

離散数理工学 (2025 年度後学期)

第 0 回

ガイダンス

岡本 吉央 (電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 10 月 7 日

最終更新 : 2025 年 9 月 24 日 15:30

主題

離散幾何・計算幾何に関する基礎概念を習得し、
諸分野における問題をそれらによってモデル化および
解決するための方法論を学習する。

達成目標

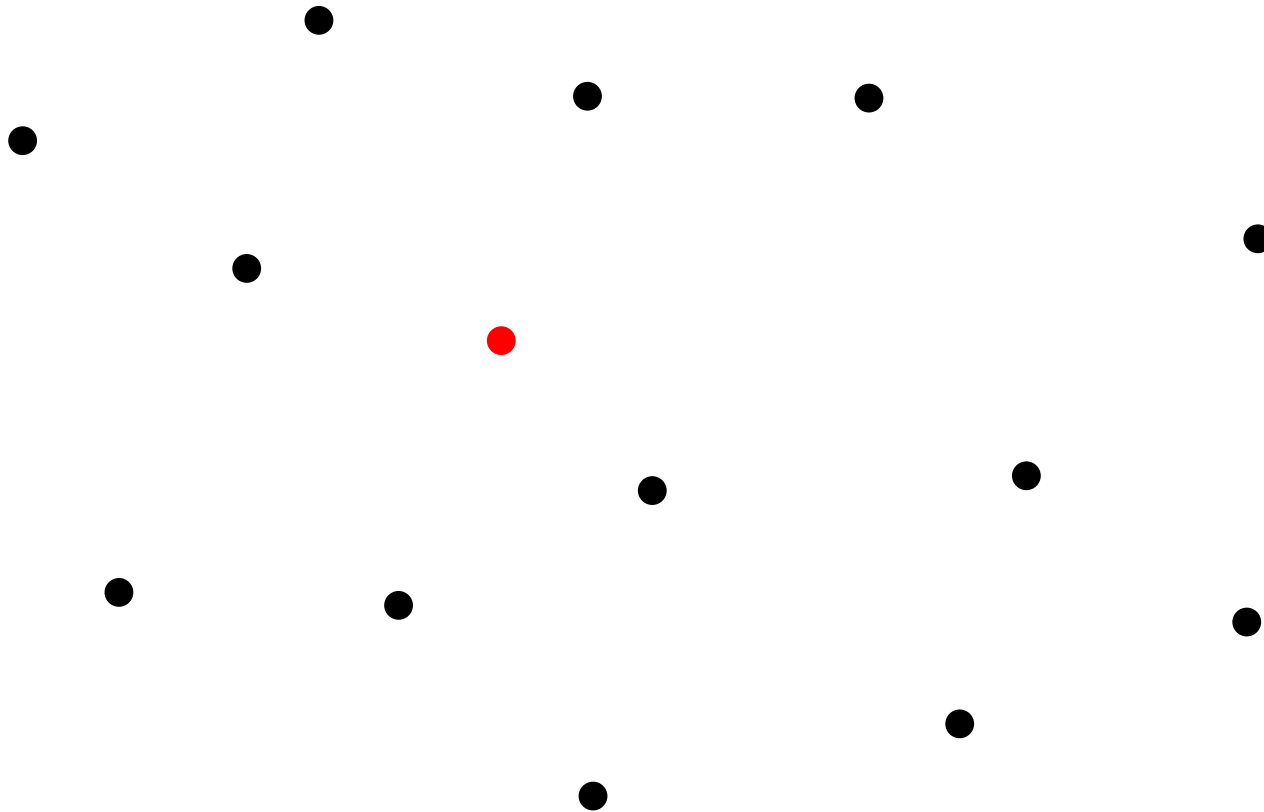
離散幾何・計算幾何における

- 用語を正しく使うことができる
- 基本的な概念について、具体例の計算ができる
- 典型的な論法を用いて、証明を書くことができる

離散幾何 = discrete geometry

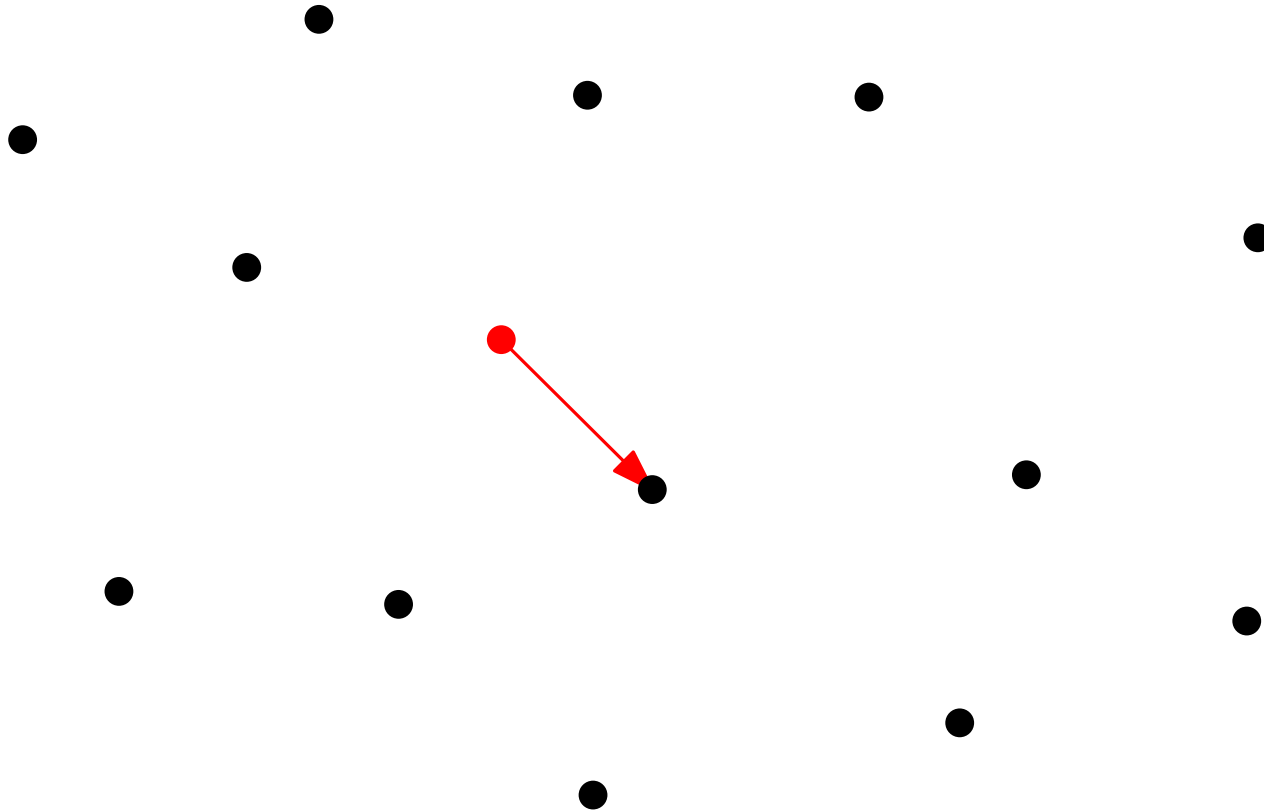
計算幾何 = computational geometry

赤点 に最も近い黒点はどれか？



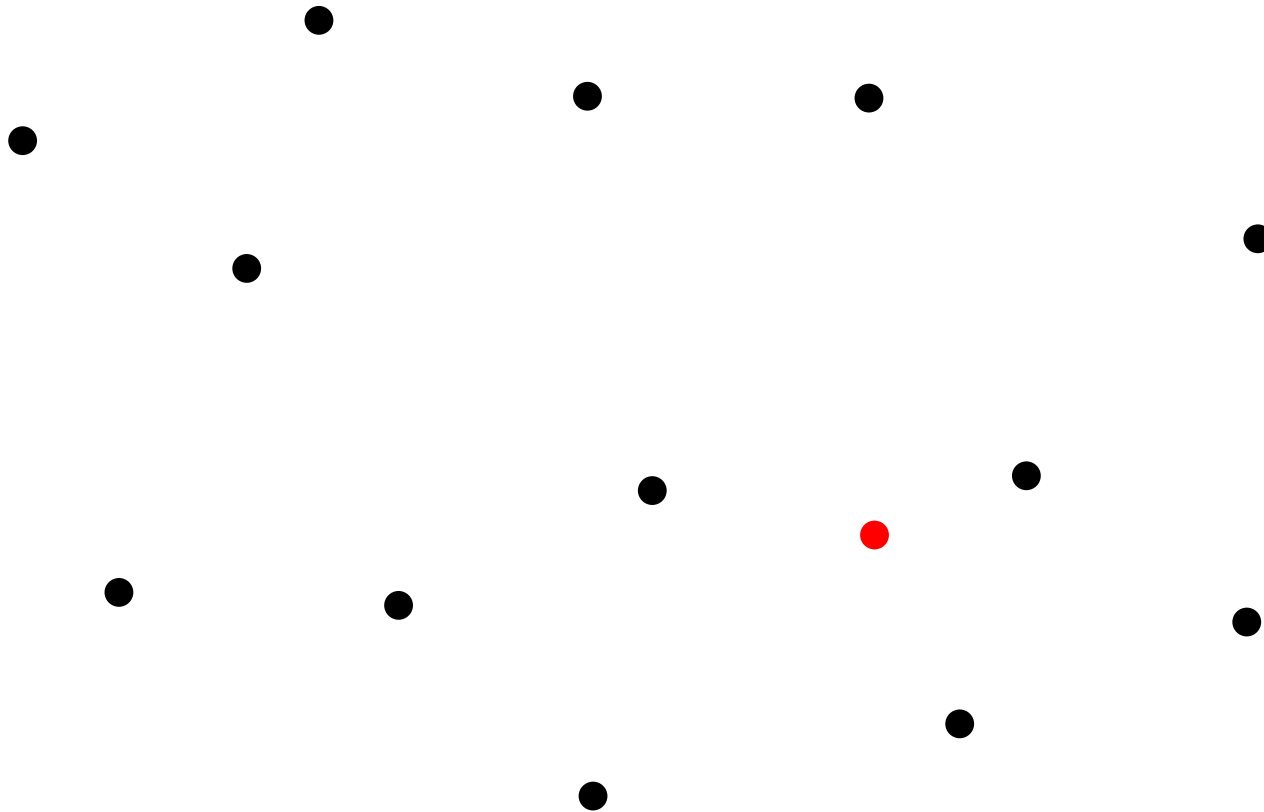
典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

赤点に最も近い黒点はどれか？



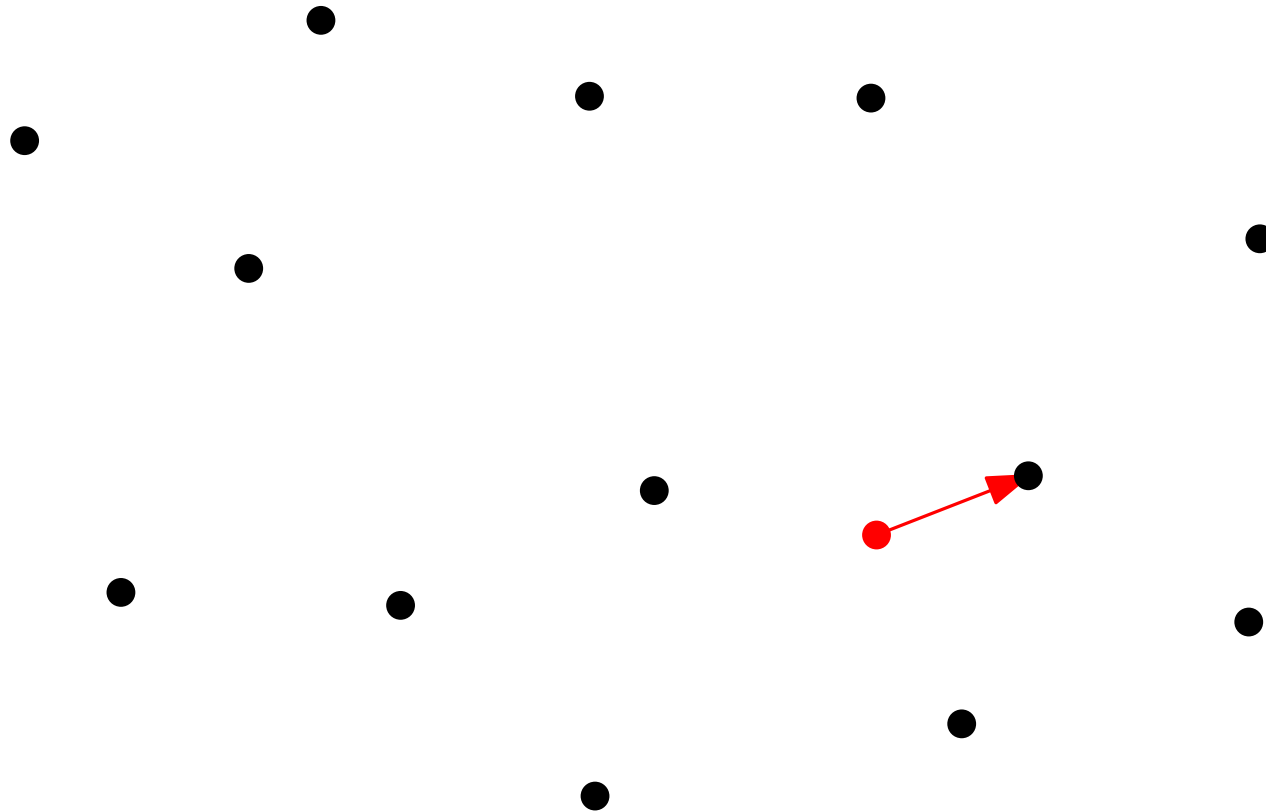
典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

赤点 に最も近い黒点はどれか？



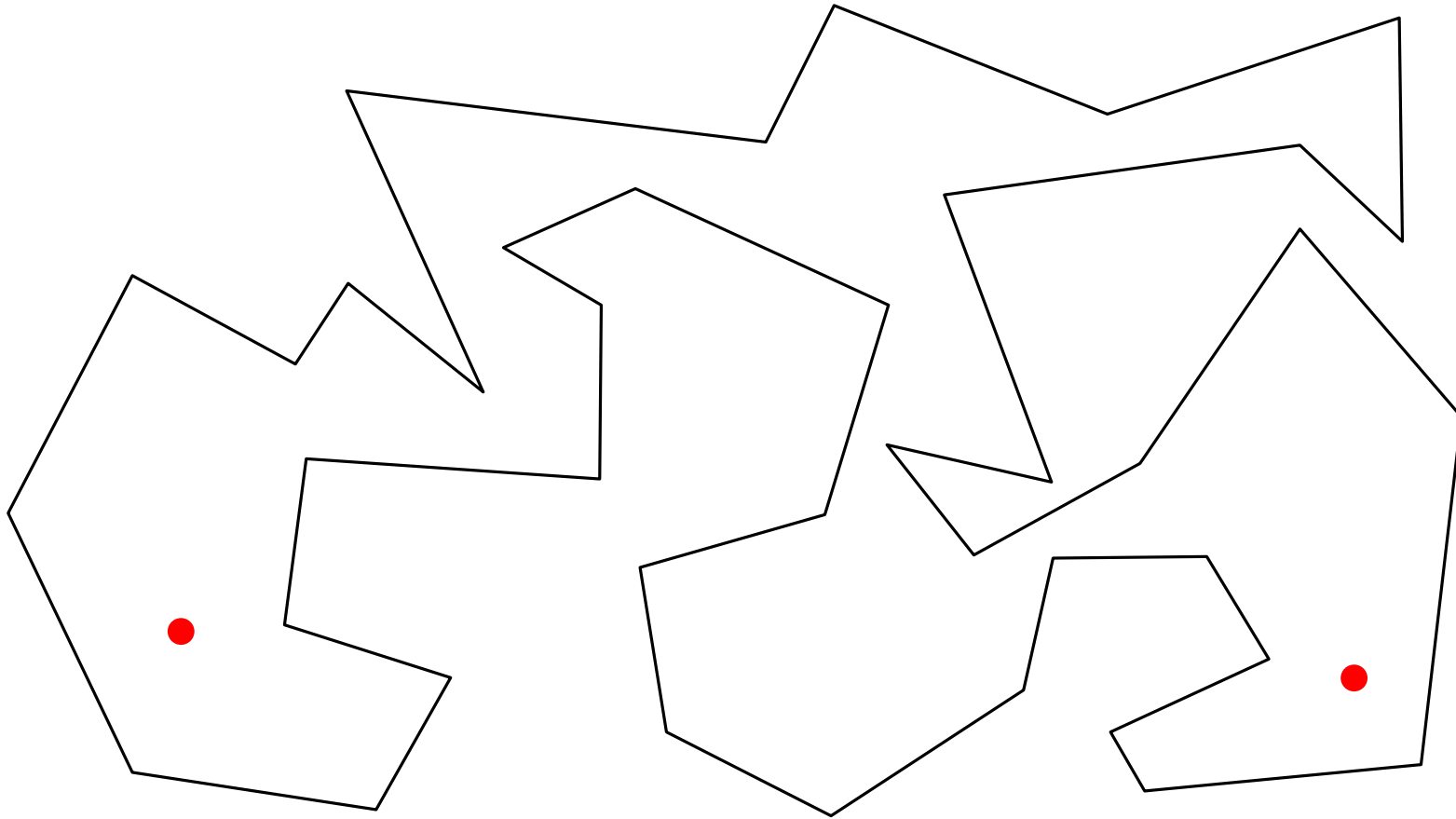
典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

赤点 に最も近い黒点はどれか？



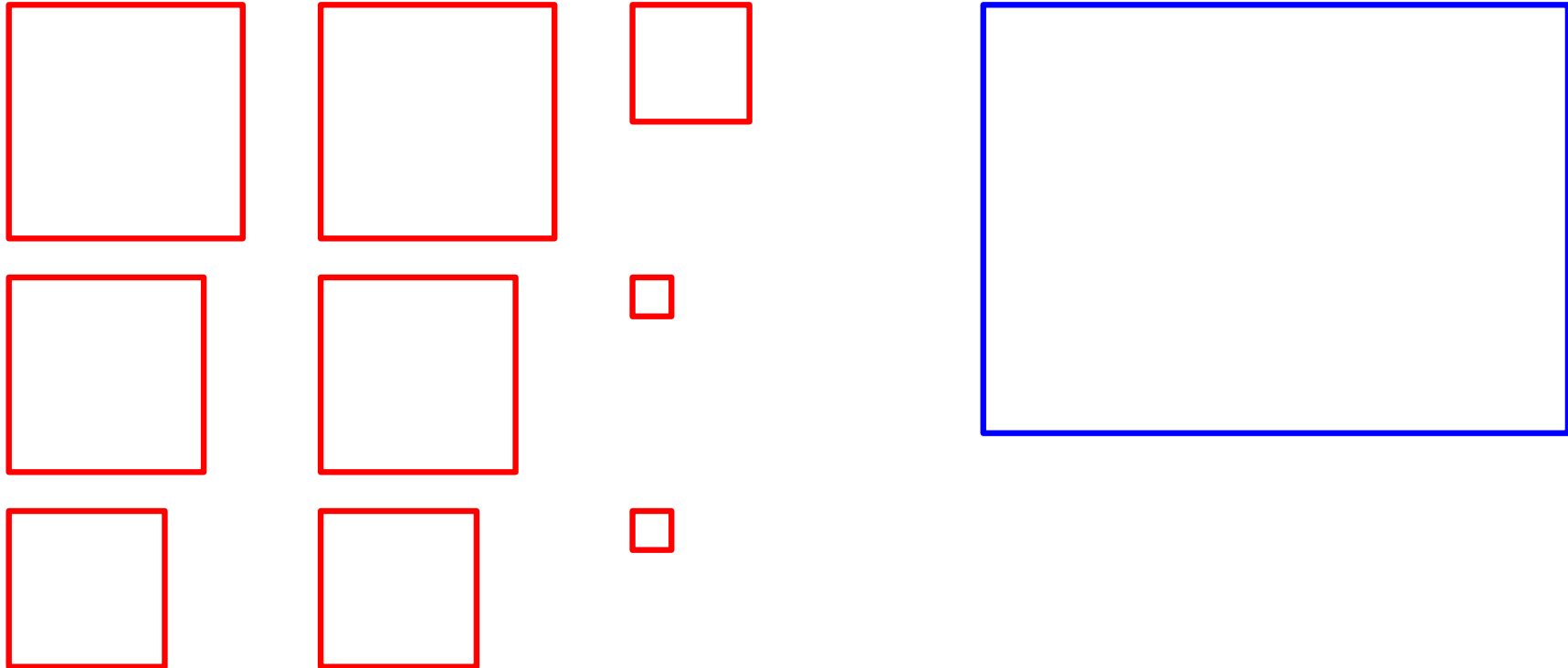
典型的な応用先：地理情報システム (GIS)

赤点の間の最短路は何か？



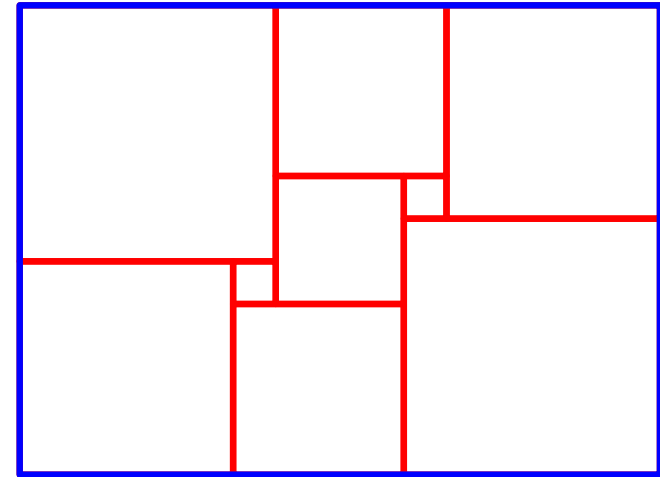
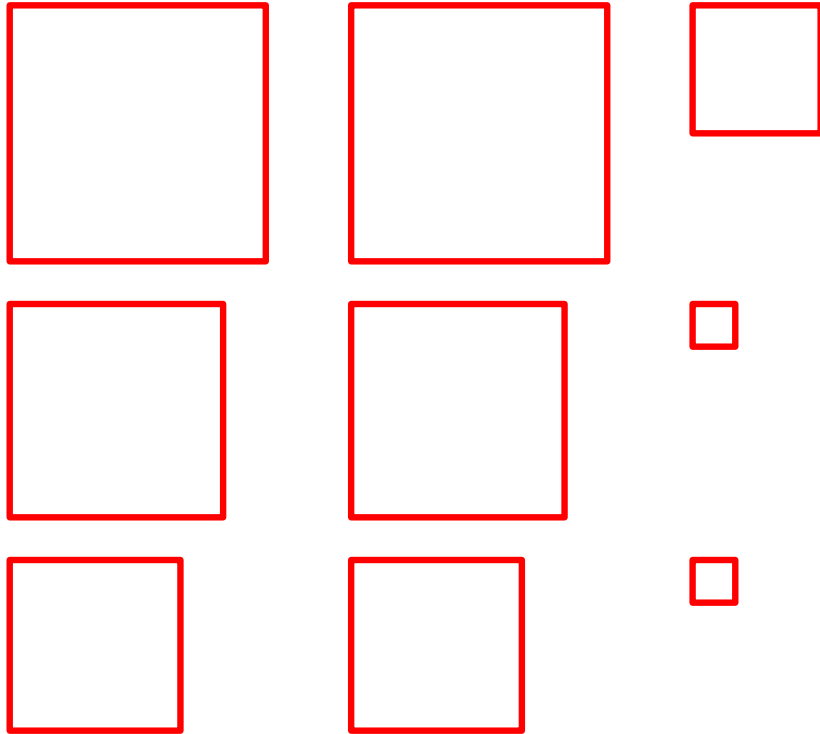
典型的な応用先：ロボット動作計画

左側の正方形を重なりなく右側の長方形に詰め込めるか？



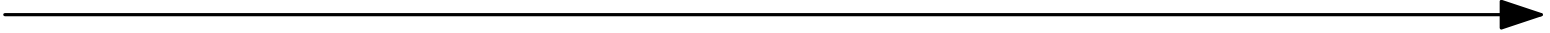
典型的な応用先：生産計画 (板取り問題)

左側の正方形を重なりなく右側の長方形に詰め込めるか？



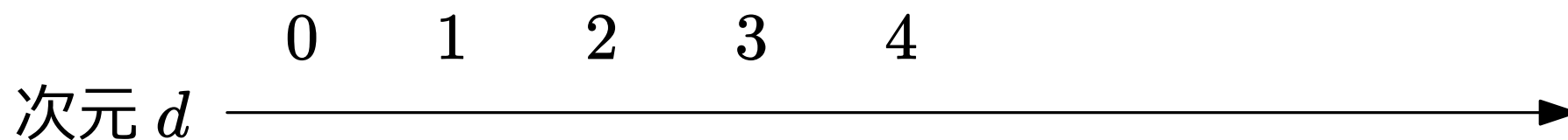
典型的な応用先：生産計画 (板取り問題)

考える空間は $\mathbb{R}^d$

次元 d 0 1 2 3 4 

(注：「次元数」とは言わない)

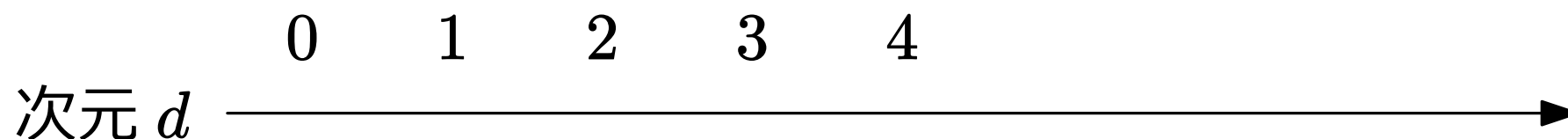
考える空間は $\mathbb{R}^d$



この授業では



考える空間は $\mathbb{R}^d$



この授業では



教訓

高次元 における現象は
低次元 における現象と大きく違うことがある

→ **次元の呪い** (curse of dimensionality)

高次元の直感を養う (1)

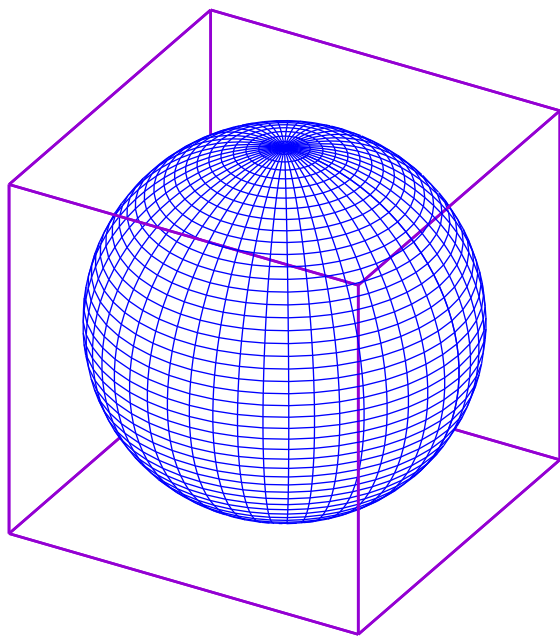
7/28

d 次元立方体 $= \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, d\}$

$$\text{体積} = 2^d$$

d 次元球体 $= \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\}$

$$\text{体積} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)}$$



$d = 3$ の図

高次元の直感を養う (1)

7/28

$$d \text{ 次元立方体} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, d\}$$

$$\text{体積} = 2^d$$

$$d \text{ 次元球体} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\}$$

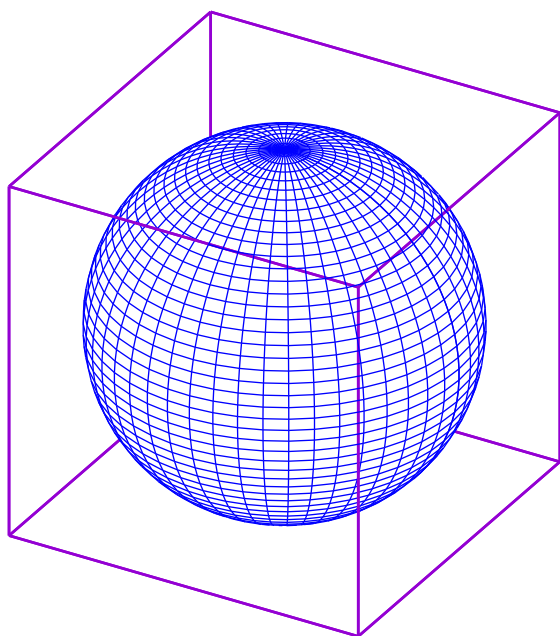
$$\text{体積} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)}$$

体積を V_d とすると

$$V_1 = 2$$

$$V_2 = \pi$$

$$V_d = \frac{2\pi}{d} V_{d-2} \quad (d \geq 3)$$



$d = 3$ の図

高次元の直感を養う (1)

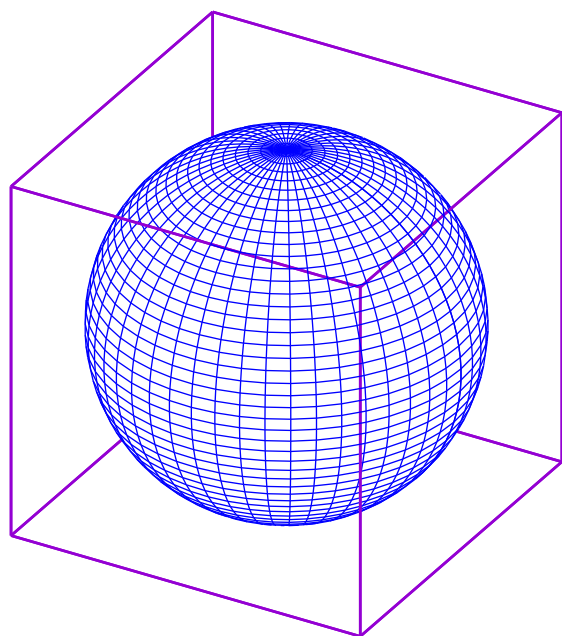
7/28

$$d \text{ 次元立方体} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, d\}$$

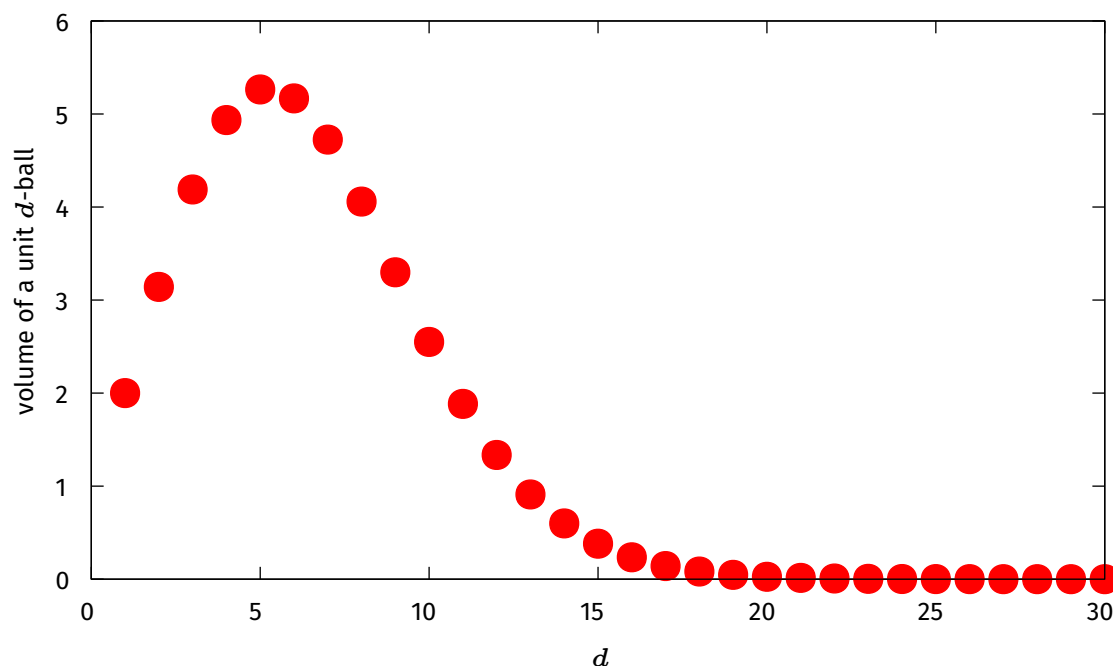
$$\text{体積} = 2^d$$

$$d \text{ 次元球体} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\}$$

$$\text{体積} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)}$$



$d = 3$ の図

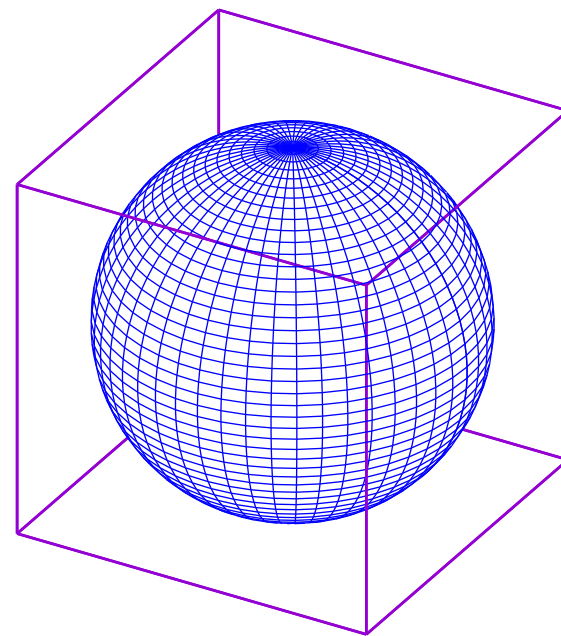


問題：次を行うプログラムを作りたい

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{30}^2 \leq 1$ を満たす $(x_1, x_2, \dots, x_{30})$ を
一様分布から抽出する

次のアルゴリズムはどうか？

1. 各 x_i を独立に $[-1, 1]$ 上の
一様分布から選ぶ
2. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{30}^2 \leq 1$ ならば
この $(x_1, x_2, \dots, x_{30})$ を出力
3. そうでなければ先頭に戻る

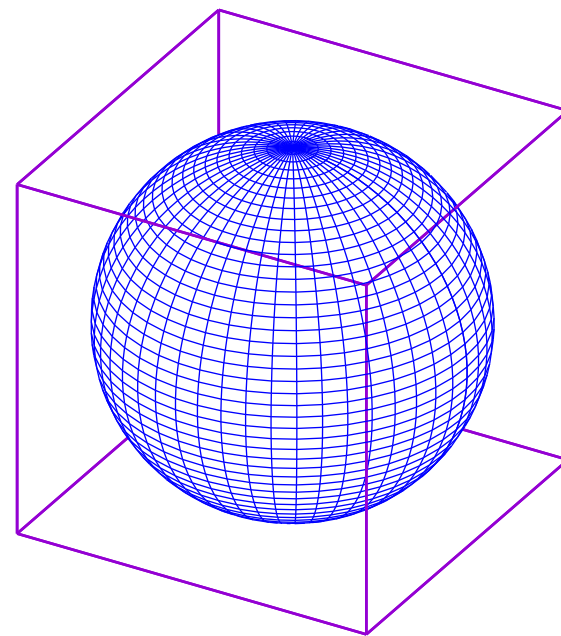


問題：次を行うプログラムを作りたい

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{30}^2 \leq 1$ を満たす $(x_1, x_2, \dots, x_{30})$ を
一様分布から抽出する

次のアルゴリズムはどうか？

1. 各 x_i を独立に $[-1, 1]$ 上の
一様分布から選ぶ
2. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{30}^2 \leq 1$ ならば
この $(x_1, x_2, \dots, x_{30})$ を出力
3. そうでなければ先頭に戻る



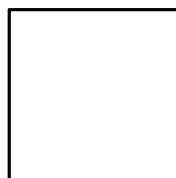
$$\text{反復回数の期待値} = \frac{30 \text{ 次元立方体の体積}}{30 \text{ 次元球体の体積}} \approx 4.9 \times 10^{23}$$

∴ 実用に耐えない！

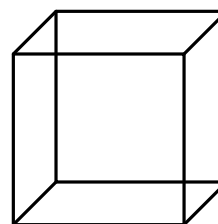
(補足：Box-Muller 法, Ziggurat 法)

d 次元凸多面体

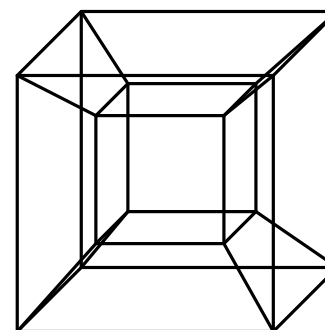
$d = 2$



$d = 3$



$d = 4$



d : 定数

頂点数 n のときの

面の総数

n

$O(n)$

典型的な応用先：線形計画法 (→「数理計画法」)

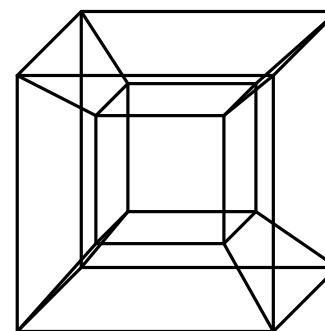
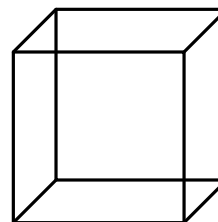
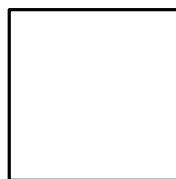
d 次元凸多面体

$d = 2$

$d = 3$

$d = 4$

d : 定数



頂点数 n のときの

面の総数

n

$O(n)$

$O(n^2)$

$O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$

典型的な応用先：線形計画法 ($\leadsto$ 「数理計画法」)

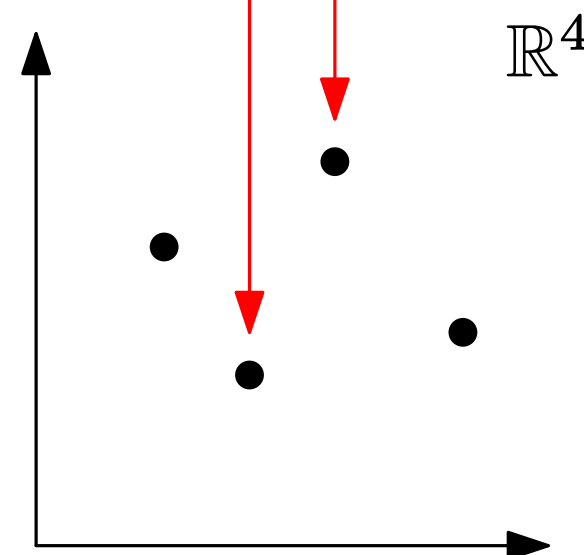
データサイエンスを離散幾何・計算幾何でとらえると

次元 $\approx$ 属性の総数

Fisher (1936) による アヤメのデータセット

	がくの長さ (cm)	がくの幅 (cm)	花弁の長さ (cm)	花弁の幅 (cm)	種
1	5.1	3.5	1.4	0.2	<i>I. setosa</i>
2	4.9	3.0	1.4	0.2	<i>I. setosa</i>
3	4.7	3.2	1.3	0.2	<i>I. setosa</i>
4	4.6	3.1	1.5	0.2	<i>I. setosa</i>
$\vdots$					
150	5.9	3.0	5.1	1.8	<i>I. virginica</i>

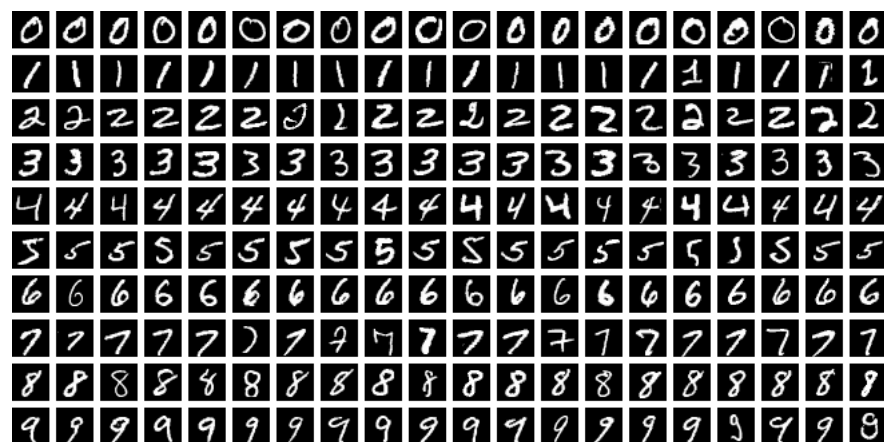
(3 種)



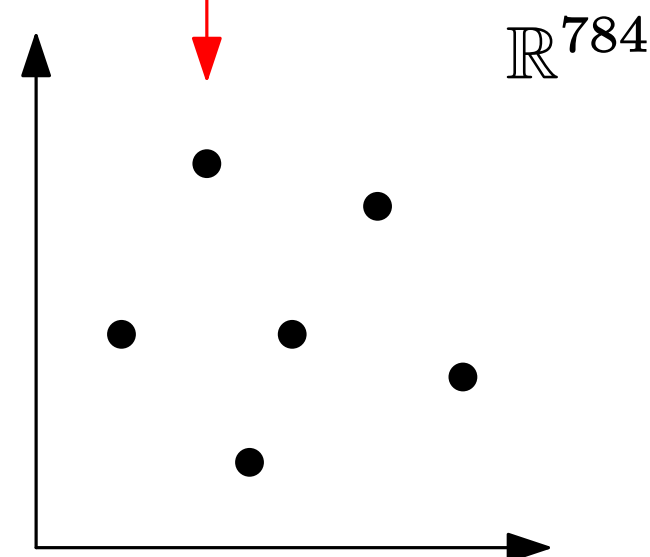
データサイエンスを離散幾何・計算幾何でとらえると

次元 $\approx$ 属性の総数

MNIST データベース (手書き文字認識)

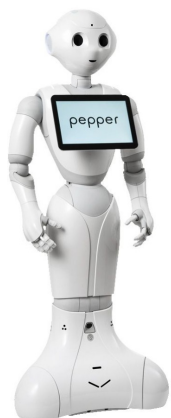


↑
28 × 28 ピクセル



ロボティクスを離散幾何・計算幾何でとらえると

次元 $\approx$ 自由度 (degrees of freedom, dof), パラメータ数



Pepper

(自由度 = 19)

ひとつの姿勢



$\mathbb{R}^{19}$

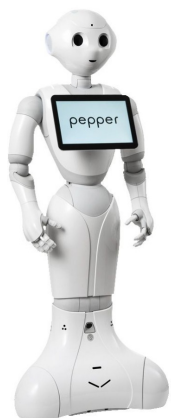


LOVOT

(自由度 = 13)

ロボティクスを離散幾何・計算幾何でとらえると

次元 $\approx$ 自由度 (degrees of freedom, dof), パラメータ数



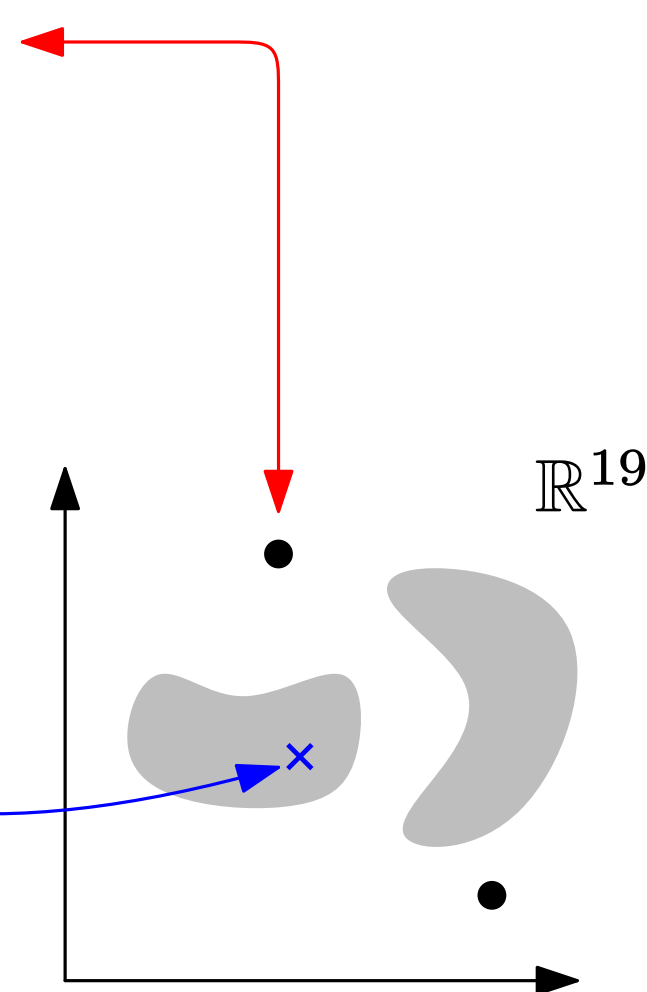
Pepper
(自由度 = 19)



LOVOT
(自由度 = 13)

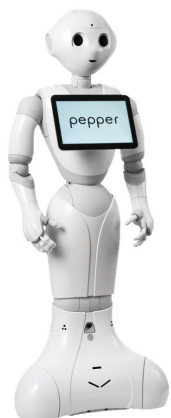
ひとつの姿勢

とれない姿勢



ロボティクスを離散幾何・計算幾何でとらえると

次元 $\approx$ 自由度 (degrees of freedom, dof), パラメータ数



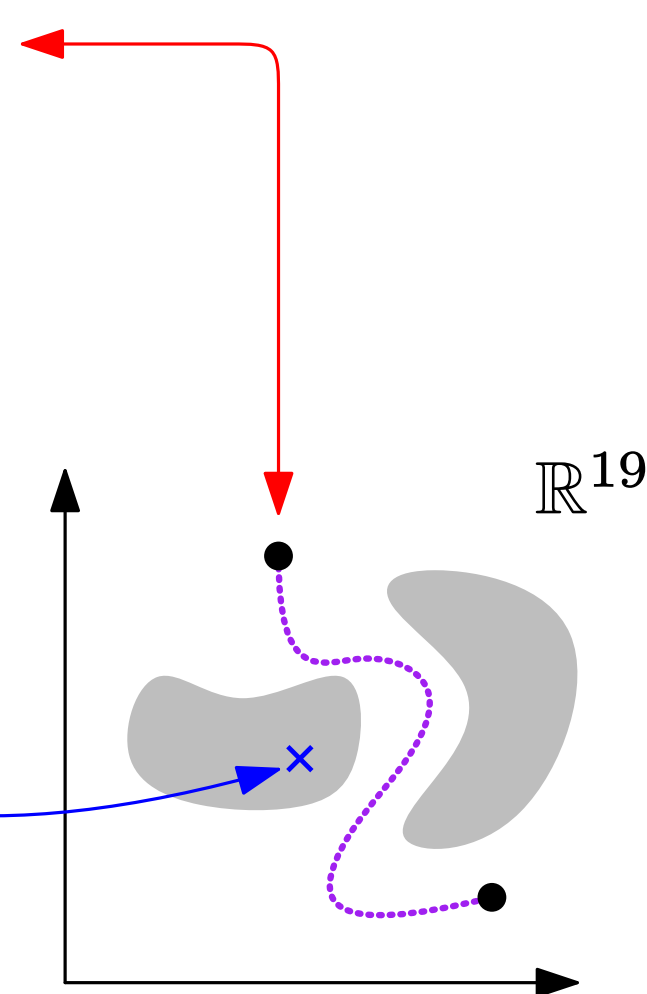
Pepper
(自由度 = 19)



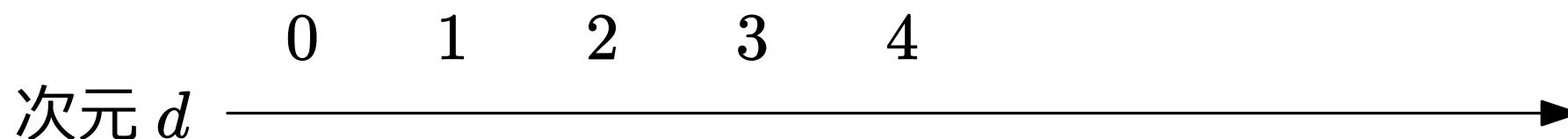
LOVOT
(自由度 = 13)

ひとつの姿勢

とれない姿勢



考える空間は $\mathbb{R}^d$



この授業では



教訓

1 次元の問題 = 数値列 (配列) の問題

→ 2 次元の問題 はその一般化

問題：区間領域計数問題

入力：数値の配列 $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$

問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：2つの数値 a, b
- 出力： A の中で, a 以上 b 以下の数値の総数

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	-2	6	7	10	-5	1	0	-6	4	12

問題：区間領域計数問題

入力：数値の配列 $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$

問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：2つの数値 a, b
- 出力： A の中で, a 以上 b 以下の数値の総数

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	-2	6	7	10	-5	1	0	-6	4	12

入力： $a = 1, b = 8$ $\leadsto$ 出力：5

問題：区間領域計数問題

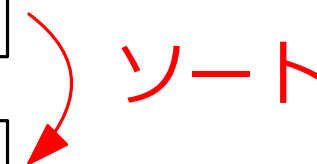
入力：数値の配列 $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$

問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：2つの数値 a, b
- 出力： A の中で, a 以上 b 以下の数値の総数

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	-2	6	7	10	-5	1	0	-6	4	12

A'	-6	-5	-2	0	1	3	4	6	7	10	12
------	----	----	----	---	---	---	---	---	---	----	----

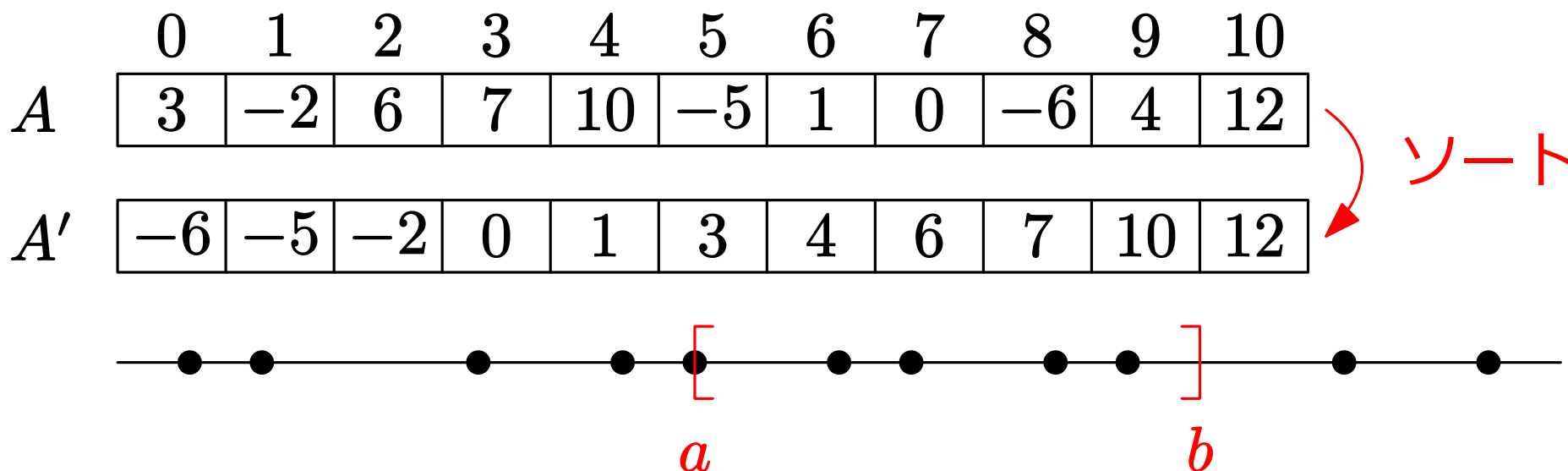


問題：区間領域計数問題

入力：数値の配列 $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$

問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：2つの数値 a, b
- 出力： A の中で, a 以上 b 以下の数値の総数

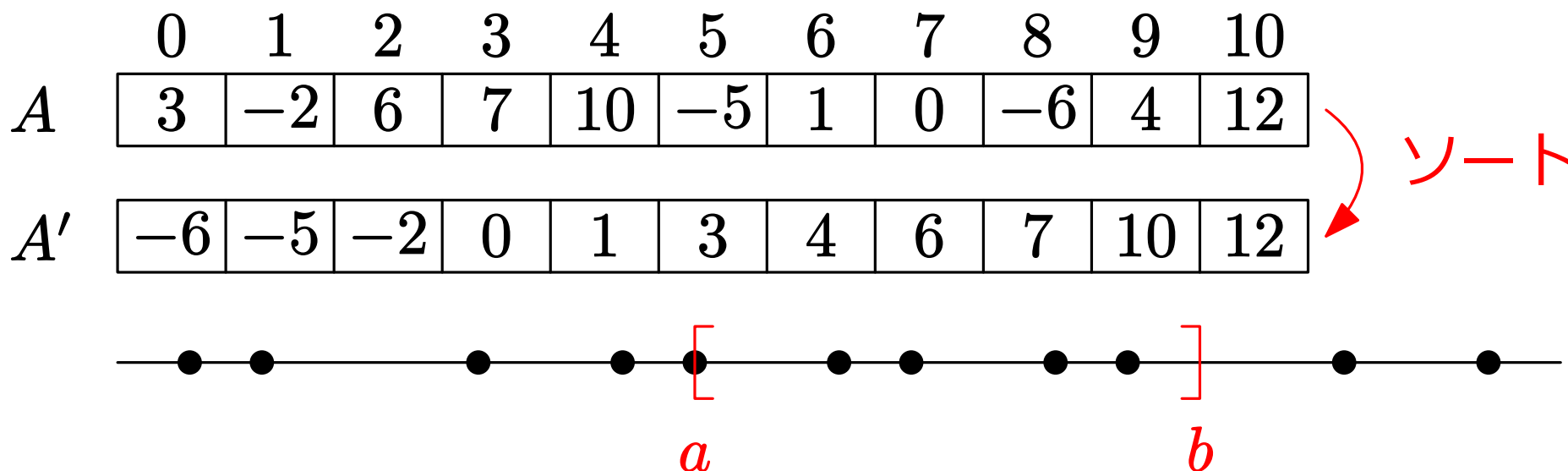


問題：区間領域計数問題

入力：数値の配列 $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$

問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：2つの数値 a, b
- 出力： A の中で, a 以上 b 以下の数値の総数



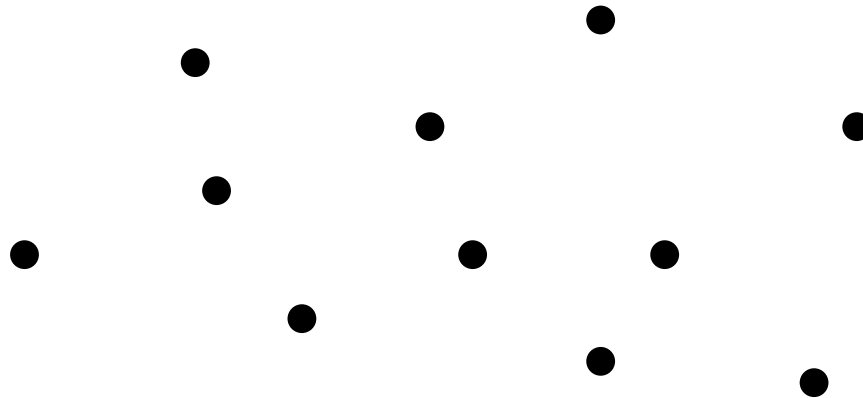
〜 前処理 $O(n \log n)$ 時間, 各クエリ $O(\log n)$ 時間

問題：三角形領域計数問題

入力：2次元の点の配列 $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$

問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：3つの点 a, b, c
- 出力： A の中で, $\triangle abc$ 内にある点の総数

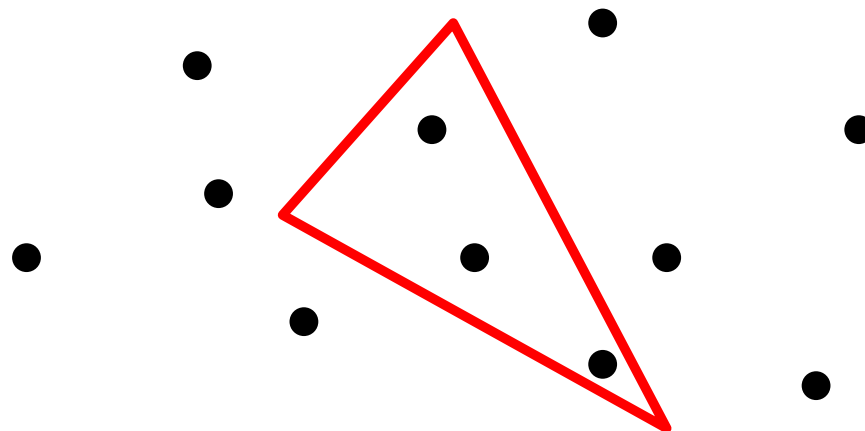


問題：三角形領域計数問題

入力：2次元の点の配列 $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$

問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：3つの点 a, b, c
- 出力： A の中で, $\triangle abc$ 内にある点の総数

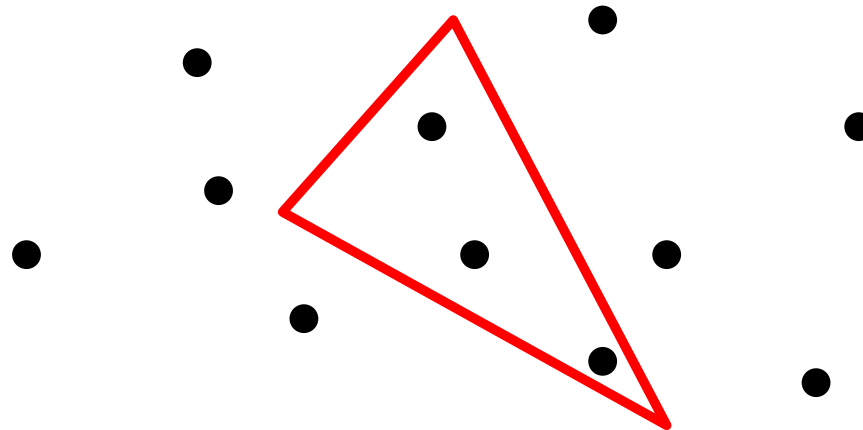


問題：三角形領域計数問題

入力：2次元の点の配列 $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$

問題：次の問合せに高速に答えよ

- 入力：3つの点 a, b, c
- 出力： A の中で, $\triangle abc$ 内にある点の総数

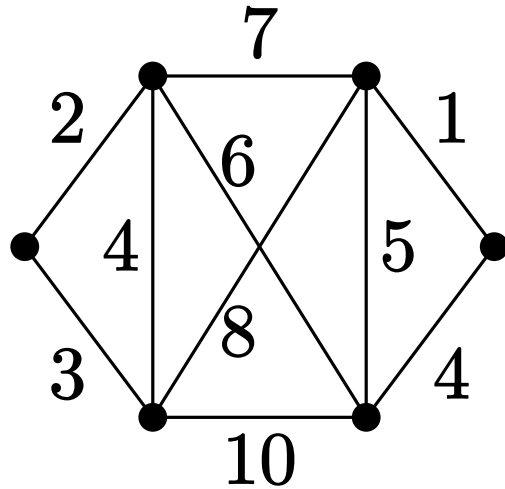


〜 前処理 $O(n \log n)$ 時間？, 各クエリ $O(\log n)$ 時間？

計算幾何のご利益

幾何情報を使うと、高速化できることがある

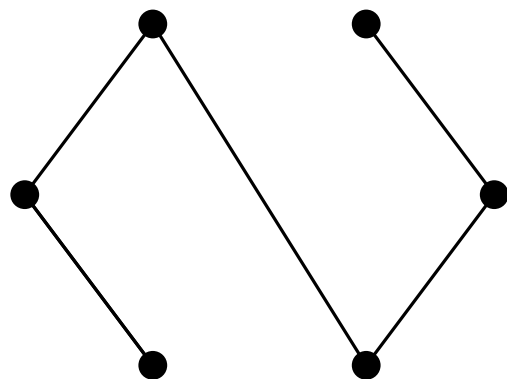
例：最小全域木



計算幾何のご利益

幾何情報を使うと、高速化できることがある

例：最小全域木 (頂点数 = n , 辺数 = m)



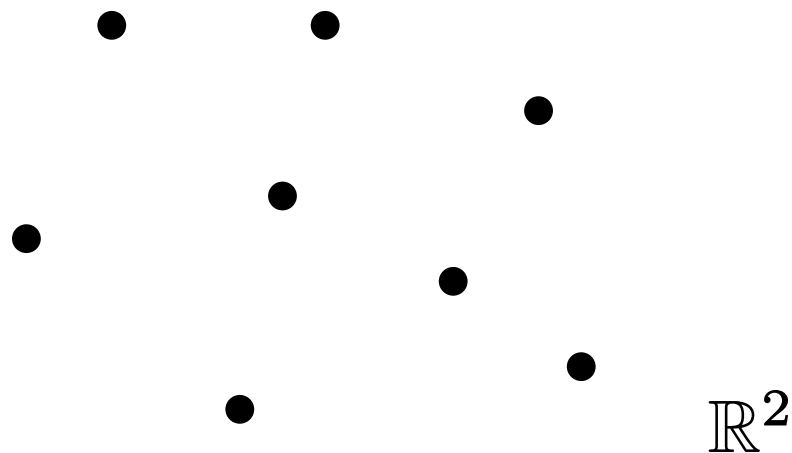
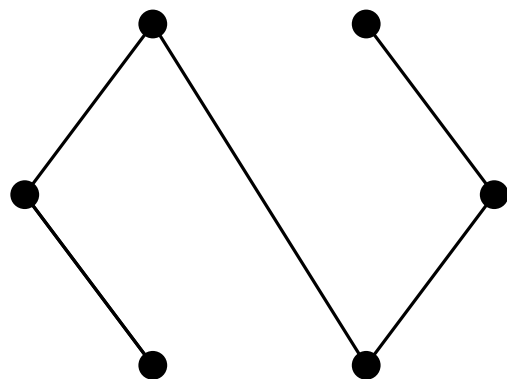
クラスカル法

$O(m \log n)$

計算幾何のご利益

幾何情報を使うと、高速化できることがある

例：最小全域木 (頂点数 = n , 辺数 = m)



辺長 = ユークリッド

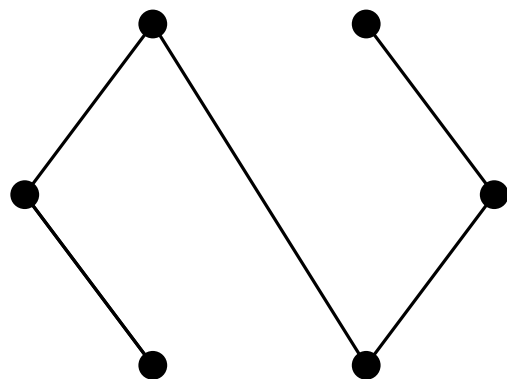
クラスカル法

$O(m \log n)$

計算幾何のご利益

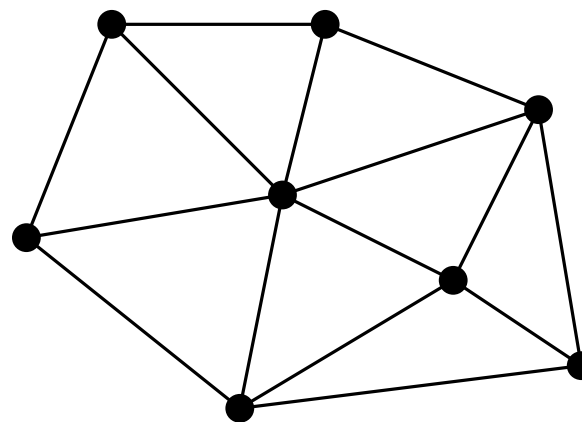
幾何情報を使うと、高速化できることがある

例：最小全域木 (頂点数 = n , 辺数 = m)



クラスカル法

$O(m \log n)$



$\mathbb{R}^2$

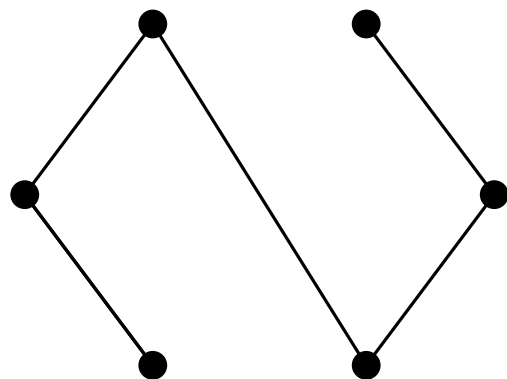
辺長 = ユークリッド

デローネ三角形分割

計算幾何のご利益

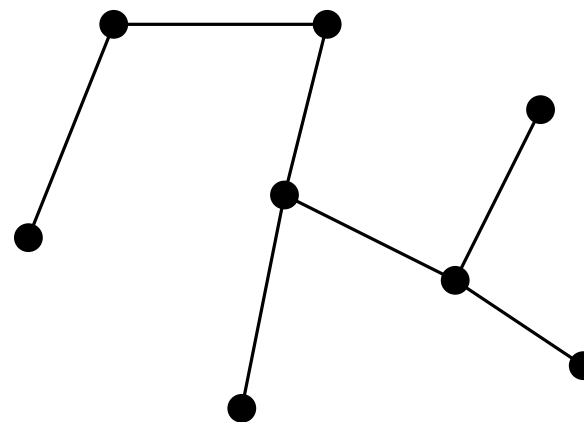
幾何情報を使うと、高速化できることがある

例：最小全域木 (頂点数 = n , 辺数 = m)



クラスカル法

$$O(m \log n)$$



$\mathbb{R}^2$

辺長 = ユークリッド

デローネ三角形分割

$$O(n \log n)$$

- | | |
|--------------------------|---------|
| 0. ガイダンス | (10/7) |
| * 休み (体育祭) | (10/14) |
| 1. 低次元 (1) : 多角形と三角形分割 | (10/21) |
| 2. 低次元 (2) : 点配置と直線配置 | (10/28) |
| 3. 低次元 (3) : 近接グラフと交差グラフ | (11/4) |
| 4. 低次元 (4) : 距離とボロノイ図 | (11/11) |
| 5. 低次元 (5) : 多角形内の距離 | (11/18) |
| 6. 低次元 (6) : 二次曲線と楕円 | (11/25) |
| * 休み (秋ターム試験) | (12/2) |
| ○ 中間試験 | (12/9) |

注 : この授業で **アルゴリズム**は扱わない

この授業では **アルゴリズムの背後にある数理**を扱う

- | | |
|---------------------------|---------|
| 7. 高次元 (1) : 高次元の物体の取り扱い方 | (12/16) |
| 8. 高次元 (2) : 凸集合と凸包 | (12/23) |
| * 休み (冬季休業) | (12/30) |
| 9. 高次元 (3) : 凸多面体の面構造 | (1/6) |
| 10. 高次元 (4) : 点配置と超平面配置 | (1/13) |
| 11. 高次元 (5) : 点配置と次元削減 | (1/20) |
| 12. 高次元 (6) : 距離とボロノイ図 | (1/27) |
| * 休み (修士論文発表会) | (2/3) |
| ○ 期末試験 | (2/10) |

注 : この授業で **アルゴリズム**は扱わない

この授業では **アルゴリズムの背後にある数理**を扱う

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室 : 西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail : okamotoy@uec.ac.jp
- Web : <http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/>

ティーチング・アシスタント (TA)

- 中村 優貴 (なかむら まこと)
- 居室 : 西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- <http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2025/dme/>
- 注意 : 資料の入手は各学生が自ら行う

各回の資料

- 講義動画 (YouTube)
- スライド
- 演習問題 ← 教室で参照できるように, 各自が準備
- 用語集
- * コメント

全回の資料

- 演習シート

授業時間まで

講義動画 (オンデマンド) を視聴する

- 質問・コメントを Classroom で投稿する
- 授業内演習問題の解答を準備しておく

授業時間中

リアルタイム対面授業に参加する

- 授業内演習問題に取り組む
- 質問・コメントを直接行う

授業時間の後

演習問題に取り組む

- 取り組み方は後述

演習問題の種類

- 授業内演習問題：教室で取り組む問題
- 復習問題：授業で取り上げた内容を反復する問題
- 補足問題：授業で省略した内容を補足する問題
- 追加問題：授業の内容に追加する問題
- * 発展問題：少し難しい(かもしれない) 問題

演習問題の進め方方

- 教室で取り組む 〜 演習シート
- 自習で取り組む 〜 レポート
- 注意：「模範解答」「想定解答」は存在しない

授業内演習の行い方

- ・ **グループで行うことを推奨する**
- ・ 授業内演習問題に取り組む
- ・ 演習シートに自分なりの解答を書く
- ・ 解けたら，教員・TA に解答を説明する
- ・ 解けなかったら，教員・TA にヒントを聞く
- ・ 10:30 頃に演習シートを提出して「授業内演習を完了」する
- ・ 授業内演習を完了すると，1 点が与えられる

注意

- ・ 9:20 までに入室しないといけない
 - － 鉄道遅延等による遅刻は申し出る
- ・ **学生証を持参し，提示する**ように準備する
- ・ 授業内演習の解答を事前に準備してきてもよい

レポートの提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出 **してもよい**
- 提出は教室 (紙) か Classroom (PDF ファイル) で行う
- レポートには提出締切がある
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて, 返却される
 - 返却された内容については, 再提出ができる

次の3つを総合して行う

- 中間試験 (50 点)
- 期末試験 (50 点)
- 毎回の演習問題 (計 12 点)

$$\text{成績} = \min\{100, \text{中間試験} + \text{期末試験} + \text{演習問題}\}$$

出題形式

- 演習問題と同じ形式の問題を **4 問** 出題する
- その中の 2 問は演習問題と **同一** である
(ただし,「発展」の演習問題は出題されない)
- 解答時間は 90 分である
- 全問に解答する
- **A4 用紙両面に自筆で書いたメモ** を持ち込める

前提知識

I 類の 2 年後学期までの必修授業の内容

特に、次のものは頻出する

- 離散数学
- 線形代数学
- 基礎的なプログラミング, アルゴリズム
- 論理的に文章を読み書きする能力

覚えている必要はない (忘れたときに思い出せるようにする)

購入する必要はない

- M. ドバーグ, O. チョン, M. ファンクリベルド, M. オーバーマーズ, 『コンピュータ・ジオメトリ (計算幾何学: アルゴリズムと応用) 第3版』, 2010 年, 近代科学社.
- 杉原厚吉, 『計算幾何学』, 朝倉書店, 2013 年.
- 福田公明, 森山園子, 『凸多面体と計算』, 共立出版, 2025 年.
- J. マトウシエク, 『離散幾何学講義』, 丸善出版, 2012 年.

他にも, 計算幾何, 離散幾何に関する書籍は参考になるかもしれない

授業内演習をグループで取り組む練習を行う

- 1グループの人数 = 3名から5名
- 相談の方法はグループにお任せ
- 教員とTAは、巡回してヒントなどを出す

注意：今日の授業内演習を完了しても1点にならない

質問・コメント投稿の練習を行う

- Classroom にコメント投稿フォームがある
- 内容はなんでもよいので、投稿してみる
 - 授業に関係のあることが思い浮かばなければ、雑談でよい