

提出締切：2025 年 12 月 2 日 午前 9:00

授業内問題 6.1 次の方程式

$$6x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$$

を満たす点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が表す図形は、放物線、楕円、双曲線のいずれであるか、定めよ。放物線である場合は、その焦点の座標と準線の方程式を求めよ。楕円である場合は、その 2 つの焦点の座標を求めよ。双曲線である場合は、その 2 つの焦点の座標と 2 つの漸近線の方程式を求めよ。

授業内問題 6.2 次の集合

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

を考える。ただし、 a, b, c, d, e, f は実定数である。平面上の任意の点 (x_0, y_0) に対して、ある実定数 a, b, c, d, e, f が存在して、 $F = \{(x_0, y_0)\}$ となることを証明せよ。

復習問題 6.3 平面上の 2 つの円周 C_1, C_2 において、 C_1 が C_2 に囲まれているとする。このとき、 C_1 と C_2 の等距離線が楕円であることを証明せよ。

復習問題 6.4 2 次実正方行列 A の 2 つの固有値 λ_1, λ_2 が異なるとき、 λ_1, λ_2 に対する A の固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が直交することを証明せよ。

復習問題 6.5 次の方程式

$$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$$

を満たす点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が表す図形は、放物線、楕円、双曲線のいずれであるか、定めよ。放物線である場合は、その焦点の座標と準線の方程式を求めよ。楕円である場合は、その 2 つの焦点の座標を求めよ。双曲線である場合は、その 2 つの焦点の座標と 2 つの漸近線の方程式を求めよ。

復習問題 6.6 次の方程式

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 26x - 18y - 6 = 0$$

を満たす点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が表す図形は、放物線、楕円、双曲線のいずれであるか、定めよ。放物線である場合は、その焦点の座標と準線の方程式を求めよ。楕円である場合は、その 2 つの焦点の座標を求めよ。双曲線である場合は、その 2 つの焦点の座標と 2 つの漸近線の方程式を求めよ。

補足問題 6.7 平面上の 2 つの円周 C_1, C_2 において、 C_1 と C_2 が互いを囲まず、交わりもしないとする。また、 C_1 と C_2 の半径は異なるとする。このとき、 C_1 と C_2 の等距離線が双曲線の一支であることを証明せよ。

追加問題 6.8 平面上の 2 つの円周 C_1, C_2 は 2 点で交わるとする。このとき、 C_1 と C_2 の等距離線がどのような図形であるか、答えよ。(注： C_1 と C_2 の半径が異なる場合と同じである場合を分けて考えよ。)

追加問題 6.9 次の方程式

$$7x^2 - 18xy + 7y^2 + 2x + 2y + 7 = 0$$

を満たす点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が表す図形は、放物線、楕円、双曲線のいずれであるか、定めよ。放物線である場合は、その焦点の座標と準線の方程式を求めよ。楕円である場合は、その 2 つの焦点の座標を求めよ。双曲線である場合は、その 2 つの焦点の座標と 2 つの漸近線の方程式を求めよ。