離散数理工学 (1) **2025 年 10 月 21 日**

演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2024 年 10 月 28 日 午前 9:00

授業内問題 1.1 任意の単純多角形 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ を考える．

1. 単純多角形 P の頂点数が n であるとき，内角の和が $(n-2)\pi$ となることを証明せよ．(ヒント：演習問題 1.6 の結果を用いてもよい．)
2. 単純多角形 P には凸頂点が少なくとも 3 つ存在することを証明せよ.
3. 任意の整数 $n \geq 3$ に対して，凸頂点がちょうど 3 つしかない単純多角形を構成せよ.

復習問題 1.2 任意の単純多角形 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ を考える．単純多角形 P が三角形分割を持つことを証明せよ.

復習問題 1.3 単純多角形 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ は頂点を n 個持ち，それらが反時計回り順に $p_1 = (x_1, y_2), p_2 = (x_2, y_2), \ldots, p_n = (x_n, y_n)$ と並んでいるとする．このとき，P の面積は

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \frac{1}{2}(x_n y_1 - x_1 y_n)$$

で表されることを証明せよ．(ヒント：P の三角形分割が存在することを用いてよい．演習問題 1.4 の結果も用いてよい．)

補足問題 1.4 平面上で一直線上にない異なる 3 点 $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2), p_3 = (x_3, y_3)$ を頂点とする三角形を考える．ただし，p_1, p_2, p_3 はその三角形の境界で反時計回り順に並んでいるとする．このとき，この三角形の面積は

$$\frac{1}{2}((x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3))$$

で表されることを証明せよ.

補足問題 1.5 任意の多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ を考える．多角形領域 P が三角形分割を持つことを証明せよ．(ヒント：「(頂点数) $+ 3 \cdot$ (穴の数)」に関する帰納法を考えてみよ．)

補足問題 1.6 頂点数が $n \geq 3$ であるような任意の単純多角形 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ を考える．このとき，P の任意の三角形分割において，その三角形の総数が $n-2$ であることを証明せよ.

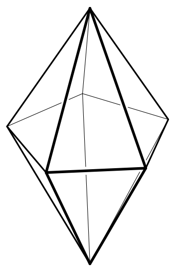
補足問題 1.7 頂点数が $n \geq 4$ であるような任意の単純多角形 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ を考える．このとき，P の任意の三角形分割には耳が 2 つ以上存在することを証明せよ.

追加問題 1.8 平面上の集合 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ で，開集合であり，かつ，閉集合でもあるものは存在するか．存在するならば，そのような集合をすべて挙げ，なぜ開集合でも閉集合でもあるのか証明せよ．存在しないならば，存在しないことを証明せよ.

追加問題 1.9 任意の多角形領域 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ を考える．多角形領域 P の頂点の総数が n であり，穴の総数が h であるとき，P の三角形分割における三角形の総数を n と h を用いた式で表してみよ．(注：問い方がよくないかもしれないが，つまり，P の三角形分割の総数は三角形分割に依存せず，n と h だけから決まることになる．)

追加問題 1.10 任意の整数 $n \geq 4$ に対して，「頂点数 n のある単純多角形 P が存在して，P の任意の三角形分割における耳の数がちょうど 2 である」という性質が成り立つことを証明せよ.

追加問題 1.11 2 つの正五角錐を正五角形面で貼り合わせた図形を考える.



この図形の四面体分割で，四面体の数が異なるものを 2 つ構成せよ.