離散数理工学 (2025 年度後学期)

第 1 回

低次元 (1)：多角形と三角形分割

岡本 吉央　(電気通信大学)
okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 10 月 21 日

最終更新：2025 年 10 月 5 日　10:28

今回の目標

今回の目標

次ができるようになる

- 多角形が三角形分割を持つことが証明できる
- 多角形による問題解決において，三角形分割を使える

教訓

困難は分割せよ　　（デカルト『方法序説』）

目次

平面上の点

- 点 $p = (x, y)$

平面上の点

点集合 $\{p_1, p_2, p_3\}$

- 点 $p_1 = (x_1, y_1)$
- 点 $p_2 = (x_2, y_2)$
- 点 $p_3 = (x_3, y_3)$

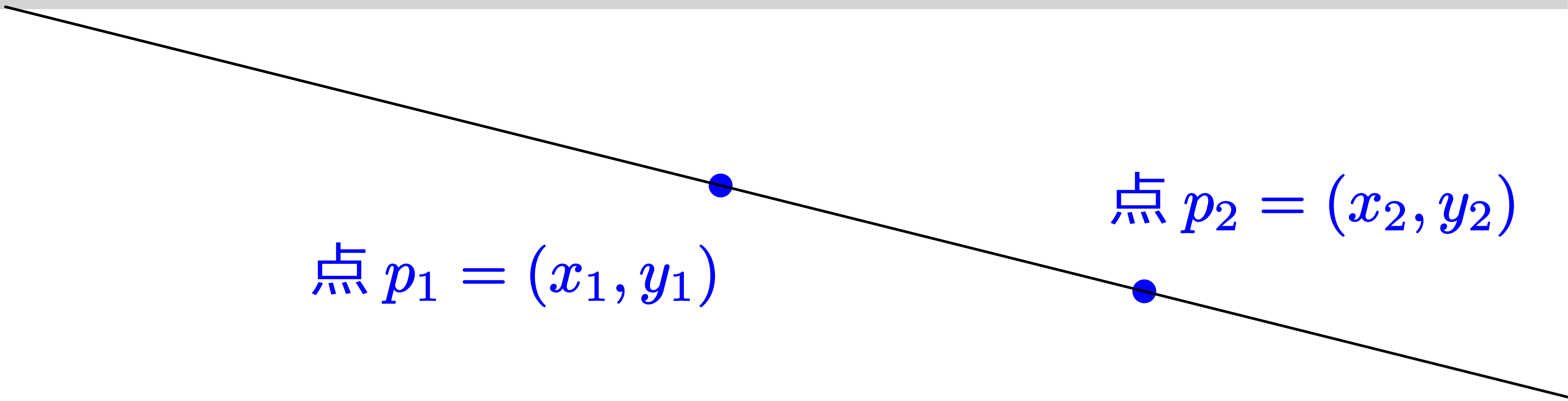
平面上の図形

平面上の図形 は 平面上の点の集合 のこと

平面上の基本的な図形

- 直線
- 線分
- 半直線
- 半平面
- 円周, 円板
- 三角形

基本的な図形 (1)：直線



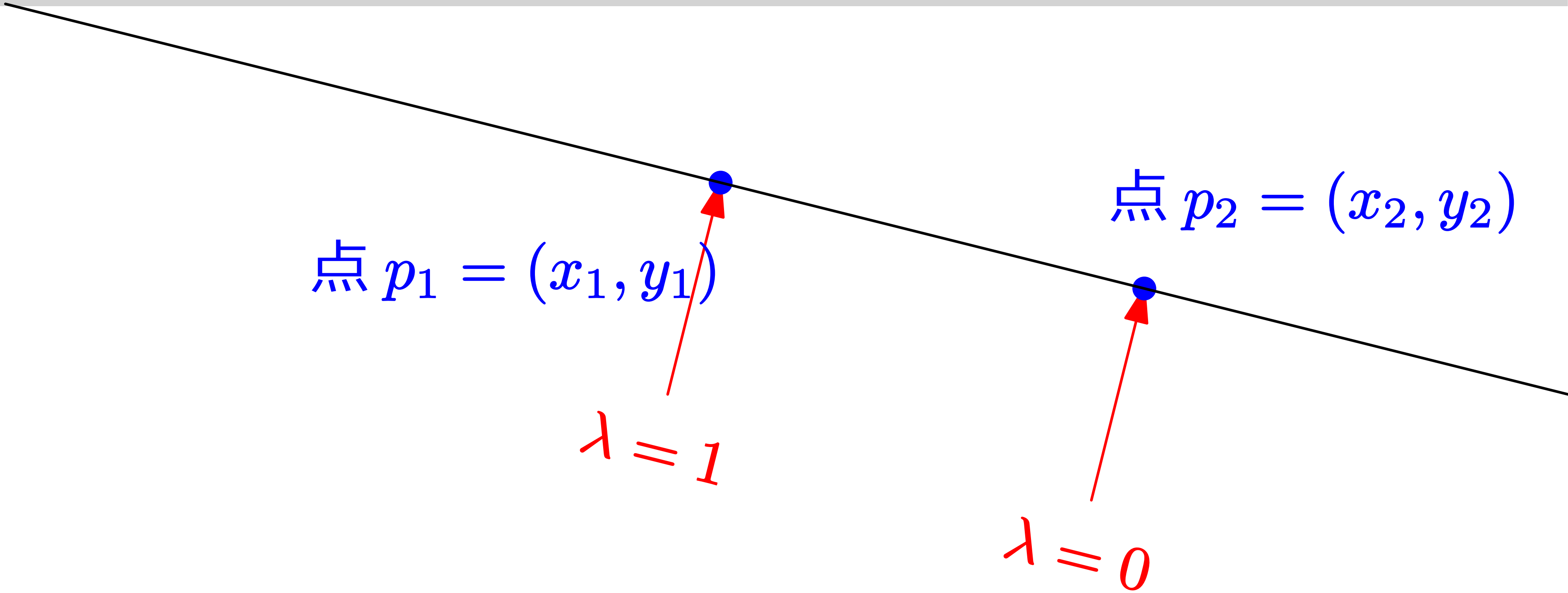
y 軸に平行ではない直線の方程式 (a, b は実数)

- $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$

2 点 p_1, p_2 を通る直線の表し方

- $\{(x, y) \mid (y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)\}$
- $\{p \mid$ ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して, $p = \lambda p_1 + (1 - \lambda) p_2\}$

基本的な図形 (1)：直線



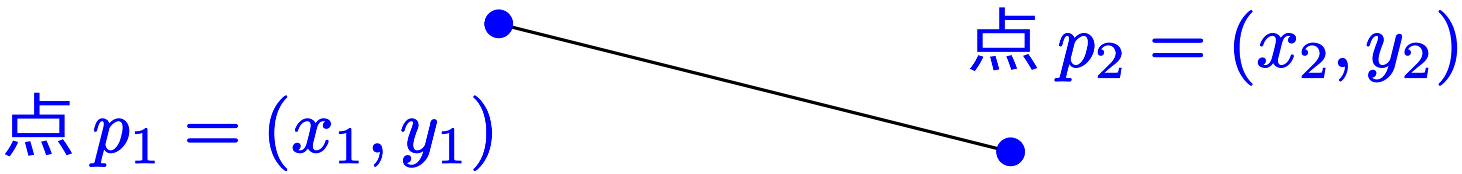
y 軸に平行ではない直線の方程式 (a, b は実数)

- $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$

2 点 p_1, p_2 を通る直線の表し方

- $\{(x, y) \mid (y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)\}$
- $\{p \mid$ ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して, $p = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2\}$

基本的な図形 (2)：線分

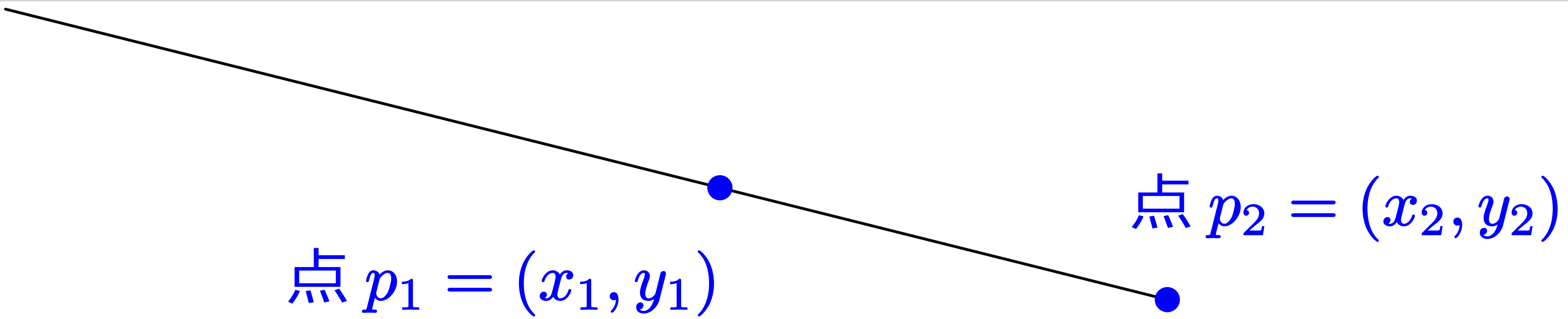


2 点 p_1, p_2 を結ぶ線分の表し方

- $\left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ が存在して,} \\ p = \lambda p_1 + (1-\lambda) p_2 \end{array} \right\}$

用語：p_1, p_2 は この線分の **端点**

基本的な図形 (3)：半直線

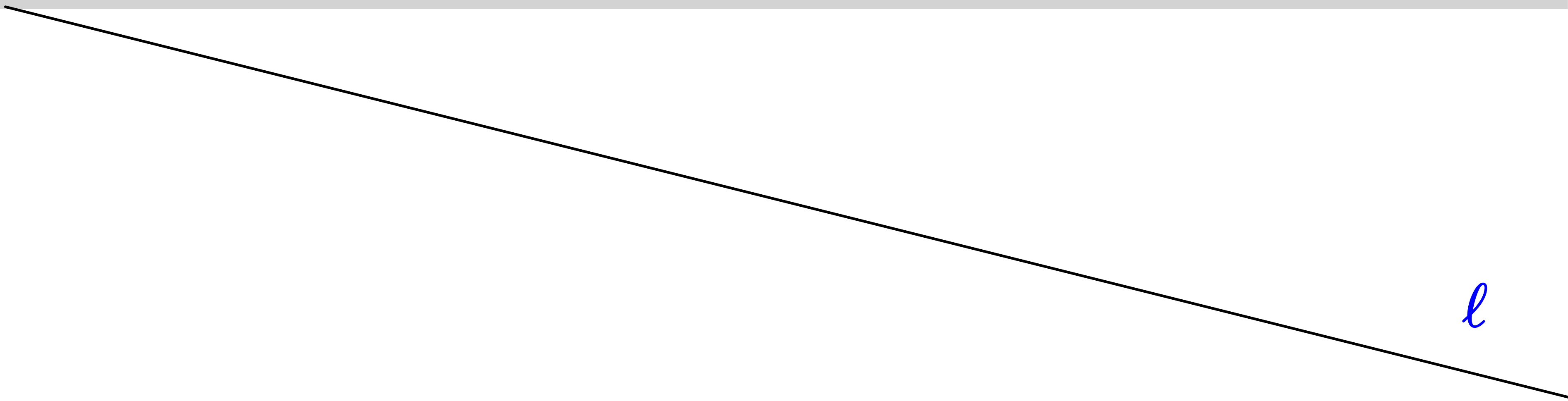


点 p_2 から点 p_1 に向かう半直線の表し方

- $\left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 \text{ が存在して,} \\ p = \lambda p_1 + (1-\lambda) p_2 \end{array} \right\}$

用語：p_2 は この半直線の **端点** または **始点**

基本的な図形 (4)：半平面



y 軸に平行ではない直線 ℓ の方程式 (a, b は実数)

- $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$

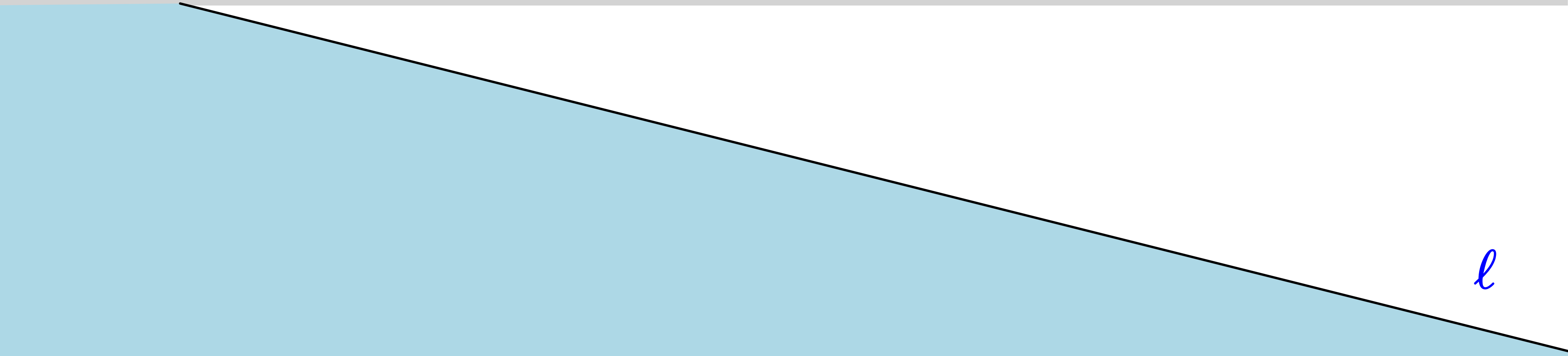
ℓ の下側の半平面 (下半平面) の表し方

- $\{(x, y) \mid y \leq ax + b\}$

ℓ の上側の半平面 (上半平面) の表し方

- $\{(x, y) \mid y \geq ax + b\}$

基本的な図形 (4)：半平面



y 軸に平行ではない直線 ℓ の方程式 (a, b は実数)

- $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$

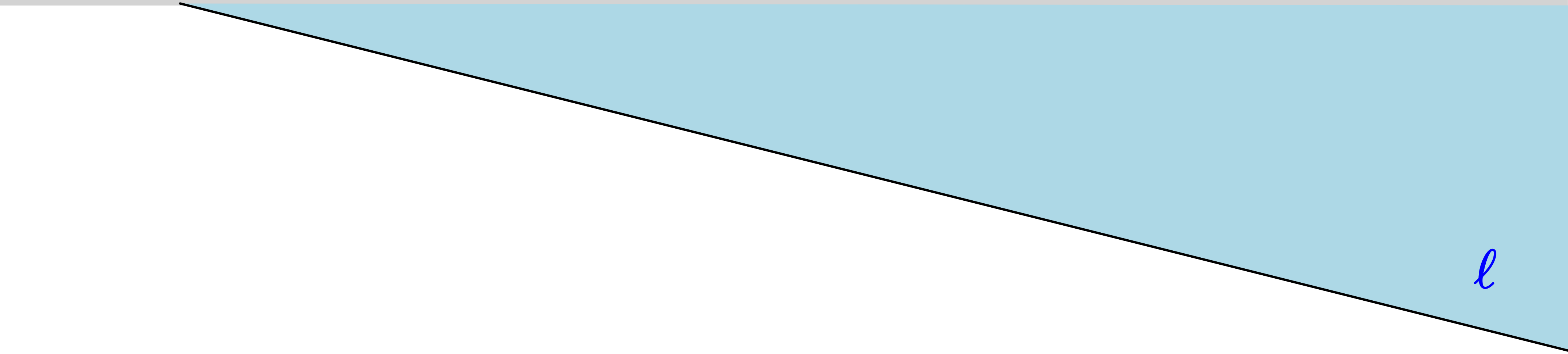
ℓ の下側の半平面 (下半平面) の表し方

- $\{(x, y) \mid y \leq ax + b\}$

ℓ の上側の半平面 (上半平面) の表し方

- $\{(x, y) \mid y \geq ax + b\}$

基本的な図形 (4)：半平面



y 軸に平行ではない直線 ℓ の方程式 (a, b は実数)

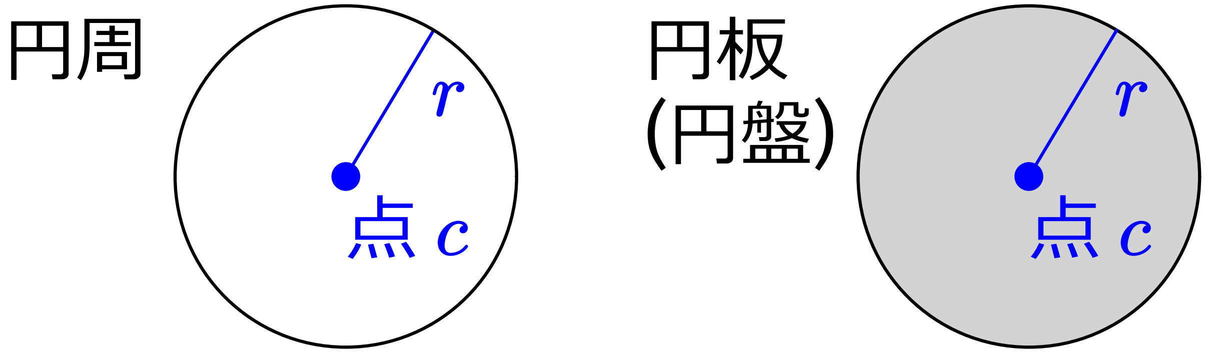
- $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$

ℓ の下側の半平面 (下半平面) の表し方

- $\{(x, y) \mid y \leq ax + b\}$

ℓ の上側の半平面 (上半平面) の表し方

- $\{(x, y) \mid y \geq ax + b\}$



中心を c とする半径 r の円周の表し方 $r > 0$

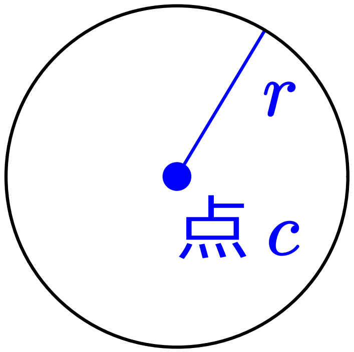
- $\{p \mid \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r\}$

中心を c とする半径 r の円板の表し方

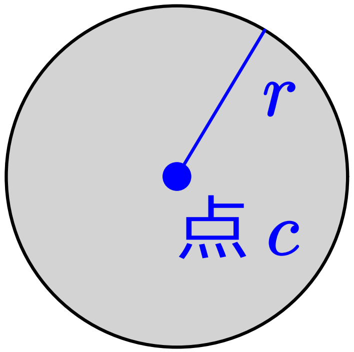
- $\{p \mid \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \leq r\}$

基本的な図形 (5)：円周と円板

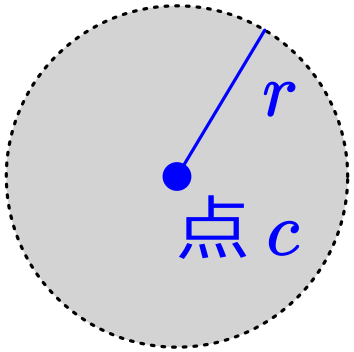
円周



円板
(円盤)



開円板
(開円盤)



中心を c とする半径 r の円周の表し方　$r > 0$

- $\{p \mid \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r\}$

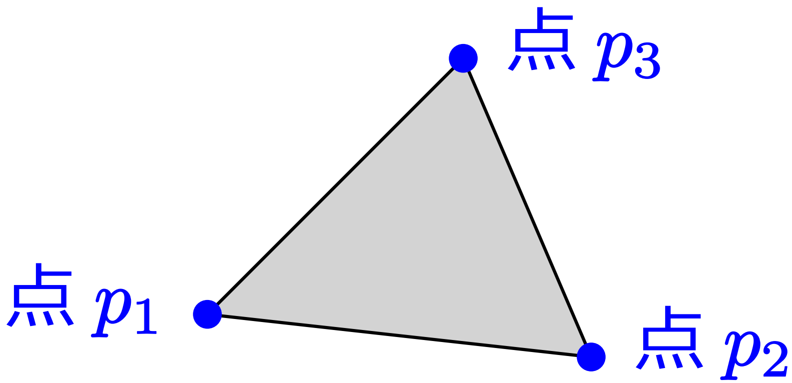
中心を c とする半径 r の円板の表し方

- $\{p \mid \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \leq r\}$

中心を c とする半径 r の開円板の表し方

- $\{p \mid \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} < r\}$

基本的な図形 (6)：三角形

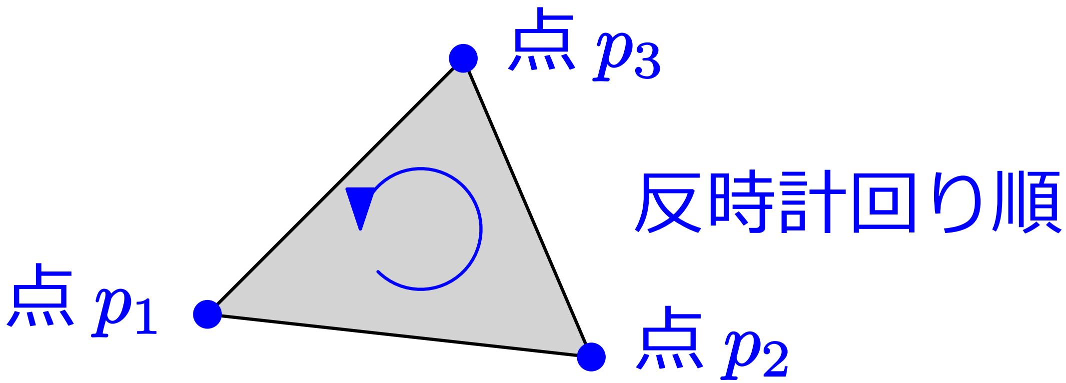


3 点 p_1, p_2, p_3 を結ぶ三角形の表し方

- $\left\{ p \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ある } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \mu \leq 1, \lambda + \mu \leq 1 \\ \text{が存在して, } p = \lambda p_1 + \mu p_2 + (1 - \lambda - \mu) p_3 \end{array} \right\}$

用語：p_1, p_2, p_3 は この三角形の **頂点**

基本的な図形 (6)：三角形

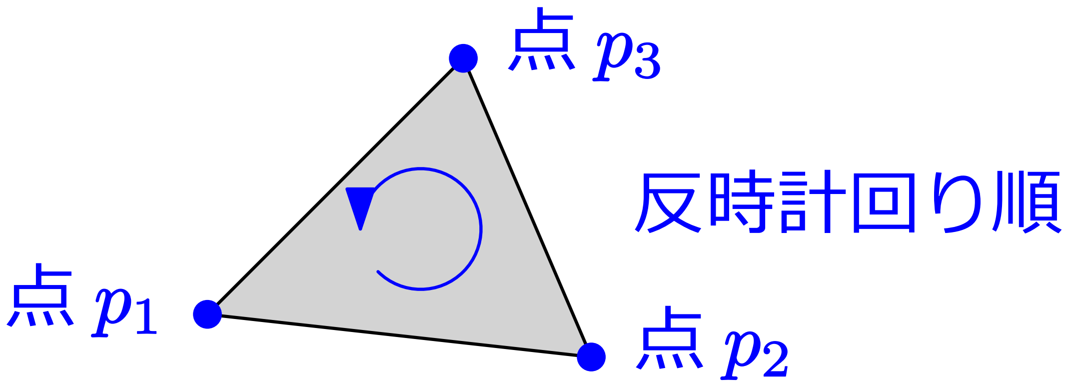


3 点 p_1, p_2, p_3 を結ぶ三角形の表し方

- $\left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \mu \leq 1, \lambda + \mu \leq 1 \\ \text{が存在して, } p = \lambda p_1 + \mu p_2 + (1 - \lambda - \mu) p_3 \end{array} \right\}$

<u>用語</u>：p_1, p_2, p_3 は この三角形の **頂点**

基本的な図形 (6)：三角形



3 点 p_1, p_2, p_3 を結ぶ三角形の表し方

- $\left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \mu \leq 1, \lambda + \mu \leq 1 \\ \text{が存在して}, \; p = \lambda p_1 + \mu p_2 + (1 - \lambda - \mu) p_3 \end{array} \right\}$

用語：p_1, p_2, p_3 は この三角形の **頂点**

性質：面積 $= \dfrac{1}{2}\left((x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\right)$

基本的な概念 (1)：開集合と閉集合

開集合の例 (境界を含まない)

閉集合の例 (境界を含む)

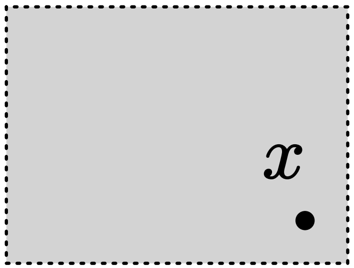
定義：開集合と閉集合

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- $\mathbb{R}^2$ の **開集合** であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，
  x を中心とする開円板 D で，
  $D \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- $\mathbb{R}^2$ の **閉集合** であるとは，
  補集合 $\mathbb{R}^2 - X$ が開集合であること

基本的な概念 (1)：開集合と閉集合

開集合の例 (境界を含まない)



閉集合の例 (境界を含む)

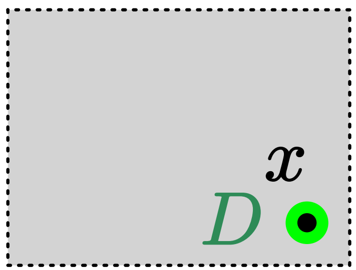
定義：開集合と閉集合

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- $\mathbb{R}^2$ の **開集合** であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，x を中心とする開円板 D で，$D \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- $\mathbb{R}^2$ の **閉集合** であるとは，補集合 $\mathbb{R}^2 - X$ が開集合であること

基本的な概念 (1)：開集合と閉集合

開集合の例 (境界を含まない)



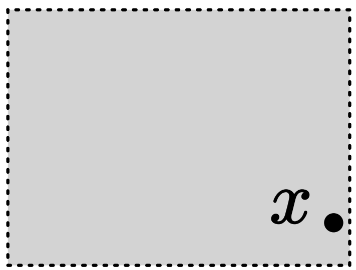
閉集合の例 (境界を含む)

定義：開集合と閉集合

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- $\mathbb{R}^2$ の **開集合** であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，x を中心とする開円板 D で，$D \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- $\mathbb{R}^2$ の **閉集合** であるとは，補集合 $\mathbb{R}^2 - X$ が開集合であること

開集合の例 (境界を含まない)



閉集合の例 (境界を含む)

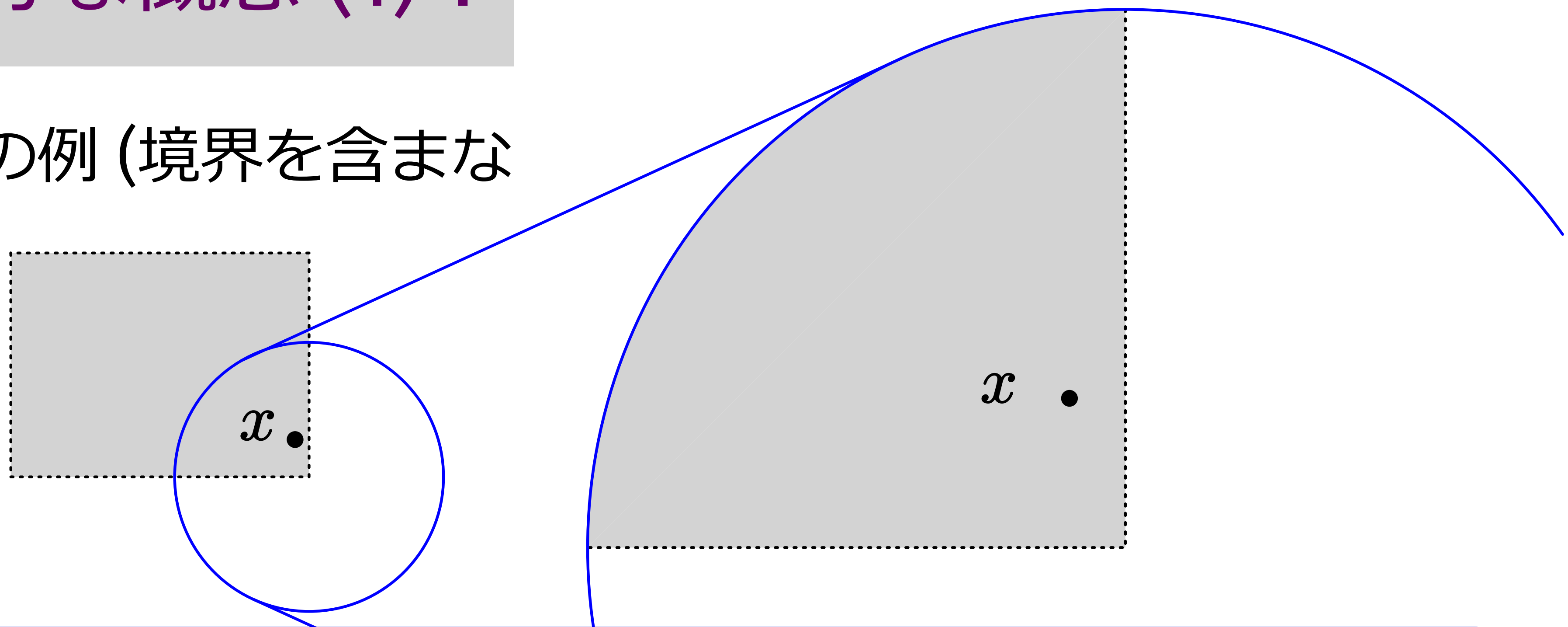
定義：開集合と閉集合

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- $\mathbb{R}^2$ の **開集合** であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，x を中心とする開円板 D で，$D \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- $\mathbb{R}^2$ の **閉集合** であるとは，補集合 $\mathbb{R}^2 - X$ が開集合であること

基本的な概念 (1)：

開集合の例 (境界を含まな



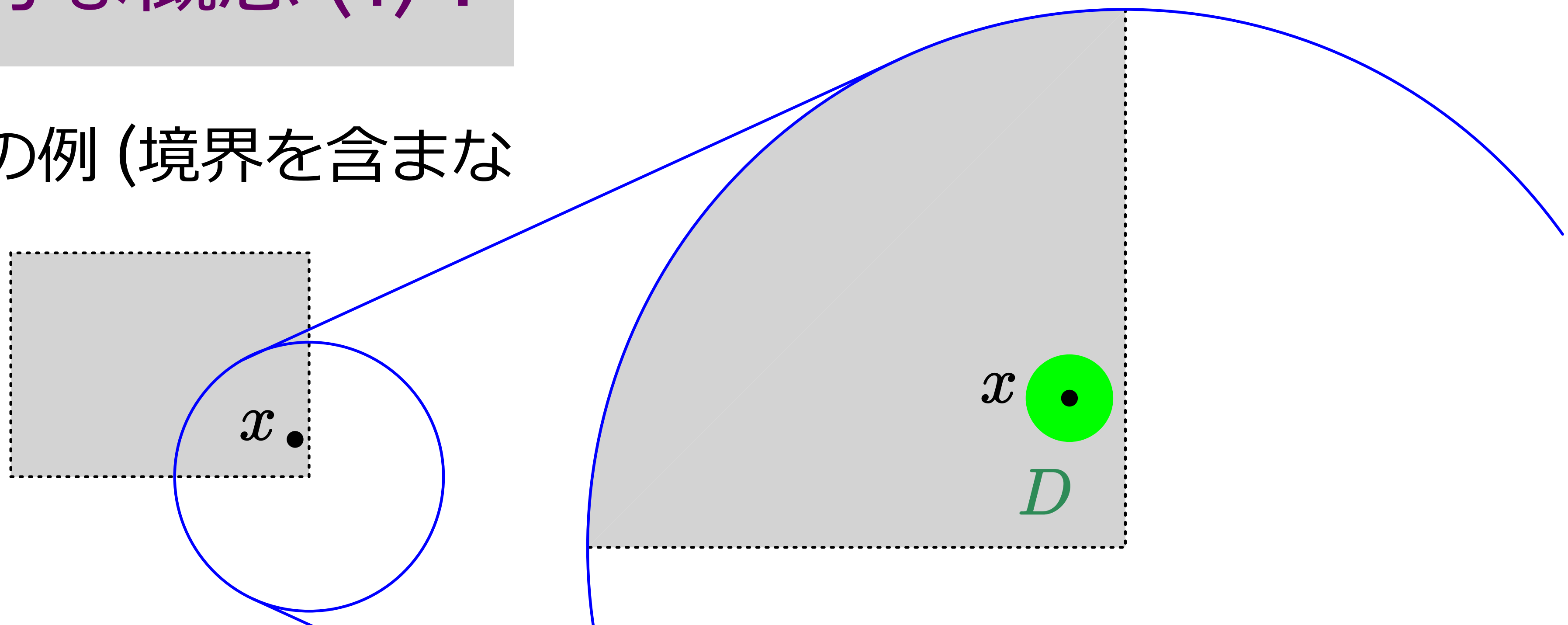
定義：開集合と閉集合

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- $\mathbb{R}^2$ の **開集合** であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，x を中心とする開円板 D で，$D \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- $\mathbb{R}^2$ の **閉集合** であるとは，補集合 $\mathbb{R}^2 - X$ が開集合であること

基本的な概念 (1)：

開集合の例 (境界を含まな



定義：開集合と閉集合

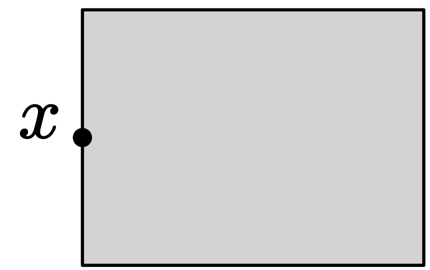
集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- $\mathbb{R}^2$ の **開集合** であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，x を中心とする開円板 D で，$D \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- $\mathbb{R}^2$ の **閉集合** であるとは，補集合 $\mathbb{R}^2 - X$ が開集合であること

基本的な概念 (1)：開集合と閉集合

開集合の例 (境界を含まない)

閉集合の例 (境界を含む)



定義：開集合と閉集合

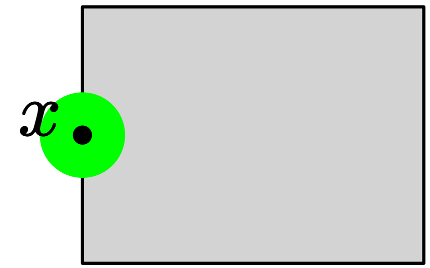
集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- $\mathbb{R}^2$ の **開集合** であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，
  x を中心とする開円板 D で，
  $D \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- $\mathbb{R}^2$ の **閉集合** であるとは，
  補集合 $\mathbb{R}^2 - X$ が開集合であること

基本的な概念 (1)：開集合と閉集合

開集合の例 (境界を含まない)

閉集合の例 (境界を含む)



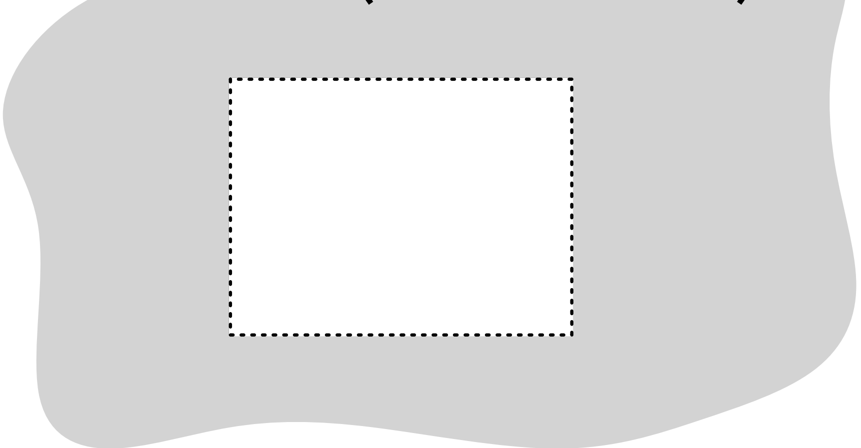
定義：開集合と閉集合

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- $\mathbb{R}^2$ の **開集合** であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，x を中心とする開円板 D で，$D \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- $\mathbb{R}^2$ の **閉集合** であるとは，補集合 $\mathbb{R}^2 - X$ が開集合であること

開集合の例 (境界を含まない)

閉集合の例 (境界を含む)

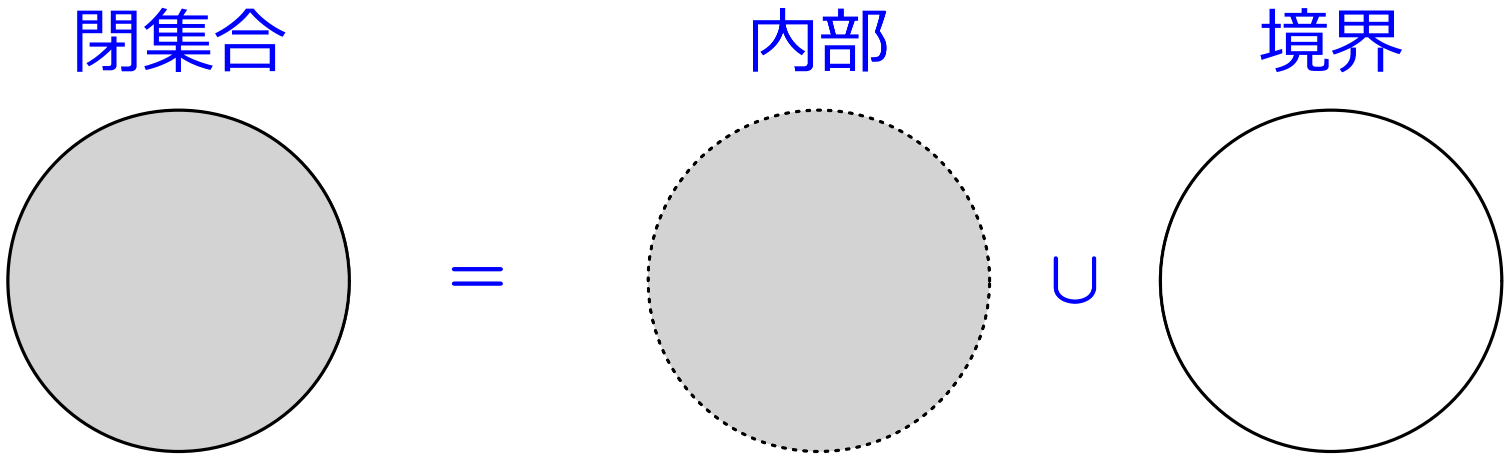


定義：開集合と閉集合

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- $\mathbb{R}^2$ の **開集合** であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，
  x を中心とする開円板 D で，
  $D \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- $\mathbb{R}^2$ の **閉集合** であるとは，
  補集合 $\mathbb{R}^2 - X$ が開集合であること

基本的な概念 (2)：内部と境界



定義：内点，内部

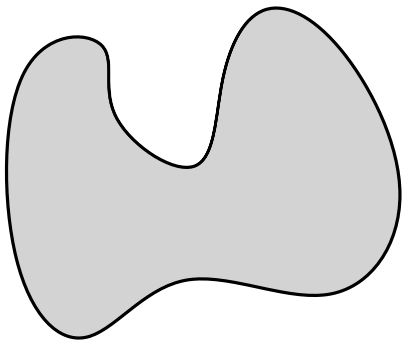
集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して，

- 点 $x \in X$ が X の **内点** であるとは，
  x を中心とする開円板 D で
  $D \subseteq X$ を満たすものが存在すること
- X の **内部** とは，X の内点全体の集合のこと

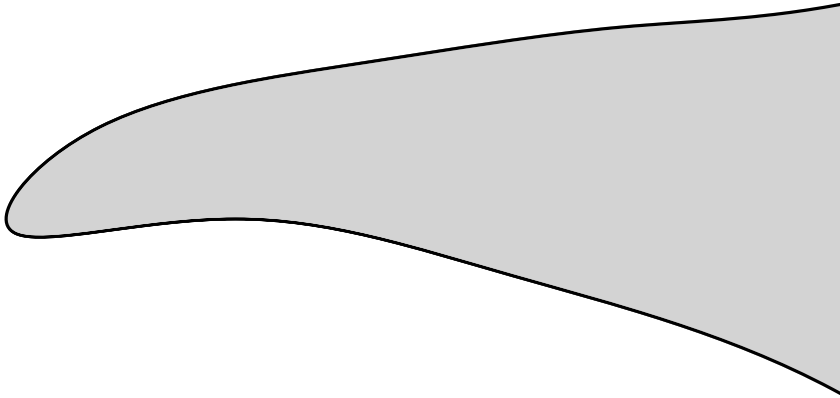
閉集合の **境界** とは，その内点ではない点全体の集合

基本的な概念 (3)：有界と非有界

有界な集合の例



非有界な集合



定義：有界性と非有界性

集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

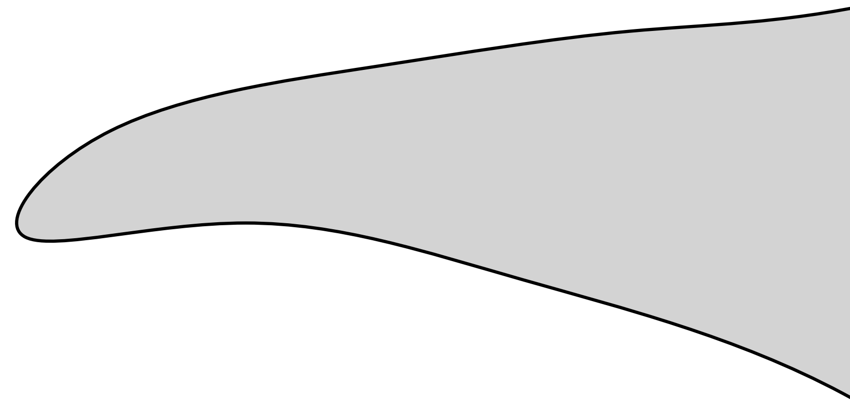
- **有界** であるとは，ある円板 D が存在して，$X \subseteq D$ を満たすこと
- **非有界** であるとは，有界ではないこと

有界閉集合を **コンパクト** であるということがある

基本的な概念 (3)：有界と非有界

有界な集合の例

非有界な集合



定義：有界性と非有界性

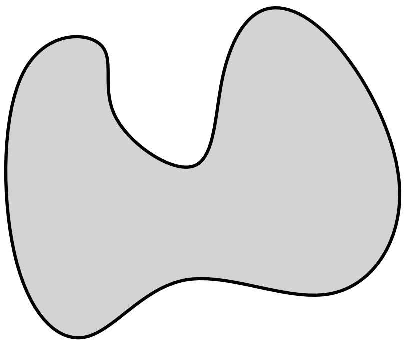
集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- **有界** であるとは，ある円板 D が存在して，
  $X \subseteq D$ を満たすこと
- **非有界** であるとは，有界ではないこと

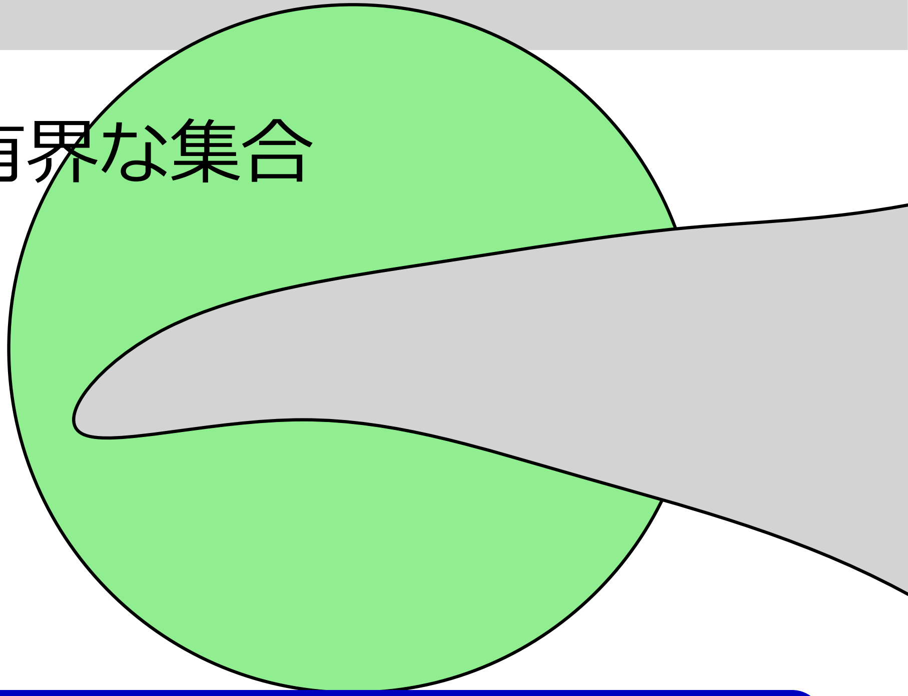
有界閉集合を **コンパクト** であるということがある

基本的な概念 (3)：有界と非有界

有界な集合の例



非有界な集合



定義：有界性と非有界性

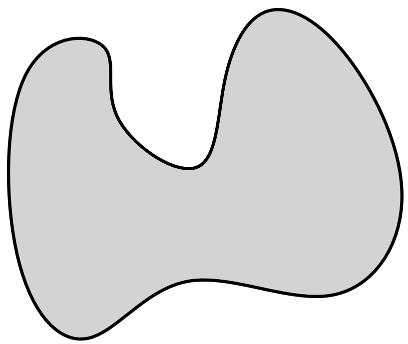
集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- **有界** であるとは，ある円板 D が存在して，$X \subseteq D$ を満たすこと
- **非有界** であるとは，有界ではないこと

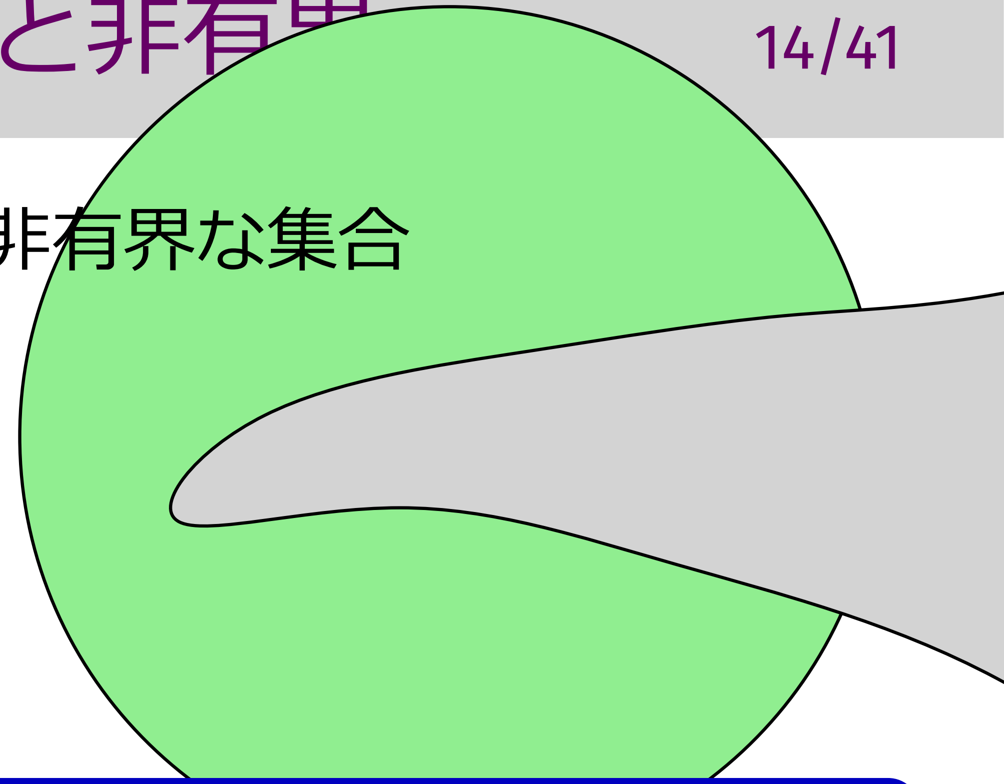
有界閉集合を **コンパクト** であるということがある

基本的な概念 (3)：有界と非有界

有界な集合の例



非有界な集合



定義：有界性と非有界性

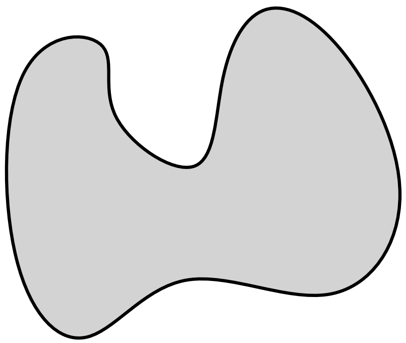
集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- **有界** であるとは，ある円板 D が存在して，$X \subseteq D$ を満たすこと
- **非有界** であるとは，有界ではないこと

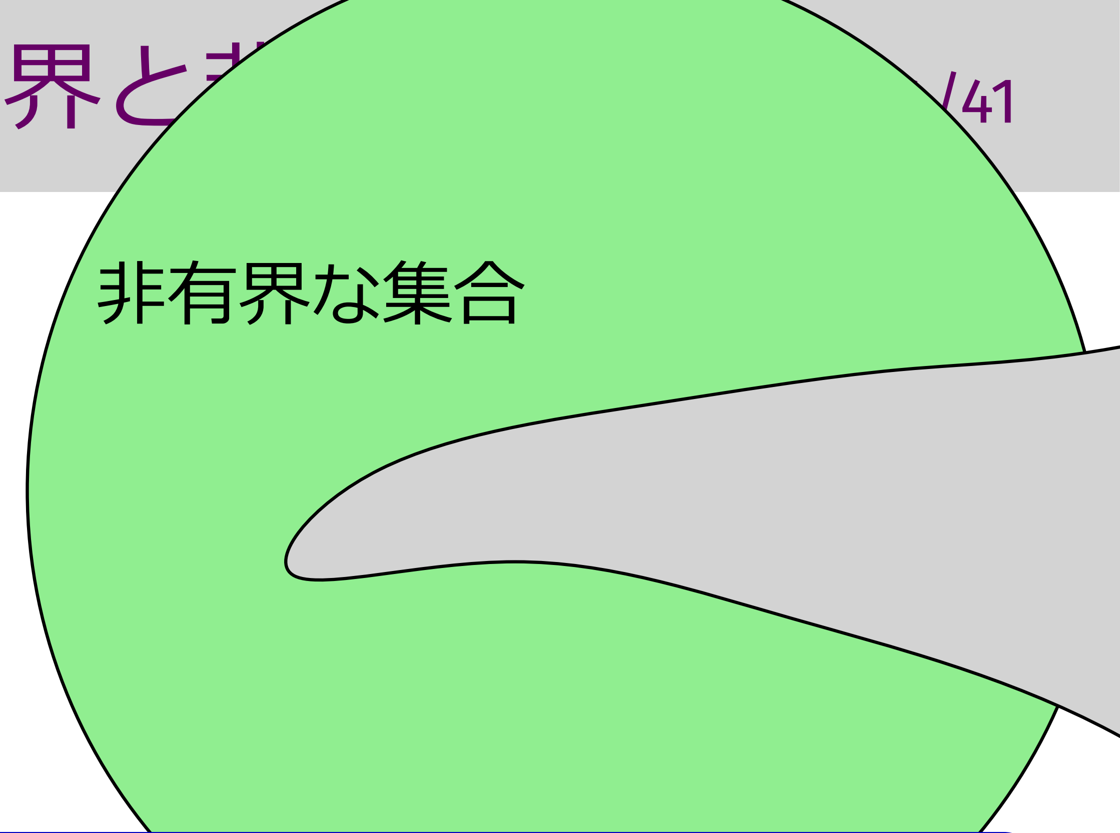
有界閉集合を **コンパクト** であるということがある

基本的な概念 (3)：有界と

有界な集合の例



非有界な集合



定義：有界性と非有界性

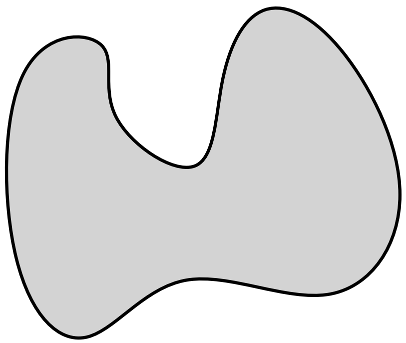
集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- **有界** であるとは，ある円板 D が存在して，
  $X \subseteq D$ を満たすこと
- **非有界** であるとは，有界ではないこと

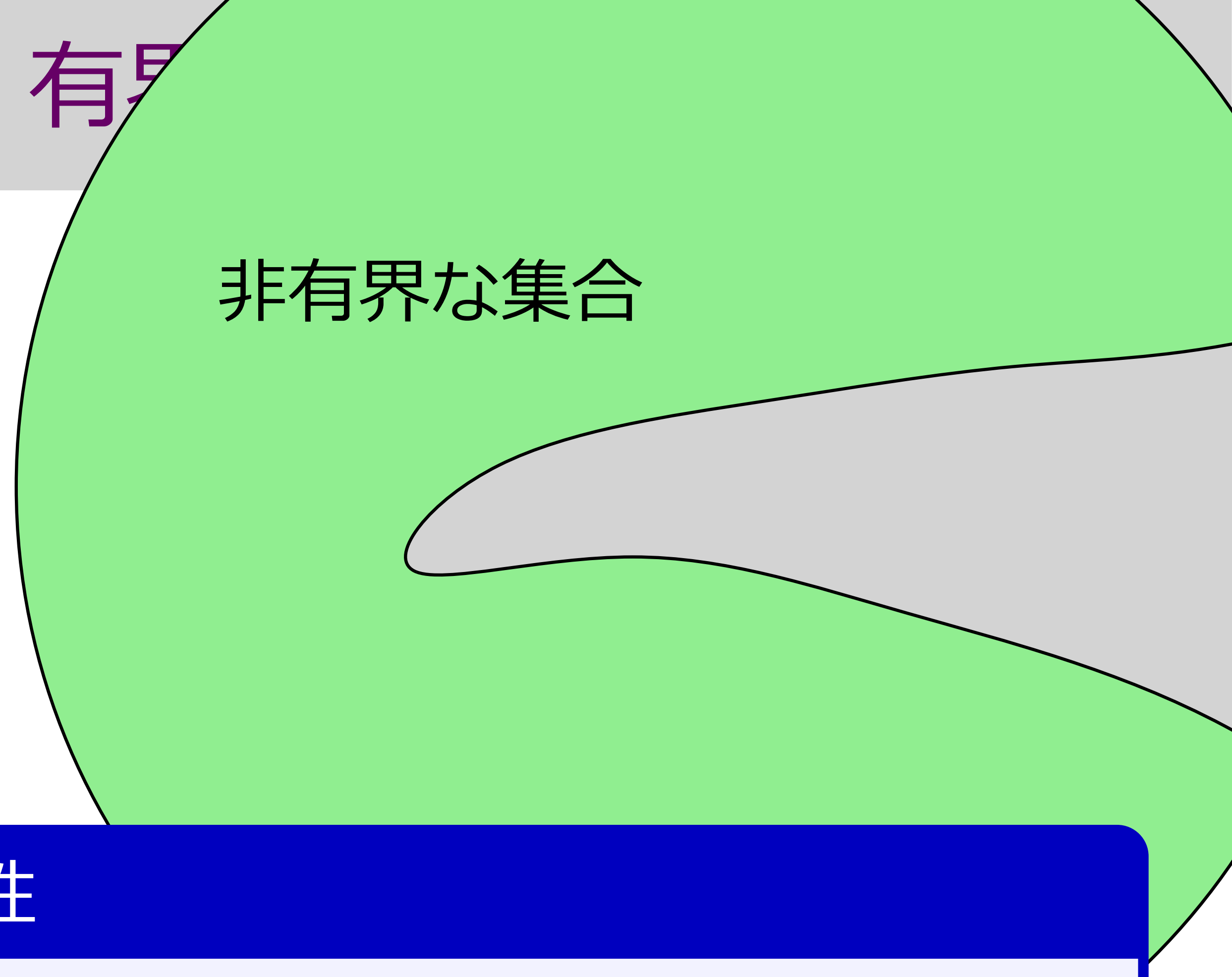
有界閉集合を **コンパクト** であるということがある

基本的な概念 (3)：有

有界な集合の例



非有界な集合



定義：有界性と非有界性

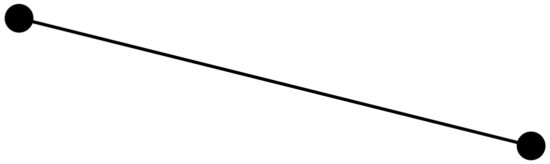
集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ が

- **有界** であるとは，ある円板 D が存在して，$X \subseteq D$ を満たすこと
- **非有界** であるとは，有界ではないこと

有界閉集合を **コンパクト** であるということがある

注意すべき概念：相対的内部

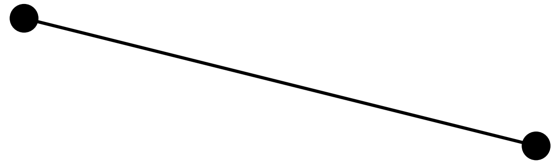
$\boxed{問}$ 線分の内部は？



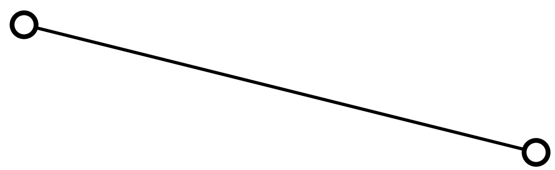
詳細は 後半の授業 (高次元) で

注意すべき概念：相対的内部

$\boxed{\text{問}}$ 線分の内部は？



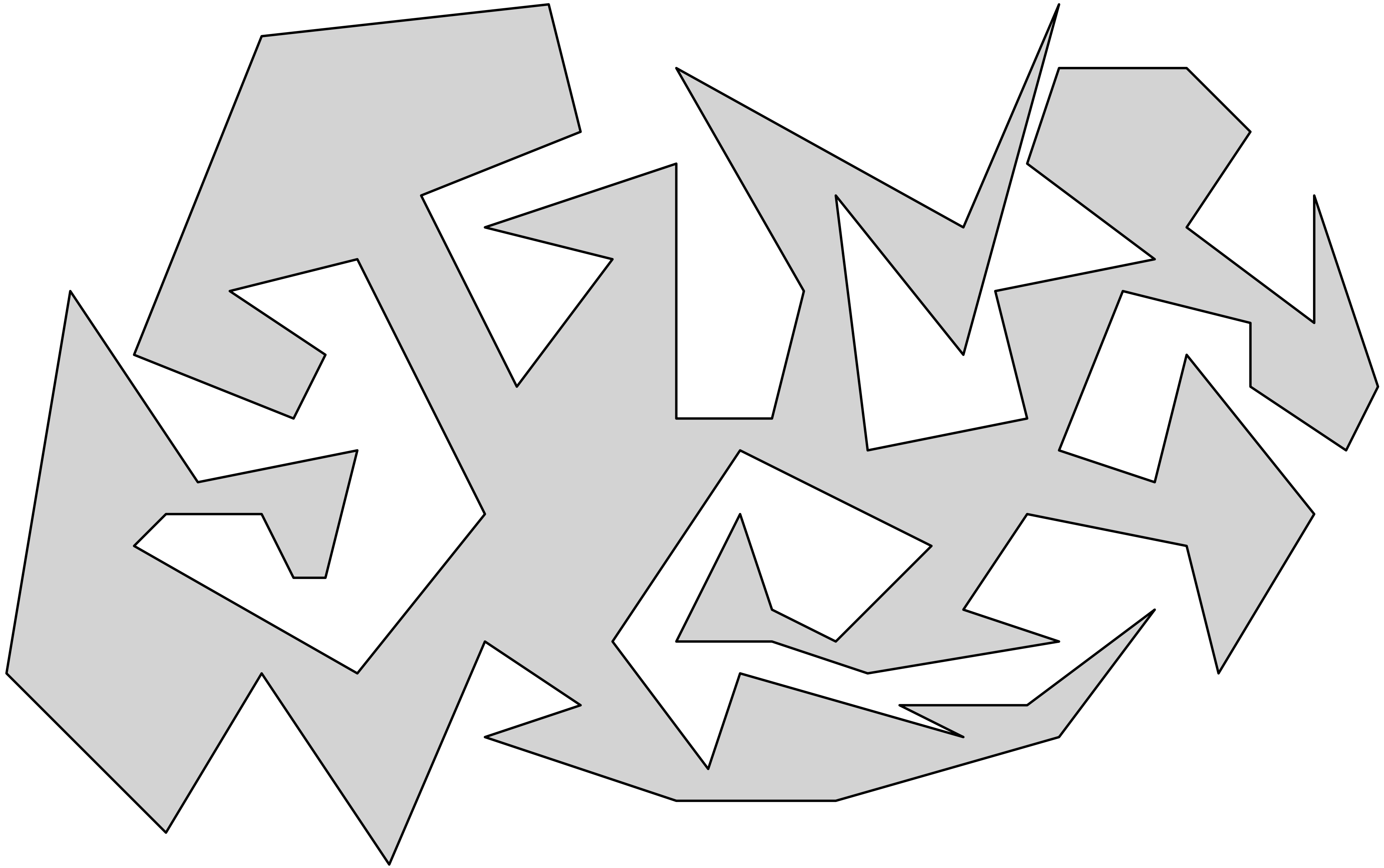
線分の相対的内部



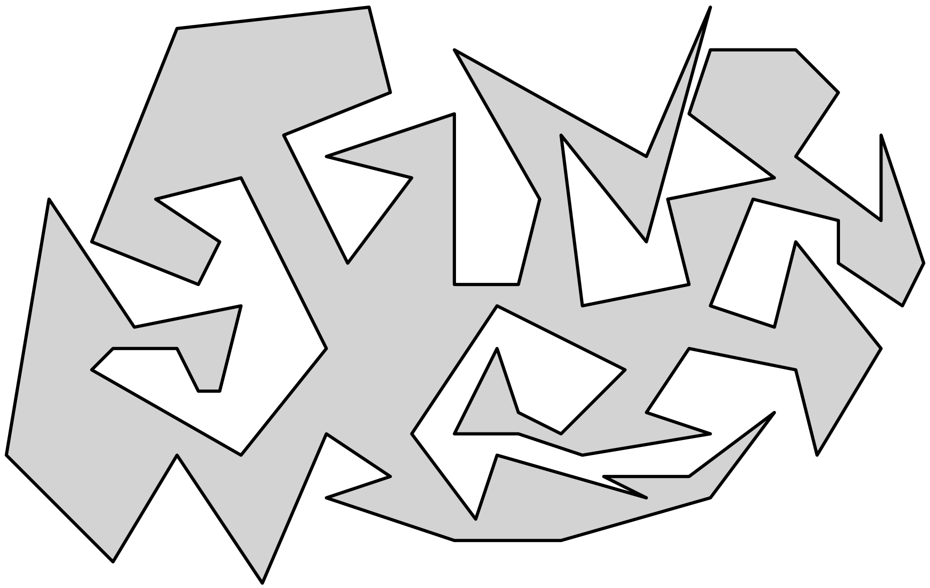
詳細は後半の授業 (高次元) で

目次

単純多角形：例



単純多角形：定義

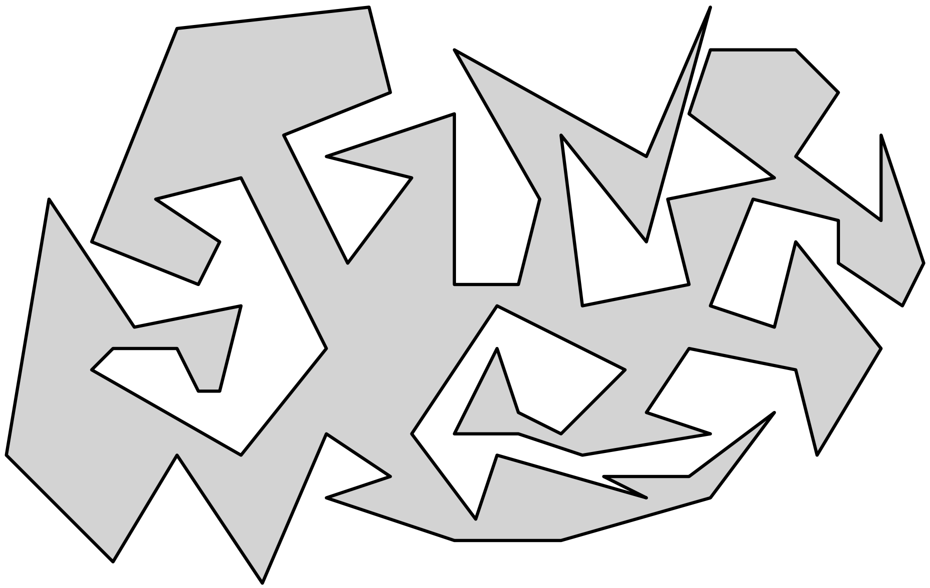


定義 (非形式)：単純多角形

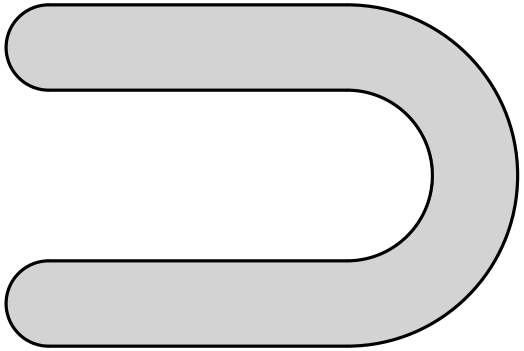
集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ が **単純多角形** であるとは，次を満たすこと

1. P は有界で閉集合
2. P の境界は有限個の線分で構成される 1 つの閉曲線で自己交差のないもの

単純多角形：定義



単純多角形ではない例

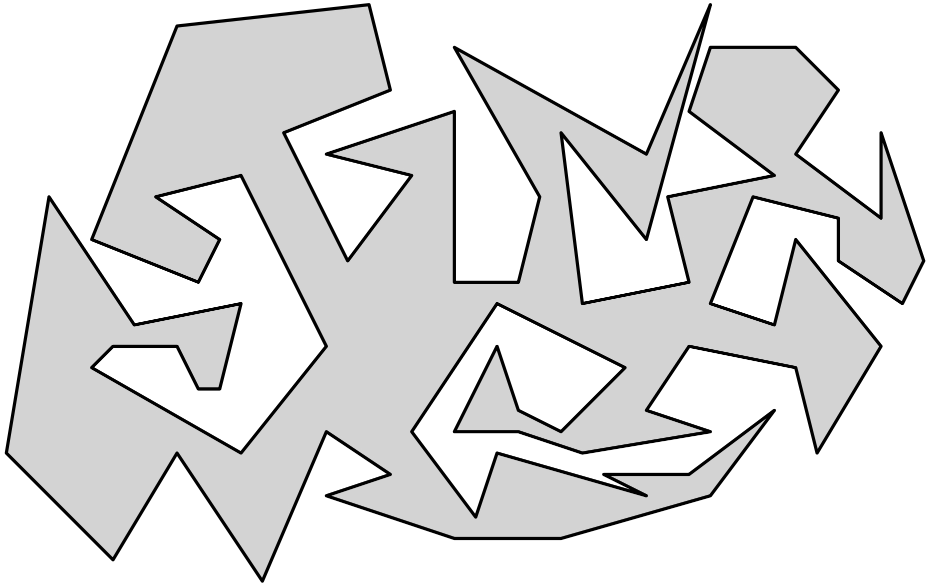


定義 (非形式)：単純多角形

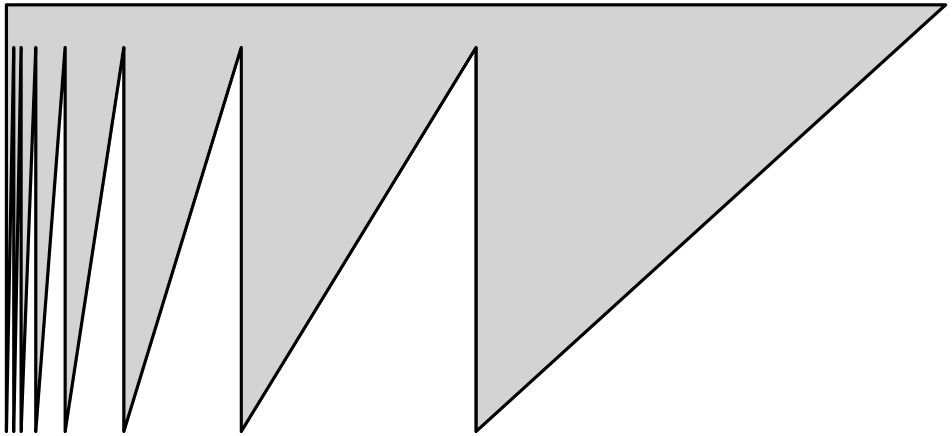
集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ が **単純多角形** であるとは，次を満たすこと

1. P は有界で閉集合
2. P の境界は有限個の線分で構成される 1 つの閉曲線で自己交差のないもの

単純多角形：定義



単純多角形ではない例

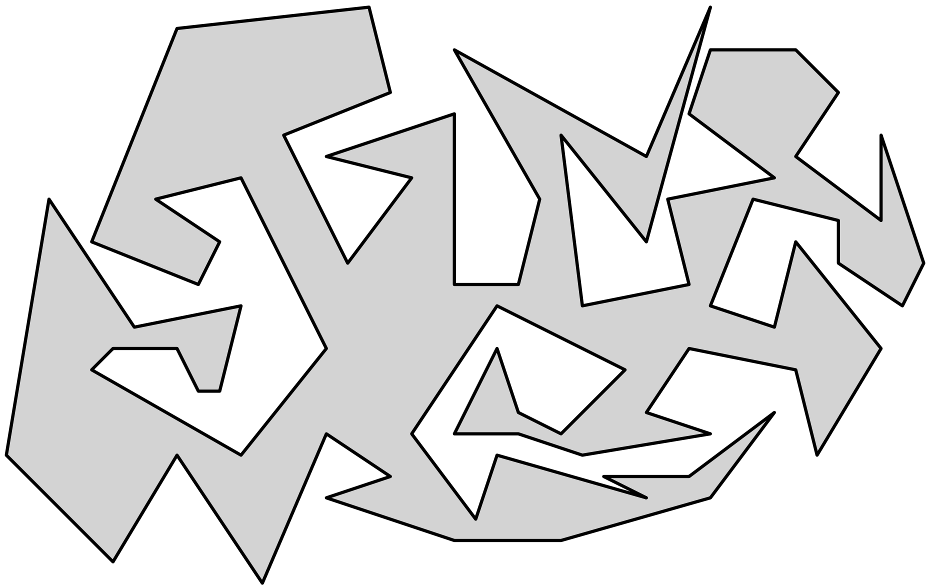


定義 (非形式)：単純多角形

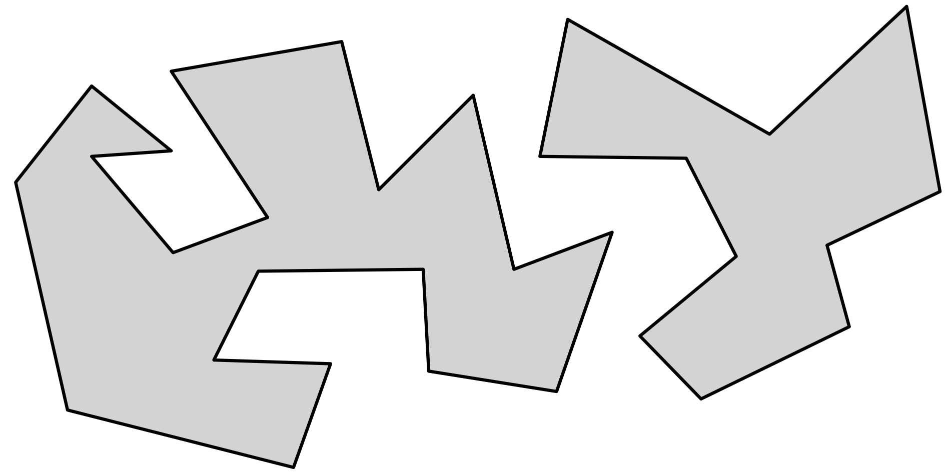
集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ が **単純多角形** であるとは，次を満たすこと

1. P は有界で閉集合
2. P の境界は有限個の線分で構成される 1 つの閉曲線で自己交差のないもの

単純多角形：定義



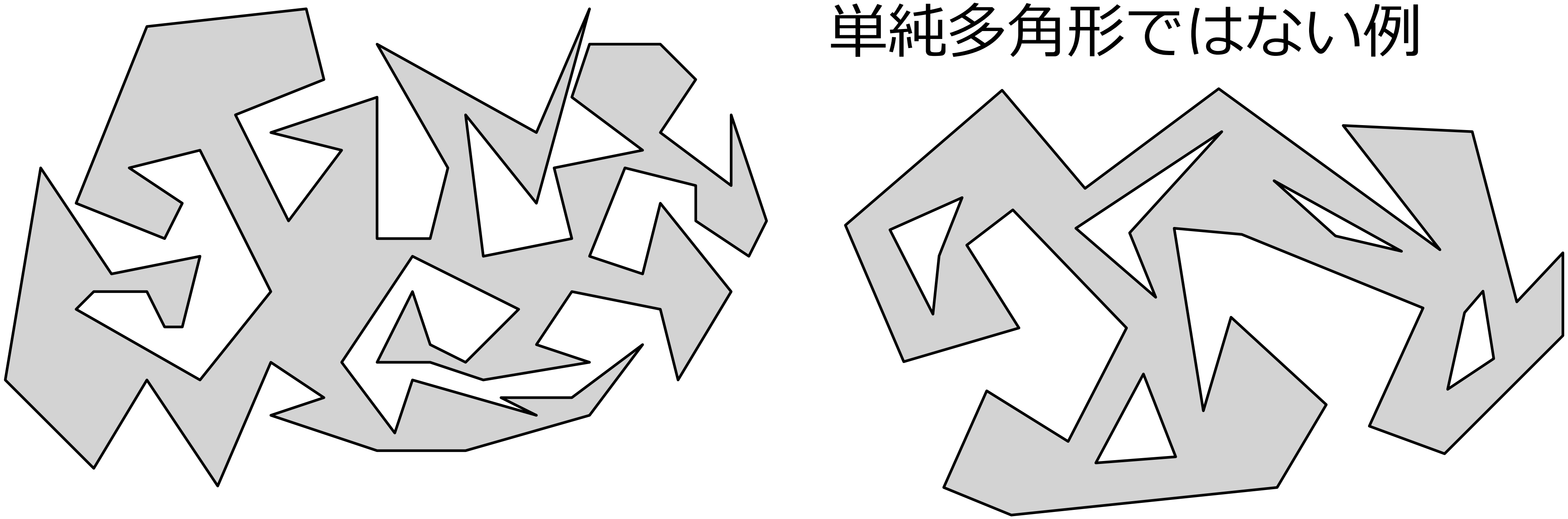
単純多角形ではない例



定義 (非形式)：単純多角形

集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ が **単純多角形** であるとは，次を満たすこと

1. P は有界で閉集合
2. P の境界は有限個の線分で構成される 1 つの閉曲線で自己交差のないもの

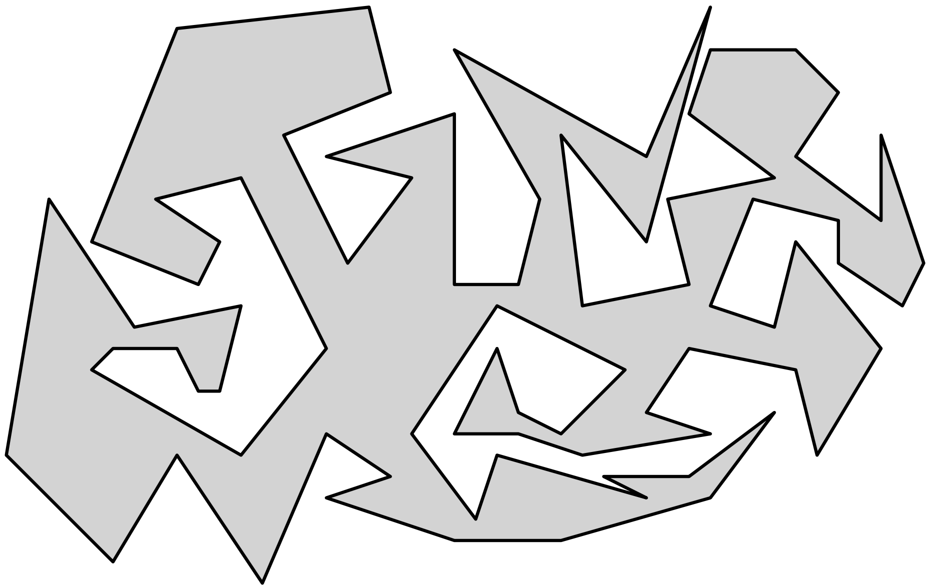


定義 (非形式)：単純多角形

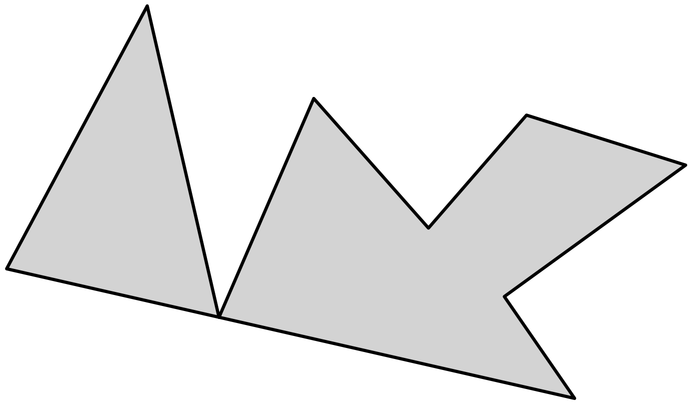
集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ が **単純多角形** であるとは，次を満たすこと

1. P は有界で閉集合
2. P の境界は有限個の線分で構成される 1 つの閉曲線で自己交差のないもの

単純多角形：定義



単純多角形ではない例

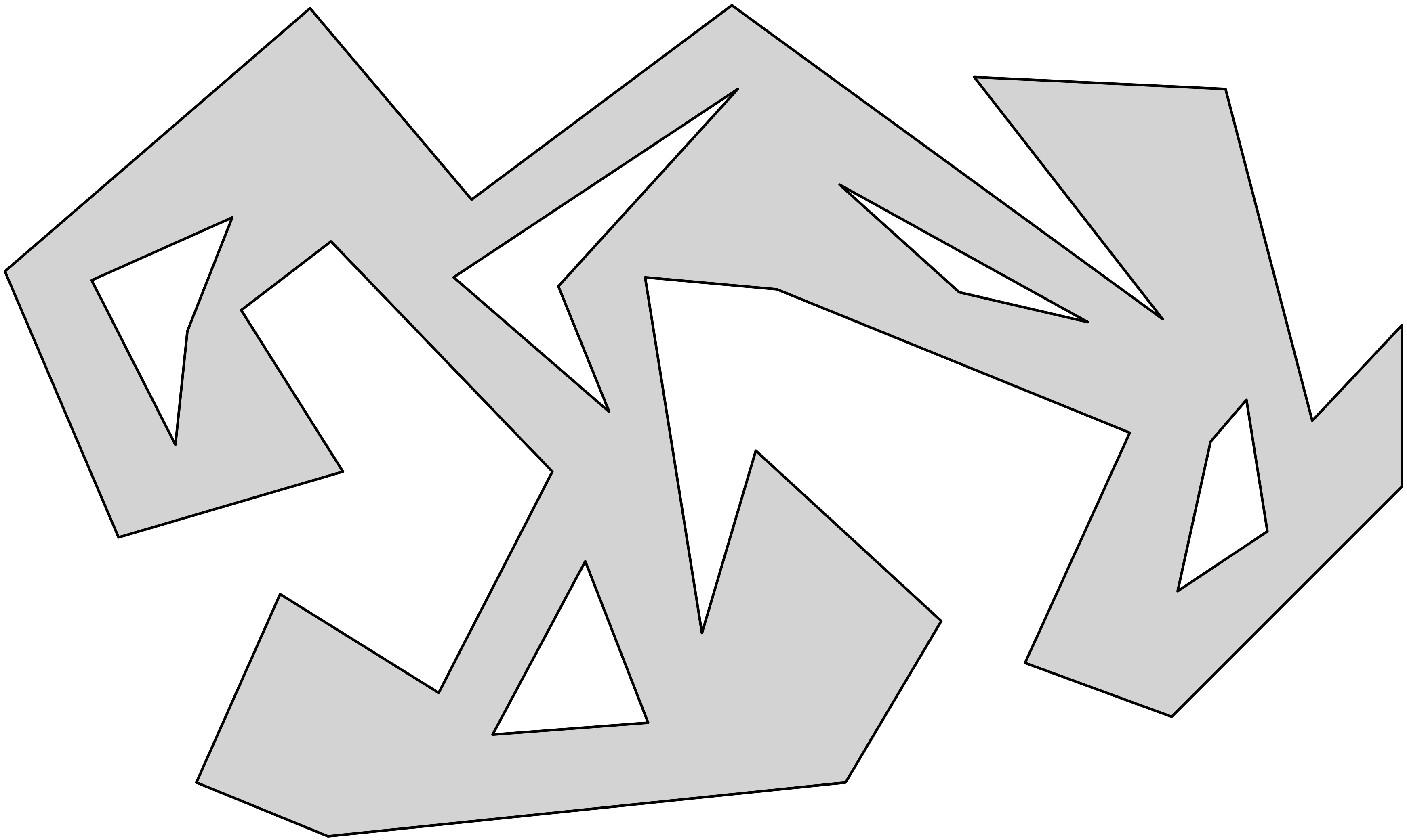


定義 (非形式)：単純多角形

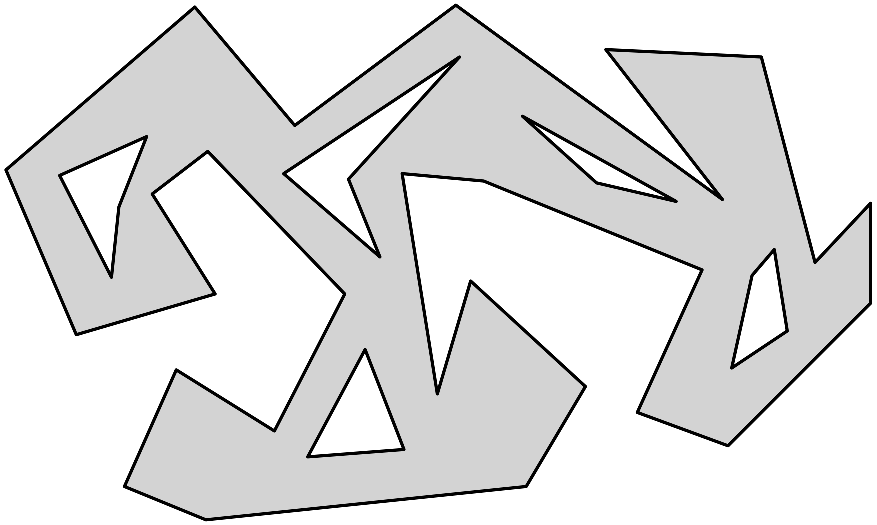
集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ が **単純多角形** であるとは，次を満たすこと

1. P は有界で閉集合
2. P の境界は有限個の線分で構成される 1 つの閉曲線で自己交差のないもの

多角形領域：例



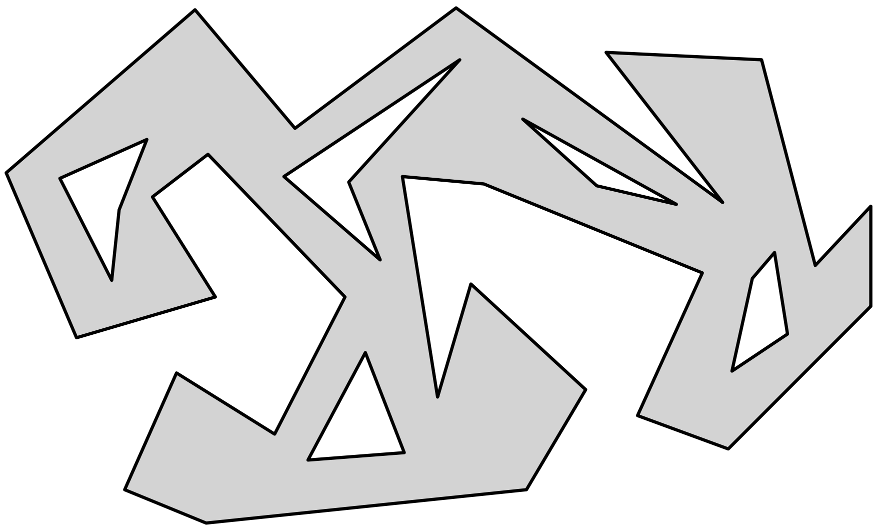
多角形領域：定義



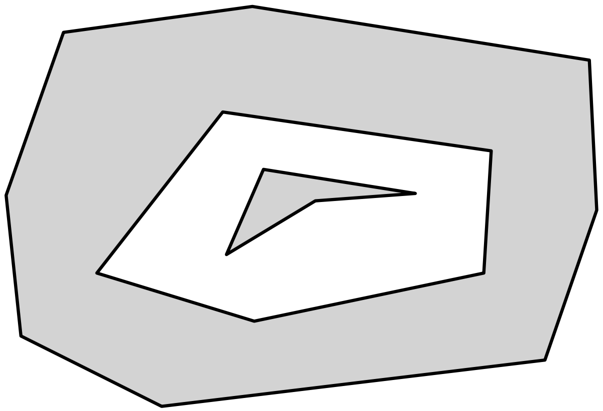
定義 (非形式)：多角形領域

集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ が **多角形領域** であるとは，
単純多角形の中に，単純多角形の穴をいくつか含んだものとして書けること (穴は 0 個でもよい)

多角形領域：定義



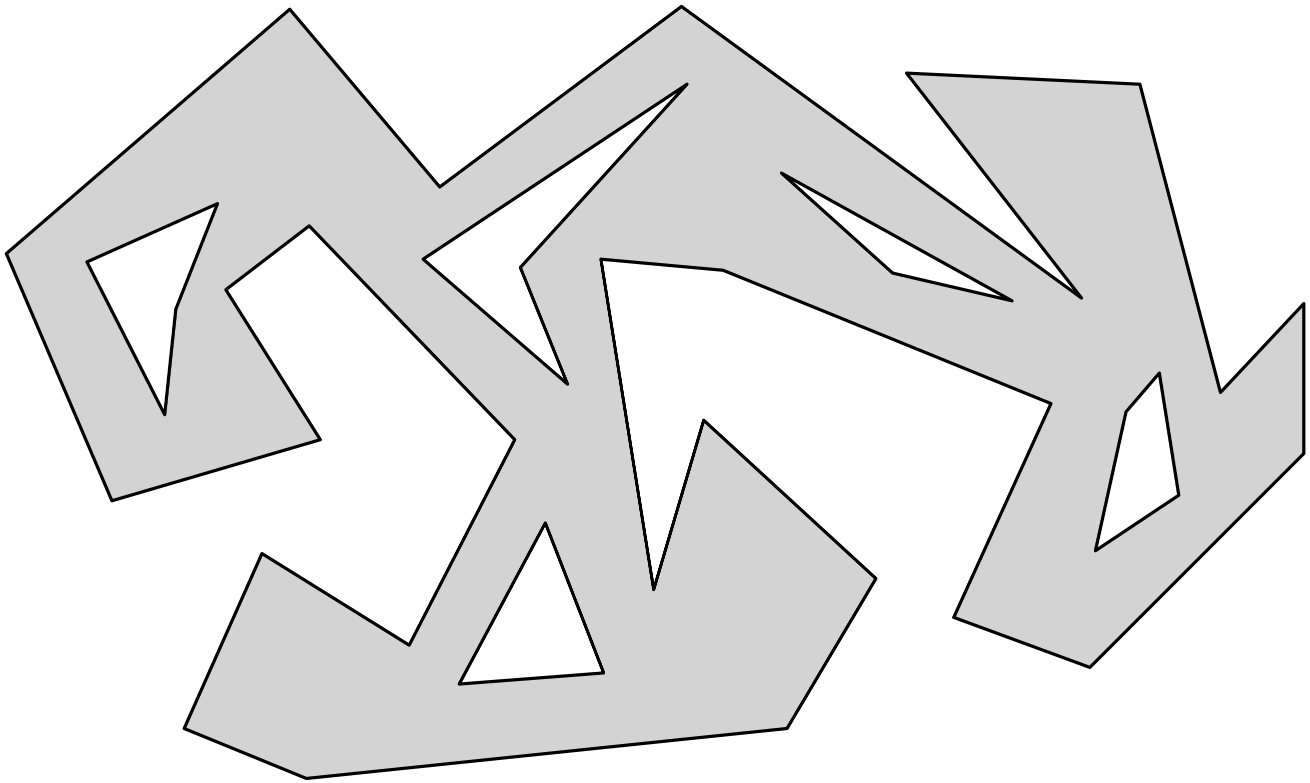
多角形領域ではない例



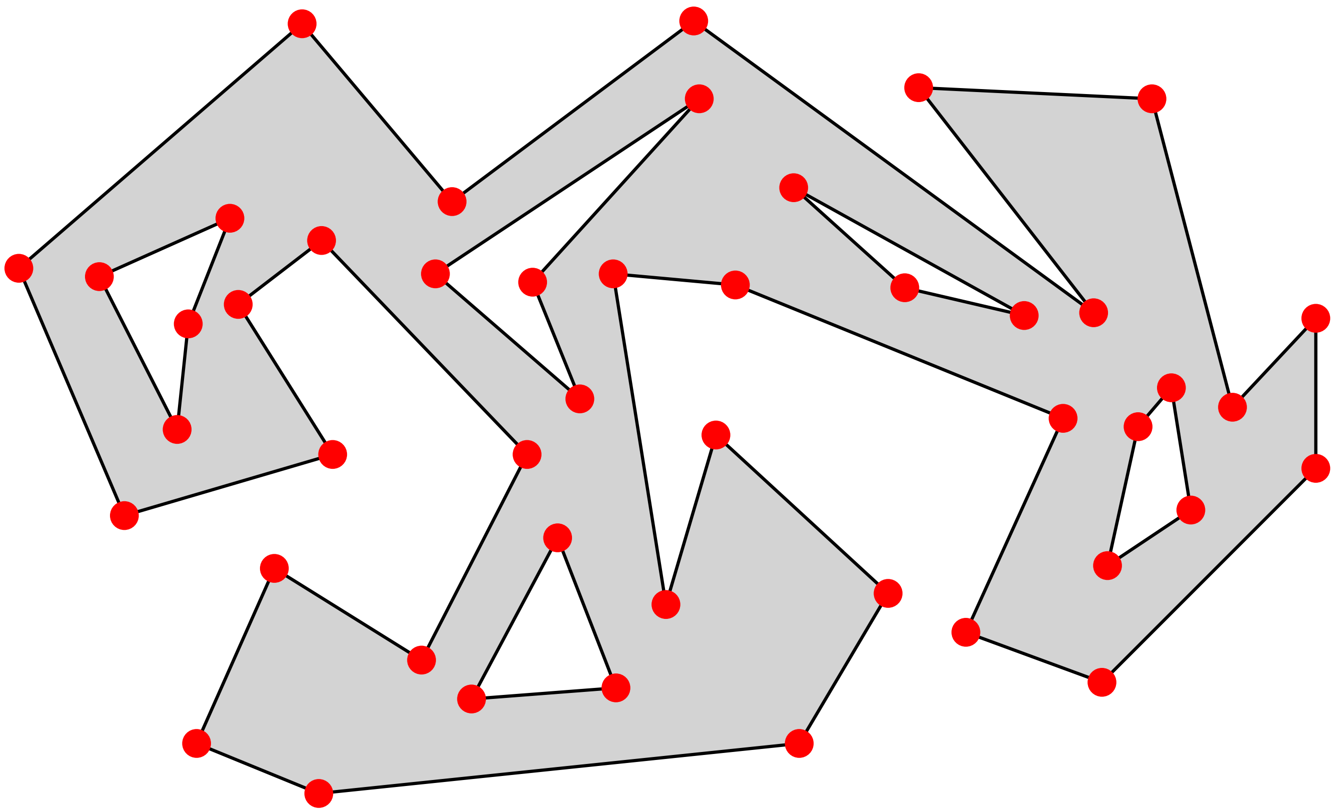
定義 (非形式)：多角形領域

集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ が **多角形領域** であるとは,
単純多角形の中に，単純多角形の穴をいくつか含んだものとして書けること (穴は 0 個でもよい)

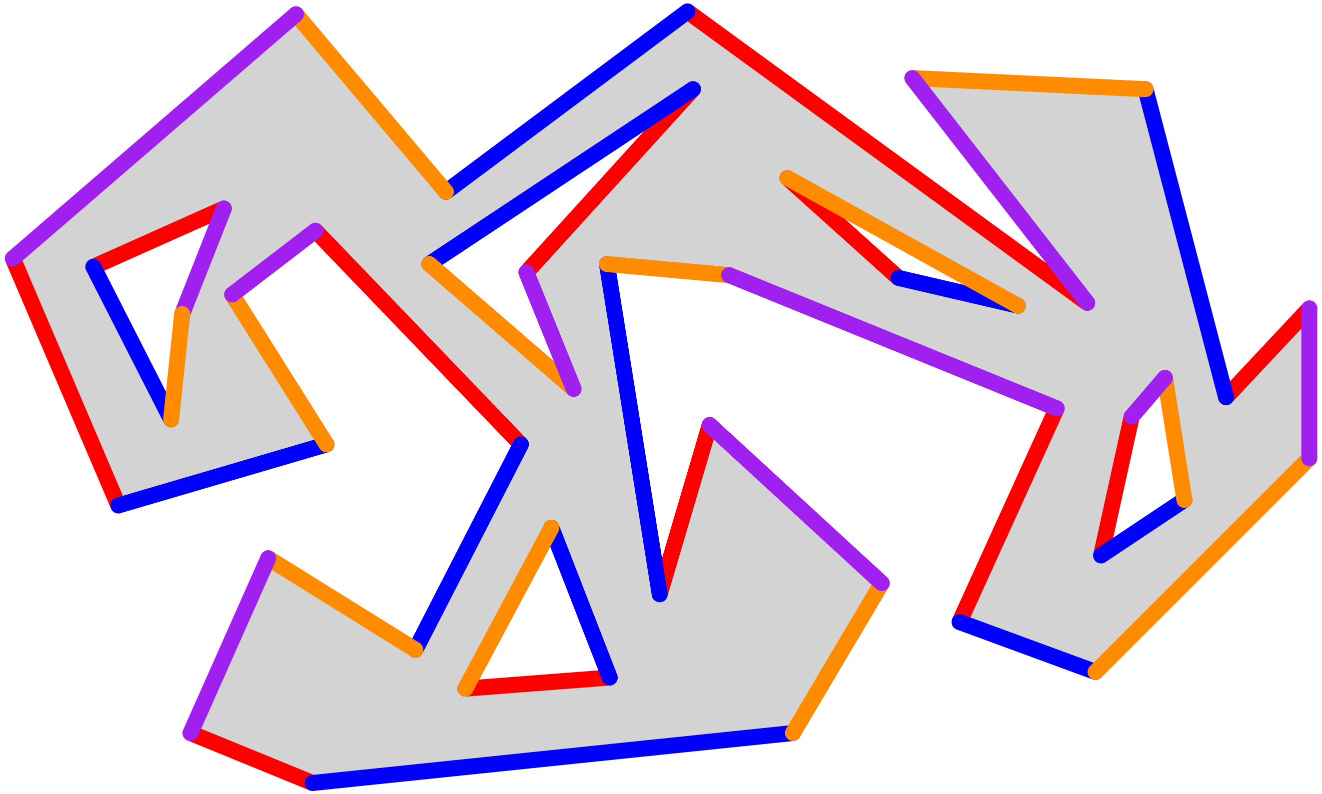
頂点，辺，穴：例



頂点，辺，穴：例



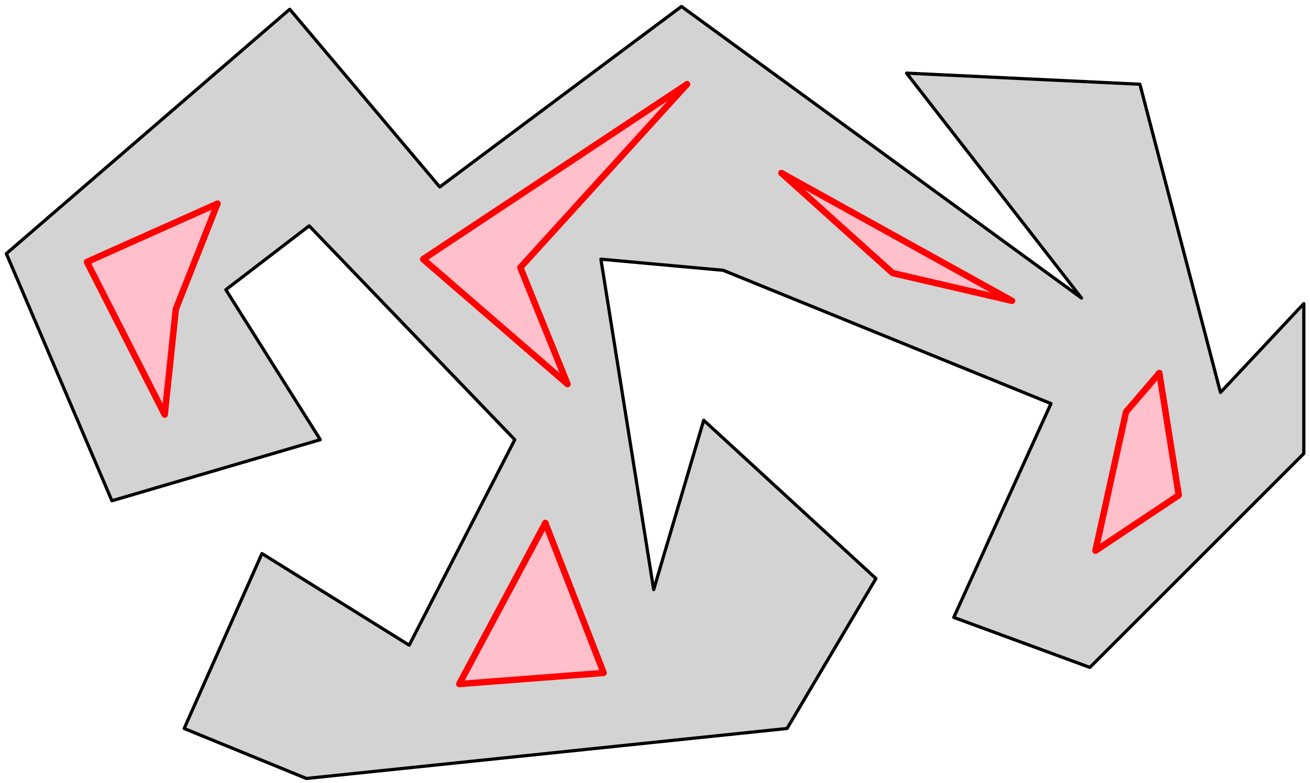
頂点：47 個



頂点：47 個

辺：47 個

頂点，辺，穴：例



頂点：47 個

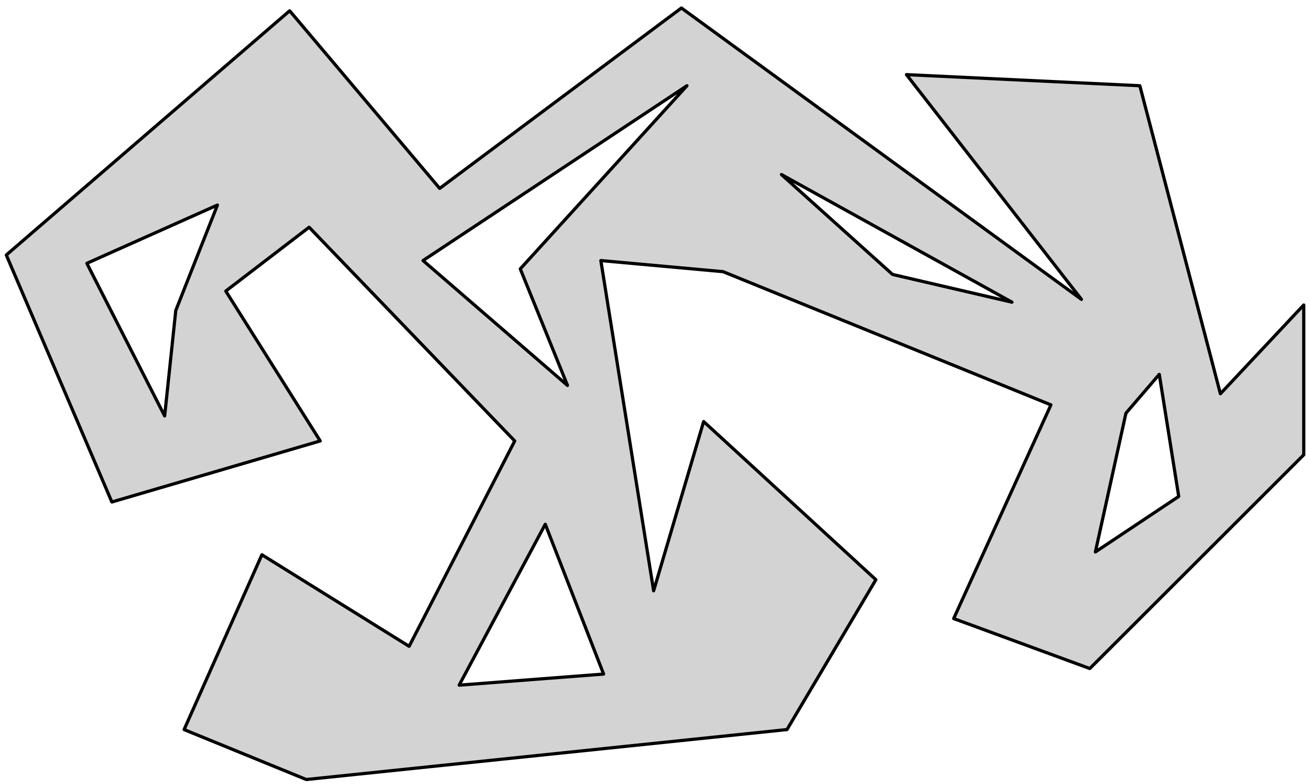
辺：47 個

穴：5 個

定義：頂点，辺

多角形領域 P において

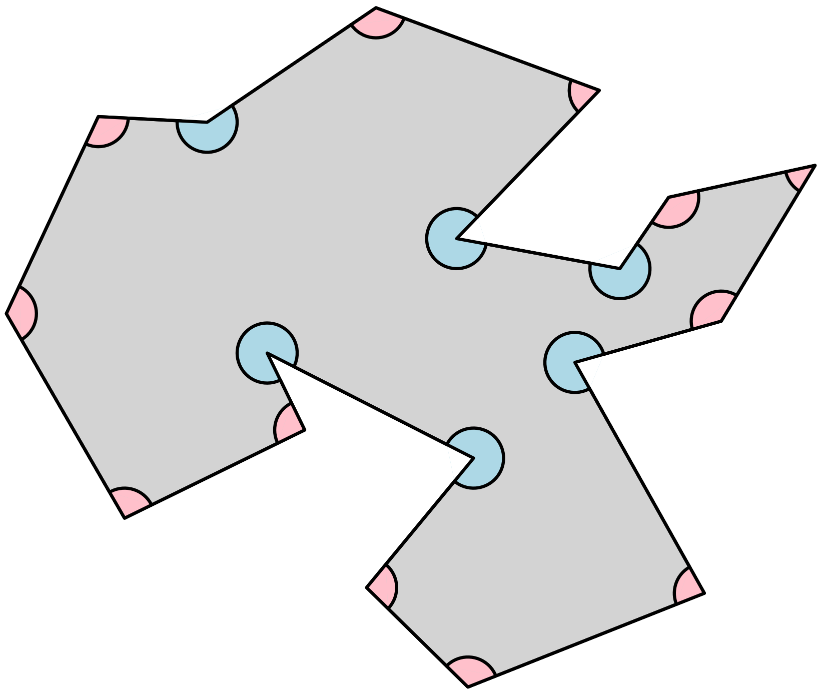
- P の **辺** とは，P の境界上にある 極大な線分
- P の **頂点** とは，異なる 2 辺が共有する点



単純多角形において

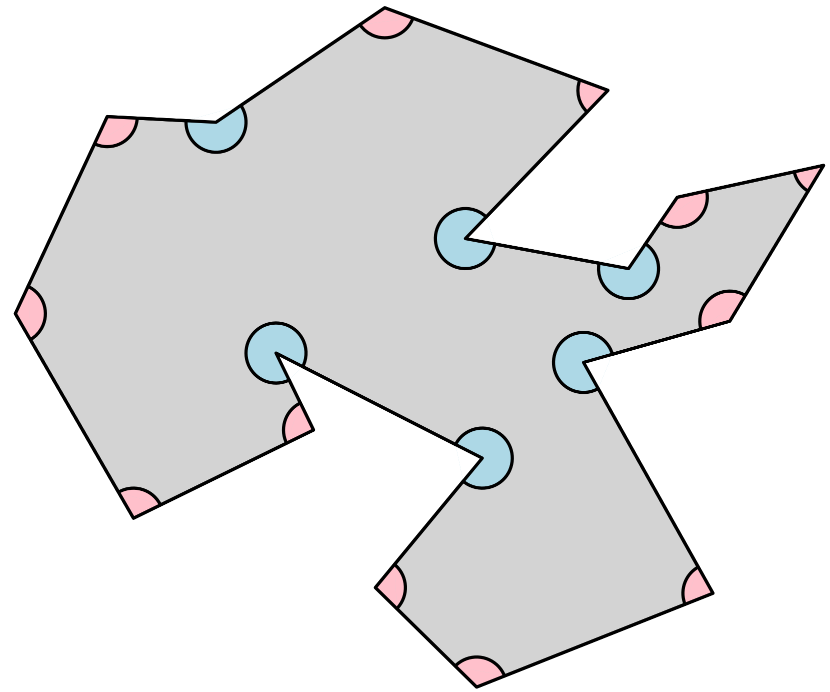
- **凸頂点**（とつ）とは
  内角が π より小さい頂点のこと

- **凹頂点**（おう）(あるいは **優角頂点**) とは
  内角が π より大きい頂点のこと



凸頂点，凹頂点，凸多角形

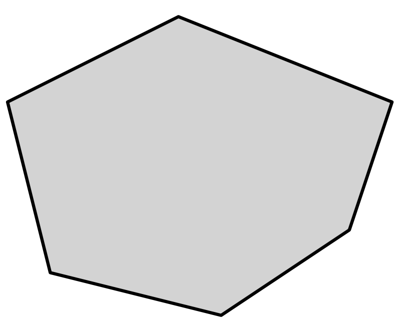
単純多角形において



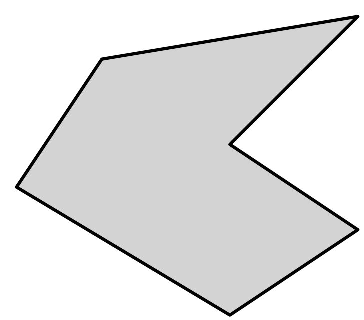
とつ
- **凸頂点** とは
  内角が π より小さい頂点のこと

おう
- **凹頂点** (あるいは **優角頂点**) とは
  内角が π より大きい頂点のこと

凸多角形 とは，すべての頂点が凸である単純多角形のこと



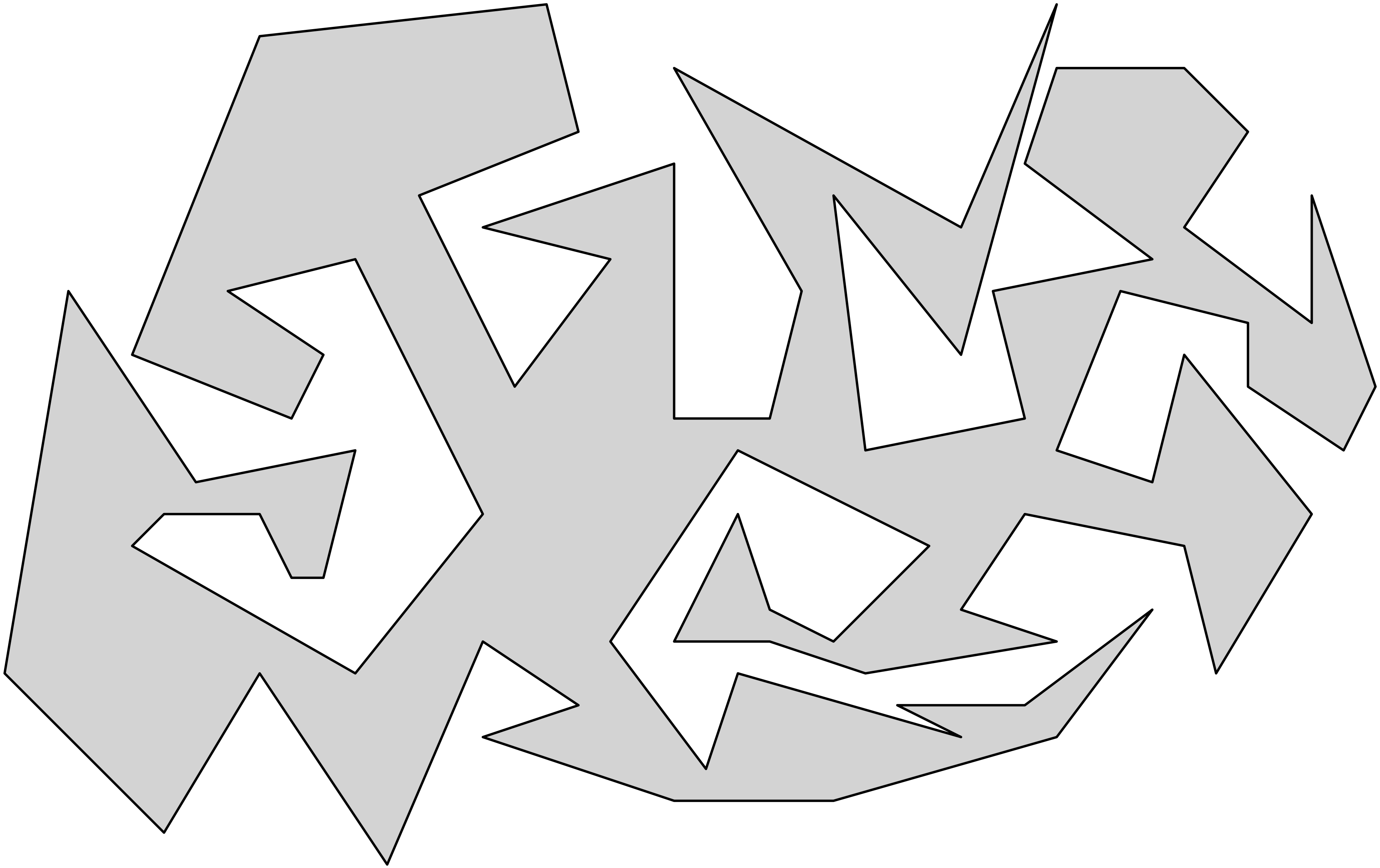
凸多角形である



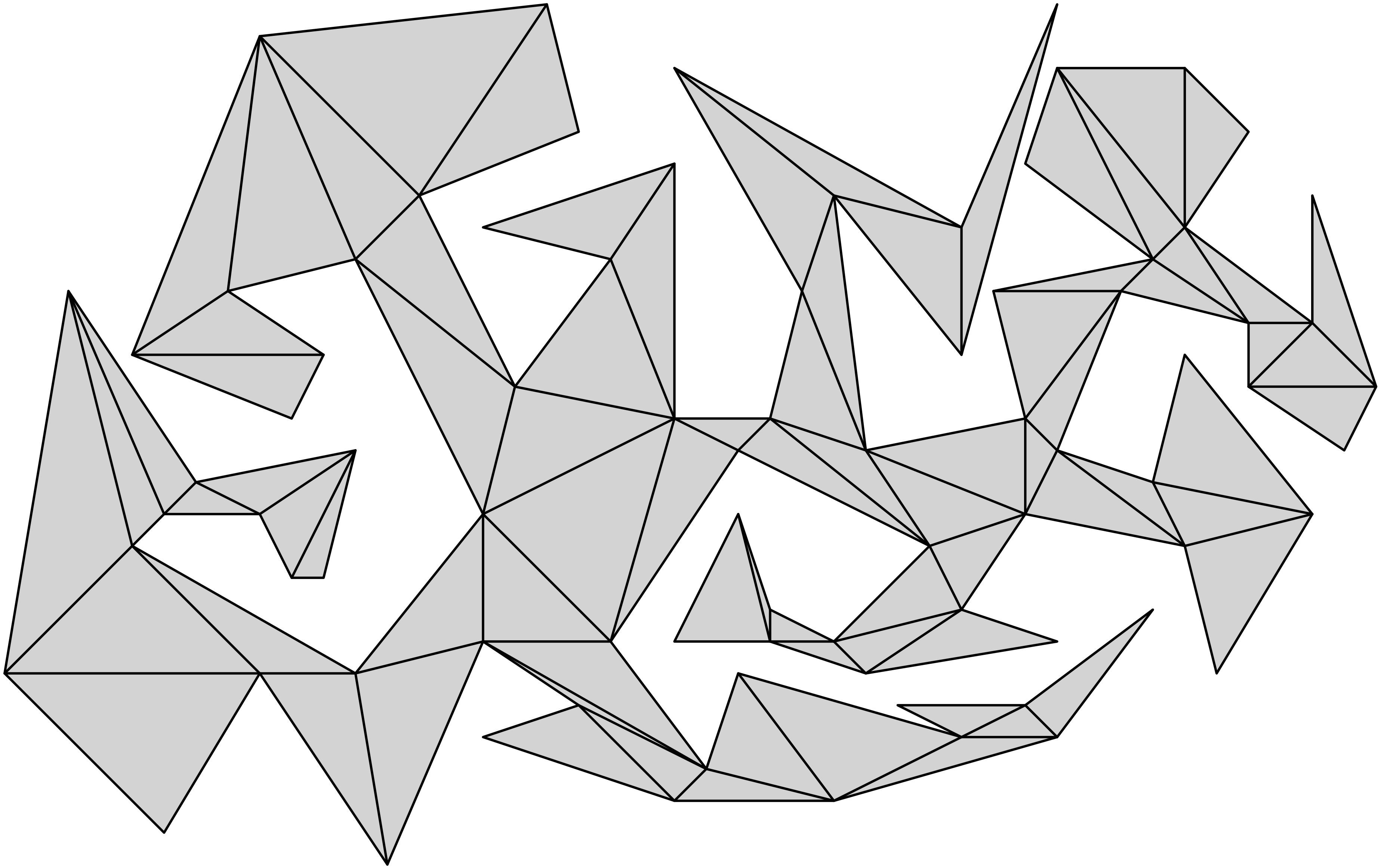
凸多角形ではない

目次

三角形分割：例



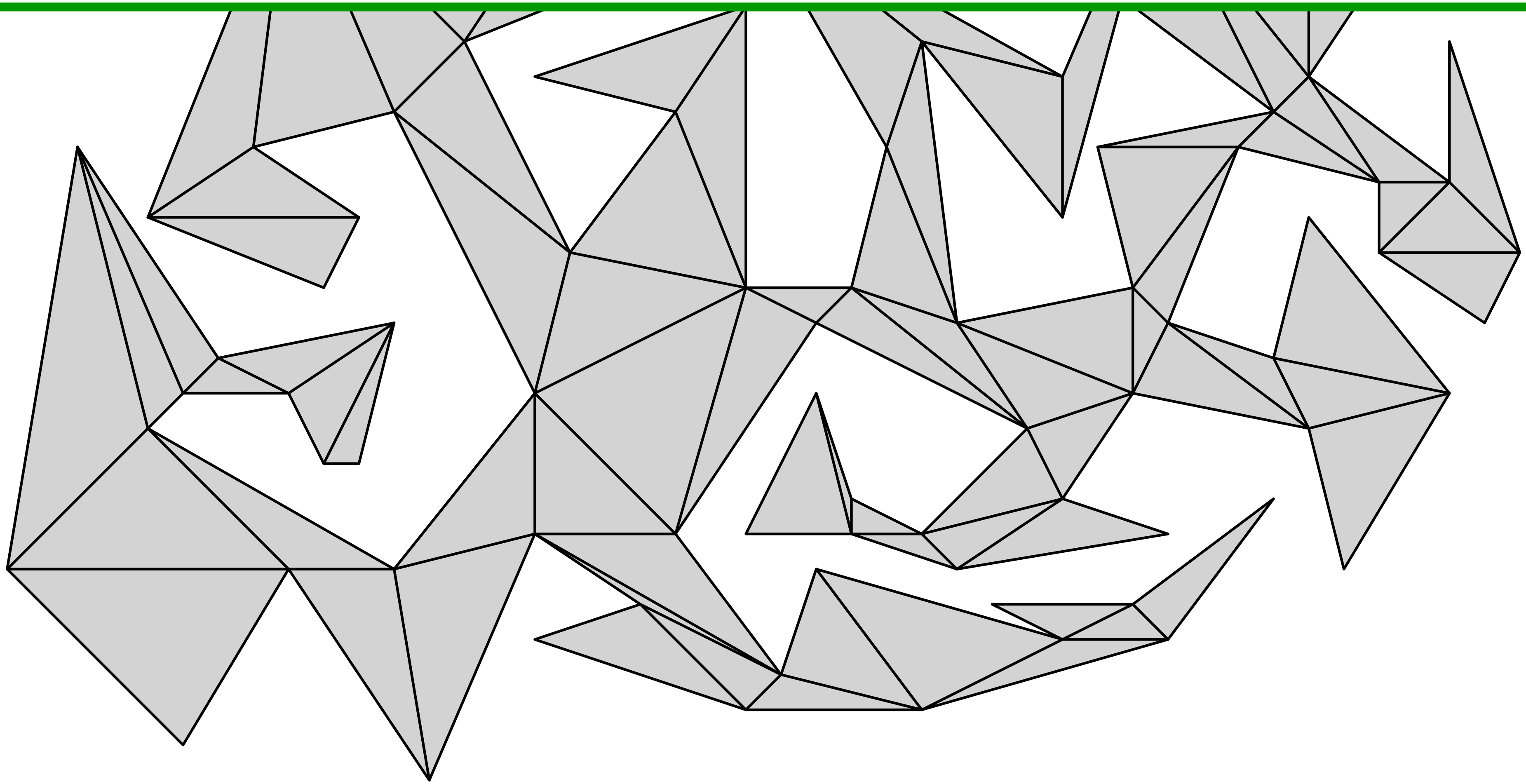
三角形分割：例



三角形分割：例

教訓

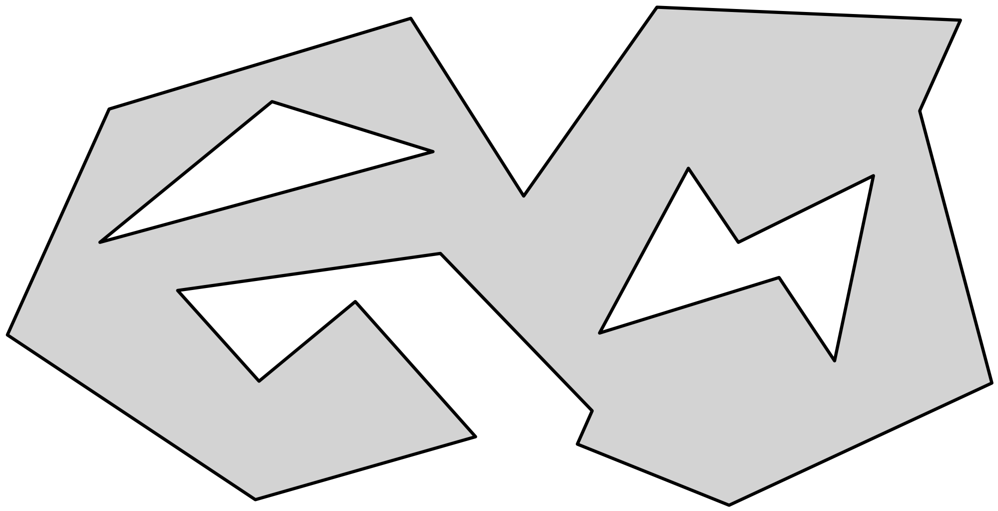
困難は分割せよ　　　（デカルト『方法序説』）



定義：三角形分割

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の **三角形分割** とは,
三角形の集まり $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ で次を満たすもの

1. $t_i \subseteq P$
2. $P = t_1 \cup t_2 \cup \cdots \cup t_m$
3. t_i の頂点は P の頂点
4. $t_i \cap t_j$ は，空集合か共通の頂点か共通の辺 $(i \neq j)$

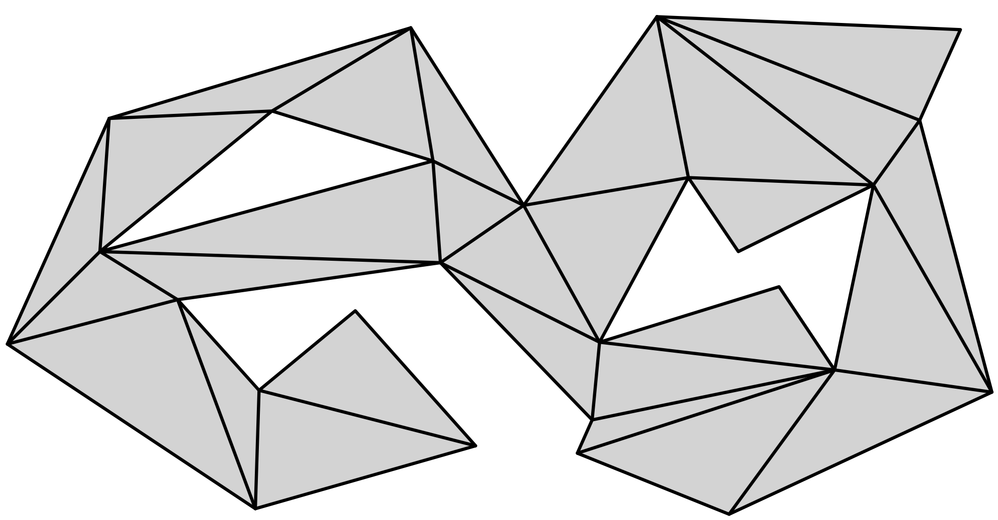


三角形分割：定義

定義：三角形分割

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の **三角形分割** とは,
三角形の集まり $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ で次を満たすもの

1. $t_i \subseteq P$
2. $P = t_1 \cup t_2 \cup \cdots \cup t_m$
3. t_i の頂点は P の頂点
4. $t_i \cap t_j$ は，空集合か共通の頂点か共通の辺 $(i \neq j)$

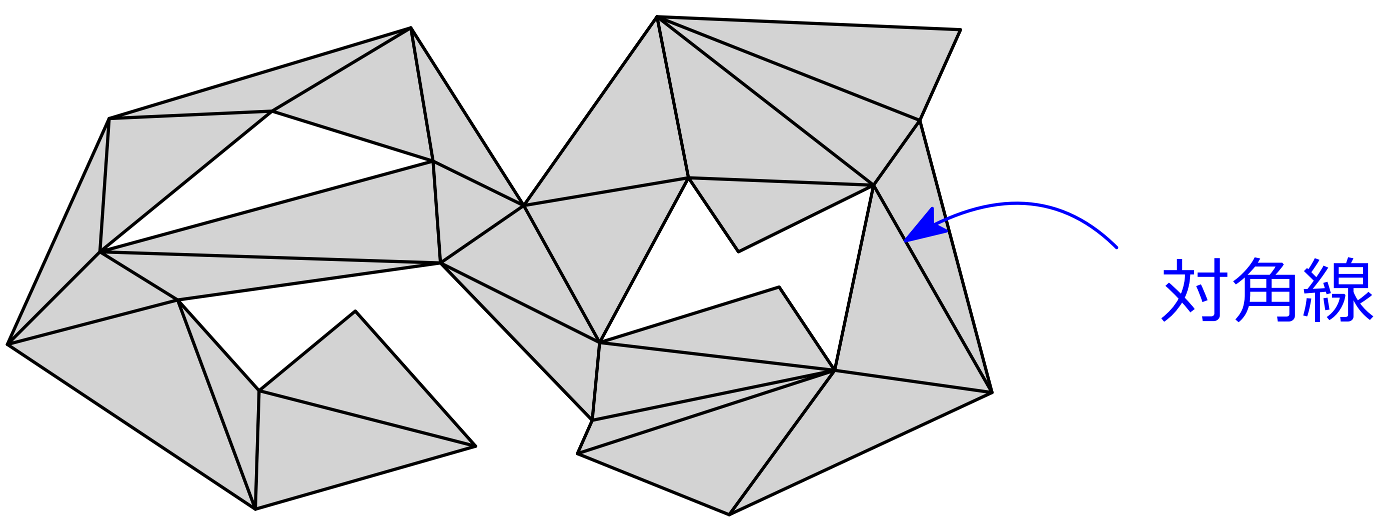


三角形分割：定義

定義：三角形分割

多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の **三角形分割** とは,
三角形の集まり $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ で次を満たすもの

1. $t_i \subseteq P$
2. $P = t_1 \cup t_2 \cup \cdots \cup t_m$
3. t_i の頂点は P の頂点
4. $t_i \cap t_j$ は，空集合か共通の頂点か共通の辺 $(i \neq j)$



三角形分割は必ず存在する

性質：三角形分割の存在性

任意の多角形領域に対して，三角形分割が存在する

- 以下，単純多角形に対して証明する
- 多角形領域に対する証明は，演習問題とする

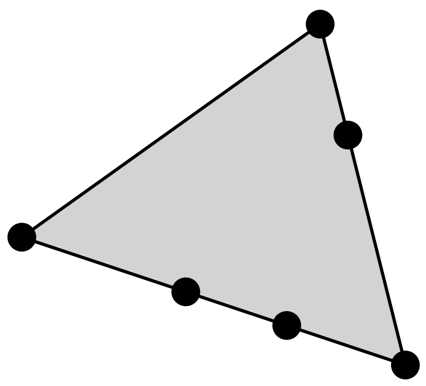
三角形分割は必ず存在する

性質：三角形分割の存在性

任意の多角形領域に対して，三角形分割が存在する

- 以下，単純多角形に対して証明する
- 多角形領域に対する証明は，演習問題とする

<u>証明の都合で</u>：頂点の内角が π であることを許す



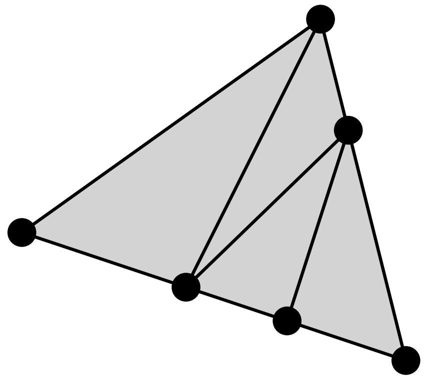
三角形分割は必ず存在する

性質：三角形分割の存在性

任意の多角形領域に対して，三角形分割が存在する

- 以下，単純多角形に対して証明する
- 多角形領域に対する証明は，演習問題とする

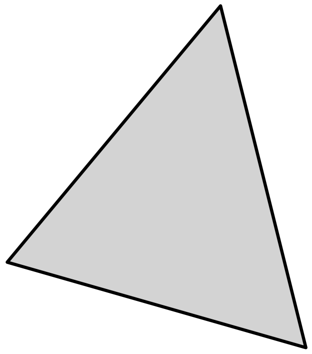
証明の都合で：頂点の内角が π であることを許す



三角形分割：証明 (1)

証明：頂点数 $n \geq 3$ に関する帰納法

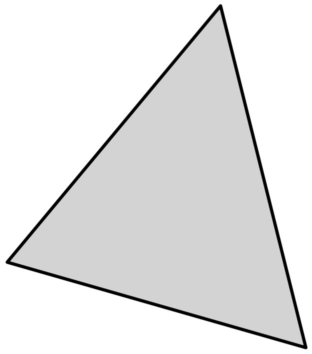
- $n = 3$ のとき，P は三角形なので，
  P そのものが P の三角形分割



三角形分割：証明 (1)

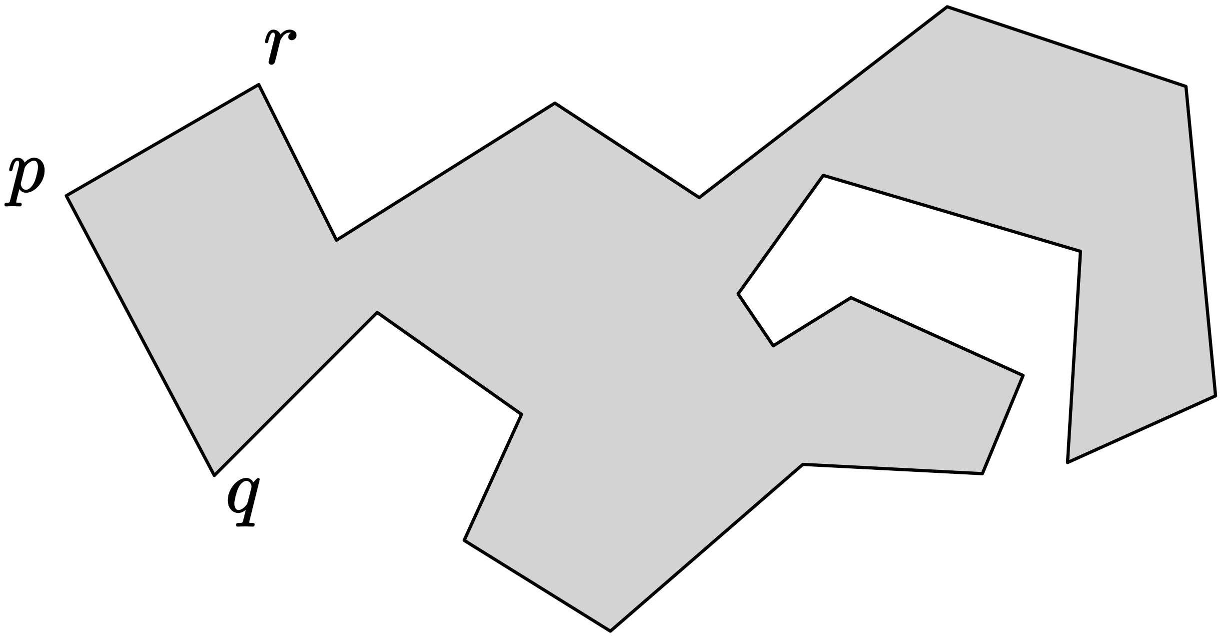
証明：頂点数 $n \geq 3$ に関する帰納法

- $n = 3$ のとき，P は三角形なので，
  P そのものが P の三角形分割
- 任意の整数 $k \geq 3$ を考える
- 頂点数 k 以下の任意の単純多角形が三角形分割を持つと仮定する



<u>証明 (続)</u>：P を頂点数 $k+1$ の単純多角形とする

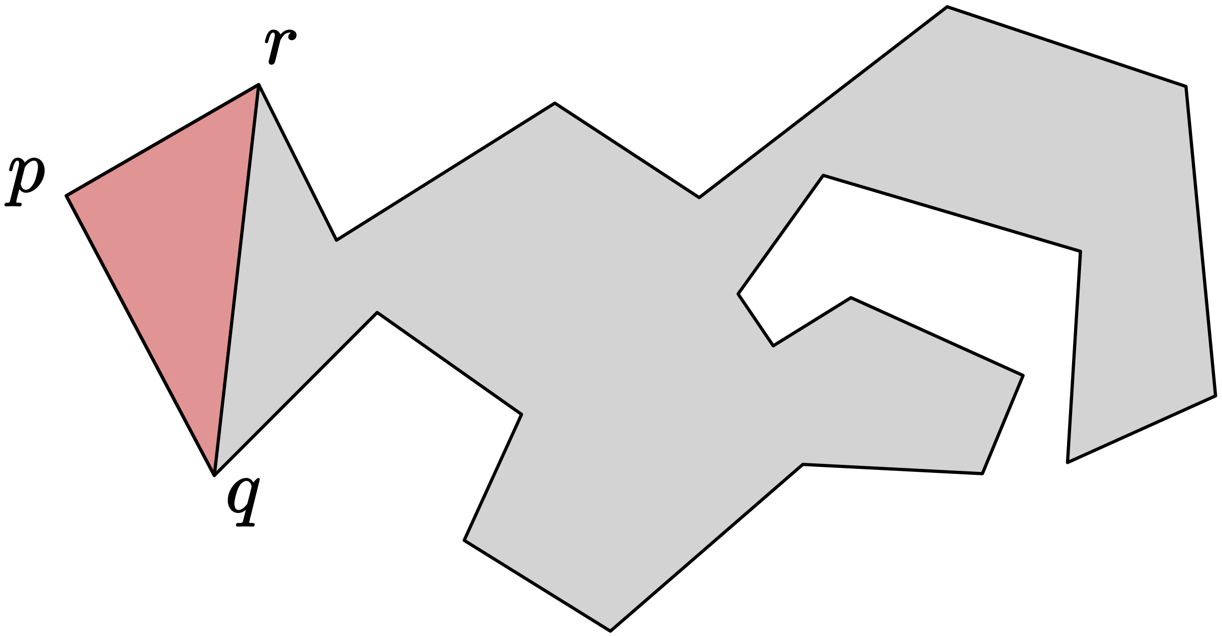
- P の左端の頂点を p とする
  (複数ある場合は，少し回転させて左端の頂点を一意にする)
- P において，p と隣り合う頂点を q, r とする
- 三角形 $\triangle pqr$ の状況で場合分け



三角形分割：証明 (2)

証明 (続)：P を頂点数 $k+1$ の単純多角形とする

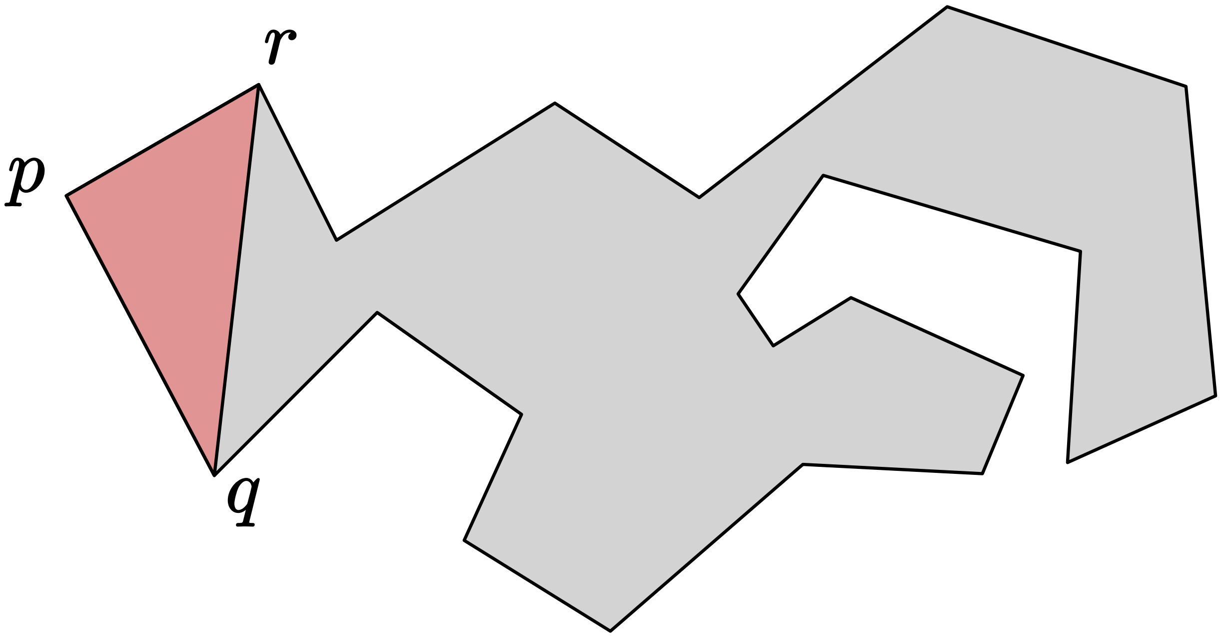
- P の左端の頂点を p とする
  (複数ある場合は，少し回転させて左端の頂点を一意にする)
- P において，p と隣り合う頂点を q, r とする
- 三角形 $\triangle pqr$ の状況で場合分け



三角形分割：証明 (3)

証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含まないとき

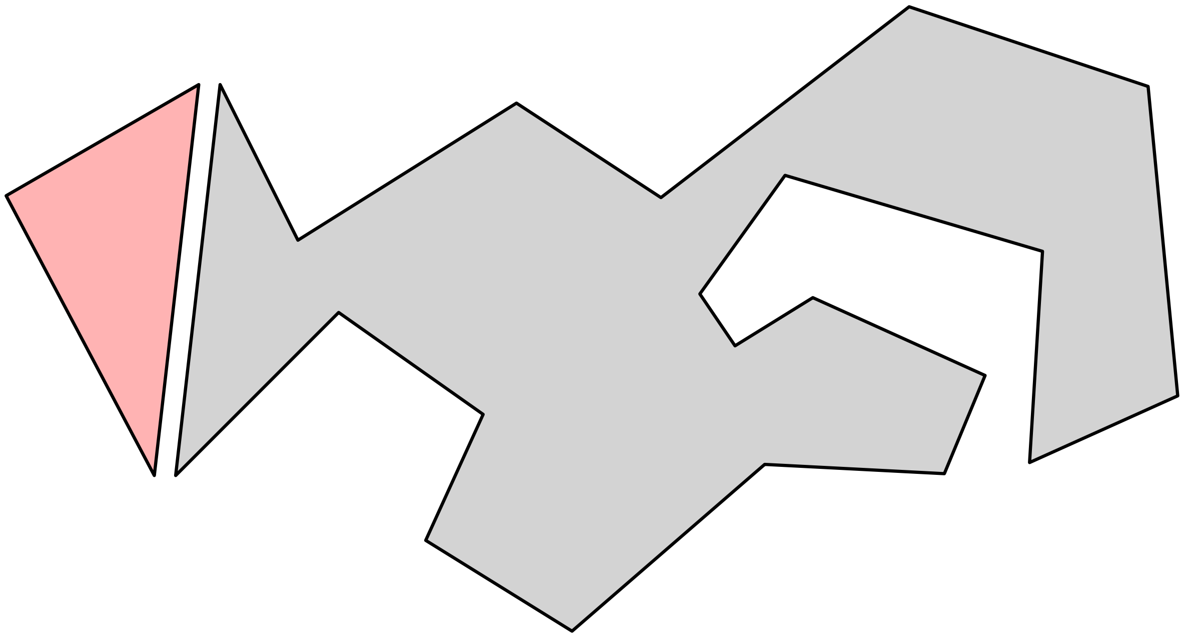
- P を線分 qr で分ける
- 一方は頂点数 3 の単純多角形，
  もう一方は頂点数 k の単純多角形である
- 帰納法の仮定から，どちらも三角形分割を持つ
- $\therefore P$ は三角形分割を持つ



三角形分割：証明 (3)

証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含まないとき

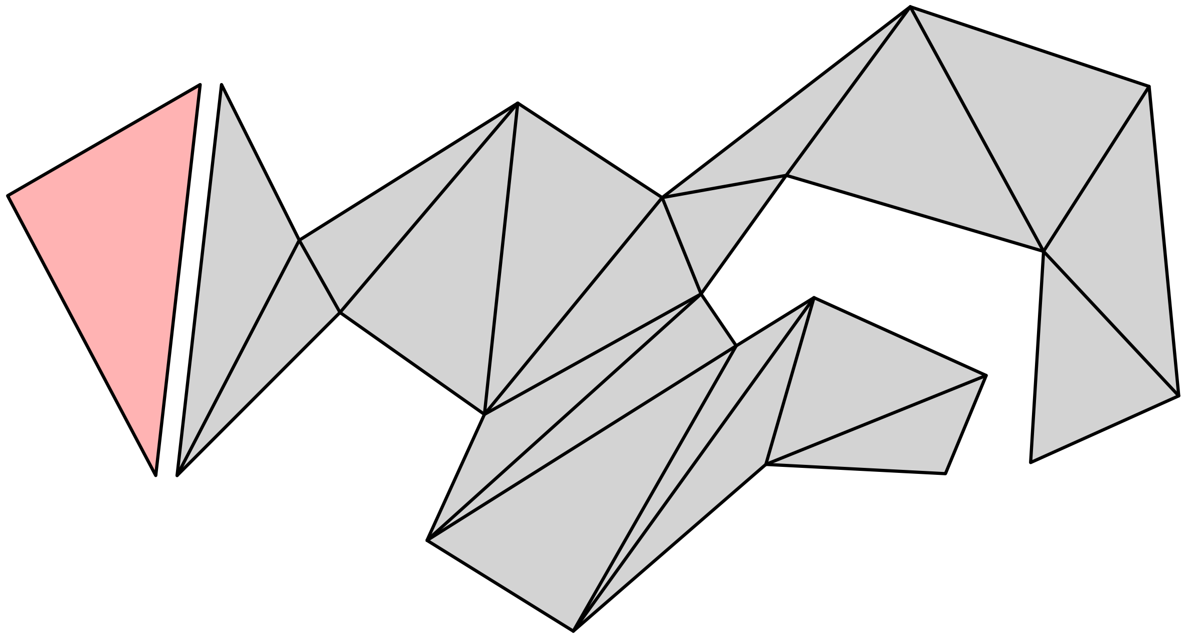
- P を線分 qr で分ける
- 一方は頂点数 3 の単純多角形，
  もう一方は頂点数 k の単純多角形である
- 帰納法の仮定から，どちらも三角形分割を持つ
- $\therefore P$ は三角形分割を持つ



三角形分割：証明 (3)

証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含まないとき

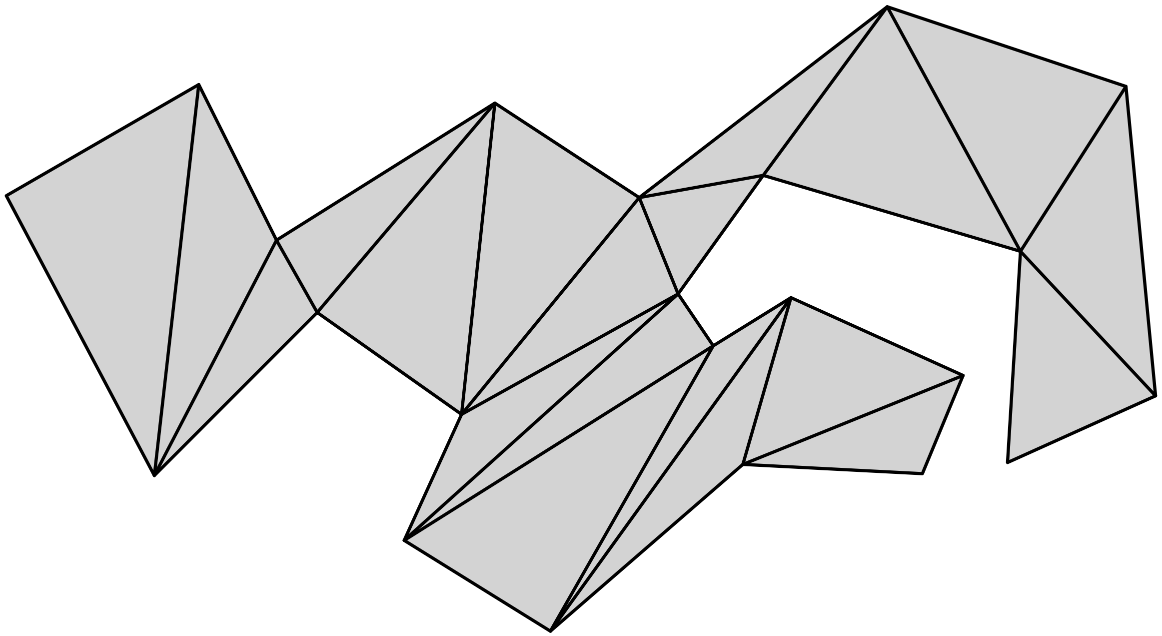
- P を線分 qr で分ける
- 一方は頂点数 3 の単純多角形，
  もう一方は頂点数 k の単純多角形である
- 帰納法の仮定から，どちらも三角形分割を持つ
- $\therefore P$ は三角形分割を持つ



三角形分割：証明 (3)

証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含まないとき

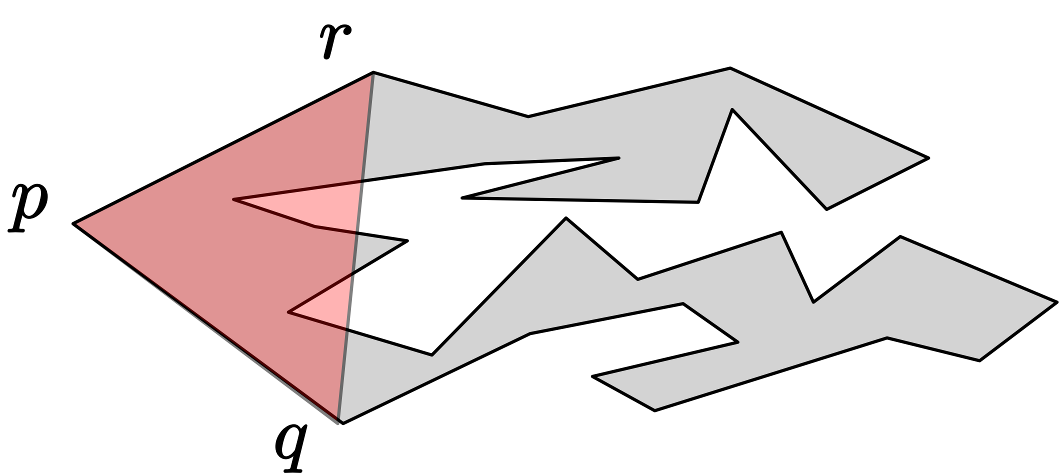
- P を線分 qr で分ける
- 一方は頂点数 3 の単純多角形，
  もう一方は頂点数 k の単純多角形である
- 帰納法の仮定から，どちらも三角形分割を持つ
- $\therefore P$ は三角形分割を持つ



三角形分割：証明 (4)

証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含むとき

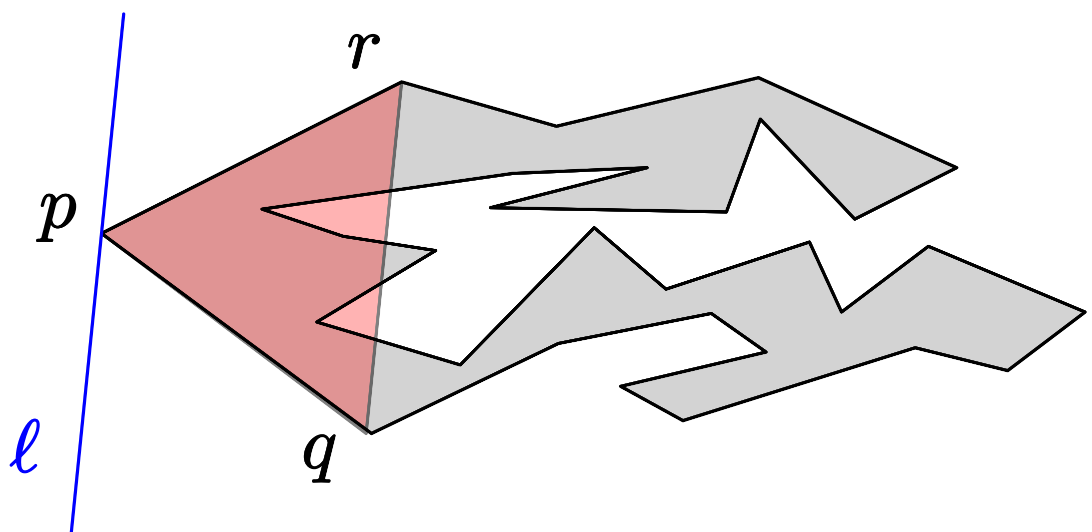
- 線分 qr と平行で p を通る直線を ℓ とする
- 三角形の中で ℓ に最も近い頂点を s とする
- 線分 ps は P に含まれる　(なぜ？)



三角形分割：証明 (4)

証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含むとき

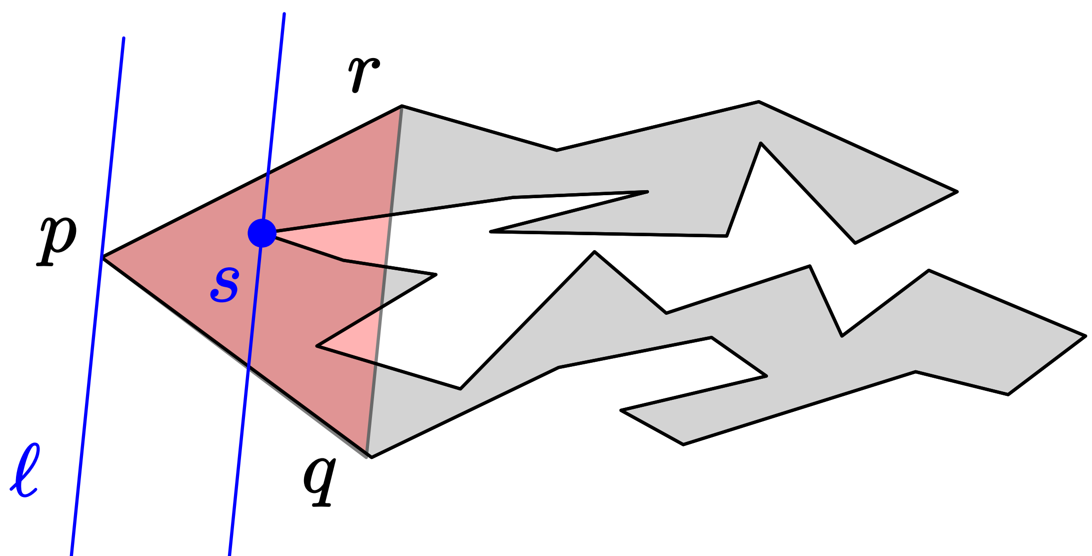
- 線分 qr と平行で p を通る直線を ℓ とする
- 三角形の中で ℓ に最も近い頂点を s とする
- 線分 ps は P に含まれる　(なぜ？)



三角形分割：証明 (4)

証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含むとき

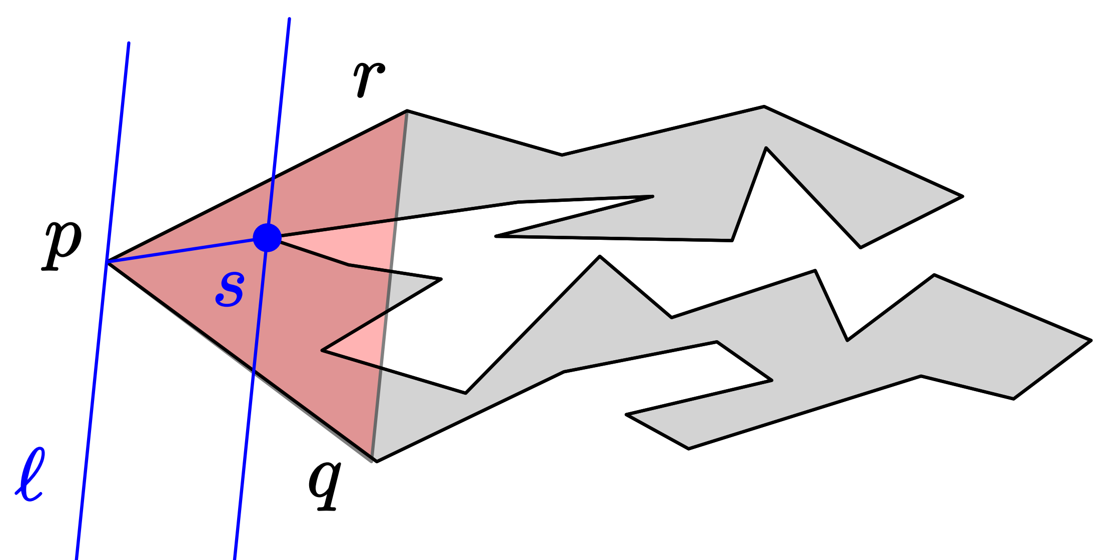
- 線分 qr と平行で p を通る直線を ℓ とする
- 三角形の中で ℓ に最も近い頂点を s とする
- 線分 ps は P に含まれる (なぜ？)



三角形分割：証明 (4)

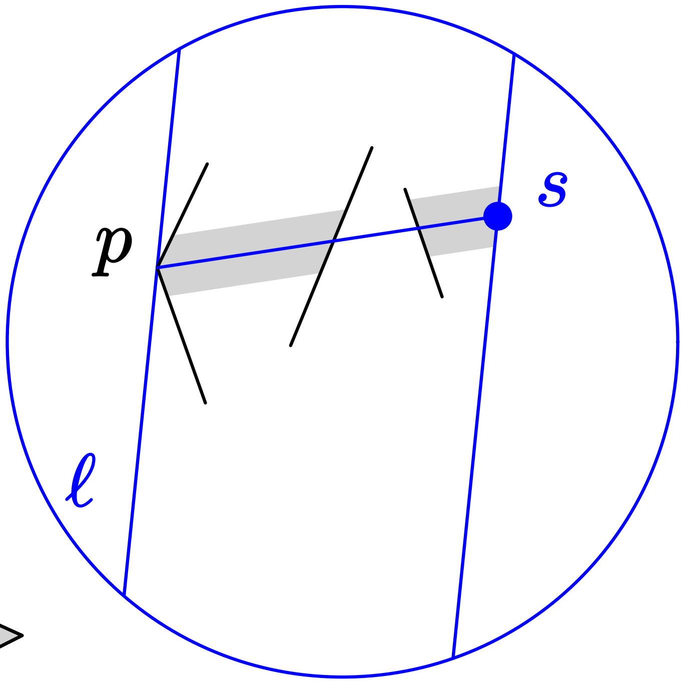
証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含むとき

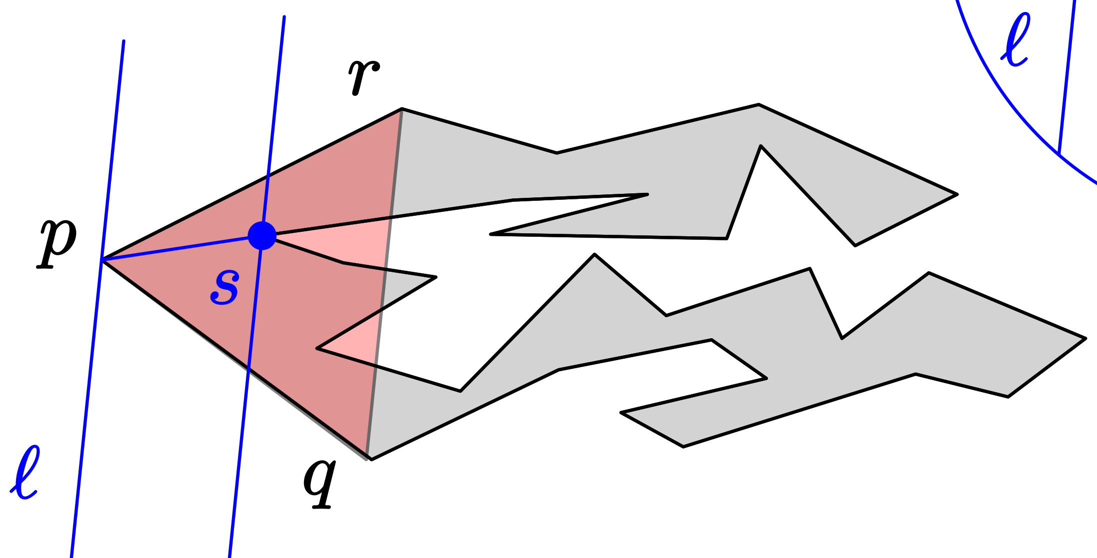
- 線分 qr と平行で p を通る直線を ℓ とする
- 三角形の中で ℓ に最も近い頂点を s とする
- 線分 ps は P に含まれる (なぜ？)



証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含むとき

- 線分 qr と平行で p を通る直線を ℓ とする
- 三角形の中で ℓ に最も近い頂点を s とする
- 線分 ps は P に含まれる (なぜ？)

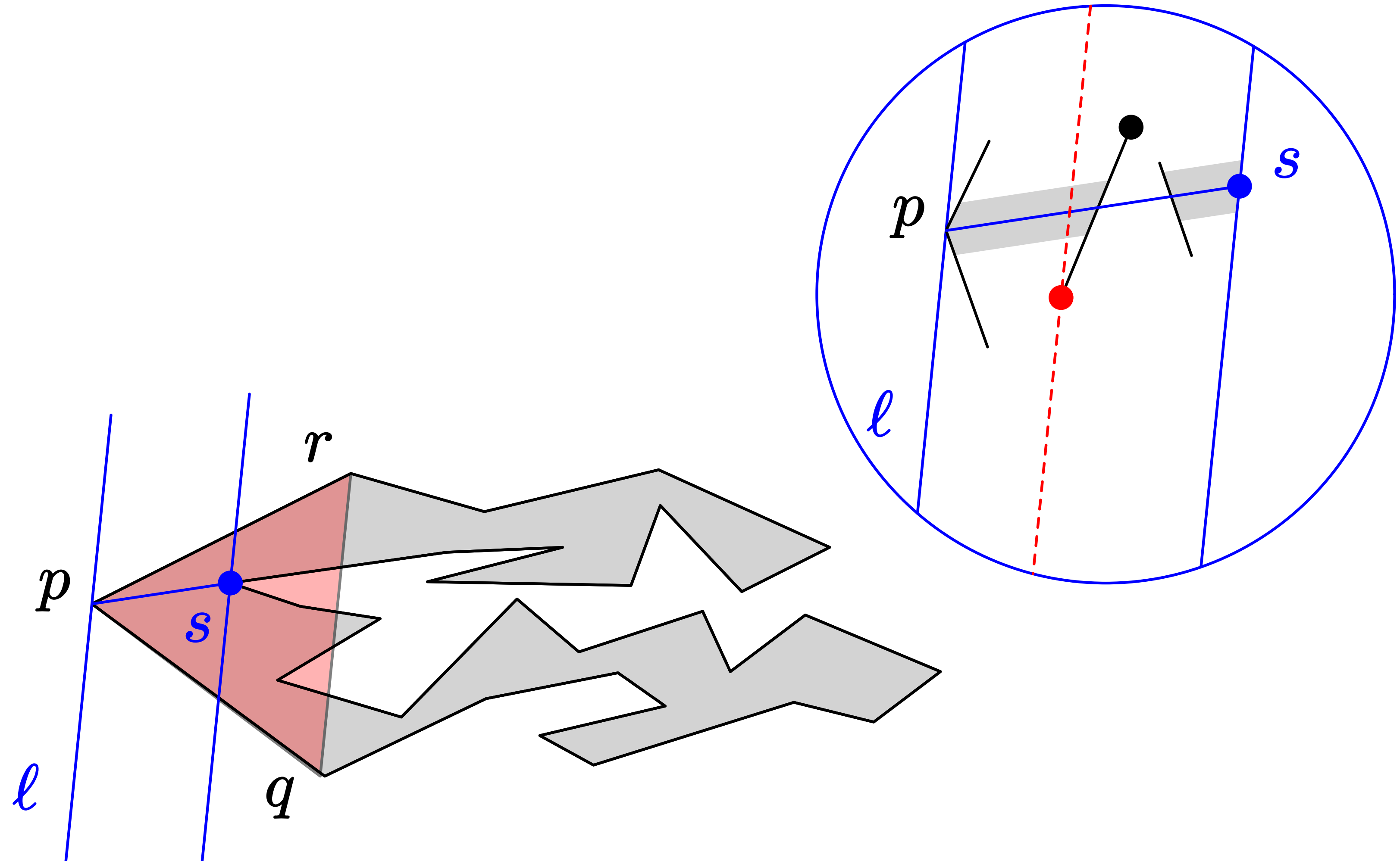




三角形分割：証明 (4)

証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含むとき

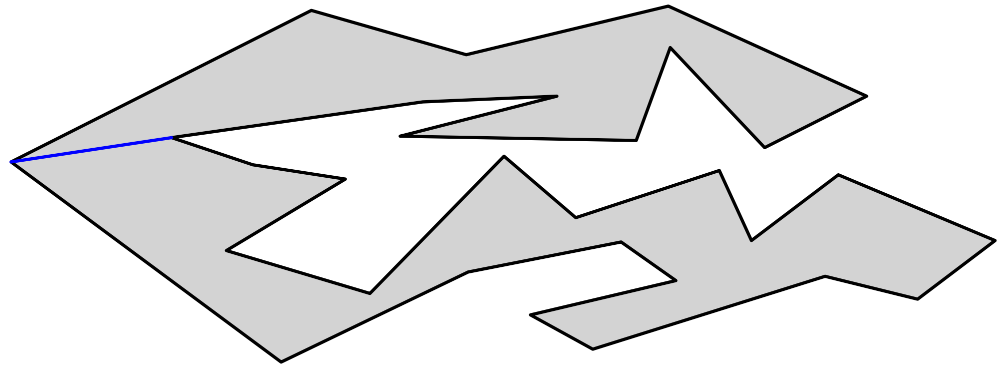
- 線分 qr と平行で p を通る直線を ℓ とする
- 三角形の中で ℓ に最も近い頂点を s とする
- 線分 ps は P に含まれる (なぜ？)



三角形分割：証明 (4)

<u>証明 (続)</u>：$\triangle pqr$ が他の頂点を含むとき

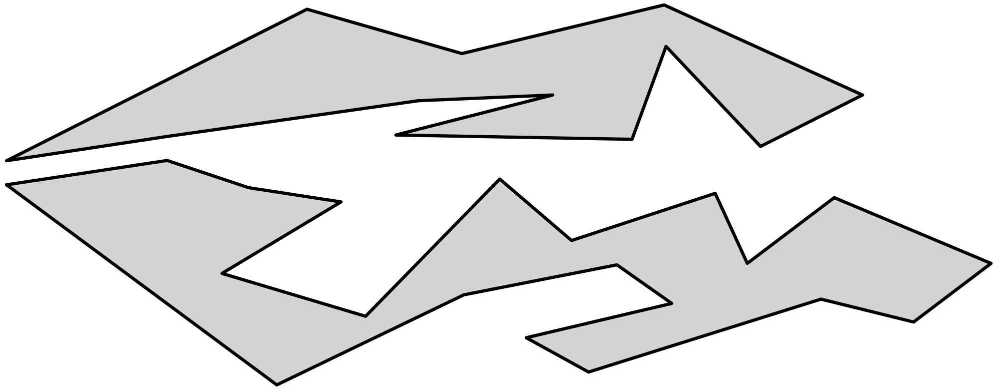
- $\ldots$
- P を線分 ps で分ける
- 一方が頂点数 m の単純多角形だとすると
  もう一方は頂点数 $n - m + 2$ の単純多角形である
- 帰納法の仮定から，どちらも三角形分割を持つ
- $\therefore P$ は三角形分割を持つ



三角形分割：証明 (4)

証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含むとき

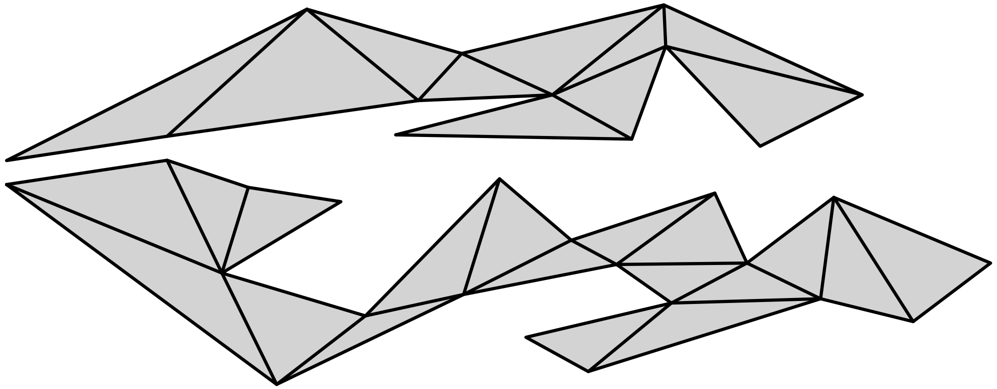
- $\cdots$
- P を線分 ps で分ける
- 一方が頂点数 m の単純多角形だとすると
  もう一方は頂点数 $n-m+2$ の単純多角形である
- 帰納法の仮定から，どちらも三角形分割を持つ
- $\therefore P$ は三角形分割を持つ



三角形分割：証明 (4)

証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含むとき

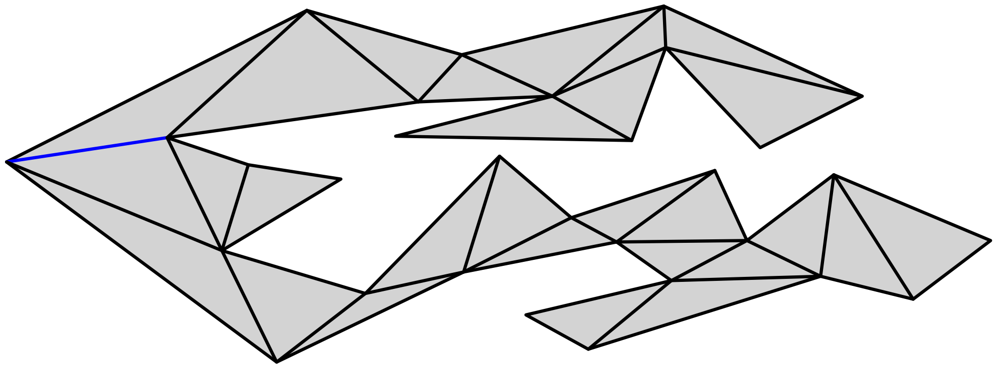
- $\cdots$
- P を線分 ps で分ける
- 一方が頂点数 m の単純多角形だとすると
  もう一方は頂点数 $n - m + 2$ の単純多角形である
- 帰納法の仮定から，どちらも三角形分割を持つ
- $\therefore P$ は三角形分割を持つ



三角形分割：証明 (4)

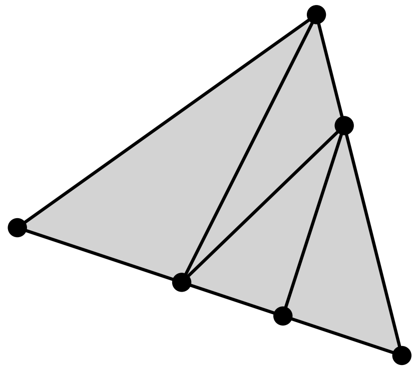
証明 (続)：$\triangle pqr$ が他の頂点を含むとき

- $\cdots$
- P を線分 ps で分ける
- 一方が頂点数 m の単純多角形だとすると
  もう一方は頂点数 $n-m+2$ の単純多角形である
- 帰納法の仮定から，どちらも三角形分割を持つ
- $\therefore P$ は三角形分割を持つ



三角形分割：証明 (補足)

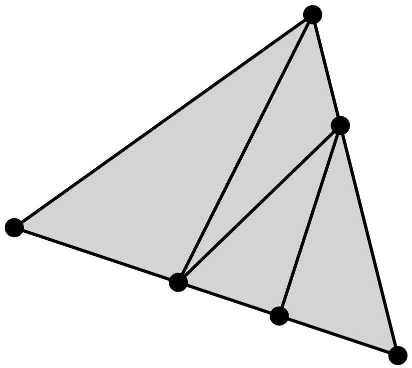
証明の都合で：頂点の内角が π であることを許す



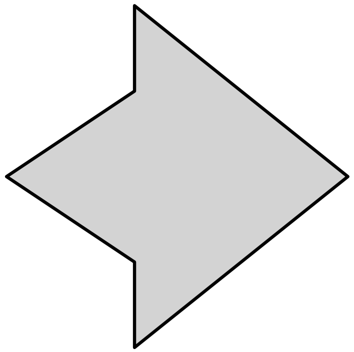
$\rightsquigarrow$ どこで使ったか？

三角形分割：証明 (補足)

証明の都合で：頂点の内角が π であることを許す

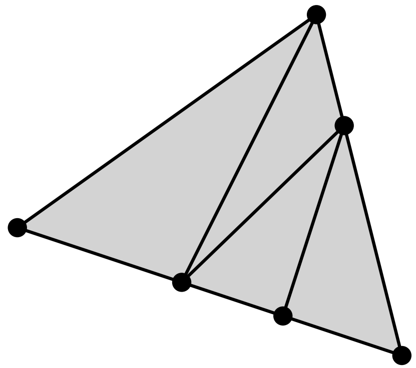


$\rightsquigarrow$ どこで使ったか？

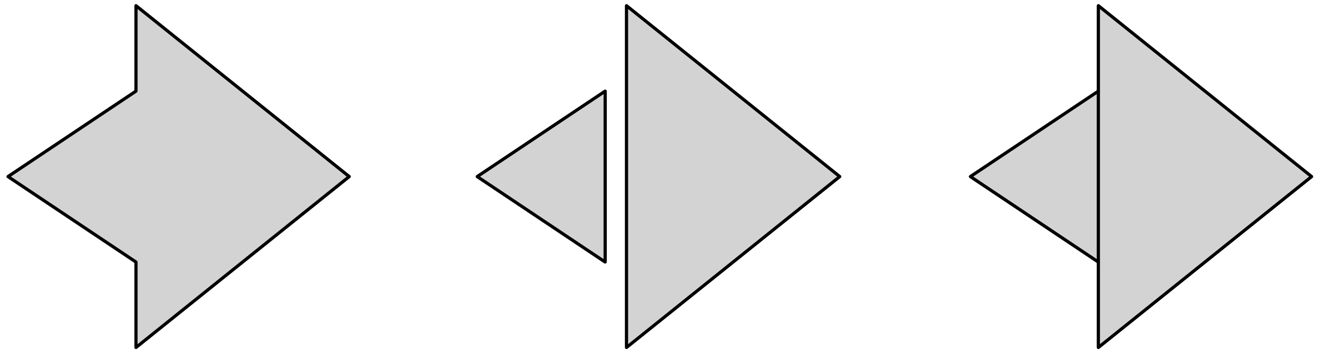


三角形分割：証明 (補足)

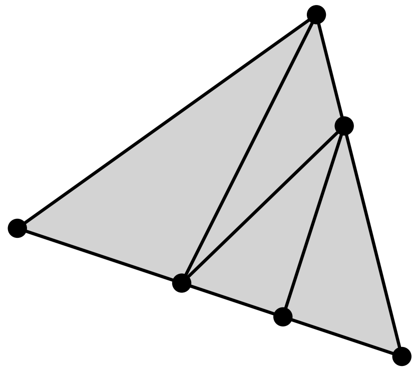
<u>証明の都合で</u>：頂点の内角が π であることを許す



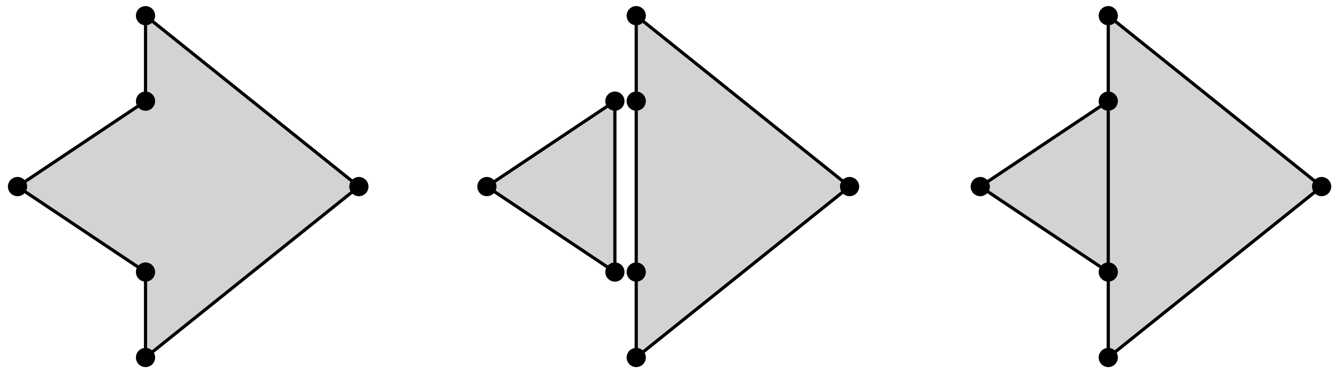
$\rightsquigarrow$ どこで使ったか？



証明の都合で：頂点の内角が π であることを許す

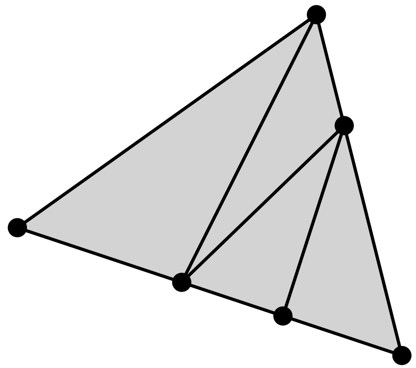


$\rightsquigarrow$ どこで使ったか？

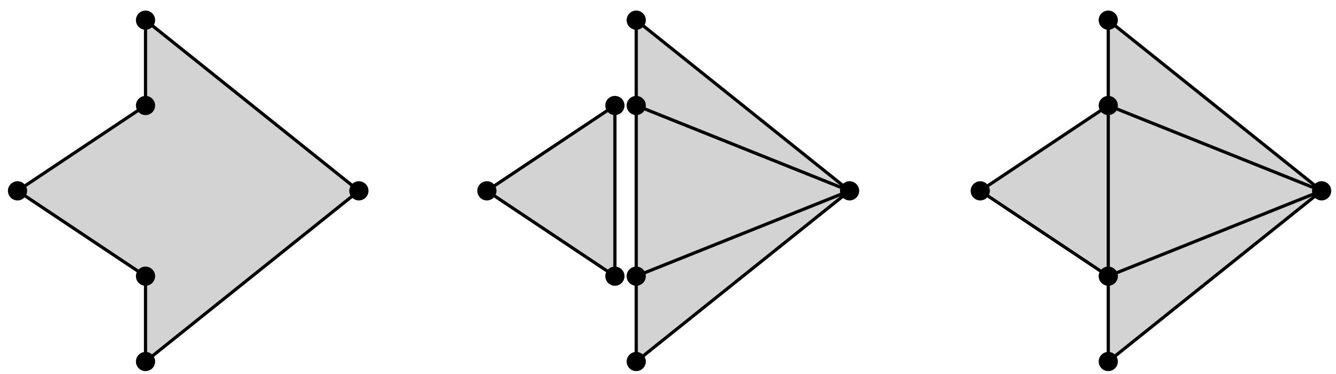


三角形分割：証明 (補足)

証明の都合で：頂点の内角が π であることを許す



$\rightsquigarrow$ どこで使ったか？

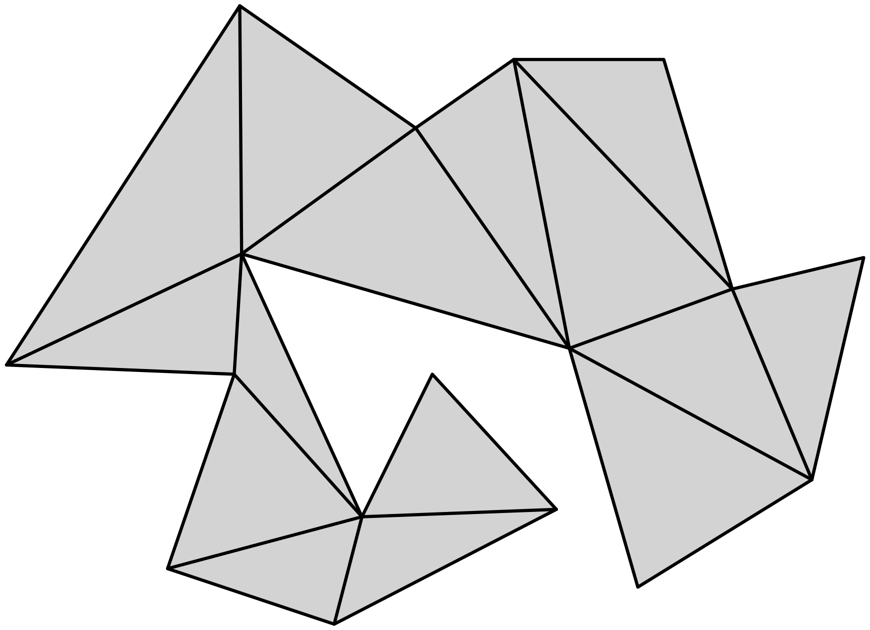


三角形分割における三角形の数

証明を少し変えると，次の性質も証明できる

性質：三角形分割における三角形の数

頂点数 n の単純多角形の任意の三角形分割において三角形の総数は $n-2$ である



頂点数 $= 17$

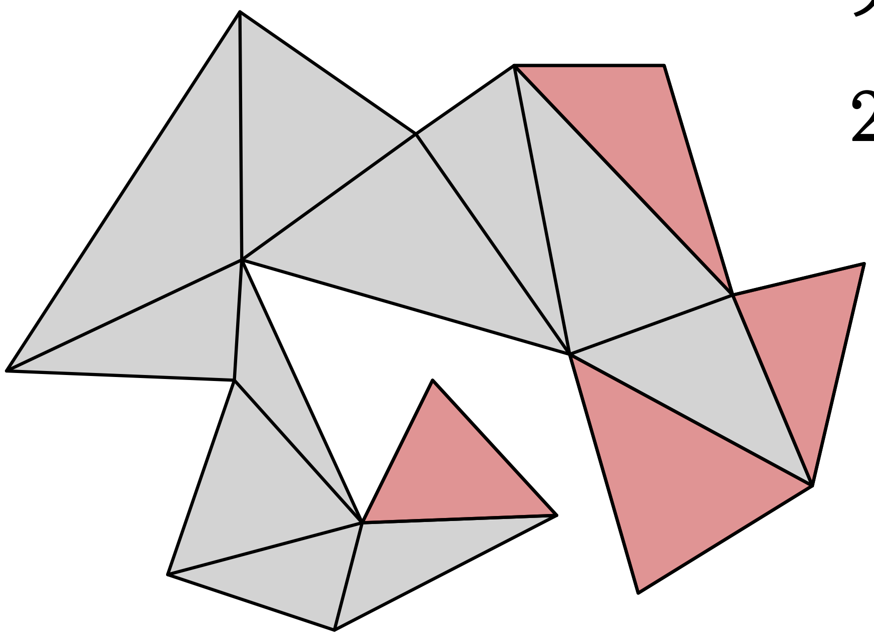
三角形の数 $= 15$

三角形分割における耳

証明を少し変えると，次の性質も証明できる

性質：三角形分割における耳

頂点数 $n \geq 4$ の単純多角形の任意の三角形分割には耳が 2 つ以上存在する



三角形分割の **耳** とは，

分割を構成する三角形で

2 辺が多角形の境界上にあるもの

単純多角形の面積

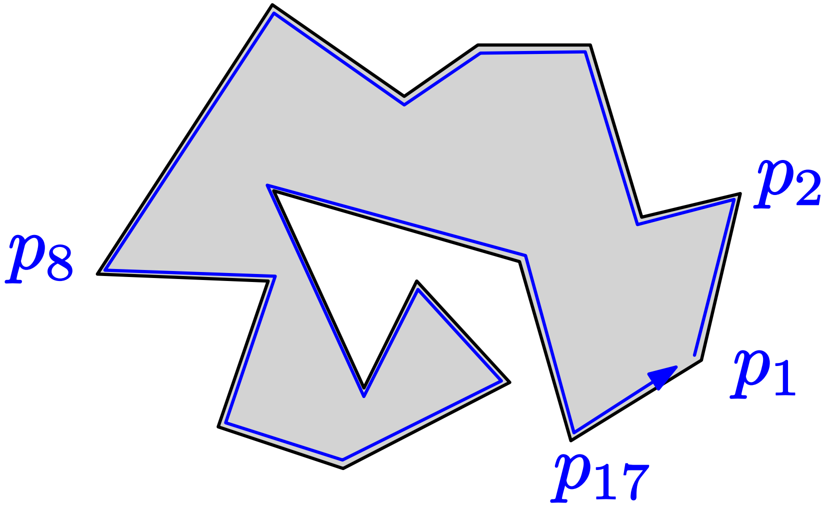
耳の存在を使うと，次の性質が (割と簡単に) 導ける

性質：単純多角形の面積

単純多角形 P の頂点 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ には反時計回りで添え字がつけられているとする

このとき，P の面積は次の式で表される

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \frac{1}{2}(x_n y_1 - x_1 y_n)$$

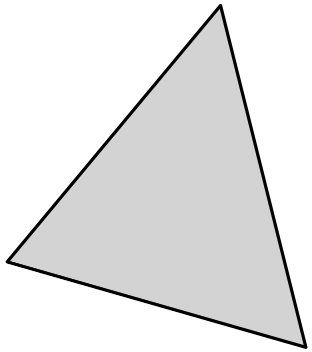


単純多角形の面積：証明 (1)

証明：頂点数 $n \geq 3$ に関する帰納法

- $n = 3$ のとき，P は三角形なので，P の面積は
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \frac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_3)$$
(11 ページ参照)

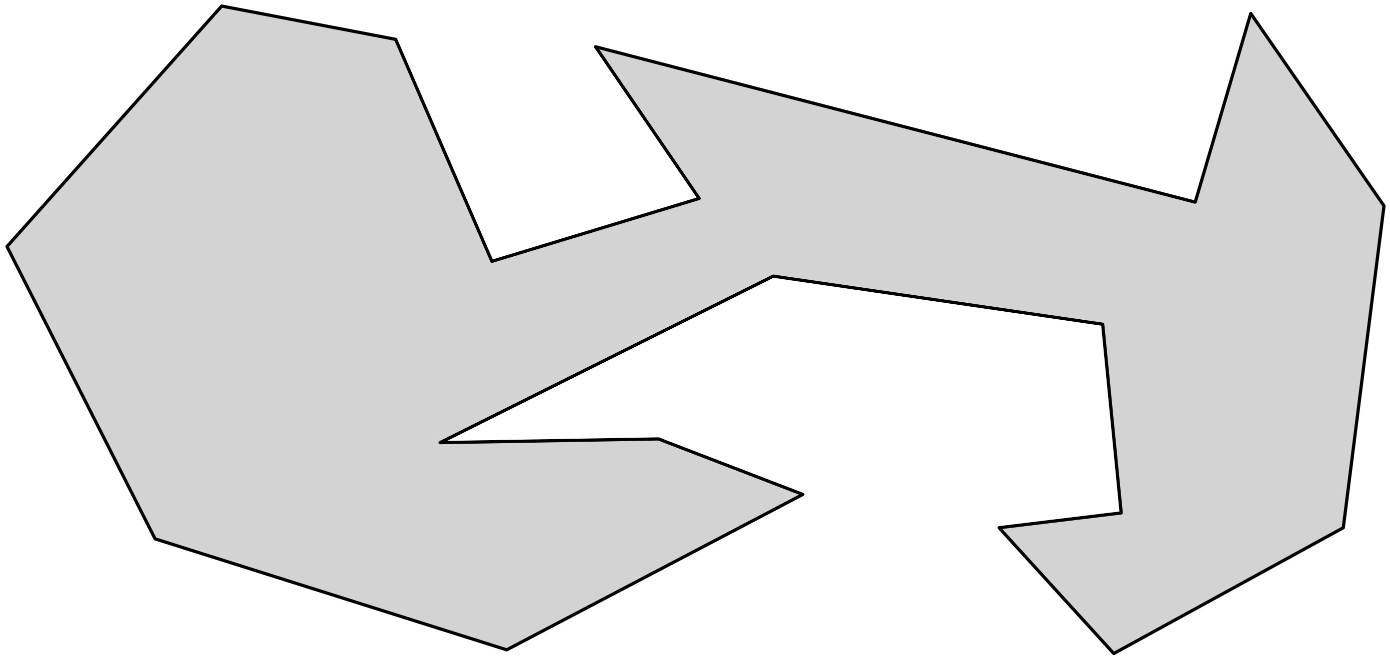
- 任意の整数 $k \geq 3$ を考える
- 頂点数 k の任意の単純多角形の面積が与式で表せると仮定する



単純多角形の面積：証明 (2)

証明 (続き)：P を頂点数 $k+1$ の単純多角形とする

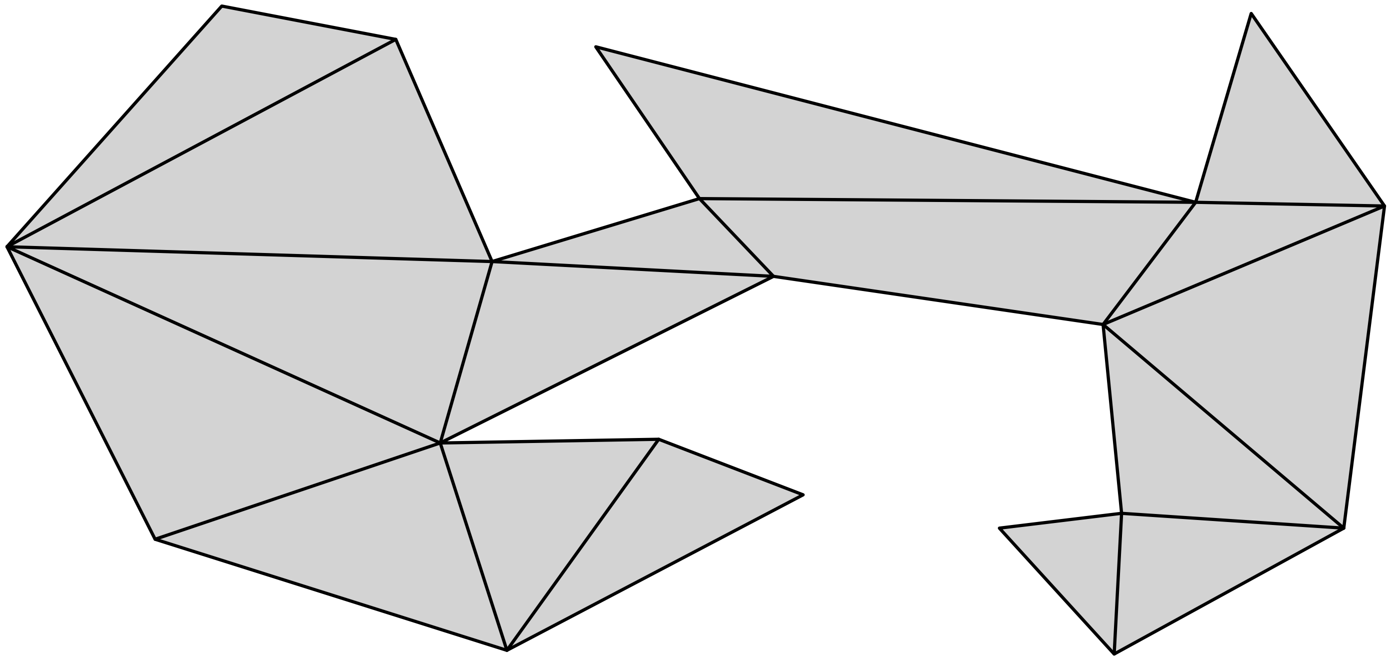
- P の三角形分割を 1 つ固定する
- $k+1 \geq 4$ なので，三角形分割には耳が存在する
- 耳が $\triangle p_{n-1}p_np_1$ であるように，添え字を付け替える
- P から耳を取り除くと，$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ を頂点とする単純多角形が得られる



単純多角形の面積：証明 (2)

証明 (続き)：P を頂点数 $k+1$ の単純多角形とする

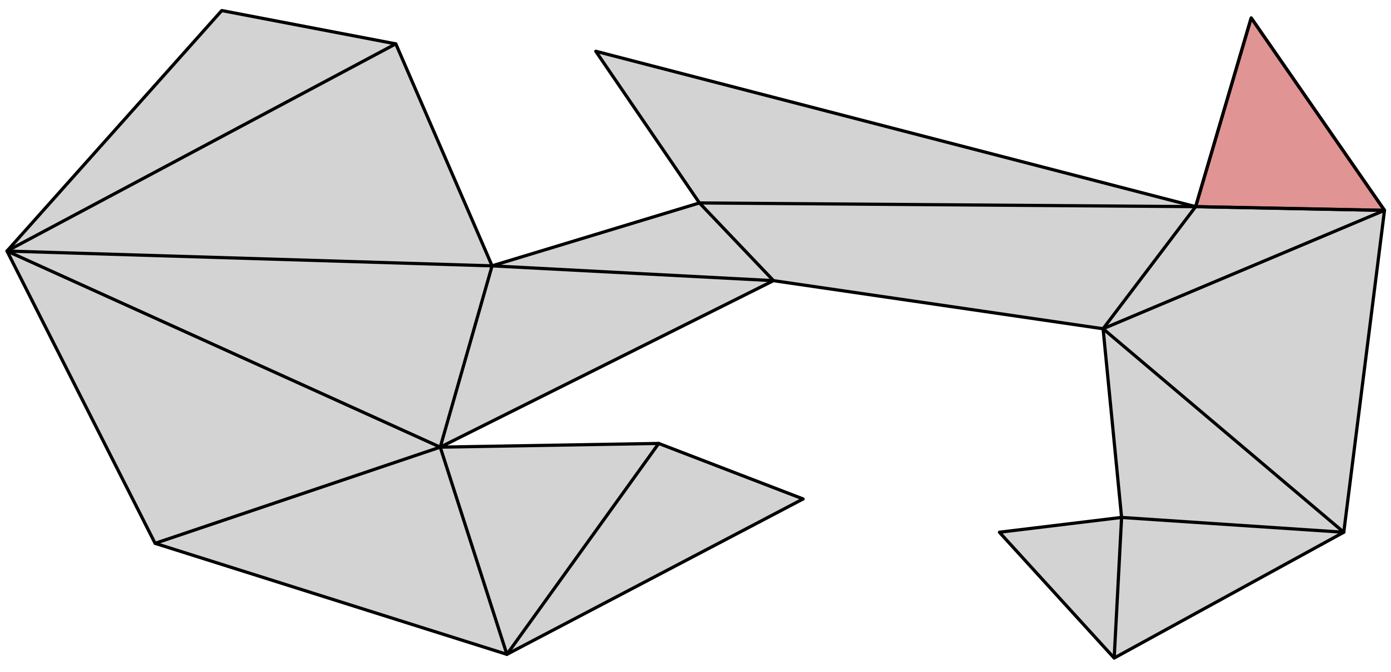
- P の三角形分割を 1 つ固定する
- $k+1 \geq 4$ なので，三角形分割には耳が存在する
- 耳が $\triangle p_{n-1} p_n p_1$ であるように，添え字を付け替える
- P から耳を取り除くと，$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ を頂点とする単純多角形が得られる



単純多角形の面積：証明 (2)

証明 (続き)：P を頂点数 $k+1$ の単純多角形とする

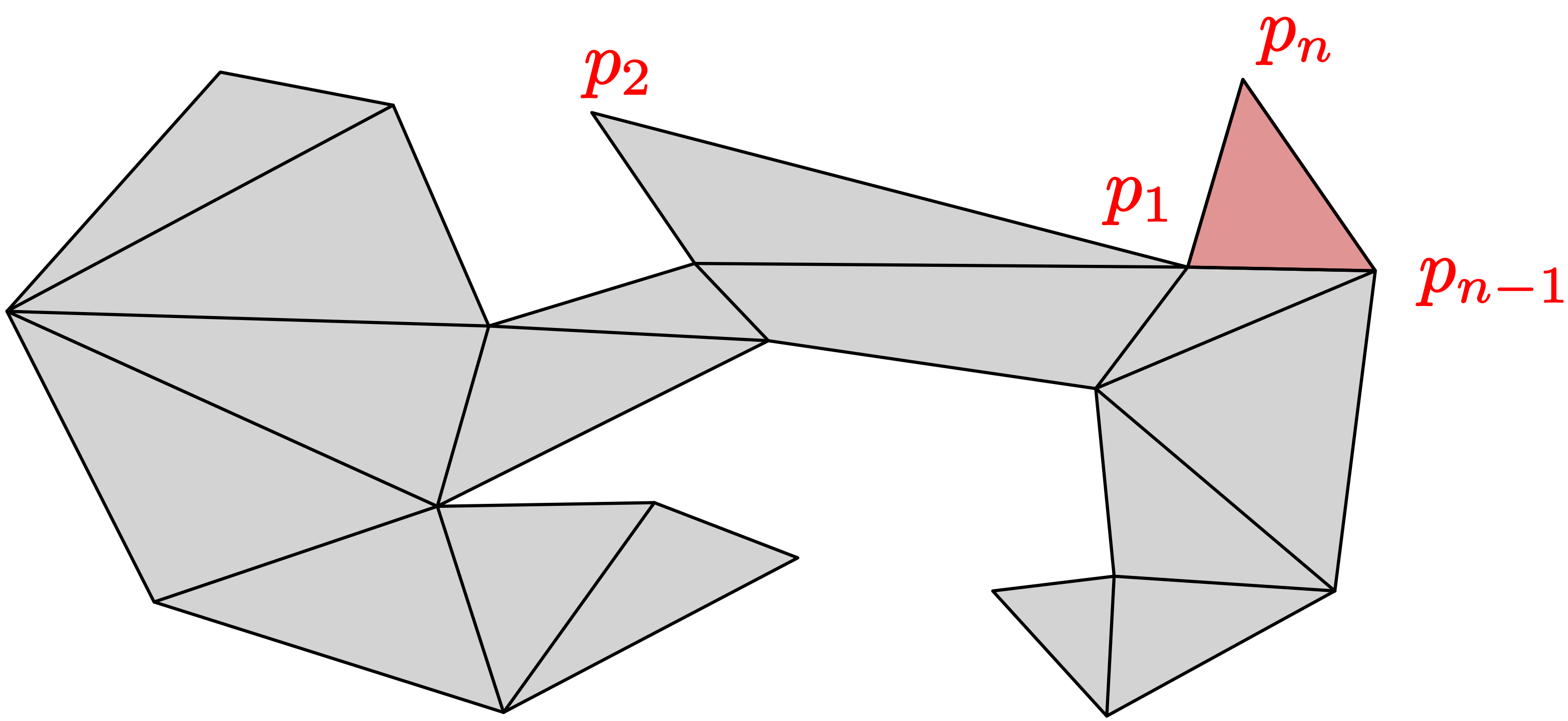
- P の三角形分割を 1 つ固定する
- $k+1 \geq 4$ なので，三角形分割には耳が存在する
- 耳が $\triangle p_{n-1}p_np_1$ であるように，添え字を付け替える
- P から耳を取り除くと，$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ を頂点とする単純多角形が得られる



単純多角形の面積：証明 (2)

証明 (続き)：P を頂点数 $k+1$ の単純多角形とする

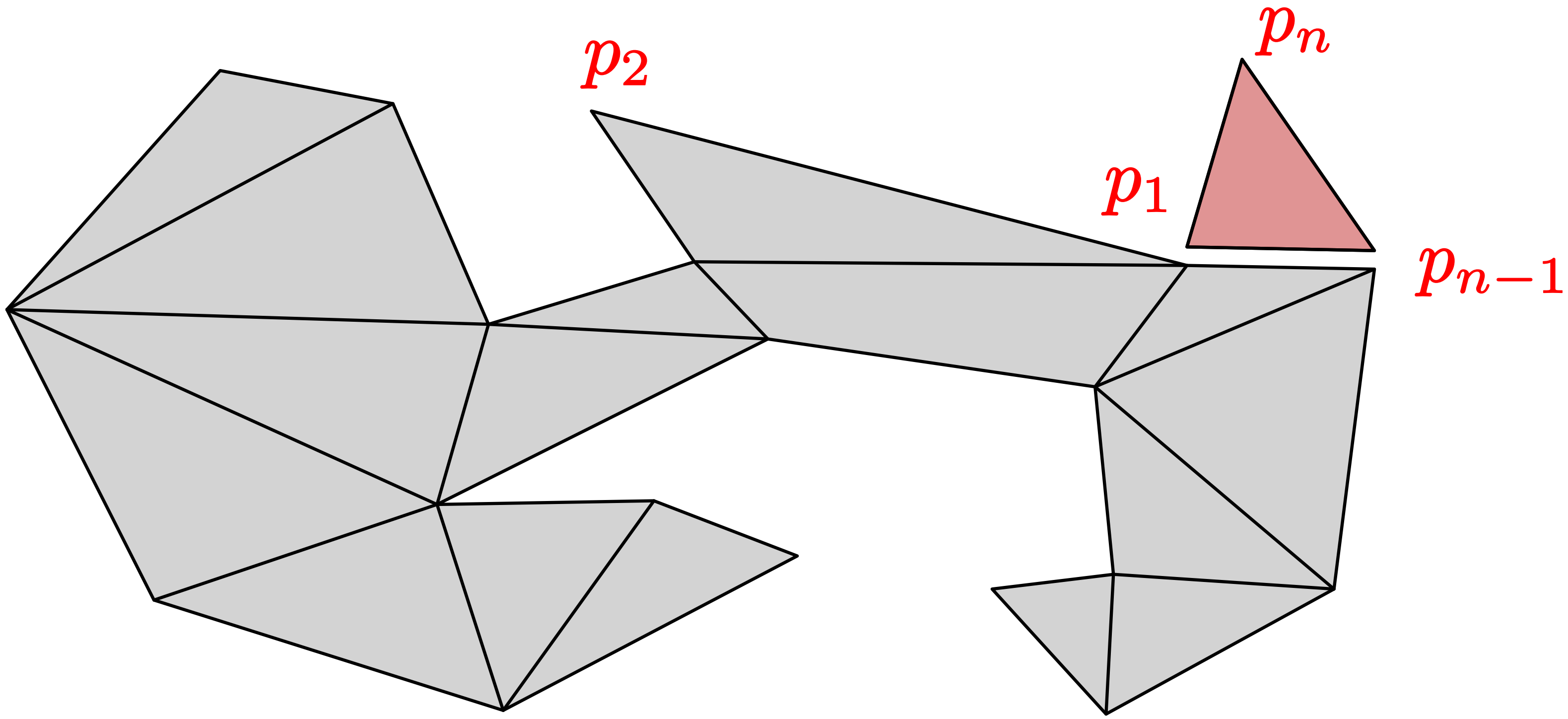
- P の三角形分割を 1 つ固定する
- $k+1 \geq 4$ なので，三角形分割には耳が存在する
- 耳が $\triangle p_{n-1}p_np_1$ であるように，添え字を付け替える
- P から耳を取り除くと，$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ を頂点とする単純多角形が得られる



単純多角形の面積：証明 (2)

証明 (続き)：P を頂点数 $k+1$ の単純多角形とする

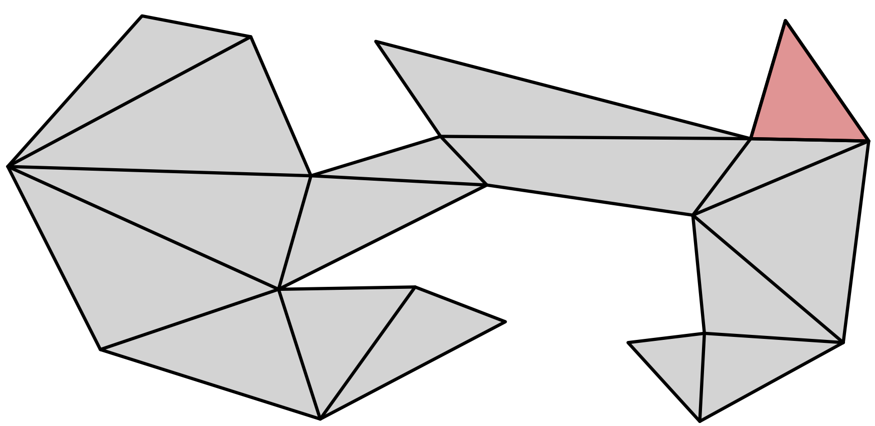
- P の三角形分割を 1 つ固定する
- $k+1 \geq 4$ なので，三角形分割には耳が存在する
- 耳が $\triangle p_{n-1}p_np_1$ であるように，添え字を付け替える
- P から耳を取り除くと，$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ を頂点とする単純多角形が得られる



証明 (続き)：$\cdots$

- 帰納法の仮定から，P の面積は

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \frac{1}{2}(x_{n-1} y_1 - x_1 y_{n-1}) +$$
$$\frac{1}{2}((x_1 y_{n-1} - x_{n-1} y_1) + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n))$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \frac{1}{2}(x_n y_1 - x_1 y_n) \qquad \square$$

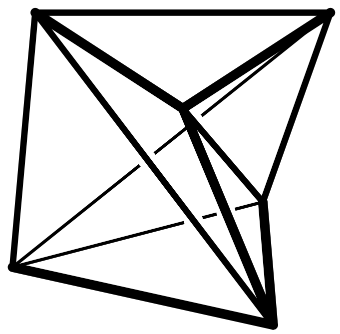


補足：3 次元の場合

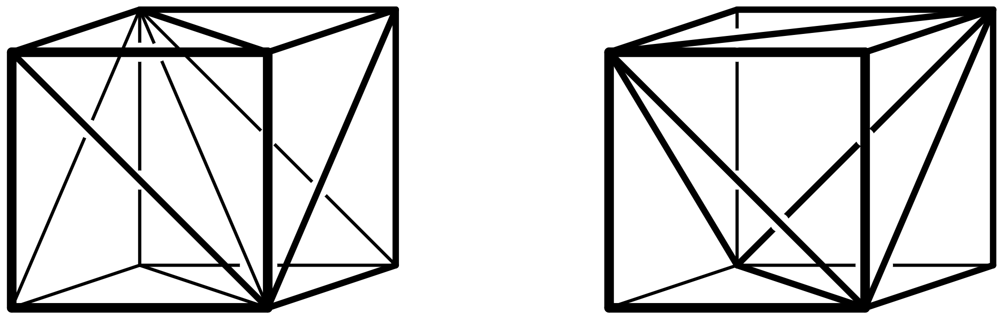
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても，
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)

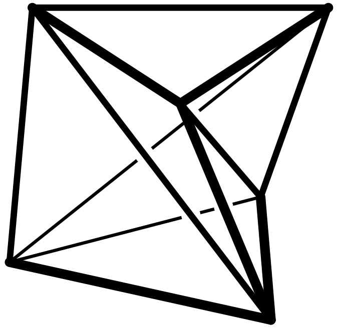


補足：3 次元の場合

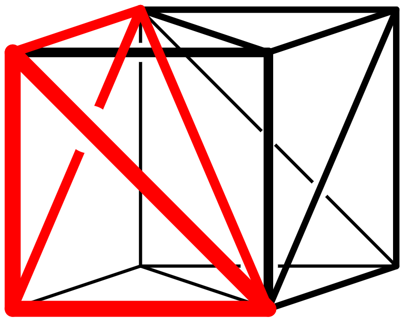
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

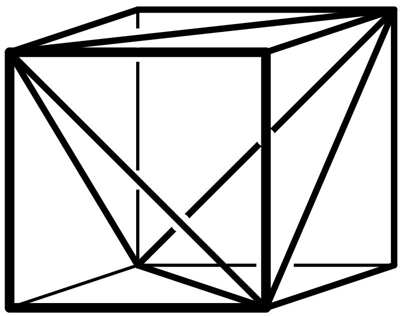
- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても,
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)



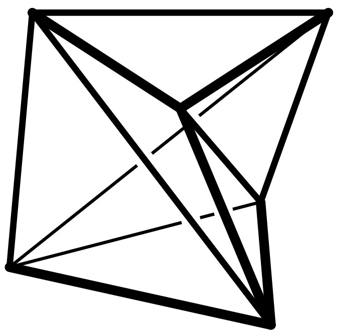


補足：3 次元の場合

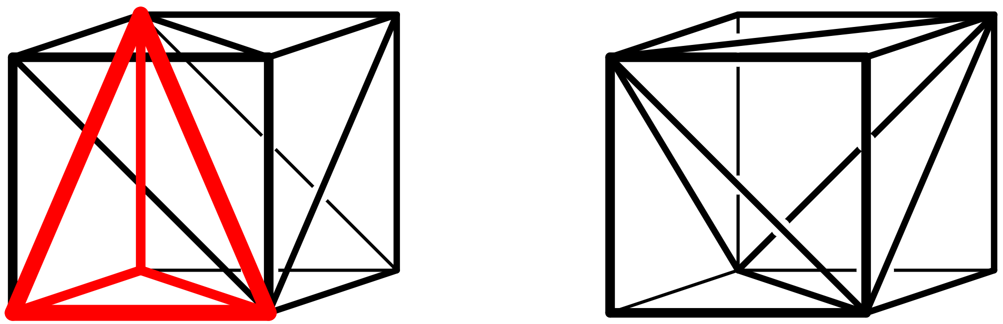
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても，
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)

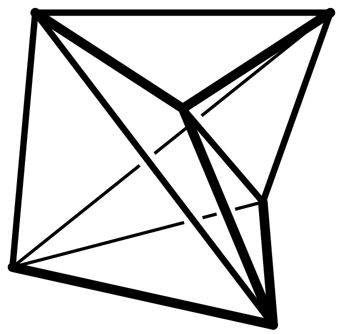


補足：3 次元の場合

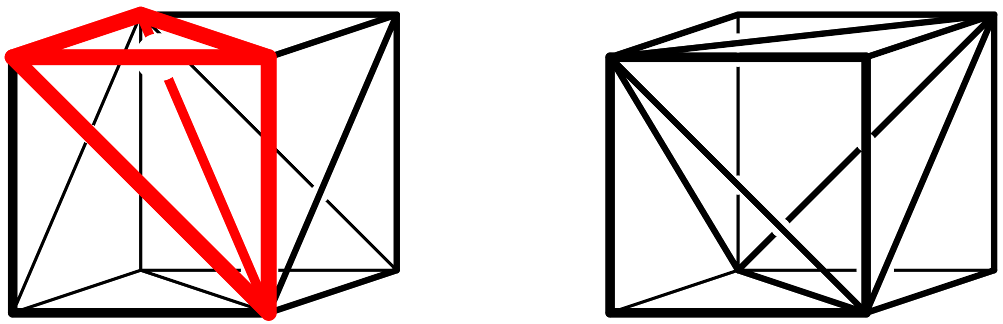
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても，
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)

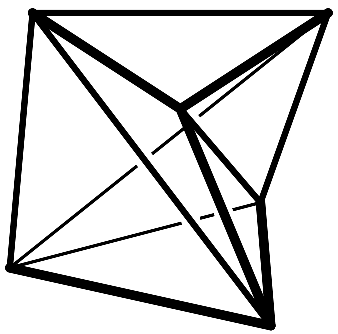


補足：3 次元の場合

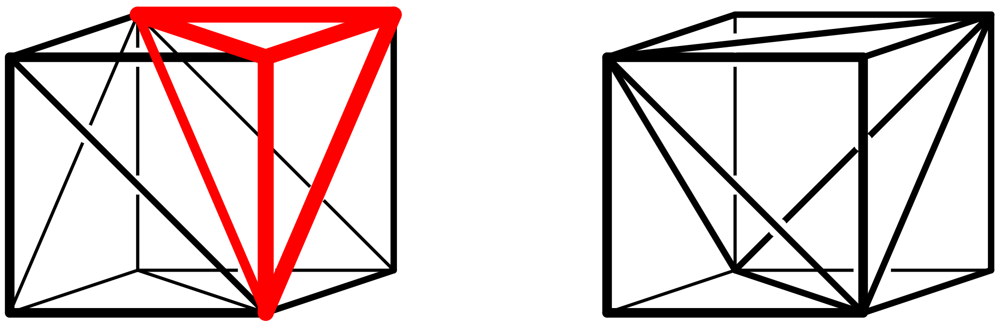
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても,
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)

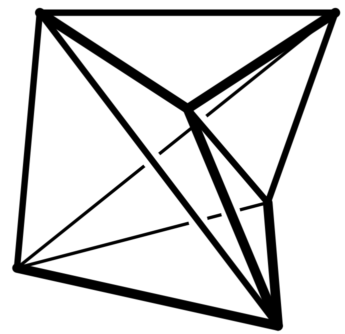


補足：3 次元の場合

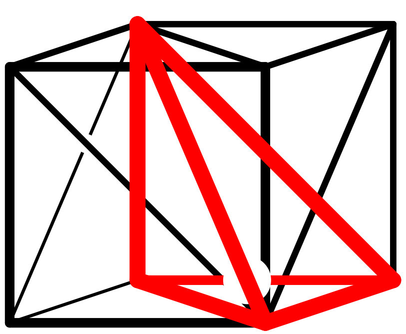
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

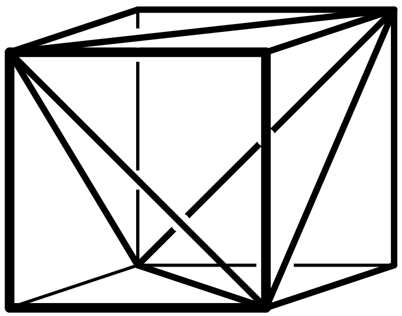
- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても，
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)

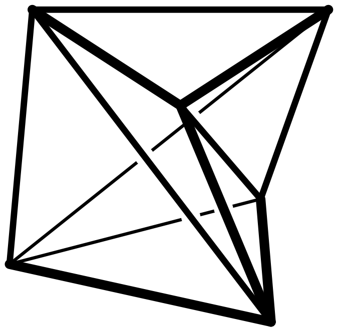




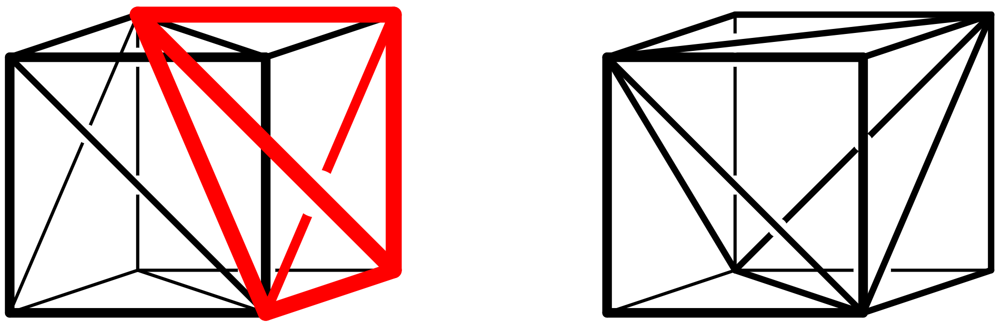
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても,
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)

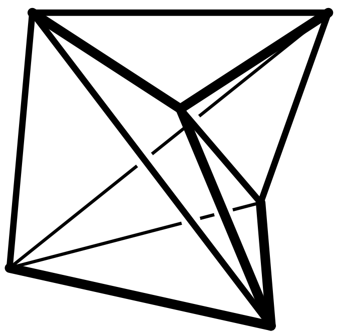


補足：3 次元の場合

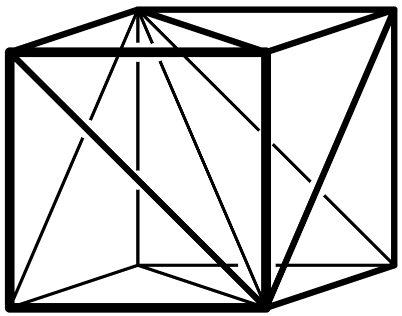
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

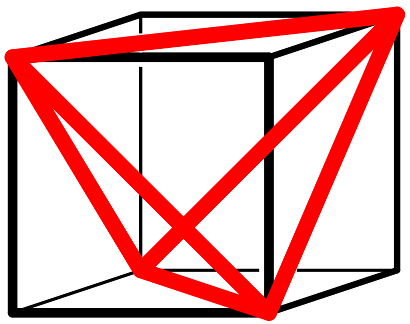
- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても,
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)



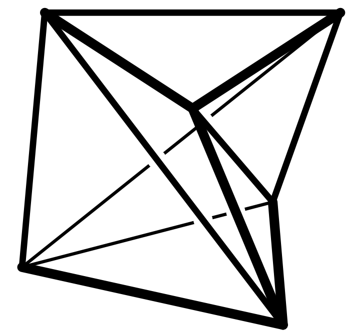


補足：3 次元の場合

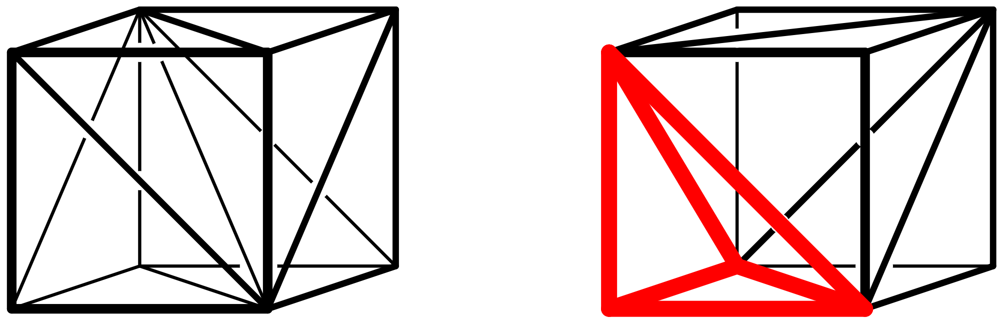
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても，
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)

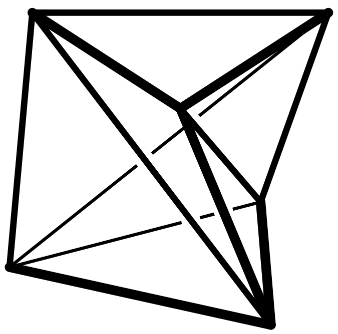


補足：3 次元の場合

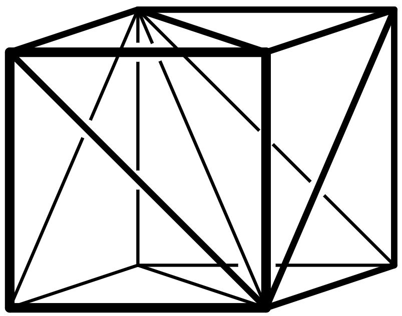
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

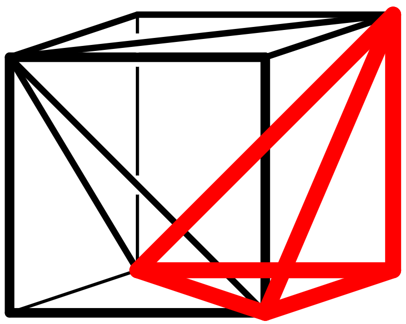
- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても,
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)



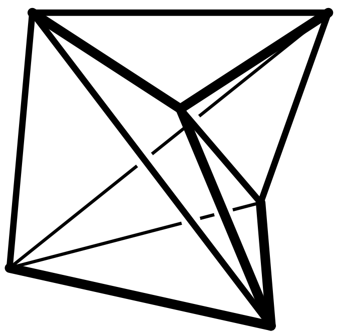


補足：3 次元の場合

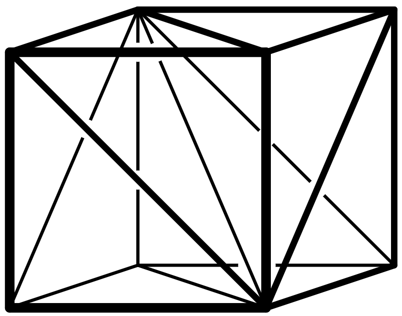
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

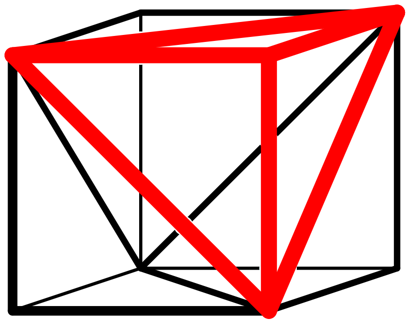
- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても,
  その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)



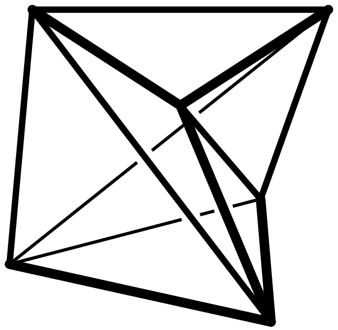


補足：3 次元の場合

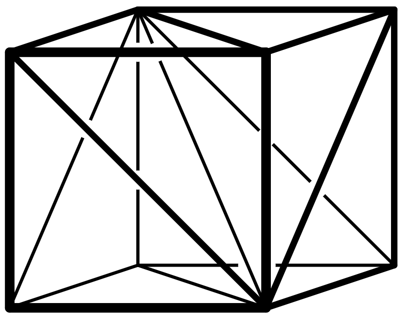
3 次元では「四面体分割」を考えるが . . .

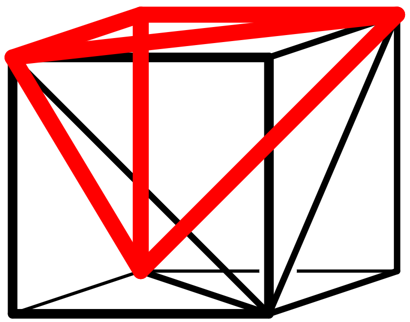
- 四面体分割を持たない多面体がある

シェーンハルト多面体



- 四面体分割を持つとしても,
その中の四面体の数は決まらない (一定ではない)





まとめ

今回の目標

次ができるようになる

- 多角形が三角形分割を持つことが証明できる
- 多角形による問題解決において，三角形分割を使える

教訓

困難は分割せよ　　　　　　　　　　　（デカルト『方法序説』）