提出締切： 2026 年 1 月 20 日 午前 9:00

授業内問題 10.1 整数 n, d は $n \geq d+1 \geq 3$ を満たすとする．$\mathbb{R}^d$ におけるモーメント曲線とは，関数 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $\gamma(t) = [t, t^2, \dots, t^d]^{\mathrm{T}}$ を使って

$$\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^d \mid t \in \mathbb{R}\}$$

と定義される曲線である．n 個の実数 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ に対して，凸多面体 P を

$$P = \mathrm{CH}(\{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_n)\})$$

で定義する．このように構成された凸多面体 P を頂点数 n の d 次元巡回多面体と呼ぶ．

演習問題 10.2 で説明される偶数性条件を考える．

1. $d = 2$ のとき，偶数性条件を満たす添字部分集合 I をすべて挙げ，その総数が n になることを証明せよ．
2. $d = 3$ のとき，偶数性条件を満たす添字部分集合 I をすべて挙げ，その総数が $2n-4$ になることを証明せよ．

復習問題 (発展) 10.2 整数 n, d は $n \geq d+1 \geq 3$ を満たすとする．P を頂点数 n の d 次元巡回多面体とする (定義は演習問題 10.1 にある)．$I = \{i_1, i_2, \dots, i_d\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ に対して，

$$F_I = P \cap \mathrm{aff}(\{\gamma(t_i) \mid i \in I\})$$

とする．ただし，aff はアフィン包を表すとする．

F_I が P のファセットであるとき，そのときに限り，次の偶数性条件が成り立つことを証明せよ．

> [偶数性条件] 任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\} - I$ に対して，$i < k < j$ を満たす $k \in I$ の数が偶数である．

(ヒント：前回の演習問題 9.4，9.5，9.6 の結果を用いてもよい．)

復習問題 10.3 $\mathbb{R}^d$ における超平面配置

$$\mathcal{A} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$$

を考える．つまり，各 h_i が $\mathbb{R}^d$ における超平面である．このとき，$\mathcal{A}$ のセル数が

$$\sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$$

以下であることを証明せよ．

補足問題 10.4

1. 整数 n, d は $n \geq d+1$ と $d \geq 4$ を満たすとする．頂点数 n の d 次元巡回多面体のファセット数が
$$\binom{n - \lceil d/2 \rceil}{\lfloor d/2 \rfloor}$$
以上であることを証明せよ．(ヒント：演習問題 10.2 を用いる．)
2. 整数 a, b が $a \geq b \geq 1$ を満たすとする．このとき，
$$\binom{a}{b} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b$$
が成り立つことを証明せよ．
3. d が定数であるとき，
$$\binom{n - \lceil d/2 \rceil}{\lfloor d/2 \rfloor}$$
のオーダーが $n^{\lfloor d/2 \rfloor}$ 以上となることを証明せよ．

補足問題 (発展) 10.5 整数 n, d は $n \geq d+1$ と $d \geq 4$ を満たすとする．頂点数 n の d 次元巡回多面体における辺の数が $\binom{n}{2}$ であることを証明せよ．(ヒント：演習問題 10.2 を用いる．)

補足問題 10.6 点 $p \in \mathbb{R}^d$ と x_d 軸と交わる超平面 $h \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，次が成り立つことを証明せよ．ただし，p^* は p の双対，h^* は h の双対を表すものとする．

1. $p^{**} = p$.
2. $h^{**} = h$.
3. $p \in h \Leftrightarrow h^* \in p^*$.
4. p が h の上側にある $\Leftrightarrow$ h^* が p^* の上側にある．

追加問題 10.7 演習問題 10.1.2 の結果を用いて，頂点数 n の 3 次元巡回多面体 P の 2 頂点 $\gamma(t_i), \gamma(t_j)$ を結ぶ線分が P の辺を成すための i, j の必要十分条件を与えよ．その結果として，P の辺の数が $3n-6$ であることを導いてみよ．

追加問題 10.8 $\mathbb{R}^d$ における超平面配置

$$\mathcal{A} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$$

を考える．このとき，$\mathcal{A}$ の頂点数が n^d 以下であることを証明せよ．(ヒント：演習問題 10.3 の論法は役立たないかもしれない．それに代えて，頂点に対応する符号ベクトルを考えてみよ．)