

提出締切：2025 年 11 月 25 日 午前 9:00

授業内問題 5.1 任意の整数 $n \geq 3$ に対して、頂点数 n の多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ で、その可視グラフが非交差幾何グラフであるようなものを構成せよ。

授業内問題 5.2 多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ とその点 $s \in P$ で、 P における可視領域 $\text{Vis}(s)$ の頂点数が P の頂点数よりも大きいものを構成せよ。(注：出題者は、 P の頂点数が整数 $n \geq 6$ のとき、 $\text{Vis}(s)$ の頂点数がおおよそ $5n/3 - 2$ になるような例を構成できる。この問題では頂点数が $5n/3 - 2$ ほど大きな例を求めているが、できるならば目指してみよ。)

復習問題 5.3 単純多角形 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ とその中の任意の 2 点 $s, t \in P$ に対して、 s, t を結ぶ P 内の最短経路は一意であることを証明せよ。(ヒント：演習問題 5.5 の結果を用いてもよい。)

復習問題 5.4 多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ とその中の任意の点 $s \in P$ を考える。

1. 可視領域 $\text{Vis}(s)$ が単純多角形であることを証明せよ。(注： $\text{Vis}(s)$ が多角形領域であることは仮定してよい。それが穴を持たないことを証明せよ。)
2. P の頂点数が n であるとき、可視領域 $\text{Vis}(s)$ の頂点数が $2n$ 以下であることを証明せよ。

補足問題 5.5 平面上の任意の 2 点 $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して、以下の問いに答えよ。

1. 次の不等式

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

が成り立ち、等号が成り立つための必要十分条件が「ある実数 α が存在して、 $p_1 = \alpha p_2$ が成り立つこと」であることを証明せよ。(注意：この不等式はコーシー・シュワルツの不等式と呼ばれるものの特別な場合である。)

2. 次の不等式

$$\|p_1 + p_2\|_2 \leq \|p_1\|_2 + \|p_2\|_2$$

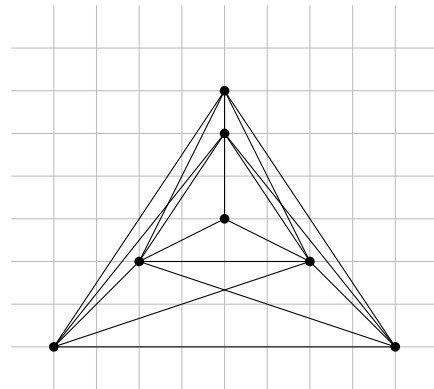
が成り立ち、等号が成り立つための必要十分条件が「ある非負実数 α が存在して、 $p_1 = \alpha p_2$ が成り立つこと」であることを証明せよ。(ヒント：両辺の 2 乗を考えるとよい。 α が非負でなければならないことに注意せよ。)

追加問題 5.6

1. 任意の正整数 $k \geq 1$ に対して、多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ とその中の 2 点 s, t で、 s, t を結ぶ P 内の異なる最短経路が少なくとも k 個存在するものを構成せよ。
2. 前問と同じ設定で、さらに P の穴の数が $O(\log k)$ であるようなものを構成せよ。

追加問題 (発展) 5.7 任意の単純多角形 P とその中の任意の点 $s \in P$ を考える。単純多角形 P の頂点数が n であるとき、可視領域 $\text{Vis}(s)$ の頂点数が n 以下であることを証明せよ。

追加問題 5.8 次の幾何グラフを可視グラフとして持つ多角形領域を 2 つ構成せよ。



なお、灰色の線は各点の座標を分かりやすくするためのもので、可視グラフの辺ではない。(補足：この問題の解答によって、可視グラフから元の多角形領域を一意に復元できないことが分かる。)