離散数理工学 (11) **2026 年 1 月 20 日**

演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2026 年 1 月 27 日 午前 9:00

今回の演習問題では，実対称行列について，以下に述べる性質を用いてもよい．

性質 1 実対称行列の固有値はどれも実数である．

性質 2 d 次実対称行列の固有ベクトルを使って，$\mathbb{R}^d$ の正規直交基底を構成できる．つまり，d 次実対称行列 A の固有値が $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d$ であるとき，$\boldsymbol{v}_i$ を λ_i に対応する固有ベクトルとして，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$ が $\mathbb{R}^d$ の正規直交基底となるようにできる．

授業内問題 11.1

実行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して，次の正方行列

$$Y = \begin{bmatrix} O & A \\ A^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$$

を考える．

1. Y が対称行列であることを証明せよ．
2. ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ と実数 λ が次を満たすとする．
$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u},$$
$$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{v}.$$
このとき，λ は Y の固有値であり，ベクトル
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}$$
が λ に対応する Y の固有ベクトルであることを証明せよ．
3. λ が Y の固有値であるとき，$-\lambda$ も Y の固有値であることを証明せよ．
4. 行列 $X = A^{\mathrm{T}}A$ の固有値・固有ベクトルを Y の固有値・固有ベクトルから得る方法を記述せよ．(ヒント：X は対称半正定値行列なので，その固有値は必ず非負実数である．)

復習問題 11.2 $\mathbb{R}^d$ における直線 ℓ が原点 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ を通るものとする．そのような直線 ℓ の単位方向ベクトルが $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$ であるとすると，ℓ は

$$\ell = \{\alpha \boldsymbol{u} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

と表すことができる．

点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ を ℓ へ直交射影で写して得られる点を $\boldsymbol{x}'$ とするとき，$\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}$ を用いて表してみよ．

復習問題 11.3 実対称半正定値行列 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ の最大固有値が λ_1 で，λ_1 に対応する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1$ とするとき，

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^d \\ \|\boldsymbol{u}\|=1}} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：「$=$」を証明するために，「$\geq$」と「$\leq$」を証明せよ．)

復習問題 (発展) 11.4 実対称半正定値行列 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ の最大固有値・第 2 最大固有値が λ_1, λ_2 で，λ_1, λ_2 に対応する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ とするとき (ただし，$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_2 = 0$)，

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in\mathbb{R}^d \\ \|\boldsymbol{u}_1\|=\|\boldsymbol{u}_2\|=1 \\ \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2=0}} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v}_2 = \lambda_1 + \lambda_2$$

が成り立つことを以下のステップに沿って証明せよ．

1. $\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v}_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ を証明せよ．
2. 次の不等式を証明せよ．
$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in\mathbb{R}^d \\ \|\boldsymbol{u}_1\|=\|\boldsymbol{u}_2\|=1 \\ \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2=0}} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}_2 \geq \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v}_2.$$
3. 逆向きの不等式を証明するために，$\|\boldsymbol{u}_1\| = \|\boldsymbol{u}_2\| = 1$ と $\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2 = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^d$ に対して
$$U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times}$$
と定義する．このとき，$U^{\mathrm{T}}U = E_2$ (つまり，2 次単位行列) であることを証明せよ．
4. 前小問の U を用いて，
$$\mathrm{tr}(U^{\mathrm{T}}AU) = \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}_2$$
が成り立つことを証明せよ．
5. 行列 A はある直交行列 $V \in \mathbb{R}^{d\times d}$ とある対角行列 $D \in \mathbb{R}^{d\times d}$ を用いて，$A = VDV^{\mathrm{T}}$ と対角化できる．ここで，D の第 i,i 成分は A の第 i 最大固有値 λ_i であるとする (そのようにできる)．行列 $Z \in \mathbb{R}^{d\times 2}$ を $Z = V^{\mathrm{T}}U$ で定義するとき，
$$\mathrm{tr}(U^{\mathrm{T}}AU) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i (z_{i1}^2 + z_{i2}^2)$$
が成り立つことを証明せよ．

6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{d}(z_{i1}^2 + z_{i2}^2) = 2$ が成り立つことを証明せよ．（ヒント：まず，$Z^{\mathrm{T}}Z = E_2$ を証明して，$\mathrm{tr}(Z^{\mathrm{T}}Z)$ を考えてみよ．）
7. 各 $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ に対して，
$$0 \le z_{i1}^2 + z_{i2}^2 \le 1$$
が成り立つことを次の方針に従って証明せよ．
   (a) $z_{i1}^2 + z_{i2}^2$ が ZZ^{T} の第 i, i 成分であることを証明せよ．
   (b) $P = UU^{\mathrm{T}}$ とする．P が次の性質を満たすことを証明せよ．
   $$P^{\mathrm{T}} = P, \quad P^2 = P.$$
   (c) P の固有値が 0 か 1 であることを証明せよ．
   (d) ZZ^{T} の固有値が 0 か 1 であることを証明せよ．(ヒント：P の固有多項式と ZZ^{T} の固有多項式が一致することを証明せよ．）
   (e) 任意の単位ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して，
   $$0 \le \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(ZZ^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} \le 1$$
   が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 11.5 の結果を用いてもよい．）
   (f) 以上の結論として，$0 \le z_{i1}^2 + z_{i2}^2 \le 1$ を導出せよ．
8. いままでの議論をまとめて，不等式
$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^d \\ \|\boldsymbol{u}_1\| = \|\boldsymbol{u}_2\| = 1 \\ \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2 = 0}} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{u}_2 \le \lambda_1 + \lambda_2$$
が成り立つことを証明せよ．

補足問題 11.5　実対称行列 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ の最大固有値を λ_1，最小固有値を λ_d とするとき，
$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d - \{\boldsymbol{0}\}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}},$$
$$\lambda_d = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d - \{\boldsymbol{0}\}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$
が成り立つことを証明せよ．

補足問題 11.6　実対称行列 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ の第 2 最大固有値を λ_2 とするとき，
$$\lambda_2 = \max_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d - \{\boldsymbol{0}\} \\ \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$
が成り立つことを証明せよ．ただし，$\boldsymbol{v}_1$ は最大固有値に対応する A の固有ベクトルである．(ヒント：$\{\boldsymbol{v}_1\}$ の直交補空間の基底として，$\{\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$ が取れることを利用せよ．）

追加問題 11.7　$\mathbb{R}^d$ における直線 ℓ が点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$ を通るものとする．そのような直線 ℓ の単位方向ベクトルが $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$ であるとすると，ℓ は
$$\ell = \{t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{p} \mid t \in \mathbb{R}\}$$
と表すことができる．

1. 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ を ℓ へ直交射影で写して得られる点を $\boldsymbol{x}'$ とする．$\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}$ を用いて表してみよ．
2. n 個の点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ のそれぞれと ℓ の距離の 2 乗の和を最小化するような ℓ を定めたい．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が
$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$$
を満たすとき，ℓ が原点 $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^d$ を通ることを証明せよ．