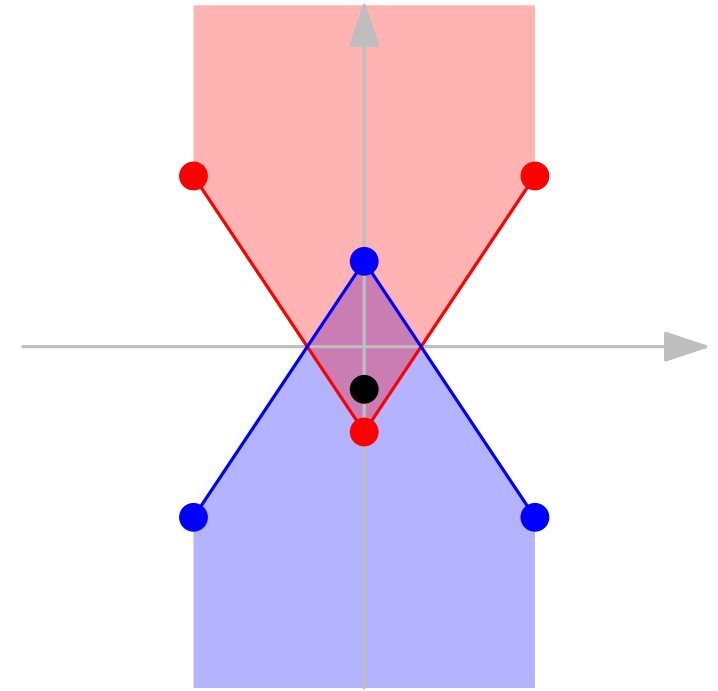


下側エンベロープ

双対変換



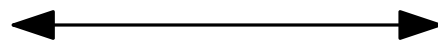
下側凸包



上側凸包

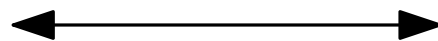
点 (a, b) $\longleftrightarrow$ 双対変換 $\longleftrightarrow$ 直線 $y = ax - b$

点配置



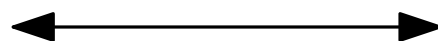
直線配置

下側凸包



上側エンベロープ

上側凸包



下側エンベロープ

教訓

ひとつの対象を さまざまな視点から 眺める