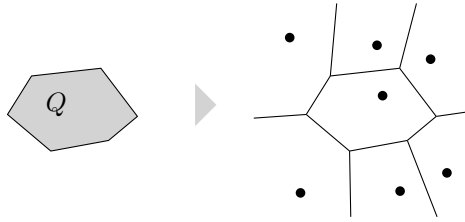


提出締切：2025 年 11 月 18 日 午前 9:00

授業内問題 4.1 任意の整数 $n \geq 3$ に対して、 n 個の点の集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ で、 P のボロノイ図がボロノイ頂点を 1 つも持たないようなものを見つけよ。

授業内問題 4.2 平面上に凸多角形 $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ が与えられている。このとき、ある有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ が存在して、 P のボロノイ図が Q をボロノイ領域の 1 つとするようにできる。そのような P の構成法を 1 つ示せ。例を下の図に示す。



復習問題 4.3 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ のボロノイ図を考える。

1. 点 q があるボロノイ辺の相対的内点であるとき、 q は P に最近点を 2 つ持つことを証明せよ。
2. 点 q があるボロノイ頂点であるとき、 q は P に最近点を少なくとも 3 つ持つことを証明せよ。

復習問題 4.4 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ のボロノイ図を考える。このとき、点 p のボロノイ領域 $V(p)$ に対して、 $p \in V(p)$ が成り立つことを証明せよ。

復習問題 4.5 任意の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ のボロノイ図を考える。

1. 点 p のボロノイ領域 $V(p)$ が有界であるとき、 $V(p)$ は凸多角形であることを証明せよ。
2. 点 p のボロノイ領域が非有界であるとき、そのときに限り、 p は凸包 $\text{CH}(P)$ の境界上にあることを証明せよ。

復習問題 4.6 $n \geq 3$ とする。 n 個の点からなる集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ では、すべてが 1 直線上にはなく、どの 4 点も 1 円周上にはないものとする。このとき、 P のボロノイ図において、ボロノイ辺の数は $3n - 6$ 以下で、ボロノイ頂点の数は $2n - 5$ 以下であることを証明せよ。(注意：デローネ三角形分割について、第 3 回で導出した性質を用いてもよい。)

復習問題 4.7 平面上の 2 点 $a = (1, 1), b = (4, 3) \in \mathbb{R}^2$ に対して、点 (x, y) と a のマンハッタン距離が (x, y) と b のマ

ンハッタン距離と等しくなるための x, y の必要十分条件を与えよ。条件としては、できる限り簡潔なものが望ましい。

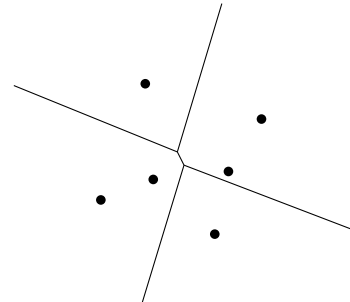
補足問題 4.8 平面上の 2 点 $a = (1, 1), b = (4, 4) \in \mathbb{R}^2$ に対して、点 (x, y) と a のマンハッタン距離が (x, y) と b のマンハッタン距離と等しくなるための x, y の必要十分条件を与えよ。条件としては、できる限り簡潔なものが望ましい。

追加問題 4.9 平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ のボロノイ図において、すべてのボロノイ領域が 6 つの辺を境界上に持つということはない。なぜか。証明せよ。(ヒント：演習問題 4.6 の結果を用いてもよい。)

追加問題 4.10 平面上の有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して、各点 $p \in P$ のボロノイ領域 $V'(p)$ を

$$V'(p) = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} p \text{ と } q \text{ の距離} \geq r \text{ と } q \text{ の距離} \\ \forall r \in P - \{p\} \end{array} \right\}$$

と定義する。次の図はこの定義によって得られるボロノイ図の例である。



1. 任意の点 $p \in P$ に対して、 $V'(p)$ は空集合であるか、非有界であることを証明せよ。
2. 点 p が凸包 $\text{CH}(P)$ の内点であるとき、 $V'(p)$ は空集合であることを証明せよ。

(補足：この問題で定義されるボロノイ図は**最遠点ボロノイ図**とよく呼ばれる。)