提出締切： 2026 年 2 月 3 日 午前 9:00

授業内問題 12.1 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \max\{|x_i| \mid i \in \{1, 2, \dots, d\}\}$$

とすることで，関数 $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を定める．

1. $d = 2$ のとき，ノルム $\|\cdot\|$ の単位球体を図示せよ．
2. 任意の整数 $d \geq 1$ に対して，関数 $\|\cdot\|$ がノルムであることを証明せよ．

復習問題 12.2 有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ のボロノイ図において，任意の点 $\boldsymbol{p} \in P$ のボロノイ領域 $V(\boldsymbol{p})$ は凸多面集合であることを証明せよ．

復習問題 12.3 放物面

$$U = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; x_{d+1} = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right\}$$

を考える．点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$ を x_{d+1} 軸の方向に持ち上げて，U 上に位置するようにすると，点

$$\boldsymbol{p}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \sum_{i=1}^{d} p_i^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

が得られる．

1. 点 $\boldsymbol{p}'$ における U の接超平面 $h_{\boldsymbol{p}}$ の方程式が
$$x_{d+1} = \sum_{i=1}^{d} (2p_i x_i - p_i^2)$$
であることを証明せよ．
2. 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ と $\boldsymbol{p}$ のユークリッド距離を d とするとき，$\boldsymbol{x}$ を U に持ち上げた点 $\boldsymbol{x}'$ と $h_{\boldsymbol{p}}$ の x_{d+1} 方向の距離が d^2 であることを証明せよ．

復習問題 12.4 ノルム $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して，関数 $\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ で定義する．このとき，μ が距離関数であることを証明せよ．

復習問題 12.5 ノルム $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して，その単位球体 B を

$$B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$$

で定義する．

1. B が凸集合であることを証明せよ．
2. B が中心対称であること，すなわち，$\boldsymbol{x} \in B$ ならば $-\boldsymbol{x} \in B$ であることを証明せよ．
3. B の線形包が $\mathbb{R}^d$ に等しいことを証明せよ．

復習問題 12.6 凸集合 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ が中心対称，有界，閉であり，かつ，その線形包が $\mathbb{R}^d$ に等しいとする．関数 $\|\cdot\|_C\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を

$$\|\boldsymbol{x}\|_C = \min\{t \geq 0 \mid \boldsymbol{x} \in tC\}$$

で定義する．このとき，$\|\cdot\|$ がノルムであることを証明せよ．なお，$tC = \{t\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in C\}$ である．(注意：C が有界，閉であり，その線形包が $\mathbb{R}^d$ に等しいことは，$\|\cdot\|_C$ の定義における min が存在することを保証するために付けられた条件である．)

補足問題 12.7 距離関数 $\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が，任意の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ に対して $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ を満たすことを証明せよ．

補足問題 12.8 ノルム $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が，任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ を満たすことを証明せよ．

補足問題 12.9 ノルム $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して，関数 $\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ で定義する．このとき，μ が次の 2 つの性質をともに満たすことを証明せよ．

1. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\mu(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.
2. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\mu(\alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = |\alpha|\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

補足問題 12.10 距離関数 $\mu\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が，距離の公理に加えて次の 2 つの性質も満たすとする．

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\mu(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\mu(\alpha\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = |\alpha|\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

このとき，関数 $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $\|\boldsymbol{x}\| = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ で定義すると，$\|\cdot\|$ はノルムであることを証明せよ．

補足問題 12.11 p, q は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす 1 以上の実数であり，a, b は非負実数であるとする．このとき，

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：xy 平面上で関数 $y = x^p$ のグラフを考えて，長方形 $[0, a] \times [0, b]$ の面積とそのグラフから得られる領域の面積を比較せよ．)

追加問題 12.12 関数 $\mu \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は次の 2 つの性質を満たすとする．

- $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
- $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

このとき，μ が距離関数であることを証明せよ．

追加問題 12.13 この問題の主旨は，L_p ノルムの単位球体が凸集合であること，つまり，L_p ノルムが確かにノルムであることを証明することである．なお，L_p ノルム $\|\cdot\|_p$ とは，

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

で定義され，その単位球体は

$$B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\boldsymbol{x}\|_p \leq 1\}$$

で定義される．p は 1 以上の実数である (整数である必要はない)．この問題の主旨は，L_p ノルムが確かにノルムであることを証明することであるので，L_p ノルムがノルムであるという性質を以下の証明で用いてはならない．

1. p, q は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす 1 以上の実数であるとき，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ に対して

   $$\sum_{i=1}^{d} |x_i||y_i| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \cdot \|\boldsymbol{y}\|_q$$

   が成り立つことを証明せよ．(ヒント：$a = \frac{|x_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$, $b = \frac{|y_i|}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$ として，演習問題 12.11 の結果を用いてみよ．) (補足：これは**ヘルダーの不等式**とよく呼ばれるものである．$p = q = 2$ の場合はコーシー・シュワルツの不等式に一致する．)
2. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B$ と $\lambda \in [0, 1]$ に対して，

   $$\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda) \boldsymbol{y} \in B$$

   が成り立つことを証明せよ．(ヒント：$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$ と変形してみよ．)