提出締切： 2026 年 1 月 6 日 午前 9:00

授業内問題 8.1 4 点

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-4\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\\-1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

はアフィン従属である．なぜか.

授業内問題 8.2 3 次元立方体は点集合

$$P=\left\{\begin{bmatrix}\pm1\\\pm1\\\pm1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\text{複号任意}\right\}$$

の凸包である．点

$$\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}1/3\\-1/2\\-1/3\end{bmatrix}$$

を P の中の 4 つの点の凸結合として表せ.

復習問題 8.3 凸集合 $X\subseteq\mathbb{R}^d$，行列 $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$，ベクトル $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^d$ に対して,

$$X'=\{A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^d\mid\boldsymbol{x}\in X\}$$

が凸集合であることを証明せよ.

復習問題 8.4 正則な実対称行列 $M\in\mathbb{R}^{d\times d}$ に対して，次の 3 つの条件が同値であることを証明せよ.

1. ある正則行列 $C\in\mathbb{R}^{d\times d}$ が存在して，$M=C^{\mathrm{T}}C$ である.
2. M の固有値はすべて正である.
3. 任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d-\{\boldsymbol{0}\}$ に対して，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{x}>0$ が成り立つ.

ヒント：演習問題 8.12 の結果を用いてもよい.

復習問題 8.5 次の 4 点

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$$

がアフィン独立であることを証明せよ.

復習問題 8.6 ベクトル $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^d-\{\boldsymbol{0}\}$ と実数 $b\in\mathbb{R}$ によって定義される超平面 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\mid\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=b\}$ を考える．$d+1$ 個の点 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\dots,\boldsymbol{p}_{d+1}$ がこの超平面の上にあるとき，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\dots,\boldsymbol{p}_{d+1}$ はアフィン従属であることを証明せよ.

補足問題 8.7 点 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\dots,\boldsymbol{p}_m\in\mathbb{R}^d$ がアフィン独立であるとき，そのときに限り，ベクトル

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_2\\1\end{bmatrix},\dots\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_m\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{d+1}$$

が線形独立であることを証明せよ.

補足問題 8.8 有限点集合 $P=\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\dots,\boldsymbol{p}_m\}\subseteq\mathbb{R}^d$ の凸包とは,

$$\mathrm{CH}(P)=\left\{\sum_{i=1}^m\lambda_i\boldsymbol{p}_i\;\middle|\;\begin{array}{l}\lambda_i\geq0,i\in\{1,2,\dots,m\},\\\sum_{i=1}^m\lambda_i=1\end{array}\right\}$$

として定義される集合である．凸包 $\mathrm{CH}(P)$ が凸集合であることを証明せよ.

追加問題 8.9 $\mathbb{R}^2$ における単位円板

$$\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x_1^2+x_2^2\leq1\right\}$$

を無限個の半平面の共通部分として表せ．(注：「無限個」という言い回しを本来使うべきではない．ここでは「用いる半平面の数が有限ではない」という意味であると理解してもらいたい．)

追加問題 8.10 有限点集合 $P\subseteq\mathbb{R}^d$ の要素はアフィン従属であるとする．このとき，P の分割 A,B (すなわち，$P=A\cup B$ かつ $A\cap B=\emptyset$ を満たす A,B) で,

$$\mathrm{CH}(A)\cap\mathrm{CH}(B)\neq\emptyset$$

を満たすものが存在することを証明せよ.

[次ページに続く]

復習問題 (発展) 8.11 $m \geq d+1$ とする．点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$ が $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m \in \mathbb{R}^d$ の凸結合であるとき，ある $d+1$ 個の添え字 $i_1, \ldots, i_{d+1}$ が存在して，$\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{i_{d+1}}$ の凸結合であることを証明せよ．

補足問題 (発展) 8.12 実対称行列 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ に対して，以下の問いに答えよ．なお，A の固有値がすべて実数であることは正しいと認めて議論してよい (実際に正しい)．

1. λ, λ' が A の異なる固有値であるとき，それらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ が直交することを証明せよ．
2. λ が A の固有値であり，その重複度が m であるとする．このとき，λ に対応する A の固有空間 $W(\lambda)$ の次元が m であることを，次の方針に沿って証明せよ．なお，λ に対応する A の固有空間 $W(\lambda)$ とは，λ に対応する固有ベクトル全体と $\mathbf{0}$ から成る集合で，これは $\mathbb{R}^d$ の線形部分空間である．
   (a) $W(\lambda)$ の次元を m' とする．目標は $m' = m$ を証明することである．
   $W(\lambda)$ の直交補空間 $W(\lambda)^\perp$ を考える．つまり，
   $$W(\lambda)^\perp = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0 \ \forall\, \boldsymbol{x} \in W(\lambda)\}$$
   である．任意の $\boldsymbol{y} \in W(\lambda)^\perp$ に対して，$A\boldsymbol{y} \in W(\lambda)^\perp$ が成り立つことを証明せよ．
   (b) $W(\lambda)$ の次元が m' なので，直交補空間 $W(\lambda)^\perp$ の次元は $d - m'$ である．$W(\lambda)$ の正規直交基底の 1 つを $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m'}\}$，$W(\lambda)^\perp$ の正規直交基底の 1 つを $\{\boldsymbol{v}_{m'+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$ とすると，これらを合わせた集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m'}, \boldsymbol{v}_{m'+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$ は $\mathbb{R}^d$ の正規直交基底である．行列 P を
   $$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_d \end{bmatrix}$$
   で定義する．このとき，P は正則行列である．
   行列 $B = P^{-1}AP$ は次のようなブロック構造
   $$B = \begin{bmatrix} \lambda E_{m'} & O \\ O & B_{22} \end{bmatrix}$$
   を持つことを証明せよ．ただし，$E_{m'}$ は m' 次単位行列であり，$B_{22} \in \mathbb{R}^{(d-m') \times (d-m')}$ である．(ヒント：まず，$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ であることを確認せよ．)
   (c) 上の B の固有方程式と A の固有方程式が同一であることを証明せよ．
   (d) B の固有方程式を用いて，A の固有方程式における根 λ の重複度 m が m' 以上であることを証明せよ．
   (e) A の固有方程式における根 λ の重複度が m' に等しいことと，λ が B_{22} の固有値ではないことが同値であることを証明せよ．
   (f) λ が B_{22} の固有値ではないことを証明せよ．(ヒント：背理法のために，λ が B_{22} の固有値であると仮定し，$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{d-m'}$ が λ に対応する B_{22} の固有ベクトルであるとする．このとき，$\boldsymbol{z} = P\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d$ でベクトル $\boldsymbol{z}$ を定義して，$\boldsymbol{z} \in W(\lambda)^\perp$ と $A\boldsymbol{z} \in W(\lambda)$ を示し，矛盾を導いてみよ．)
   (g) ここまでの議論をまとめて，$m = m'$ を導出せよ．
3. ある直交行列 P と対角行列 D が存在して，D の対角成分は A の固有値であり，$A = PDP^{\mathrm{T}}$ が成り立つようにできることを証明せよ．(ヒント：P として A の固有ベクトルをうまく取り，並べたものを考えよ．)