離散数理工学 (7) **2025 年 12 月 16 日**

演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2025 年 12 月 23 日 午前 9:00

授業内問題 7.1 集合 $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ が凸であるとき，それらの共通部分 $X \cap Y$ も凸であることを証明せよ．

授業内問題 7.2 $\mathbb{R}^3$ における 3 つの点

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

に対して，集合 $P = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ のアフィン包 $\mathrm{aff}(P)$ を考える．

1. $\mathrm{aff}(P)$ の次元を求めよ．
2. 小問 1 で求めた次元を k とする．ある行列 $A \in \mathbb{R}^{(3-k)\times 3}$ とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{3-k}$ を用いて，$\mathrm{aff}(P) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ という形で $\mathrm{aff}(P)$ を記述せよ．

復習問題 7.3 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

を用いて，$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ と書ける $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間 X を考える．この X の次元と X の基底を 1 つ答えよ．

復習問題 7.4 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

を用いて，$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ と書ける $\mathbb{R}^5$ の線形部分空間 X を考える．この X の次元と X の基底を 1 つ答えよ．

復習問題 7.5 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

とベクトル

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

を用いて，$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ と書ける $\mathbb{R}^3$ のアフィン部分空間 X を考える．

1. X の次元を答えよ．
2. X を「ある線形部分空間 W をベクトル $\boldsymbol{t}$ だけ平行移動させたもの」として書くとする．この記述に当てはまる W と $\boldsymbol{t}$ を 1 組答えよ．ただし，W はその基底の線形包として表すこと．

復習問題 7.6 $\mathbb{R}^3$ における 4 つの点

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して，集合 $P = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4\}$ のアフィン包 $\mathrm{aff}(P)$ を考える．

1. $\mathrm{aff}(P)$ の次元を求めよ．
2. 小問 1 で求めた次元を k とする．ある行列 $A \in \mathbb{R}^{(3-k)\times 3}$ とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{3-k}$ を用いて，$\mathrm{aff}(P) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ という形で $\mathrm{aff}(P)$ を記述せよ．

復習問題 7.7 行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ を用いて，$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ と書ける集合 X を考える．この X が凸集合であることを証明せよ．

復習問題 7.8 ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ と実数 $b \in \mathbb{R}$ を用いて，$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b\}$ と書ける集合 X を考える．この X が凸集合であることを証明せよ．

復習問題 7.9 集合 $B = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \leq 1\right\}$ が凸集合であることを証明せよ．（ヒント：演習問題 7.11 の結果を用いてもよい．）

補足問題 7.10 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ が m 個の点 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ のアフィン結合であるとき，そのときに限り，点 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$ が m 個の点 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_m \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$ の線形結合であることを証明せよ．

補足問題 7.11 任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\left(\sum_{i=1}^{d} x_{1,i}x_{2,i}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{d} x_{1,i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{d} x_{2,i}^2\right)$$

が成り立つことを証明せよ．（ヒント：$\sum_{i=1}^{d}(x_{1,i}t + x_{2,i})^2$ を t に関する二次式だと見なし．その判別式を考えてみよ．）

追加問題 7.12 集合 $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，

$$X + Y = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y\}$$

と定義する．X と Y が凸集合であるとき，$X + Y$ も凸集合であることを証明せよ．