離散数理工学 (9) **2026 年 1 月 6 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2026 年 1 月 13 日 午前 9:00

授業内問題 9.1 次の頂点記述で表される凸多面体 P を考える．

$$P = \mathrm{CH}(\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_9\}) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

ただし，

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_5 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_6 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{p}_7 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_8 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_9 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

とする．

1. 凸多面体 P の次元が 4 であることを証明せよ．
2. 集合 W を次のように定める．

$$W = \{\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_5, \boldsymbol{p}_6, \boldsymbol{p}_8\}.$$

このとき，$P \cap \mathrm{aff}(W)$ が P のファセットであることを証明せよ．ただし，$\mathrm{aff}(W)$ は W のアフィン包を表す．

復習問題 9.2 次の超平面記述で定義される d 次元凸多面体 P を考える．

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid -1 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, d\}\}.$$

次に挙げる 2 つの点 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \mathbb{R}^d$ が P の頂点であることを証明せよ．

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}' = \begin{bmatrix}-1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

復習問題 9.3 次の頂点記述で定義される d 次元凸多面体 P を考える．

$$P = \mathrm{CH}\left(\left\{\sum_{i=1}^{d} (-1)^{s_i} \boldsymbol{e}_i \mid s_i \in \{0, 1\} \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, d\}\right\}\right).$$

次に挙げる $W \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，$P \cap \mathrm{aff}(W)$ が P のファセットであることを証明せよ．

$$W = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\-1\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\\vdots\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

ただし，$\mathrm{aff}(W)$ は W のアフィン包を表す．

復習問題 9.4 整数 $d \ge 2$ に対して，$\mathbb{R}^d$ におけるモーメント曲線とは，関数 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$，$\gamma(t) = [t, t^2, \ldots, t^d]^{\mathrm{T}}$ を使って

$$\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^d \mid t \in \mathbb{R}\}$$

と定義される曲線である．

1. モーメント曲線と超平面の交わりは高々 d 個の点であることを証明せよ．
2. モーメント曲線と超平面の交わりがちょうど d 個の点であるとき，その交わりにおいて，超平面とモーメント曲線は接していないことを証明せよ．

復習問題 9.5 $d \ge 2$，$n \ge d+1$ とする．頂点数 n の d 次元巡回多面体の次元は d であることを証明せよ．（ヒント：演習問題 9.6 の結果を用いてもよい．）

補足問題 9.6 実数 $t_1, t_2, \ldots, t_{d+1} \in \mathbb{R}$ に対して，

$$V = \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{d+1}\\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_{d+1}^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_1^d & t_2^d & \cdots & t_{d+1}^d\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$$

として行列 V を定義する．

その行列式 $\det V$ に対して

$$\det V = \prod_{1 \le i < j \le d+1} (t_j - t_i)$$

が成り立つことを証明せよ．例えば，$d = 2$ の場合，

$$V = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ t_1 & t_2 & t_3\\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2\end{bmatrix}$$

であり，

$$\det V = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)$$

である．（ヒント；掃き出し法と数学的帰納法を組み合わせてみよ．）

追加問題 9.7 次の超平面記述で表される凸多面体 P を考える．

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} -x_1 \leq 0, \\ -x_2 \leq 0, \\ -x_3 \leq 0, \\ -x_4 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_3 + x_4 \leq 1 \end{array} \right\}$$

1. 次の点 $\boldsymbol{v}$ が P の頂点であることを証明せよ．

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. 次の点 $\boldsymbol{v}'$ が P の頂点ではないことを証明せよ．

$$\boldsymbol{v}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$