

提出締切：2025 年 12 月 2 日 午前 9:00

**授業内問題 6.1** 次の方程式

$$6x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$$

を満たす点  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  が表す図形は、放物線、楕円、双曲線のいずれであるか、定めよ。放物線である場合は、その焦点の座標と準線の方程式を求めよ。楕円である場合は、その 2 つの焦点の座標を求めよ。双曲線である場合は、その 2 つの焦点の座標と 2 つの漸近線の方程式を求めよ。

**授業内問題 6.2** 次の集合

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

を考える。ただし、 $a, b, c, d, e, f$  は実定数である。平面上の任意の点  $(x_0, y_0)$  に対して、ある実定数  $a, b, c, d, e, f$  が存在して、 $F = \{(x_0, y_0)\}$  となることを証明せよ。

**復習問題 6.3** 平面上の 2 つの円周  $C_1, C_2$  において、 $C_1$  が  $C_2$  に囲まれているとする。このとき、 $C_1$  と  $C_2$  の等距離線が楕円であることを証明せよ。

**復習問題 6.4** 2 次実正方行列  $A$  の 2 つの固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  が異なるとき、 $\lambda_1, \lambda_2$  に対する  $A$  の固有ベクトル  $v_1, v_2$  が直交することを証明せよ。

**復習問題 6.5** 次の方程式

$$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$$

を満たす点  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  が表す図形は、放物線、楕円、双曲線のいずれであるか、定めよ。放物線である場合は、その焦点の座標と準線の方程式を求めよ。楕円である場合は、その 2 つの焦点の座標を求めよ。双曲線である場合は、その 2 つの焦点の座標と 2 つの漸近線の方程式を求めよ。

**復習問題 6.6** 次の方程式

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 26x - 18y - 6 = 0$$

を満たす点  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  が表す図形は、放物線、楕円、双曲線のいずれであるか、定めよ。放物線である場合は、その焦点の座標と準線の方程式を求めよ。楕円である場合は、その 2 つの焦点の座標を求めよ。双曲線である場合は、その 2 つの焦点の座標と 2 つの漸近線の方程式を求めよ。

**補足問題 6.7** 平面上の 2 つの円周  $C_1, C_2$  において、 $C_1$  と  $C_2$  が互いを囲まず、交わりもしないとする。また、 $C_1$  と  $C_2$  の半径は異なるとする。このとき、 $C_1$  と  $C_2$  の等距離線が双曲線の一支であることを証明せよ。

**追加問題 6.8** 平面上の 2 つの円周  $C_1, C_2$  は 2 点で交わるとする。このとき、 $C_1$  と  $C_2$  の等距離線がどのような図形であるか、答えよ。(注： $C_1$  と  $C_2$  の半径が異なる場合と同じである場合を分けて考えよ。)

**追加問題 6.9** 次の方程式

$$7x^2 - 18xy + 7y^2 + 2x + 2y + 7 = 0$$

を満たす点  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  が表す図形は、放物線、楕円、双曲線のいずれであるか、定めよ。放物線である場合は、その焦点の座標と準線の方程式を求めよ。楕円である場合は、その 2 つの焦点の座標を求めよ。双曲線である場合は、その 2 つの焦点の座標と 2 つの漸近線の方程式を求めよ。