離散最適化基礎論

ジョブ・スケジューリングのアルゴリズム

第 14 回 (最終回)

多項式時間近似スキーム

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2025 年 1 月 28 日

最終更新：2025 年 1 月 29 日　14:16

スケジュール (前半)

1. スケジューリング問題の分類 (10/1)
＊ 休み (出張) (10/8)
＊ 休み (体育祭) (10/15)
2. 整列による解法 (10/22)
3. 動的計画法 (10/29)
4. NP 困難性と計算量の分類 (11/5)
5. 計算複雑性による問題の分類 (11/12)
6. リスト・スケジューリング (11/19)

スケジュール (後半)

7.	先行制約：基礎	(11/26)
＊	休み (秋ターム試験)	(12/3)
8.	先行制約：多機械	(12/10)
9.	先行制約：他の半順序	(12/17)
10.	ショップ・スケジューリング：基礎	(12/24)
＊	休み (冬季休業)	(12/31)
11.	ショップ・スケジューリング：機械数が定数	(1/7)
12.	ショップ・スケジューリング：機械数が可変	(1/14)
13.	近似可能性と近似不可能性	(1/21)
14.	**多項式時間近似スキーム**	(1/28)
＊	なし	(2/4)

[復習] 多項式時間近似スキーム

定義：多項式時間近似スキーム

問題 $\mathcal{P}$ に対する **多項式時間近似スキーム** とは,
次のようなアルゴリズム
　入力：$\varepsilon > 0$
　出力：$\mathcal{P}$ の多項式時間 $1+\varepsilon$ 近似アルゴリズム

polynomial-time approximation scheme (PTAS)　ピータス

$$\varepsilon$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{P \mid\mid C_{\max} \text{ の PTAS}}$$
$$\downarrow$$

$P \mid\mid C_{\max}$ の
多項式時間
$1+\varepsilon$ 近似アルゴリズム

[復習] 多項式時間近似スキーム

定義：多項式時間近似スキーム

問題 $\mathcal{P}$ に対する **多項式時間近似スキーム** とは,
次のようなアルゴリズム
　入力：$\varepsilon > 0$
　出力：$\mathcal{P}$ の多項式時間 $1+\varepsilon$ 近似アルゴリズム

polynomial-time approximation scheme (PTAS)　ピータス

ε

$\downarrow$

$P \,||\, C_{\max}$ の PTAS

$\downarrow$

$P \,||\, C_{\max}$ の入力 $\rightarrow$ $P \,||\, C_{\max}$ の多項式時間 $1+\varepsilon$ 近似アルゴリズム $\rightarrow$ $P \,||\, C_{\max}$ の出力

[復習] 全多項式時間近似スキーム

定義：全多項式時間近似スキーム

問題 $\mathcal{P}$ に対する **全多項式時間近似スキーム** とは,
次のようなアルゴリズム
　入力：$\varepsilon > 0$
　出力：$\mathcal{P}$ の多項式時間 $1+\varepsilon$ 近似アルゴリズム
　　　　ただし，計算量は $1/\varepsilon$ についても多項式

fully polynomial-time approximation scheme (FPTAS)
エフピータス

	PTAS の計算量	FPTAS の計算量
$O(n^{1/\varepsilon})$	○	×
$O(2^{1/\epsilon}n^2)$	○	×
$O(n^2/\varepsilon^2)$	○	○

前回の内容

$$\boxed{P2 \mid\mid C_{\max}} \longrightarrow \boxed{P \mid\mid C_{\max}}$$

FPTAS が存在

FPTAS が非存在 (P $\neq$ NP ならば)

$$\begin{tikzcd} \boxed{P2 \,||\, C_{\max}} \arrow[r] & \boxed{P \,||\, C_{\max}} \end{tikzcd}$$

FPTAS が存在

FPTAS が非存在 (P $\neq$ NP ならば)

PTAS が存在

全体像 (非存在は $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ のとき)

$$\begin{tikzcd}
Rm \mid\mid C_{\max} \arrow[r] & R \mid\mid C_{\max} \\
Qm \mid\mid C_{\max} \arrow[r] \arrow[u] & Q \mid\mid C_{\max} \arrow[u] \\
Pm \mid\mid C_{\max} \arrow[r] \arrow[u] & P \mid\mid C_{\max} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

FPTAS が存在
(Sahni ’76)

FPTAS が非存在
PTAS が存在
(Hochbaum, Shmoys ’87)

全体像 (非存在は P $\neq$ NP のとき)

$$\begin{tikzcd}
Rm \,||\, C_{\max} \arrow[rr] & & R \,||\, C_{\max} \\
Qm \,||\, C_{\max} \arrow[u, "\text{(Horowitz, Sahni '76)}"'] \arrow[rr] & & Q \,||\, C_{\max} \arrow[u] \\
Pm \,||\, C_{\max} \arrow[u] \arrow[rr] & & P \,||\, C_{\max} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

FPTAS が存在

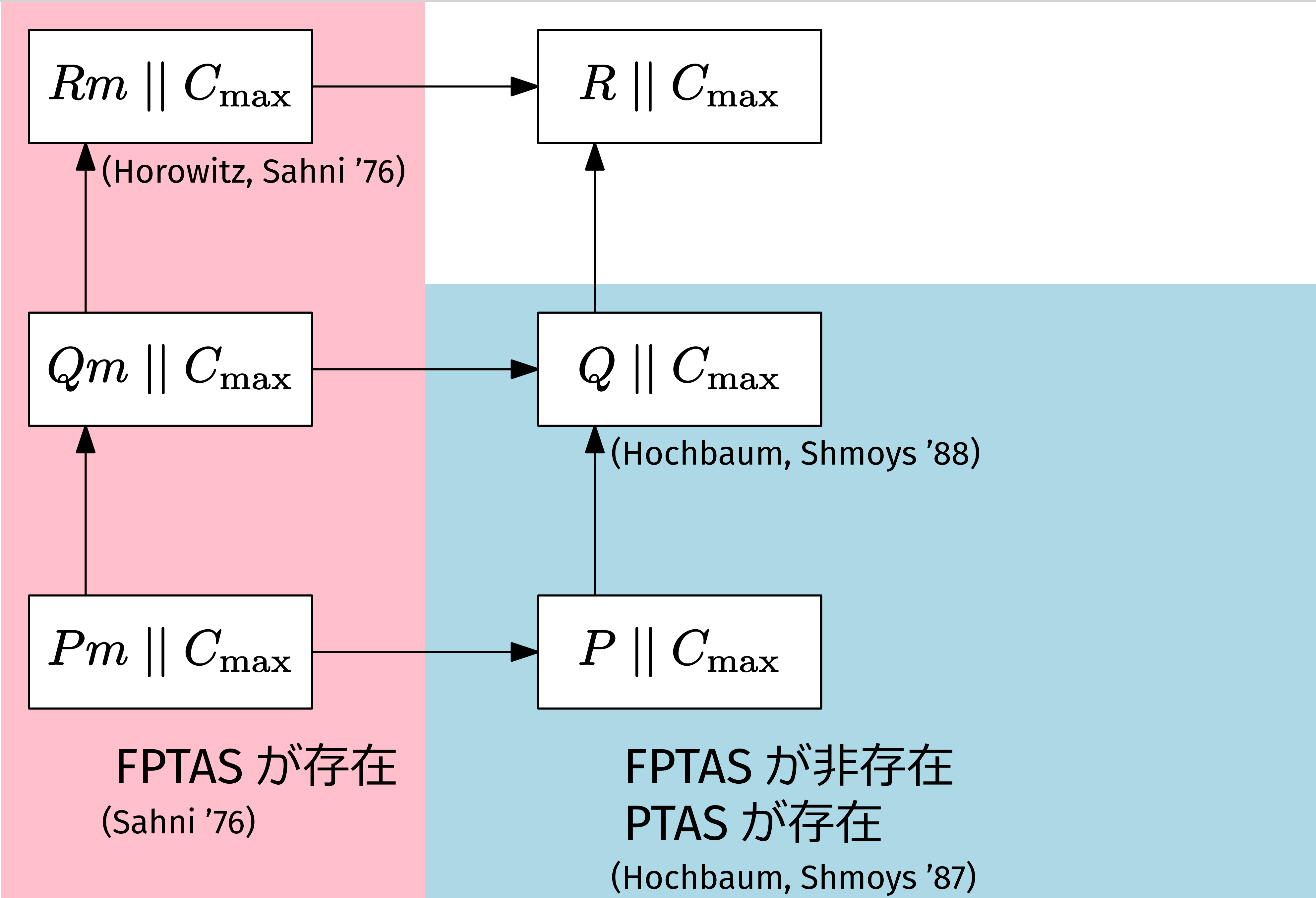
(Sahni '76)

FPTAS が非存在

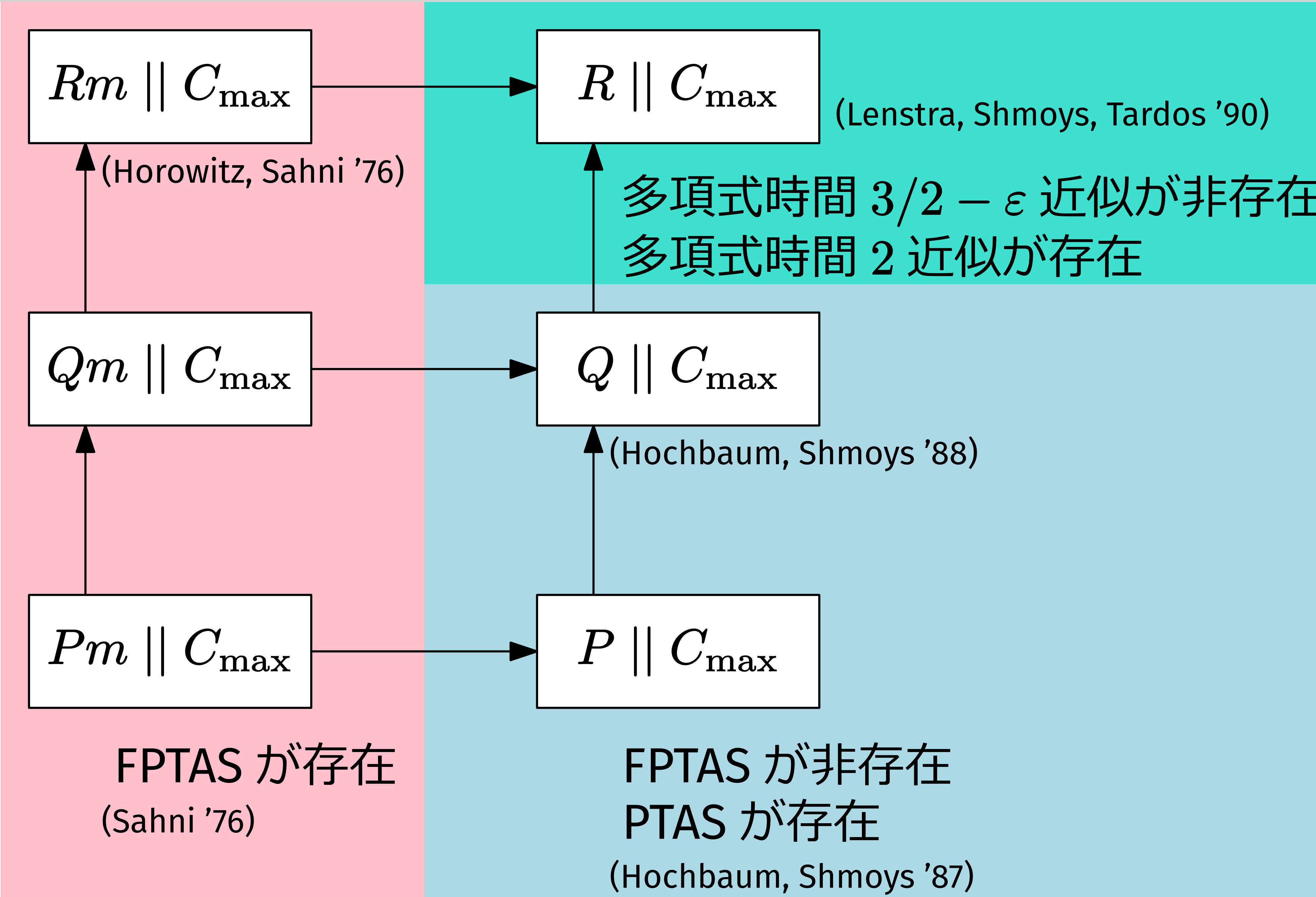
PTAS が存在

(Hochbaum, Shmoys '87)

全体像 (非存在は P $\neq$ NP のとき)



全体像　(非存在は P $\neq$ NP のとき)



文献

- E. Horowitz, S. Sahni, Exact and approximate algorithms for scheduling nonidentical processors. *Journal of the ACM* 23 (1976) pp. 317–327.
- D. S. Hochbaum, D. B. Shmoys, Using dual approximation algorithms for scheduling problems: Theoretical and practical results. *Journal of the ACM* 34 (1987) pp. 144–162
- D. S. Hochbaum, D. B. Shymos, A polynomial approximation scheme for scheduling on uniform processors: Using the dual approximation approach. *SIAM journal on Computing* 17 (1988) pp. 539–551.
- J. K. Lenstra, D. B. Shmoys, É. Tardos, Approximation algorithms for scheduling unrelated parallel machines. *Mathematical Programming* 46 (1990) pp. 259–271.

本日の内容

1. $P \mid\mid C_{\max}$ **の PTAS：近似的判定**
2. $P \mid\mid C_{\max}$ の PTAS：ジョブの分類
3. $P \mid\mid C_{\max}$ の PTAS：動的計画法

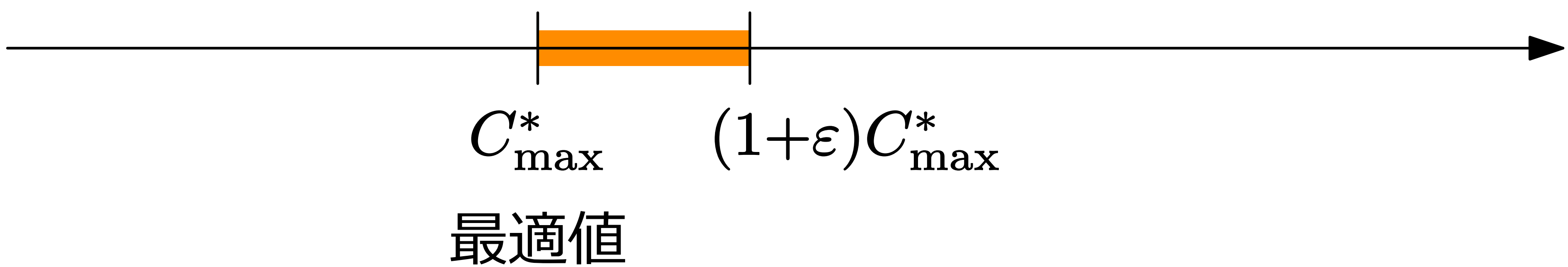
- D. S. Hochbaum, D. B. Shmoys, Using dual approximation algorithms for scheduling problems: Theoretical and practical results. *Journal of the ACM* 34 (1987) pp. 144–162

定理 (Hochbaum, Shmoys '87)

$P \parallel C_{\max}$ に対して，多項式時間近似スキームが存在する

注：P $\neq$ NP $\Rightarrow$ 全多項式時間近似スキームは存在しない

注：$\varepsilon \in (0, 1)$ と仮定してよい



PTAS のアイディア 1：近似的判定

次の 1+ε 近似的判定問題を解く

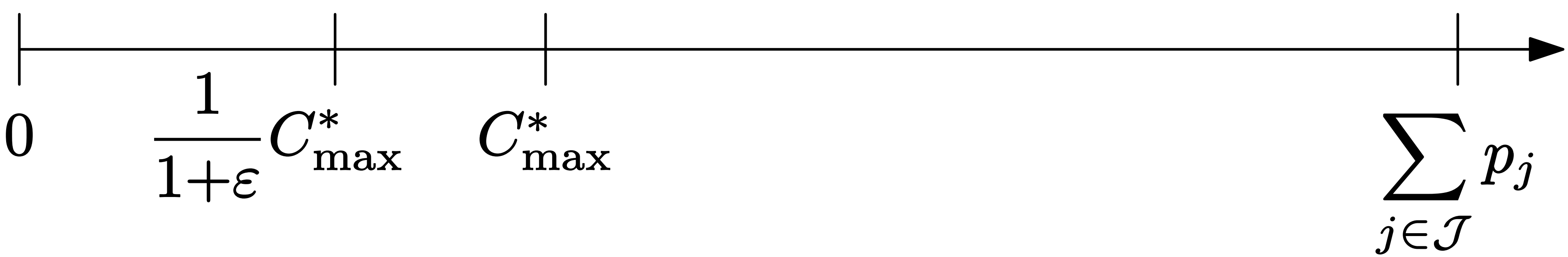
入力： $P \,||\, C_{\max}$ の入力，T

出力： No $\Rightarrow \forall\, \sigma : C_{\max}(\sigma) > T$

Yes $\Rightarrow \exists\, \sigma : C_{\max}(\sigma) \leq (1+\varepsilon)T$

このとき，そのような σ も出力

1+ε 近似的判定問題が多項式時間で解ける ⇒ PTAS が作れる



近似的判定

PTAS のアイディア 1：近似的判定

次の 1+ε 近似的判定問題を解く

入力： $P \,||\, C_{\max}$ の入力，T

出力： No $\Rightarrow \forall\, \sigma : C_{\max}(\sigma) > T$

Yes $\Rightarrow \exists\, \sigma : C_{\max}(\sigma) \leq (1+\varepsilon)T$

このとき，そのような σ も出力

1+ε 近似的判定問題が多項式時間で解ける $\Rightarrow$ PTAS が作れる

近似的判定

PTAS のアイディア 1：近似的判定

次の $1+\varepsilon$ 近似的判定問題を解く

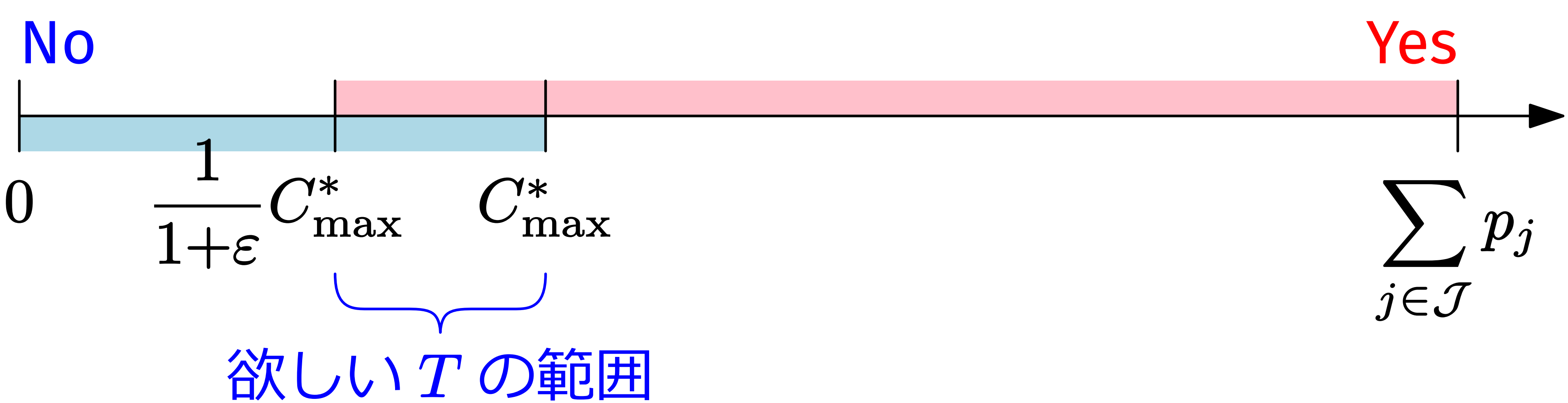
入力： $P \mid\mid C_{\max}$ の入力，T

出力： No $\Rightarrow \forall\, \sigma \colon C_{\max}(\sigma) > T$

Yes $\Rightarrow \exists\, \sigma \colon C_{\max}(\sigma) \le (1+\varepsilon)T$

このとき，そのような σ も出力

$1+\varepsilon$ 近似的判定問題が多項式時間で解ける $\Rightarrow$ PTAS が作れる



PTAS のアイディア 1：近似的判定

次の $1+\varepsilon$ 近似的判定問題を解く

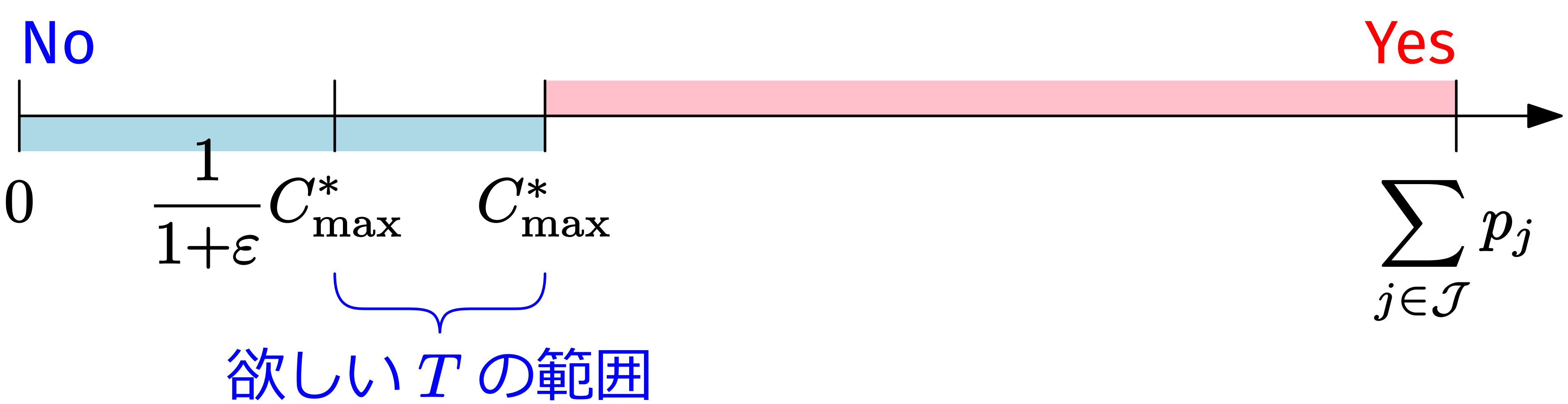
入力： $P \,||\, C_{\max}$ の入力，T

出力： No $\Rightarrow \forall\, \sigma\colon C_{\max}(\sigma) > T$

Yes $\Rightarrow \exists\, \sigma\colon C_{\max}(\sigma) \leq (1+\varepsilon)T$

このとき，そのような σ も出力

$1+\varepsilon$ 近似的判定問題が多項式時間で解ける $\Rightarrow$ PTAS が作れる



近似的判定

PTAS のアイディア 1：近似的判定

次の $1+\varepsilon$ 近似的判定問題を解く

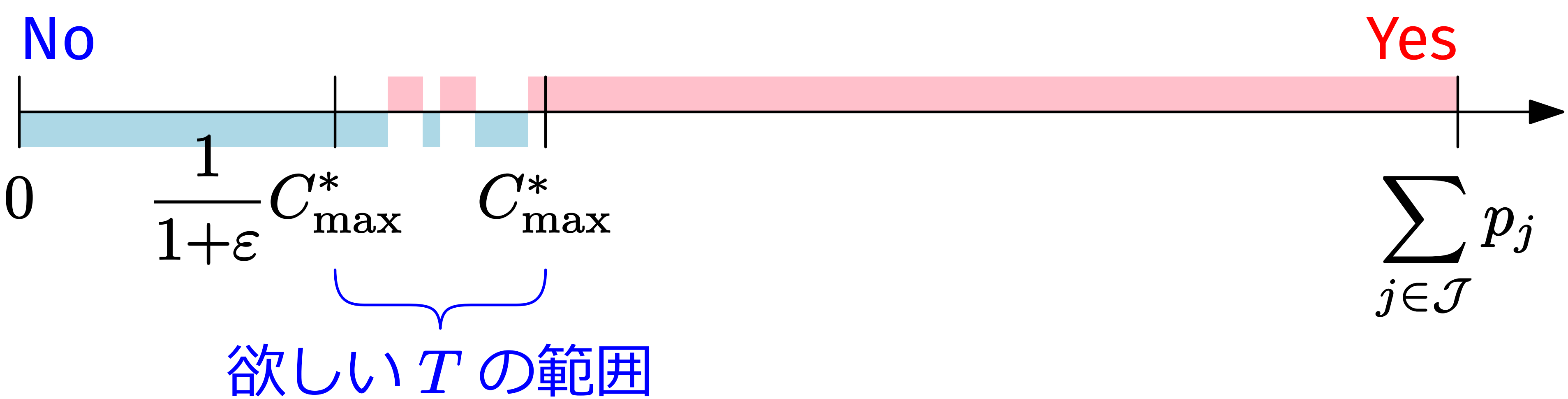
入力： $P \,||\, C_{\max}$ の入力，T

出力： No $\Rightarrow \forall\, \sigma : C_{\max}(\sigma) > T$

Yes $\Rightarrow \exists\, \sigma : C_{\max}(\sigma) \leq (1+\varepsilon)T$

このとき，そのような σ も出力

$1+\varepsilon$ 近似的判定問題が多項式時間で解ける $\Rightarrow$ PTAS が作れる



二分探索

PTASのアイディア1：近似的判定

次の 1+ε 近似的判定問題を解く

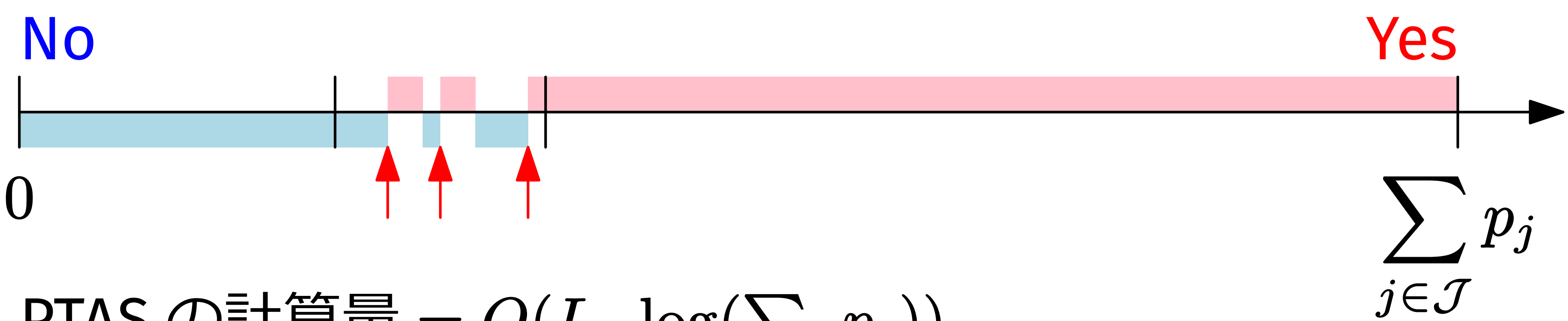
入力： $P \,||\, C_{\max}$ の入力，T

出力： No $\Rightarrow \forall\, \sigma\colon C_{\max}(\sigma) > T$

Yes $\Rightarrow \exists\, \sigma\colon C_{\max}(\sigma) \leq (1+\varepsilon)T$

このとき，そのような σ も出力

1+ε 近似的判定問題を解く計算量 $= L \Rightarrow$



PTASの計算量 $= O(L \cdot \log(\sum_j p_j))$

近似的判定：注意

PTAS のアイディア 1：近似的判定

次の 1+ε 近似的判定問題を解く

入力： $P \mid\mid C_{\max}$ の入力，T

出力： No $\Rightarrow \forall\, \sigma \colon C_{\max}(\sigma) > T$

Yes $\Rightarrow \exists\, \sigma \colon C_{\max}(\sigma) \leq (1+\varepsilon)T$

このとき，そのような σ も出力

$$T < \max\left\{ \frac{1}{m} \sum_{J_j \in \mathcal{J}} p_j, \max_{J_j \in \mathcal{J}} p_j \right\} \Rightarrow \text{No と出力してよい}$$

$$\therefore \text{以後，} T \geq \max\left\{ \frac{1}{m} \sum_{J_j \in \mathcal{J}} p_j, \max_{J_j \in \mathcal{J}} p_j \right\} \text{と仮定}$$

PTASのアイディア1：近似的判定

次の 1+ε 近似的判定問題を解く

入力： $P \mid\mid C_{\max}$ の入力，T

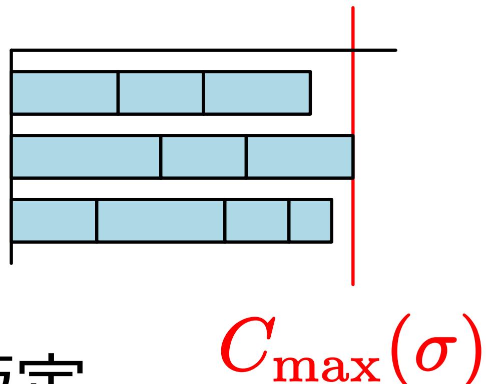
出力： No $\Rightarrow \forall\, \sigma\colon C_{\max}(\sigma) > T$

Yes $\Rightarrow \exists\, \sigma\colon C_{\max}(\sigma) \leq (1+\varepsilon)T$

このとき，そのような σ も出力

$$T < \max\left\{\frac{1}{m}\sum_{J_j\in\mathcal{J}} p_j,\ \max_{J_j\in\mathcal{J}} p_j\right\}$$ ⇒ No と出力してよい

$$\because \forall\, \sigma\colon C_{\max}(\sigma) \geq \qquad\qquad > T$$



∴ 以後，$T \geq \max\left\{\frac{1}{m}\sum_{J_j\in\mathcal{J}} p_j,\ \max_{J_j\in\mathcal{J}} p_j\right\}$ と仮定

1. $P \mid\mid C_{\max}$ の PTAS：近似的判定
2. **$P \mid\mid C_{\max}$ の PTAS：ジョブの分類**
3. $P \mid\mid C_{\max}$ の PTAS：動的計画法

- D. S. Hochbaum, D. B. Shmoys, Using dual approximation algorithms for scheduling problems: Theoretical and practical results. *Journal of the ACM* 34 (1987) pp. 144–162

PTAS：ジョブの分類

PTAS のアイディア 2：ジョブの分類

長いジョブの集合 と **短いジョブ**の集合 に分ける

- 長いジョブは (丸めて) 真面目にスケジュールする
- 短いジョブは適当にスケジュールする

$$\mathcal{J} \begin{cases} \mathcal{J}_{\mathrm{long}} \\ \mathcal{J}_{\mathrm{short}} \end{cases}$$

<u>ポイント</u>

- 長いジョブの数 が 小さい
  - 真面目にスケジュールしても，計算量が小さい
- 短いジョブが C_{max} に与える影響 は 小さい
  - 適当にスケジュールしても，近似比が大きくならない

PTAS：ジョブの分類

問題で与えられた $T\ (\geq \frac{1}{m}\sum_j p_j, \max_j p_j)$ に対して

$\mathcal{J}$

- $\mathcal{J}_{\text{long}} = \{J_j \in \mathcal{J} \mid p_j > \varepsilon T/5\}$　長いジョブの集合
- $\mathcal{J}_{\text{short}} = \{J_j \in \mathcal{J} \mid p_j \leq \varepsilon T/5\}$　短いジョブの集合

性質：長いジョブの総数

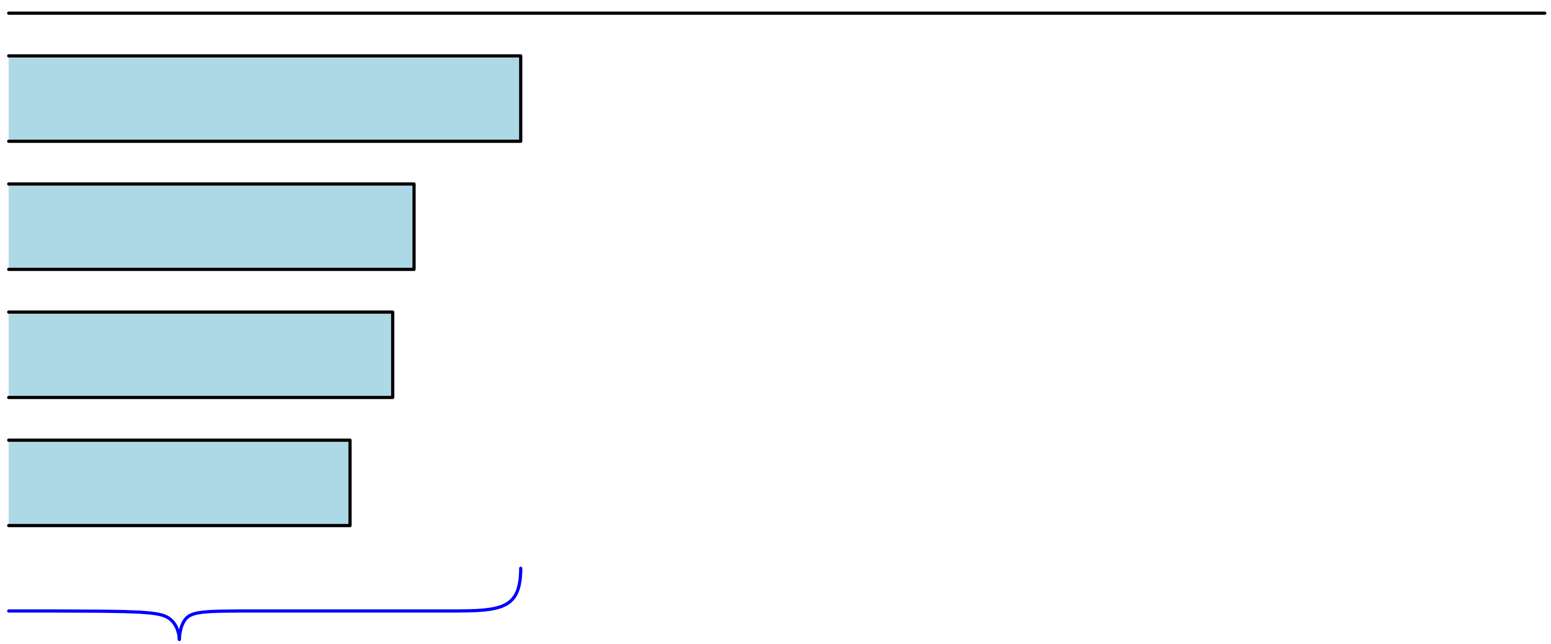
$$|\mathcal{J}_{\text{long}}| \leq \frac{5m}{\varepsilon}$$

<u>証明</u>：$|\mathcal{J}_{\text{long}}| \cdot \frac{\varepsilon T}{5} < \sum_{J_j \in \mathcal{J}_{\text{long}}} p_j \leq \sum_{J_j \in \mathcal{J}} p_j \leq mT$ $\square$

PTAS：長いジョブの近似 ⇒ 全体の近似

性質：長いジョブの近似から全体の近似へ

$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1{+}3\varepsilon/5$ 近似的判定ができる
⇒ $\mathcal{J}$ に対する $1{+}\varepsilon$ 近似的判定ができる

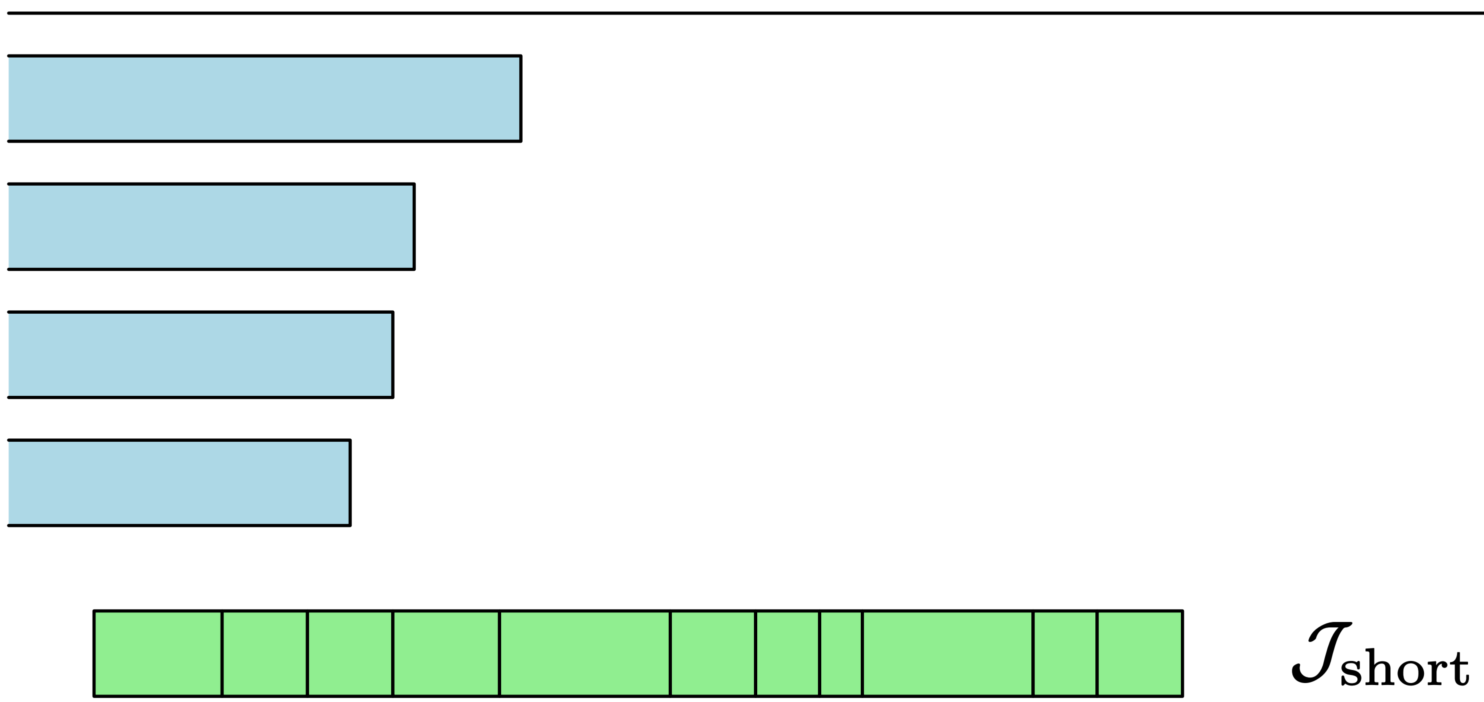


$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1+3\varepsilon/5$ 近似値

PTAS：長いジョブの近似 ⇒ 全体の近似

性質：長いジョブの近似から全体の近似へ

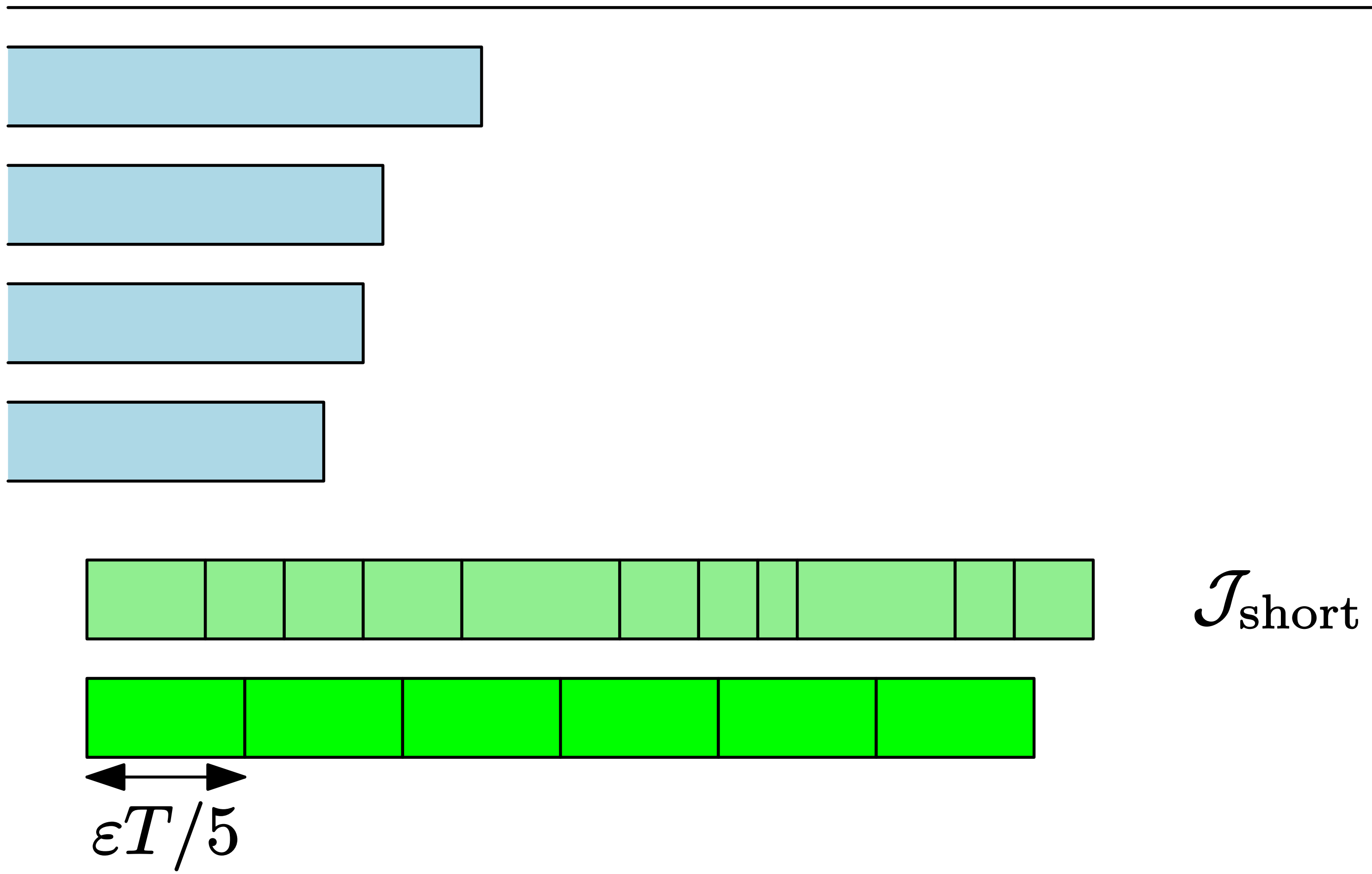
$\mathcal{J}_{\text{long}}$ に対する $1{+}3\varepsilon/5$ 近似的判定ができる
$\Rightarrow \mathcal{J}$ に対する $1{+}\varepsilon$ 近似的判定ができる



PTAS：長いジョブの近似 ⇒ 全体の近似

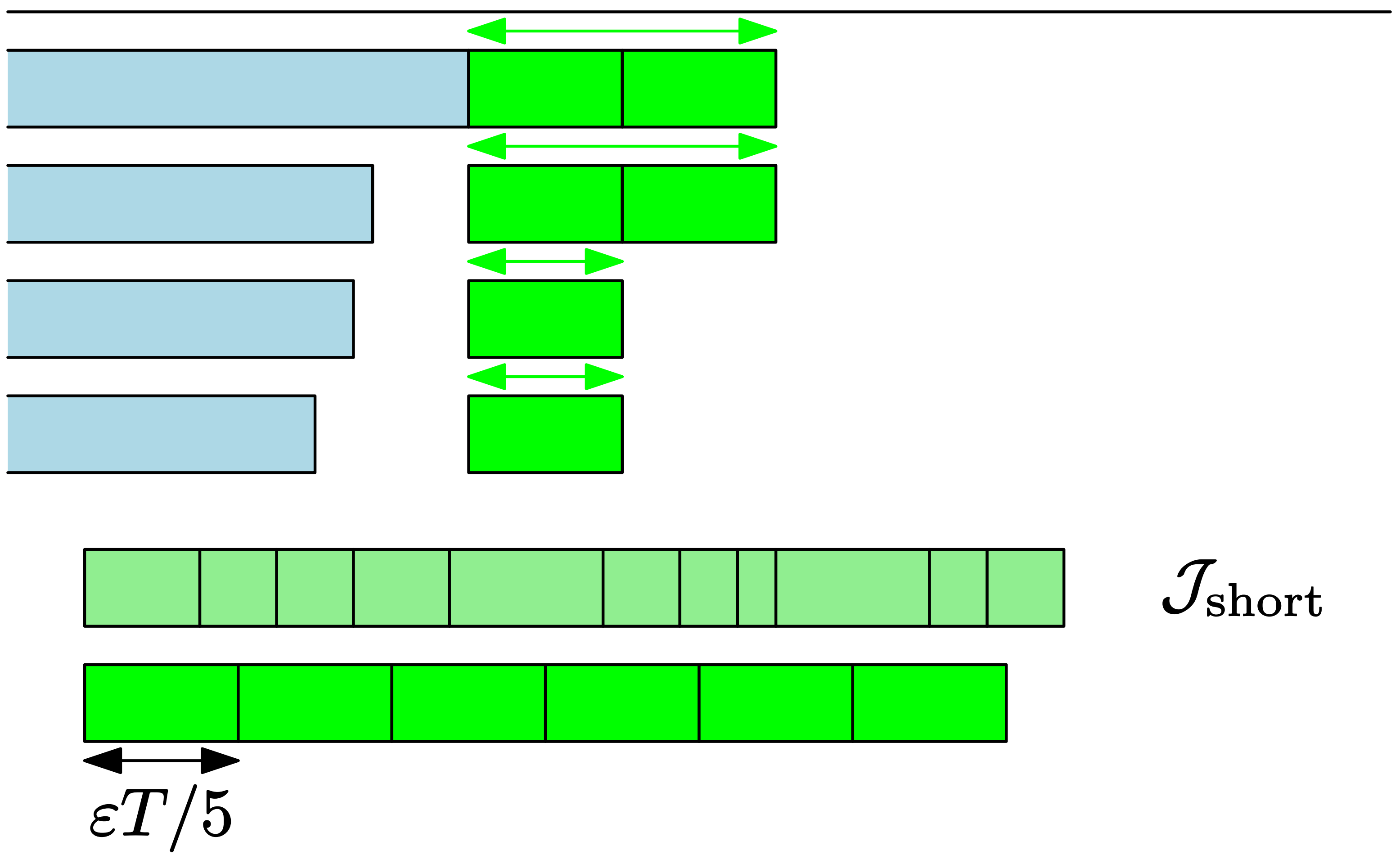
性質：長いジョブの近似から全体の近似へ

$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1{+}3\varepsilon/5$ 近似的判定ができる
⇒ $\mathcal{J}$ に対する $1{+}\varepsilon$ 近似的判定ができる



性質：長いジョブの近似から全体の近似へ

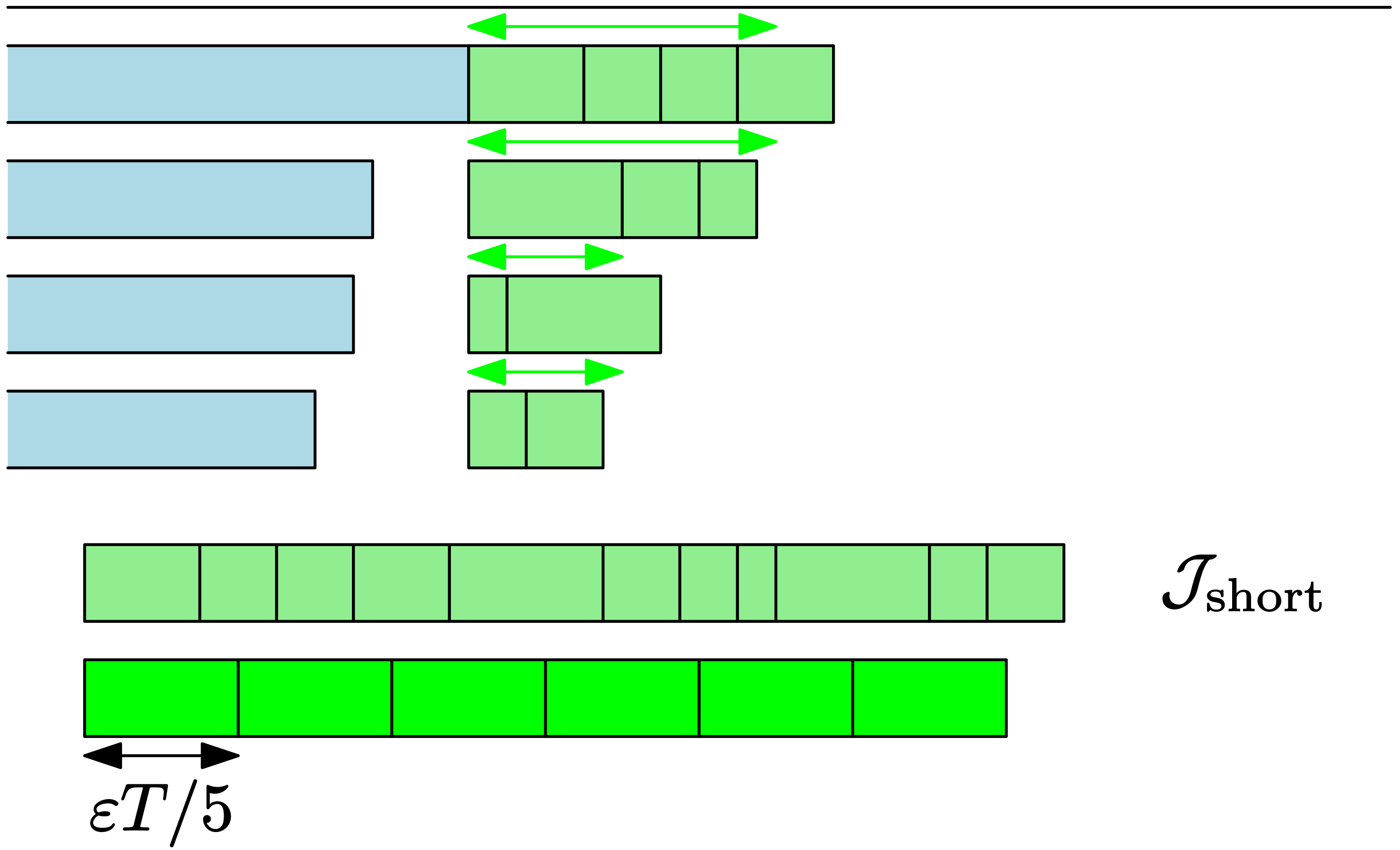
$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1+3\varepsilon/5$ 近似的判定ができる
⇒ $\mathcal{J}$ に対する $1+\varepsilon$ 近似的判定ができる



PTAS：長いジョブの近似 ⇒ 全体の近似

性質：長いジョブの近似から全体の近似へ

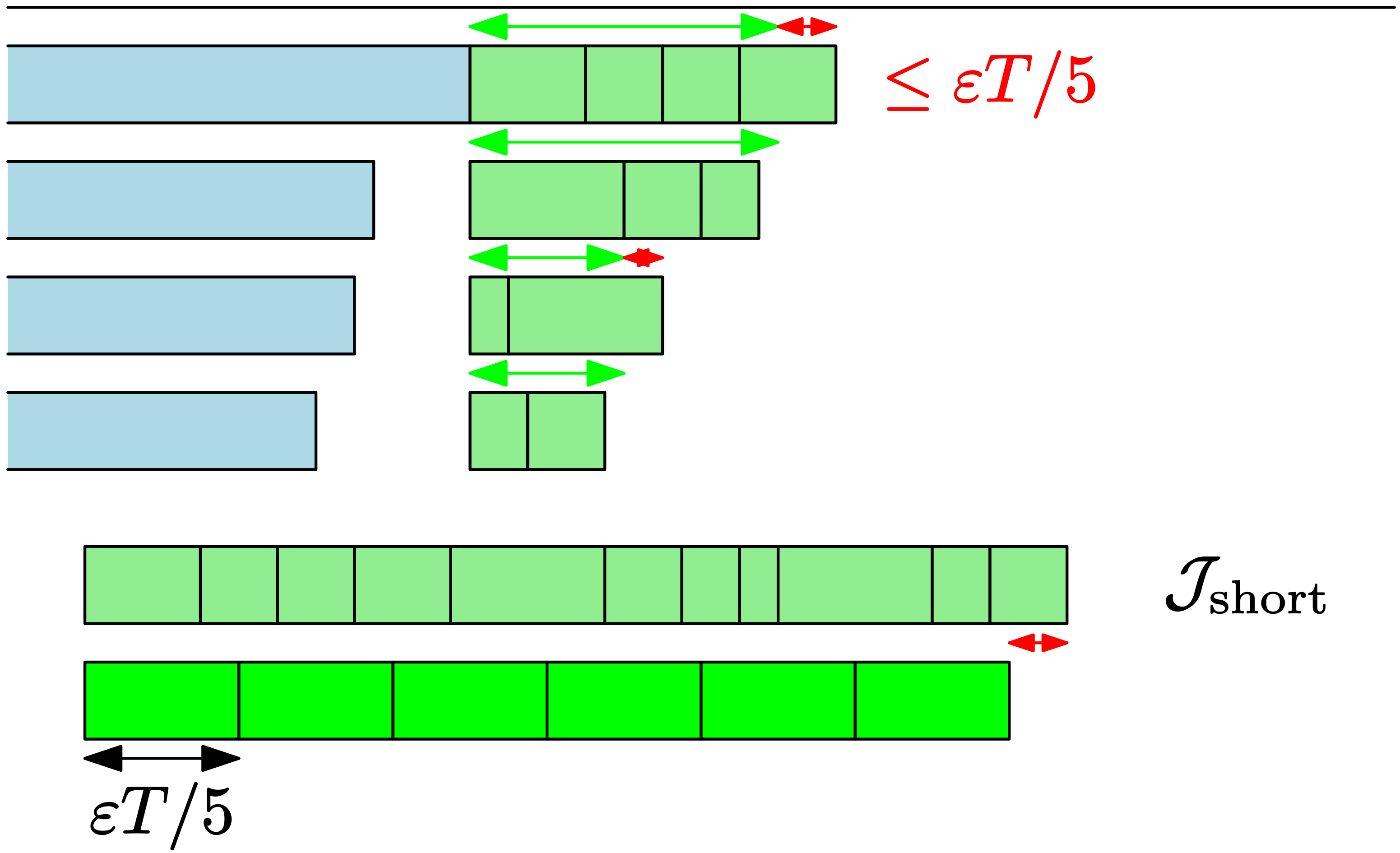
$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1+3\varepsilon/5$ 近似的判定ができる
⇒ $\mathcal{J}$ に対する $1+\varepsilon$ 近似的判定ができる



PTAS：長いジョブの近似 ⇒ 全体の近似

性質：長いジョブの近似から全体の近似へ

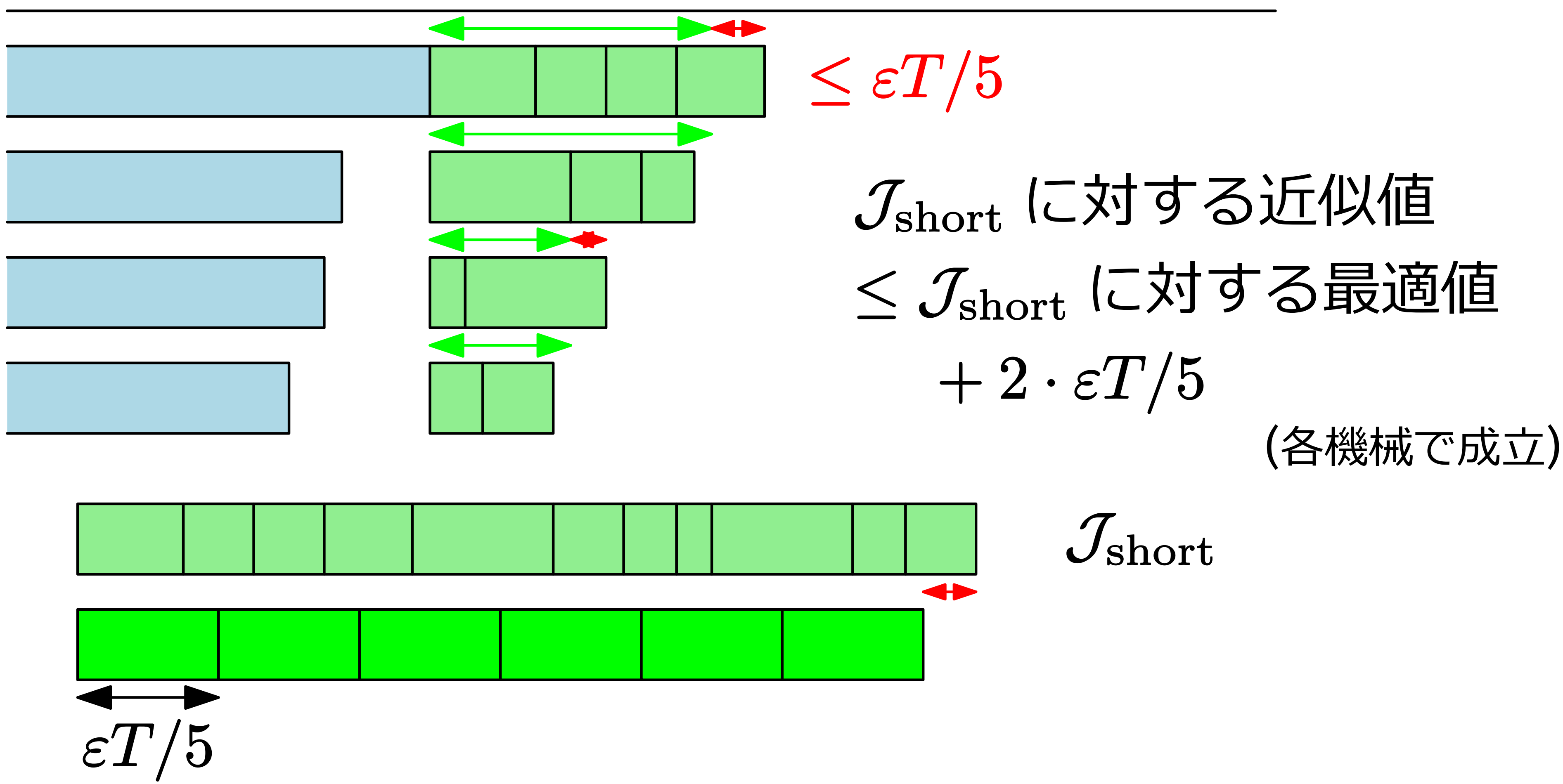
$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1+3\varepsilon/5$ 近似的判定ができる
⇒ $\mathcal{J}$ に対する $1+\varepsilon$ 近似的判定ができる



PTAS：長いジョブの近似 ⇒ 全体の近似

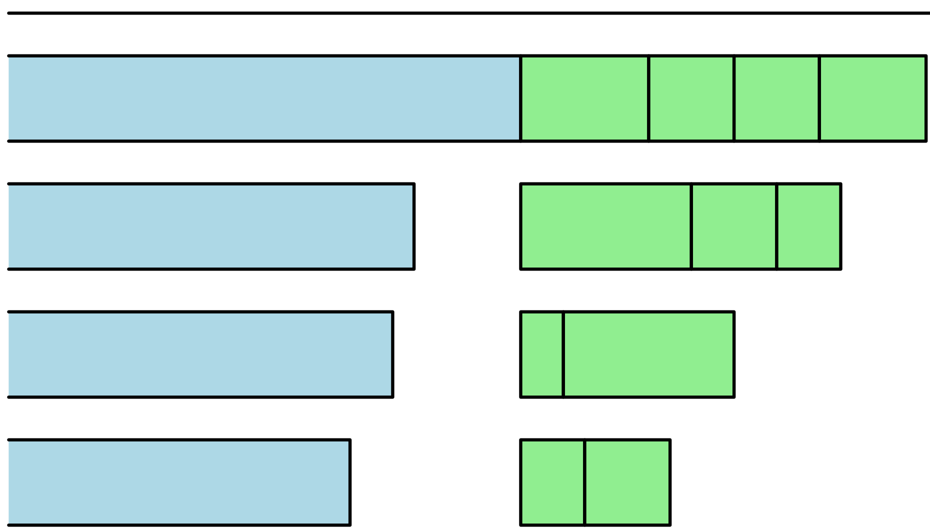
性質：長いジョブの近似から全体の近似へ

$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1+3\varepsilon/5$ 近似的判定ができる
⇒ $\mathcal{J}$ に対する $1+\varepsilon$ 近似的判定ができる



性質：長いジョブの近似から全体の近似へ

$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する 1+3ε/5 近似的判定ができる
⇒ $\mathcal{J}$ に対する 1+ε 近似的判定ができる



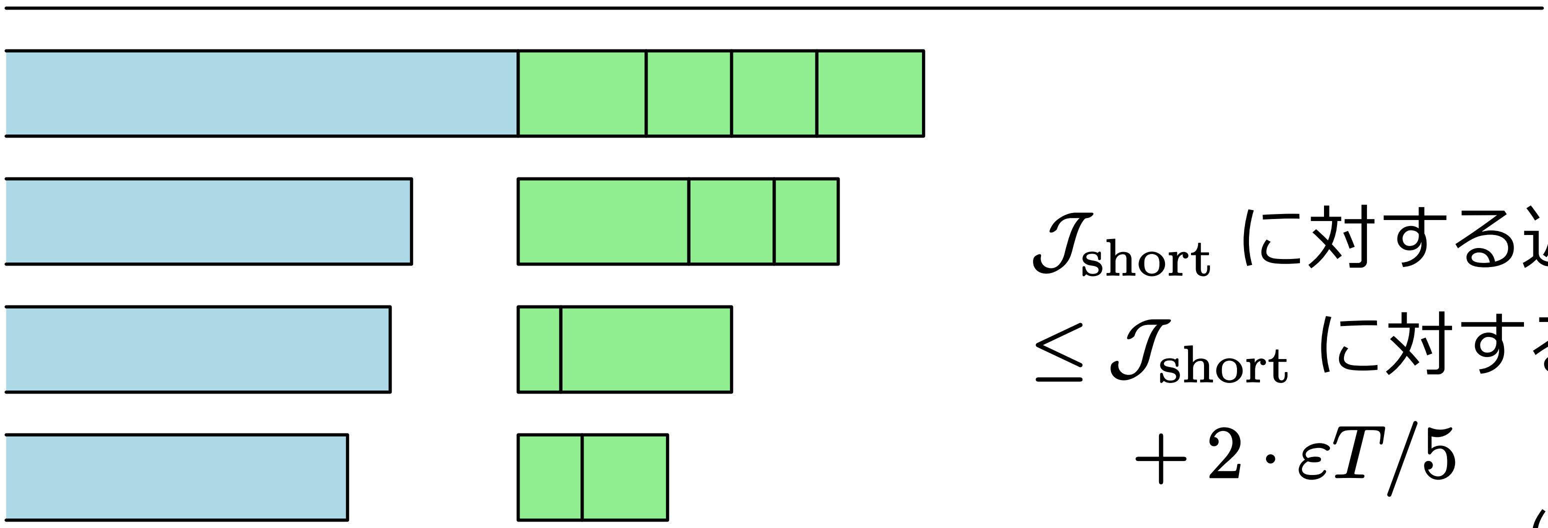
$\mathcal{J}_{\mathrm{short}}$ に対する近似値
$\leq \mathcal{J}_{\mathrm{short}}$ に対する最適値
$+ 2 \cdot \varepsilon T/5$
(各機械で成立)

近似値 $\leq \mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1 + 3\varepsilon/5$ 近似値
$+ \mathcal{J}_{\mathrm{short}}$ に対する最適値 $+ 2 \cdot \varepsilon T/5$

PTAS：長いジョブの近似 ⇒ 全体の近似

性質：長いジョブの近似から全体の近似へ

$\mathcal{J}_{\text{long}}$ に対する 1+3ε/5 近似的判定ができる
⇒ $\mathcal{J}$ に対する 1+ε 近似的判定ができる



$\mathcal{J}_{\text{short}}$ に対する近似値
$\leq \mathcal{J}_{\text{short}}$ に対する最適値
$+ 2 \cdot \varepsilon T/5$
(各機械で成立)

近似値 $\leq \mathcal{J}_{\text{long}}$ に対する $1 + 3\varepsilon/5$ 近似値
$+ \mathcal{J}_{\text{short}}$ に対する最適値 $+ 2 \cdot \varepsilon T/5$
$\leq (1 + 3\varepsilon/5) \cdot$ 最適値 $+ 2 \cdot \varepsilon T/5$

PTAS：証明 (続)

$$\text{近似値} \leq (1 + 3\varepsilon/5) \cdot \text{最適値} + 2 \cdot \varepsilon T/5$$

PTAS のアイディア 1：近似的判定

次の $1+\varepsilon$ 近似的判定問題を解く

入力： $P \,||\, C_{\max}$ の入力，ε，T

出力： No $\Rightarrow \forall\, \sigma \colon C_{\max}(\sigma) > T$

Yes $\Rightarrow \exists\, \sigma \colon C_{\max}(\sigma) \leq (1+\varepsilon)T$

このとき，そのような σ も出力

PTAS：証明 (続)

$$\text{近似値} \leq (1+3\varepsilon/5)\cdot\text{最適値} + 2\cdot\varepsilon T/5$$

アルゴリズム：

近似値 $\leq (1+\varepsilon)T$ のとき　Yes と出力

$$\because\ \text{最適値} \leq \text{近似値} \leq (1+\varepsilon)T$$

近似値 $> (1+\varepsilon)T$ のとき　No と出力

$$(1+3\varepsilon/5)\cdot\text{最適値} + 2\cdot\varepsilon T/5 > (1+\varepsilon)T$$

$$\therefore\ \text{最適値} > \frac{1+3\varepsilon/5}{1+3\varepsilon/5}T = T \qquad \square$$

PTAS のアイディア 1：近似的判定

次の $1+\varepsilon$ 近似的判定問題を解く

入力： $P\,||\,C_{\max}$ の入力，ε，T

出力： No $\Rightarrow \forall\,\sigma\colon C_{\max}(\sigma) > T$

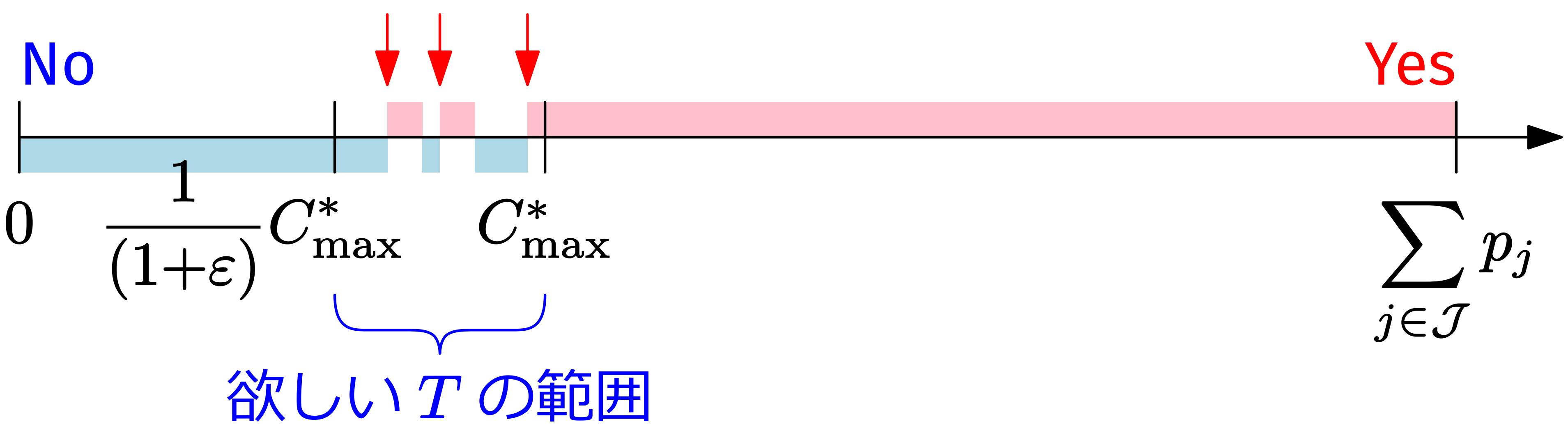
Yes $\Rightarrow \exists\,\sigma\colon C_{\max}(\sigma) \leq (1+\varepsilon)T$

このとき，そのような σ も出力

PTAS：ここまでのまとめ

PTAS の流れ

1. 二分探索により，T を変化させて繰り返す
   (a) $\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1+3\varepsilon/5$ 近似解を得る
   (b) それを使って，$1+\varepsilon$ 近似的判定問題を解く
2. 所望の T が見つかったら，
   それに対応するスケジュールを出力



1. $P \mid\mid C_{\max}$ の PTAS：近似的判定
2. $P \mid\mid C_{\max}$ の PTAS：ジョブの分類
3. **$P \mid\mid C_{\max}$ の PTAS：動的計画法**

- D. S. Hochbaum, D. B. Shmoys, Using dual approximation algorithms for scheduling problems: Theoretical and practical results. *Journal of the ACM* 34 (1987) pp. 144–162

PTAS：$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する近似

次の問題ができれば十分

$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1+3\varepsilon/5$ 近似的判定問題を解く

- $T \geq \max\left\{\frac{1}{m}\sum_{J_j\in\mathcal{J}} p_j, \max_{J_j\in\mathcal{J}} p_j\right\}$
- $\mathcal{J}_{\mathrm{long}} = \{J_j \mid p_j > \varepsilon T/5\}$
  - 特に，$J_j \in \mathcal{J}_{\mathrm{long}} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{5}T < p_j \leq T$

<u>観察</u>：これが解ければ，

$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1+3\varepsilon/5$ 近似解も見つかる

解きたい問題

入力： $\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$，$L$

出力： No $\Rightarrow \forall\, \sigma \colon C_{\max}(\sigma) > L$

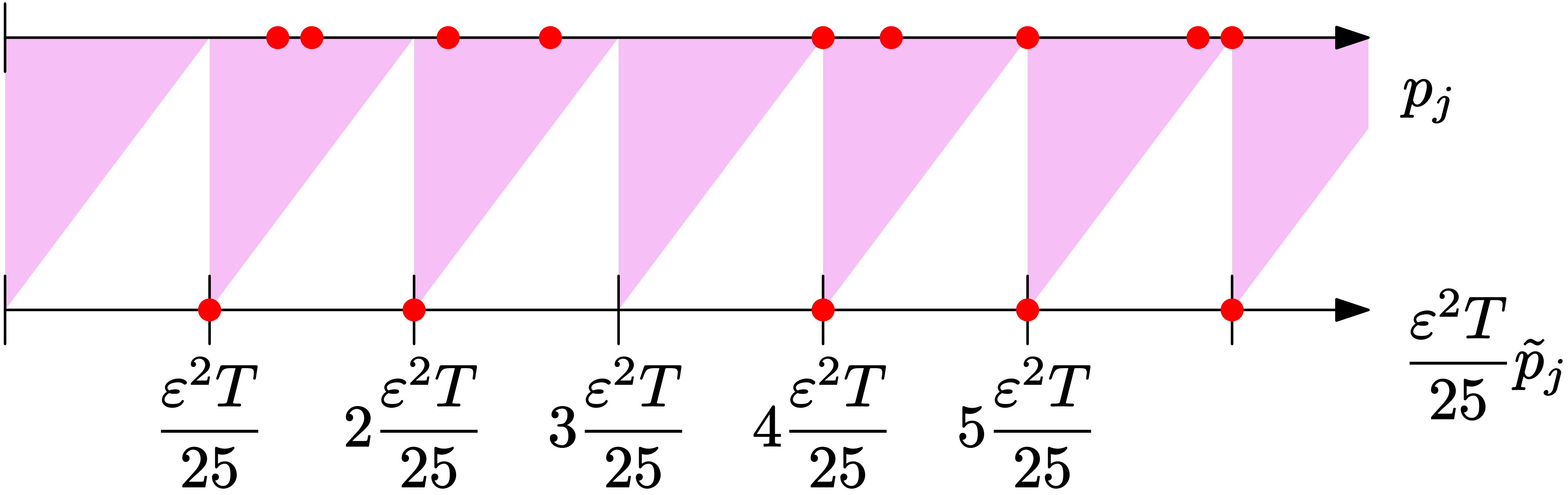
Yes $\Rightarrow \exists\, \sigma \colon C_{\max}(\sigma) \leq (1 + 3\varepsilon/5)L$

このとき，そのような σ も出力

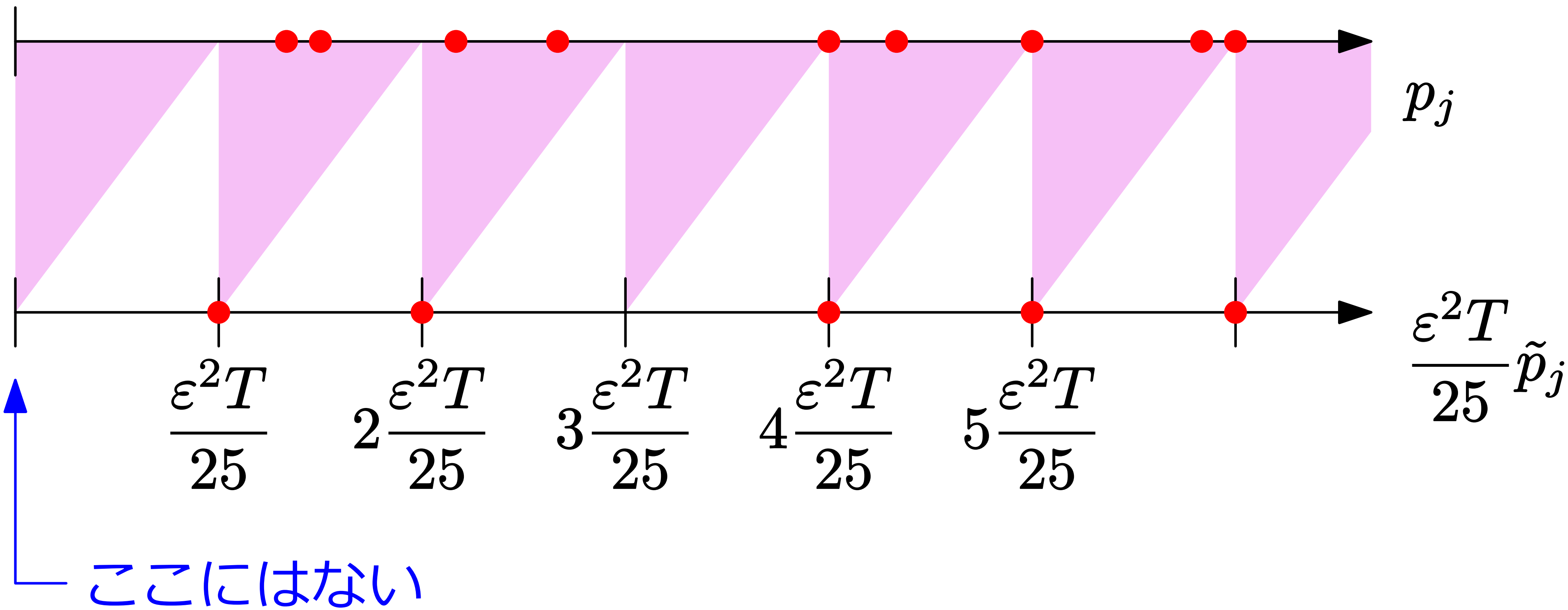
- $T \geq \max\left\{ \dfrac{1}{m} \sum_{J_j \in \mathcal{J}} p_j, \max_{J_j \in \mathcal{J}} p_j \right\}$
- $\mathcal{J}_{\mathrm{long}} = \{J_j \mid p_j > \varepsilon T/5\}$
  - 特に，$J_j \in \mathcal{J}_{\mathrm{long}} \Rightarrow \dfrac{\varepsilon}{5} T < p_j \leq T$

PTAS：丸め

$J_j \in \mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対して，$\tilde{p}_j = \left\lfloor \dfrac{25 p_j}{\varepsilon^2 T} \right\rfloor$

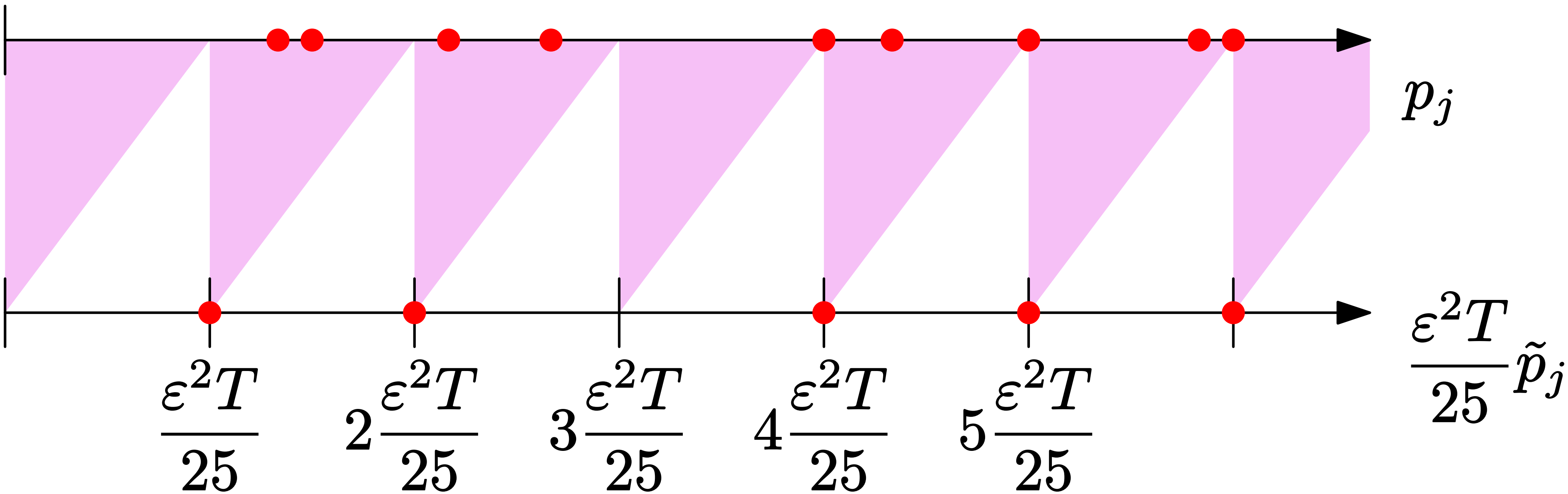


$J_j \in \mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対して，$\tilde{p}_j = \left\lfloor \dfrac{25p_j}{\varepsilon^2 T} \right\rfloor$



あるとすると，$p_j < \dfrac{\varepsilon^2 T}{25} < \dfrac{\varepsilon T}{5}$ となり，$J_j \in \mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に矛盾

$J_j \in \mathcal{J}_{\text{long}}$ に対して，$\tilde{p}_j = \left\lfloor \dfrac{25p_j}{\varepsilon^2 T} \right\rfloor$



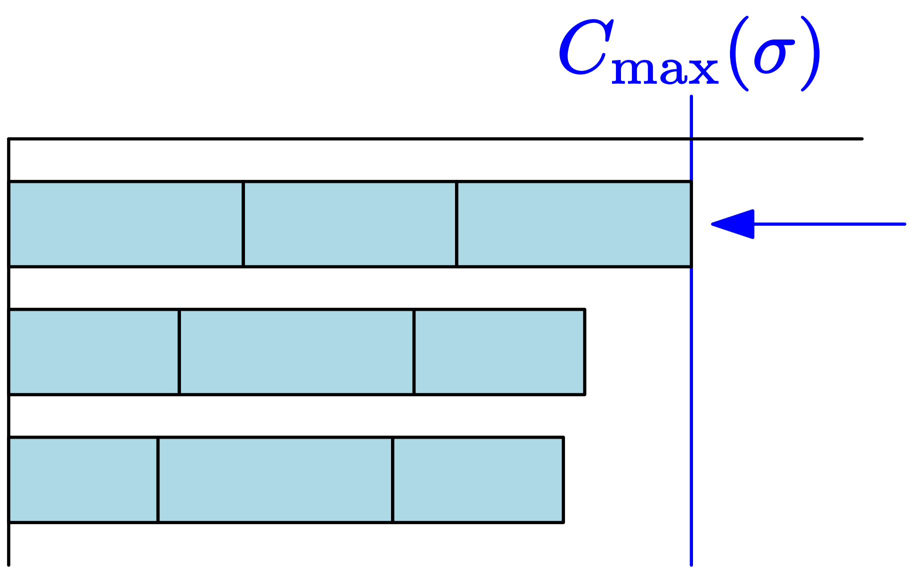
$\tilde{p}_j$ が取り得る値の種類 $\leq \dfrac{T}{\varepsilon^2 T/25} = \dfrac{25}{\varepsilon^2}$

PTAS：丸めの影響

$C_{\max}(\sigma) =$ 元の目的関数，$\tilde{C}_{\max}(\sigma) =$ 丸めた入力の目的関数
$\sigma^* =$ 元の最適解，$\tilde{\sigma}^* =$ 丸めた入力の最適解

$\dfrac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{p}_j \leq p_j < \dfrac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{p}_j + \dfrac{\varepsilon^2 T}{25}$ なので，

$$C_{\max}(\sigma^*) \leq C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) < \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\tilde{\sigma}^*) + \frac{\varepsilon^2 T}{25} \cdot \frac{5}{\varepsilon T} C_{\max}(\tilde{\sigma}^*)$$



ジョブの数 $= k$ とすると

$C_{\max}(\sigma) > k \cdot \dfrac{\varepsilon T}{5}$

$\therefore\ k < \dfrac{5}{\varepsilon T} C_{\max}(\sigma)$

PTAS：丸めの影響

$C_{\max}(\sigma)$ = 元の目的関数， $\tilde{C}_{\max}(\sigma)$ = 丸めた入力の目的関数
σ^* = 元の最適解， $\tilde{\sigma}^*$ = 丸めた入力の最適解

$\frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{p}_j \le p_j < \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{p}_j + \frac{\varepsilon^2 T}{25}$ なので，

$$C_{\max}(\sigma^*) \le C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) < \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\tilde{\sigma}^*) + \frac{\varepsilon^2 T}{25} \cdot \frac{5}{\varepsilon T} C_{\max}(\tilde{\sigma}^*)$$

$$\therefore \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right) C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \le \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \le \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\sigma^*)$$

PTAS：丸めの影響

$C_{\max}(\sigma) =$ 元の目的関数, $\tilde{C}_{\max}(\sigma) =$ 丸めた入力の目的関数
$\sigma^* =$ 元の最適解, $\tilde{\sigma}^* =$ 丸めた入力の最適解

$\frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{p}_j \le p_j < \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{p}_j + \frac{\varepsilon^2 T}{25}$ なので,

$$C_{\max}(\sigma^*) \le C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) < \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\tilde{\sigma}^*) + \frac{\varepsilon^2 T}{25} \cdot \frac{5}{\varepsilon T} C_{\max}(\tilde{\sigma}^*)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right) C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \le \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\tilde{\sigma}^*) &\le \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\sigma^*) \\
&\le \frac{\varepsilon^2 T}{25} \cdot \frac{25}{\varepsilon^2 T} C_{\max}(\sigma^*)
\end{aligned}$$

PTAS：丸めの影響

$C_{\max}(\sigma)$ = 元の目的関数，$\tilde{C}_{\max}(\sigma)$ = 丸めた入力の目的関数
σ^* = 元の最適解，$\tilde{\sigma}^*$ = 丸めた入力の最適解

$\dfrac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{p}_j \leq p_j < \dfrac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{p}_j + \dfrac{\varepsilon^2 T}{25}$ なので，

$$C_{\max}(\sigma^*) \leq C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) < \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\tilde{\sigma}^*) + \frac{\varepsilon^2 T}{25} \cdot \frac{5}{\varepsilon T} C_{\max}(\tilde{\sigma}^*)$$

$$\therefore \left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right) C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \leq \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \leq \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\sigma^*)$$
$$\leq \frac{\varepsilon^2 T}{25} \cdot \frac{25}{\varepsilon^2 T} C_{\max}(\sigma^*)$$

$$\therefore C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \leq \frac{5}{5-\varepsilon} C_{\max}(\sigma^*)$$

PTAS：丸めの影響

$C_{\max}(\sigma)$ = 元の目的関数，$\tilde{C}_{\max}(\sigma)$ = 丸めた入力の目的関数
σ^* = 元の最適解，$\tilde{\sigma}^*$ = 丸めた入力の最適解

$\frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{p}_j \le p_j < \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{p}_j + \frac{\varepsilon^2 T}{25}$ なので，

$$C_{\max}(\sigma^*) \le C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) < \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\tilde{\sigma}^*) + \frac{\varepsilon^2 T}{25}\cdot\frac{5}{\varepsilon T}C_{\max}(\tilde{\sigma}^*)$$

$$\begin{aligned}\therefore \left(1-\frac{\varepsilon}{5}\right)C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \le \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\tilde{\sigma}^*) &\le \frac{\varepsilon^2 T}{25}\tilde{C}_{\max}(\sigma^*)\\ &\le \frac{\varepsilon^2 T}{25}\cdot\frac{25}{\varepsilon^2 T}C_{\max}(\sigma^*)\end{aligned}$$

$$\therefore C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \le \frac{5}{5-\varepsilon}C_{\max}(\sigma^*) \le \left(1+\frac{3}{5}\varepsilon\right)C_{\max}(\sigma^*)$$

PTAS：丸めの影響 (続)

$(1+3\varepsilon/5)$ 近似的判定問題では，L を与える

$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対する $1+3\varepsilon/5$ 近似的判定問題のアルゴリズム

1. 丸めた問題に対する最適解 $\tilde{\sigma}^*$ を見つける
2. $C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) > (1+3\varepsilon/5)L$ ならば，答えは No
   $C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \le (1+3\varepsilon/5)L$ ならば，答えは Yes

- $C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) > (1+3\varepsilon/5)L$ のとき
  - $C_{\max}(\sigma^*) \ge \frac{1}{1+3\varepsilon/5}C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) > L$ なので
    $(1+3\varepsilon/5)$ 近似的判定問題の答えは「No」

- $C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \le (1+3\varepsilon/5)L$ のとき
  - $C_{\max}(\sigma^*) \le C_{\max}(\tilde{\sigma}^*) \le (1+3\varepsilon/5)L$ なので，
    $(1+3\varepsilon/5)$ 近似的判定問題の答えは「Yes」

PTAS：丸めた問題に対する最適解？

実際は

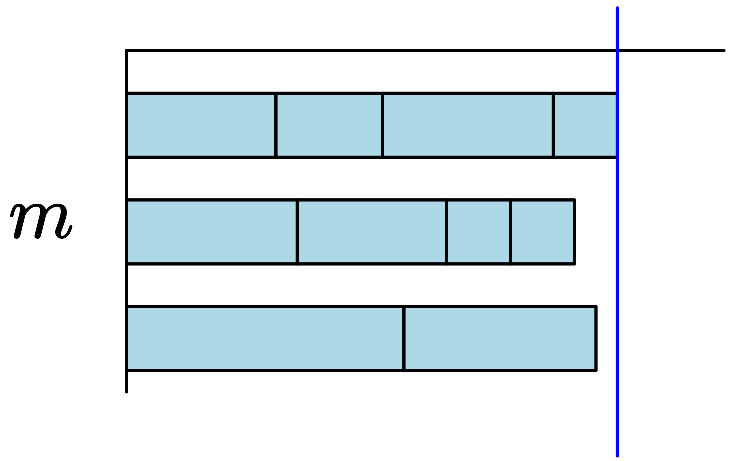
問題
「与えた K に対して，丸めた問題の最適値 $\leq K$ か？」
を解いて，二分探索により，
丸めた問題の最適解 $\tilde{\sigma}^*$ を見つける

$J_j \in \mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ に対して，$\tilde{p}_j = \left\lfloor \dfrac{25p_j}{\varepsilon^2 T} \right\rfloor$

$\tilde{p}_j$ が取り得る値 $\in \left\{1, 2, \ldots, \underline{\left\lfloor \dfrac{25}{\varepsilon^2} \right\rfloor}\right\}$

$\tilde{p}_j$ が取り得る値の種類 $\leq \dfrac{25}{\varepsilon^2}$　　$= U$

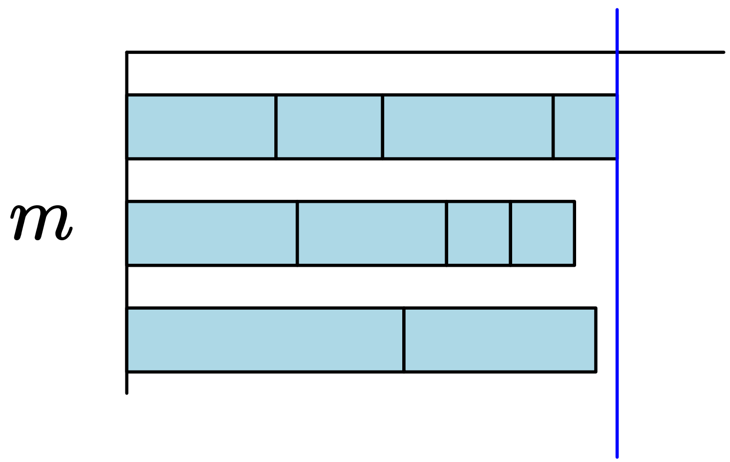
解きたい問題：



最適な最大完了時刻 $\gtreqless K$?

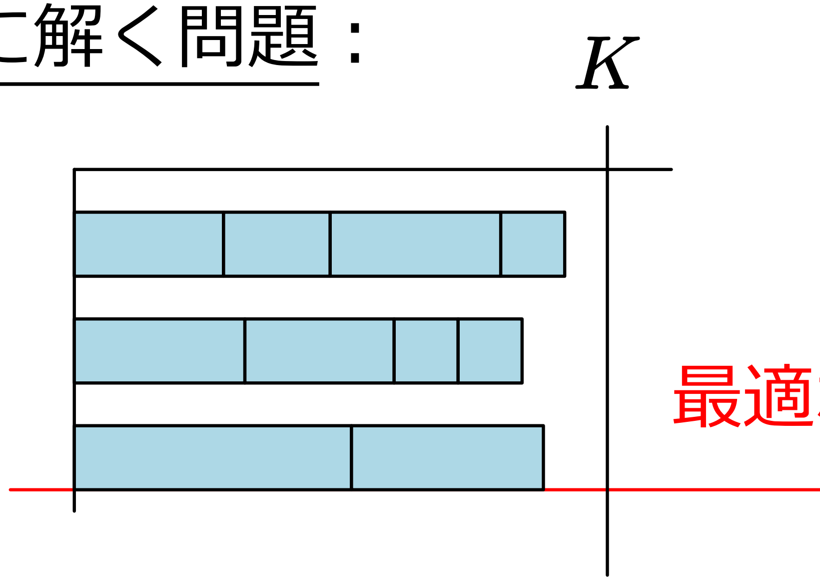
PTAS のアイディア 3：解き方

解きたい問題：



最適な最大完了時刻 $\gtreqless K$？

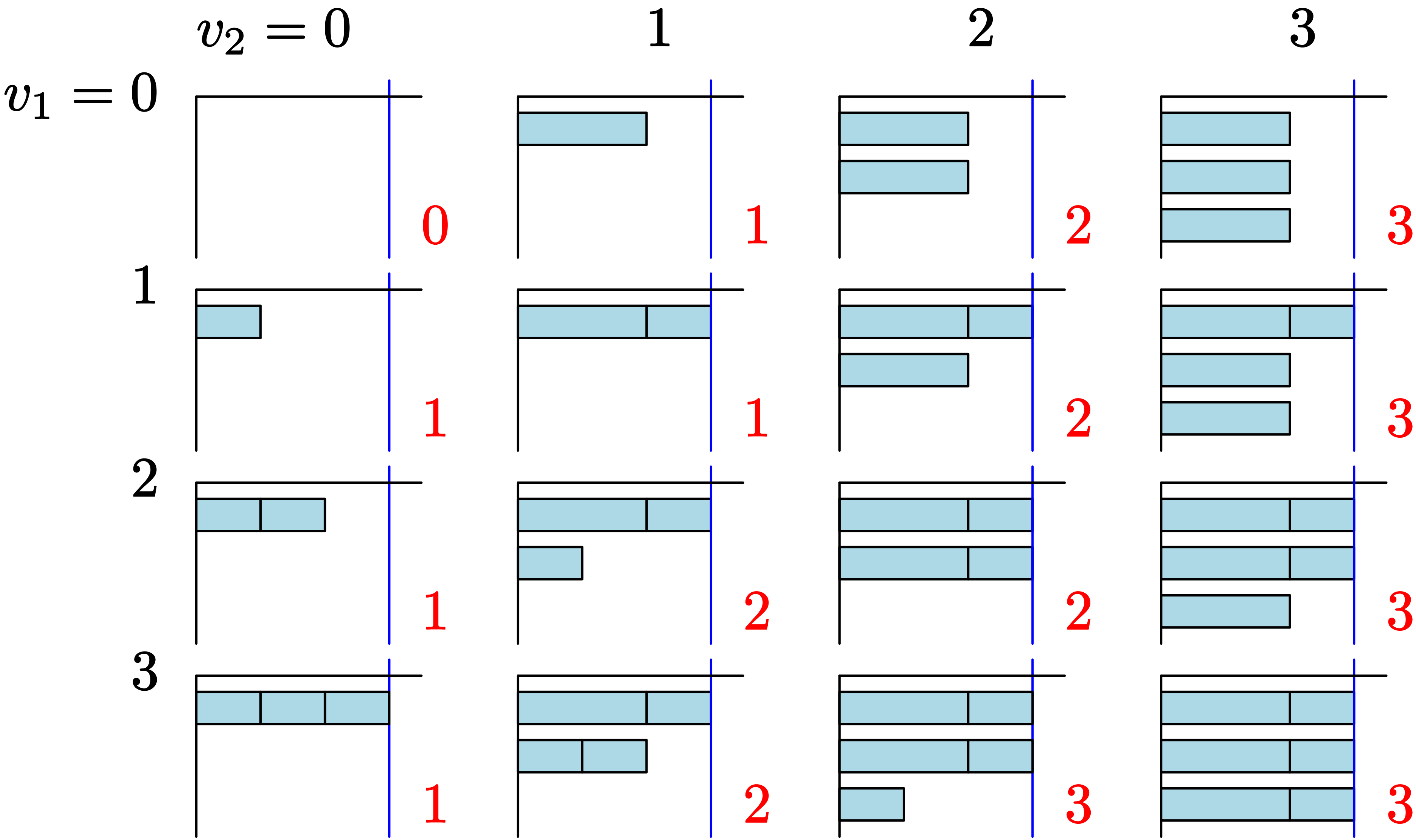
実際に解く問題：



最適な機械数 $\gtreqless m$？

PTAS のアイディア 3：解き方 (例)

$U = 2,\ K = 3$ のとき



丸めた問題：動的計画法 (状態，状態の値)

状態 $(v_1, v_2, \ldots, v_U) \in (\{0\} \cup [n])^U$

v_i：$\tilde{p}_j = i$ であるジョブ $J_j \in \mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ の数

状態の値 $F(v_1, v_2, \ldots, v_U) =$

$\mathcal{J}_{\mathrm{long}}$ の中から
$\tilde{p}_j = i$ であるジョブを v_i 個持ってきたとき，
それらを期限 K 以内で処理するのに
必要な 機械数の最小数
(そのようにジョブが持ってこれないときは，
$+\infty$)

丸めた問題：動的計画法 (再帰)

$\boxed{\text{再帰式}}$ $F(0, 0, \ldots, 0) = 0$

$(v_1, v_2, \ldots, v_U) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ のとき

$v_1 + 2v_2 + \cdots + Uv_U \leq K$ のとき

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_U) = 1$$

$(v_1, v_2, \ldots, v_U)$ のように，ジョブを持ってこれないとき

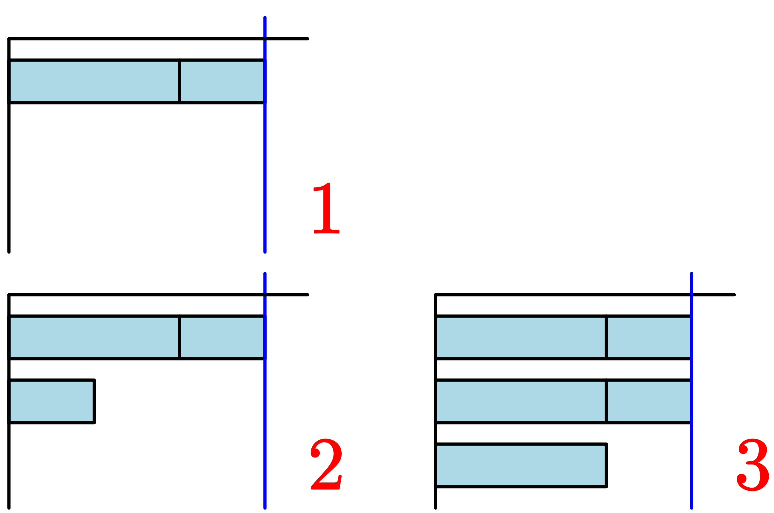
$$F(v_1, v_2, \ldots, v_U) = +\infty$$

再帰式

$(v_1, v_2, \ldots, v_U) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ のとき

その他のとき

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_U) = \min \left\{ 1 + F(w_1, w_2, \ldots, w_U) \,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \leq w_1 \leq v_1, \ldots, 0 \leq w_U \leq v_U, \\ w_1 + \cdots + w_U < v_1 + \cdots + v_U, \\ F(v_1 - w_1, \ldots, v_U - w_U) = 1 \end{array} \right\}$$



丸めた入力において，$\tilde{p}_j = i$ となるジョブの数 $= n_i$ とする

$\boxed{\text{出力}}$

$F(n_1, n_2, \ldots, n_U) \le m$ のとき，Yes を出力

$F(n_1, n_2, \ldots, n_U) > m$ のとき，No を出力

丸めた問題：動的計画法 (計算量)

- 状態の総数 $= O(n^U)$
- 各状態の値を定めるのにかかる計算量 $= O(n^U)$

$\rightsquigarrow$ 全体の計算量 $= O(n^{2U}) = O(n^{50/\varepsilon^2})$

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_U) = \min \left\{ 1 + F(w_1, w_2, \ldots, w_U) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le w_1 \le v_1, \ldots, 0 \le w_U \le v_U, \\ w_1 + \cdots + w_U < v_1 + \cdots + v_U, \\ F(v_1 - w_1, \ldots, v_U - w_U) = 1 \end{array} \right\}$$

PTAS：全体像

PTAS の全体像

1. 二分探索により，T を変化させて繰り返す
   (a) 二分探索により，K を変化させて繰り返す
      i. 動的計画法で，丸めた問題に対する最適な機械数を計算する
   (b) 所望の K と対応するスケジュールが見つかったら，それを使って，ε 近似的判定問題を解く
2. 所望の T が見つかったら，それに対応するスケジュールを出力

PTAS：全体像 — 計算量

PTAS の全体像

1. 二分探索により，T を変化させて繰り返す
   (a) 二分探索により，K を変化させて繰り返す
      i. 動的計画法で，丸めた問題に対する最適な機械数を計算する
   (b) 所望の K と対応するスケジュールが見つかったら，それを使って，$1+\varepsilon$ 近似的判定問題を解く
2. 所望の T が見つかったら，それに対応するスケジュールを出力

反復回数 $= O(\log \sum_j p_j)$

PTAS：全体像 ― 計算量

PTASの全体像

1. 二分探索により，T を変化させて繰り返す
   (a) 二分探索により，K を変化させて繰り返す
      i. 動的計画法で，丸めた問題に対する
         最適な機械数を計算する
   (b) 所望の K と対応するスケジュールが見つかったら，
       それを使って，$1+\varepsilon$ 近似的判定問題を解く
2. 所望の T が見つかったら，
   それに対応するスケジュールを出力

反復回数 $= O(\log(n/\varepsilon))$

反復回数 $= O(\log \sum_j p_j)$

PTAS の全体像

1. 二分探索により，T を変化させて繰り返す
   (a) 二分探索により，K を変化させて繰り返す
      i. 動的計画法で，丸めた問題に対する最適な機械数を計算する
   (b) 所望の K と対応するスケジュールが見つかったら，それを使って，$1+\varepsilon$ 近似的判定問題を解く
2. 所望の T が見つかったら，それに対応するスケジュールを出力

動的計画法の計算量 $= O(n^{50/\varepsilon^2})$

反復回数 $= O(\log(n/\varepsilon))$

反復回数 $= O(\log \sum_j p_j)$

PTAS の全体像

1. 二分探索により，T を変化させて繰り返す
   (a) 二分探索により，K を変化させて繰り返す
      i. 動的計画法で，丸めた問題に対する最適な機械数を計算する
   (b) 所望の K と対応するスケジュールが見つかったら，それを使って，$1+\varepsilon$ 近似的判定問題を解く
2. 所望の T が見つかったら，それに対応するスケジュールを出力

動的計画法の計算量 $= O(n^{50/\varepsilon^2})$

反復回数 $= O(\log(n/\varepsilon))$

反復回数 $= O(\log \sum_j p_j)$

全体の計算量

$= O(n^{50/\varepsilon^2} \log(n/\varepsilon) \log \sum_j p_j)$

全体のまとめ

本講義の目標：次の 2 つができるようになること

目標 1

基本的なアルゴリズム設計技法 を使って
基本的なスケジューリング問題 を解けるようになる

目標 2

問題の数学的構造がアルゴリズム設計指針を与える
という重要な考え方を実践する

メッセージ：数学的な考え方からアルゴリズムが得られる

多くの組合せ最適化問題は次のどちらかに分類される

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最大流問題
- . . .

多項式時間アルゴリズムで解ける

解きにくい問題

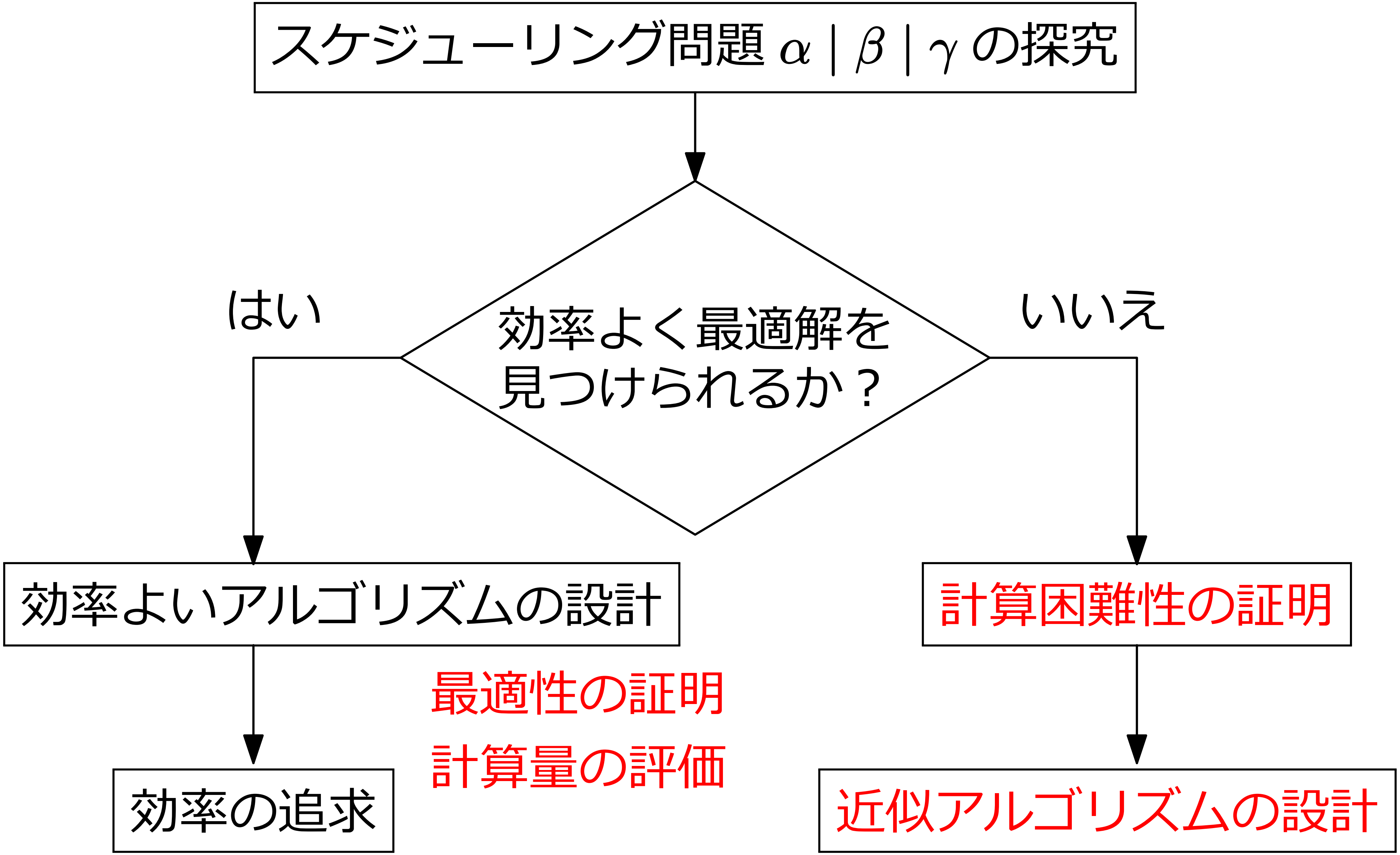
- 巡回セールスマン問題
- 最小 Steiner 木問題
- ナップサック問題
- . . .

NP 困難である

問 1：どのスケジューリング問題が解きやすい/にくいのか？

問 2：この違いは何に起因するのか？

全体のまとめ


スケジューリング問題 $\alpha \mid \beta \mid \gamma$ の探究
効率よく最適解を見つけられるか？
はい
いいえ
効率よいアルゴリズムの設計
計算困難性の証明
最適性の証明
計算量の評価
効率の追求
近似アルゴリズムの設計