離散最適化基礎論

ジョブ・スケジューリングのアルゴリズム

第 5 回

計算複雑性による問題の分類

岡本 吉央　(電気通信大学)

okamotoy@uec.ac.jp

2024 年 11 月 12 日

最終更新：2024 年 11 月 13 日　14:01

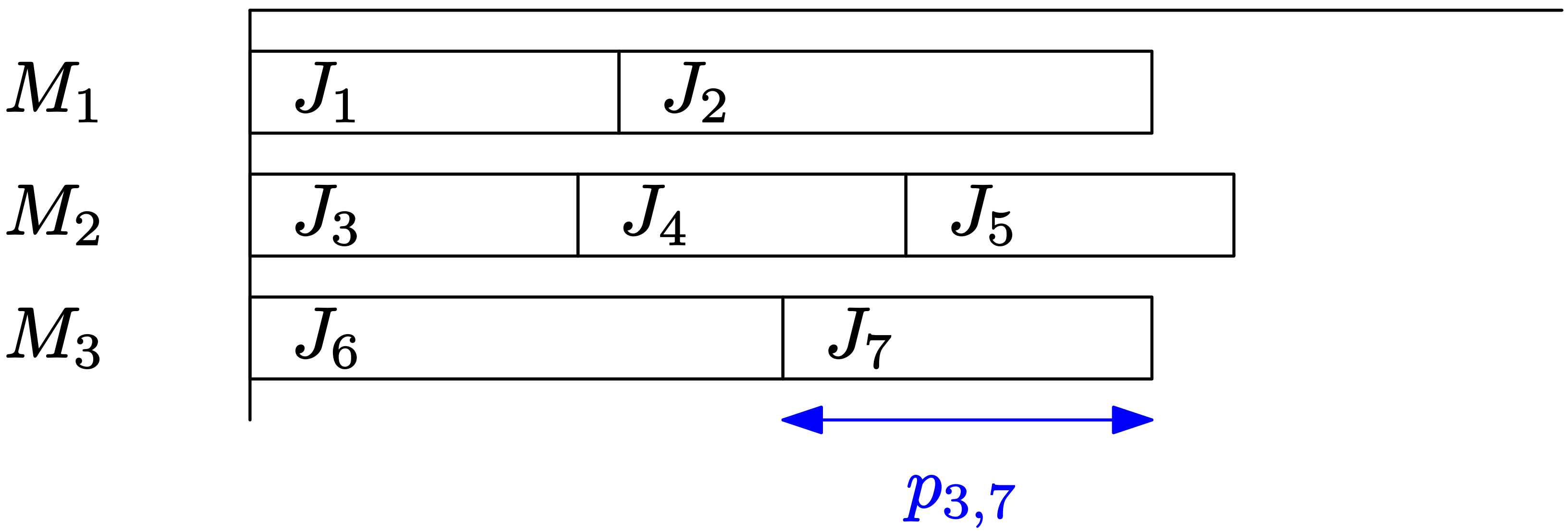
スケジュール (前半)

1. スケジューリング問題の分類	(10/1)
＊ 休み (出張)	(10/8)
＊ 休み (体育祭)	(10/15)
2. 整列による解法	(10/22)
3. 動的計画法	(10/29)
4. NP 困難性と計算量の分類	(11/5)
5. **計算複雑性による問題の分類**	(11/12)
6. リスト・スケジューリング	(11/19)

スケジュール (後半)

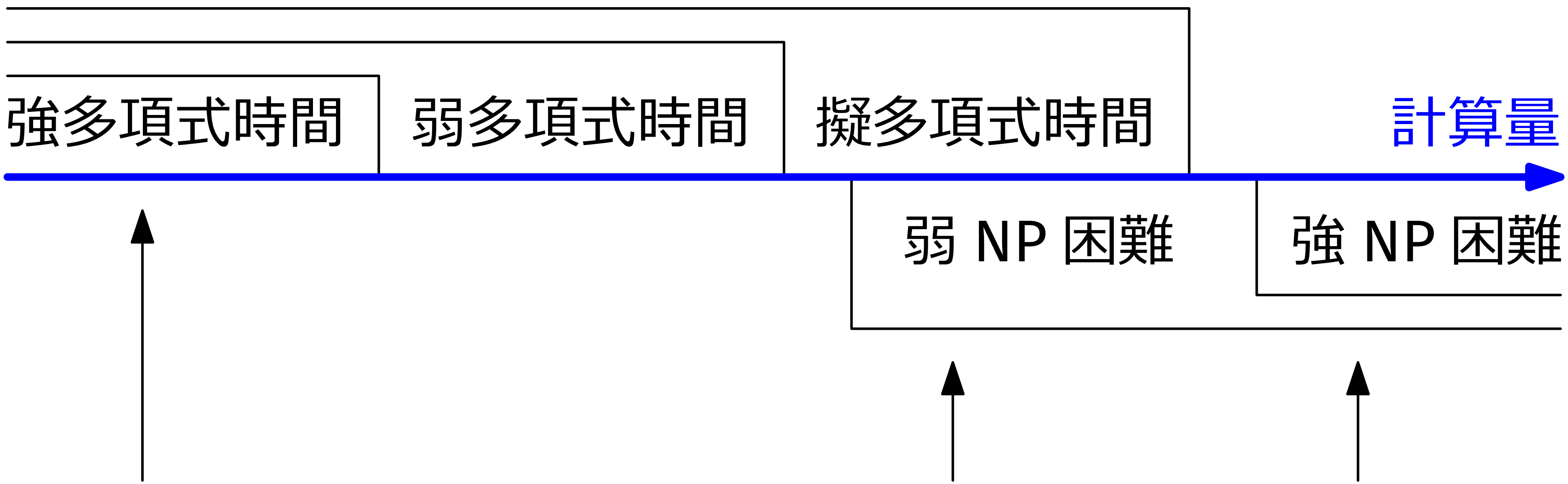
7.	先行制約：基礎	(11/26)
*	休み (秋ターム試験)	(12/3)
8.	先行制約：多機械	(12/10)
9.	先行制約：他の半順序	(12/17)
10.	ショップ・スケジューリング：基礎	(12/24)
*	休み (冬季休業)	(12/31)
11.	ショップ・スケジューリング：機械数が定数	(1/7)
12.	ショップ・スケジューリング：機械数が可変	(1/14)
13.	近似可能性と近似不可能性	(1/21)
14.	多項式時間近似スキーム	(1/28)
*	なし	(2/4)

ジョブ・スケジューリングの構成要素



- 機械の集合　$\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$
  添字 $i \in \{1, 2, \ldots, m\} =: [m]$
- ジョブの集合 (仕事)　$\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$
  添字 $j \in \{1, 2, \ldots, n\} =: [n]$
- 処理時間　$p \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^{m \times n}$ (非負有理数の行列)
  $p_{ij} = M_i$ における J_j の処理時間

[復習]：多項式時間と NP 困難



$1 \mid\mid C_{\max}$

$1 \mid\mid \sum C_j$

$1 \mid\mid L_{\max}$

$1 \mid\mid \sum U_j$

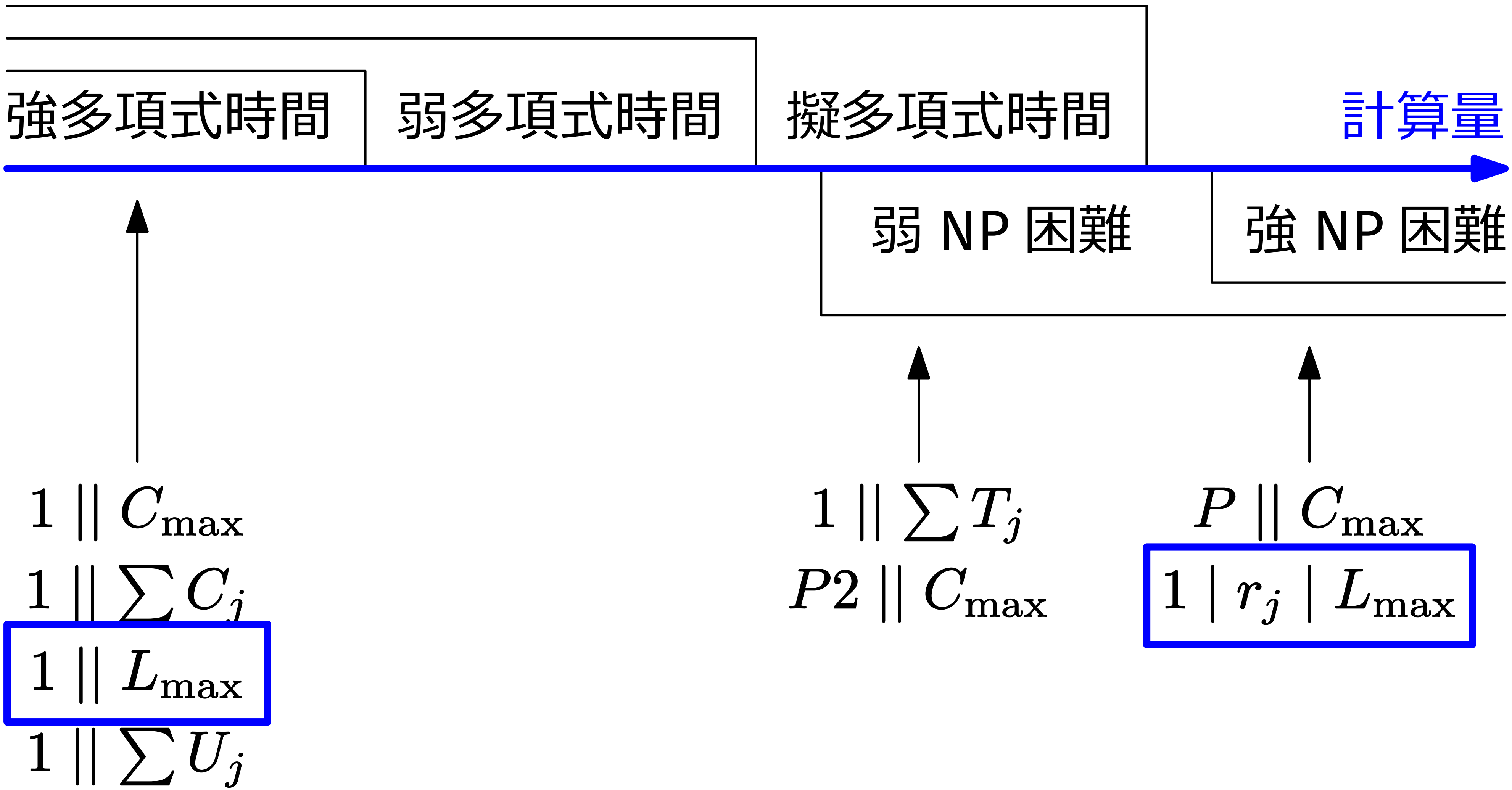
$1 \mid\mid \sum T_j$

$P2 \mid\mid C_{\max}$

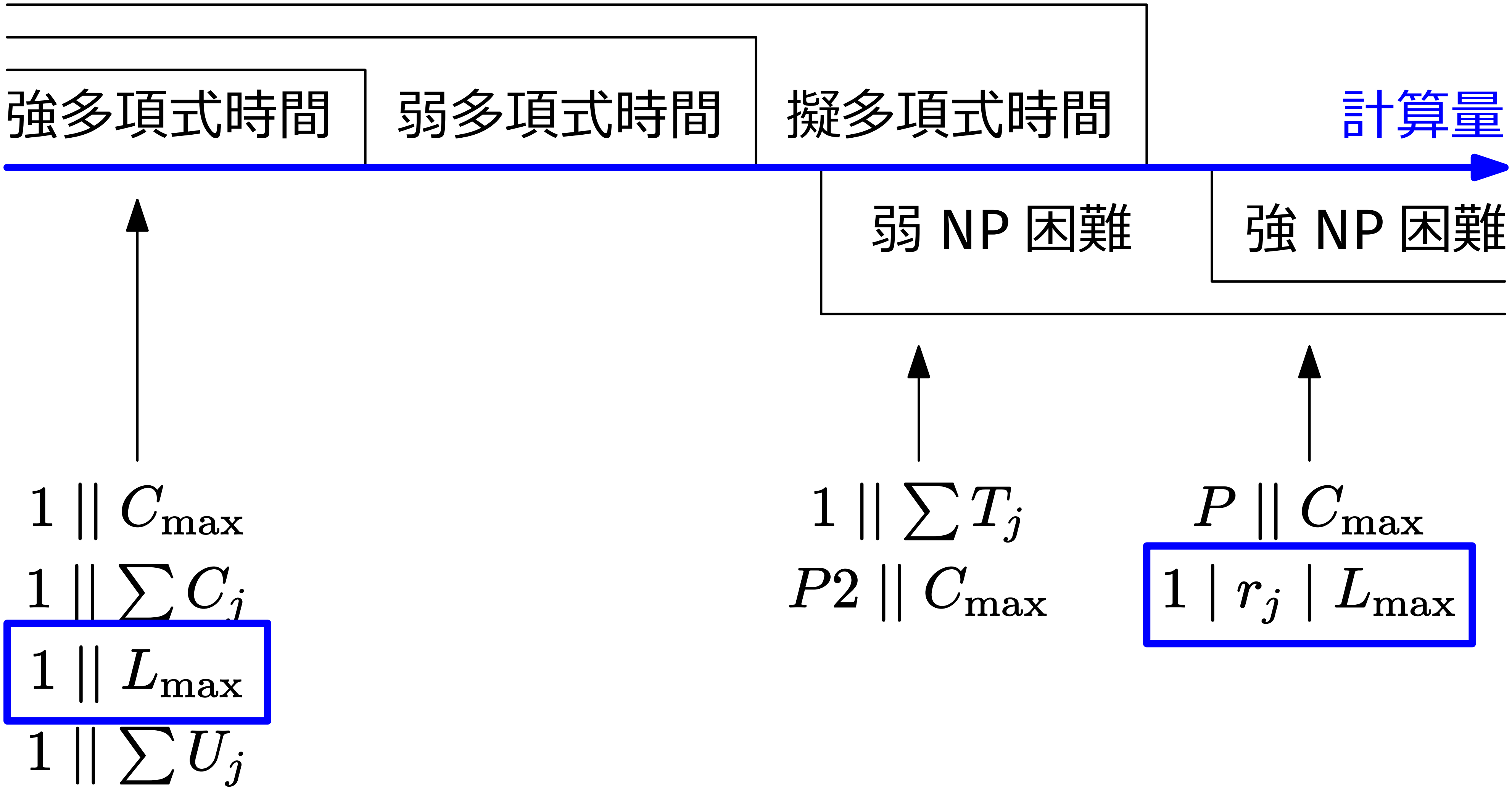
$P \mid\mid C_{\max}$

$1 \mid r_j \mid L_{\max}$

[復習]：多項式時間と NP 困難



[復習]：多項式時間と NP 困難



観察？

到着時刻 r_j が問題を難しくしている？

今日の内容

目標

ジョブ・スケジューリング問題の間の関係 を
計算複雑性の観点から調査 する方法を身に付ける

- 機械の環境 α
- 最適化する目的 γ
- ジョブの特性 β

- B. J. Lageweg, J. K. Lenstra, E. L. Lawler, A. H. G. Rinnooy Kan, Computer-aided complexity classification of combinatorial problems. *Communications of the ACM* 25 (1982) pp. 817–822.

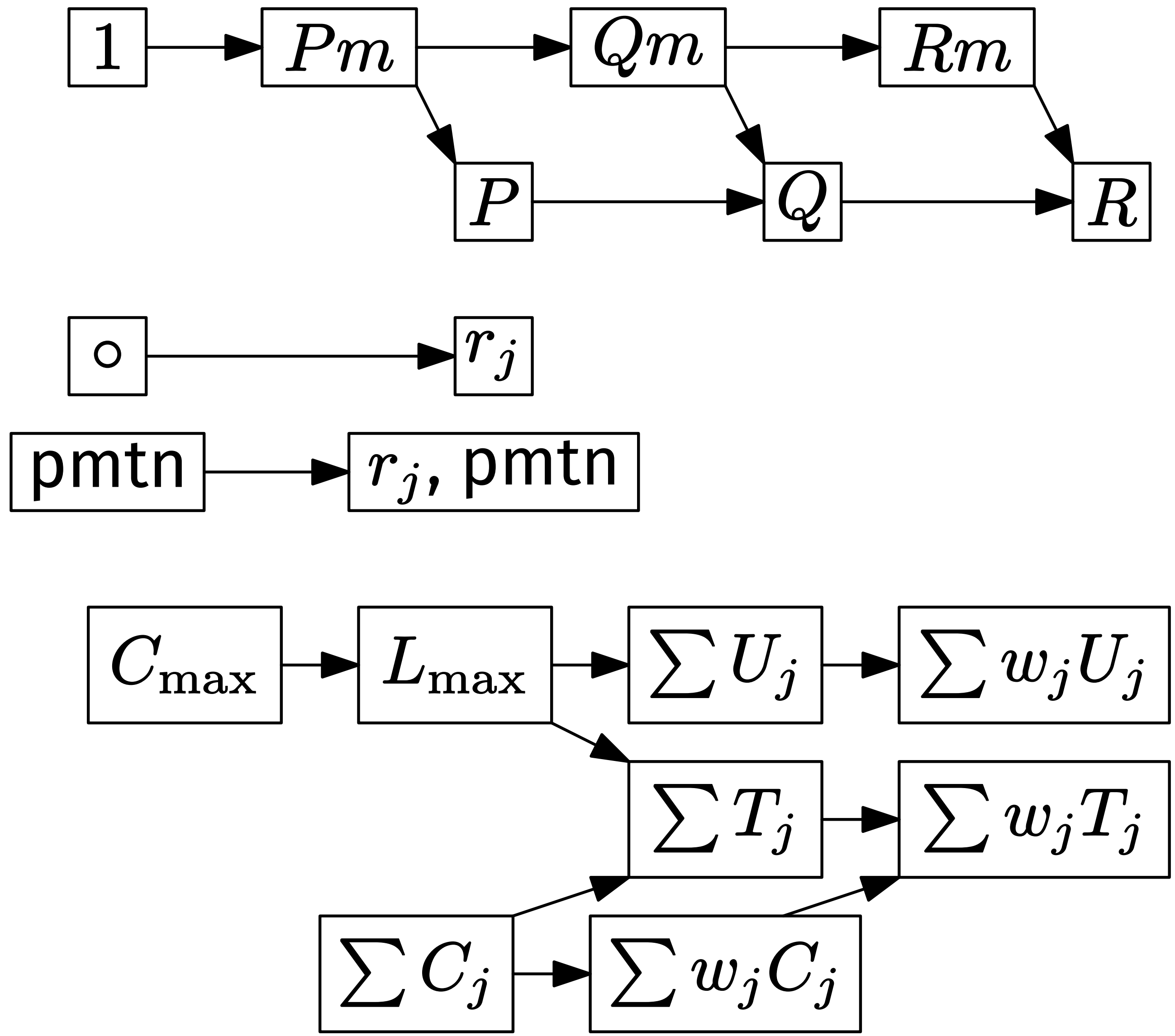
今日のまとめ

計算量

α　機械の環境

β　ジョブの特性

γ　最適化の目的



本日の内容

1. **機械の環境に基づく問題間の関係**
2. 最適化の目的に基づく問題間の関係
3. ジョブの特性に基づく問題間の関係

- B. J. Lageweg, J. K. Lenstra, E. L. Lawler, A. H. G. Rinnooy Kan, Computer-aided complexity classification of combinatorial problems. *Communications of the ACM* 25 (1982) pp. 817–822.

機械の環境：まとめ

- 1：一機械
- Pm：同一並列機械　(機械数 m)
- Qm：一様並列機械　(機械数 m)
- Rm：無関係並列機械　(機械数 m)

- P：同一並列機械　(機械数の指定なし (可変))
- Q：一様並列機械　(機械数の指定なし (可変))
- R：無関係並列機械　(機械数の指定なし (可変))

後半で，Jm, Fm, Om が登場する予定

同一，一様，無関係

ジョブが n 個，機械が m 台

- $\alpha = P$：**同一並列機械**
  - 各ジョブ J_j に $p_j > 0$ が与えられて，各機械 M_i に対して
    $$p_{i,j} = p_j$$
- $\alpha = Q$：**一様並列機械**
  - 各ジョブに対して，$p_j > 0$ が与えられ，各機械 M_i に対して $s_i > 0$ が与えらえて，$p_{i,j} = p_j / s_i$ と書ける
- $\alpha = R$：**無関係並列機械**
  - $p_{i,j}$ = ジョブ J_j を機械 M_i で処理する時間

同一，一様，無関係

ジョブが n 個，機械が m 台

- $\alpha = P$：**同一並列機械**
  - 各ジョブ J_j に $p_j > 0$ が与えられて，各機械 M_i に対して

    $p_{i,j} = p_j$

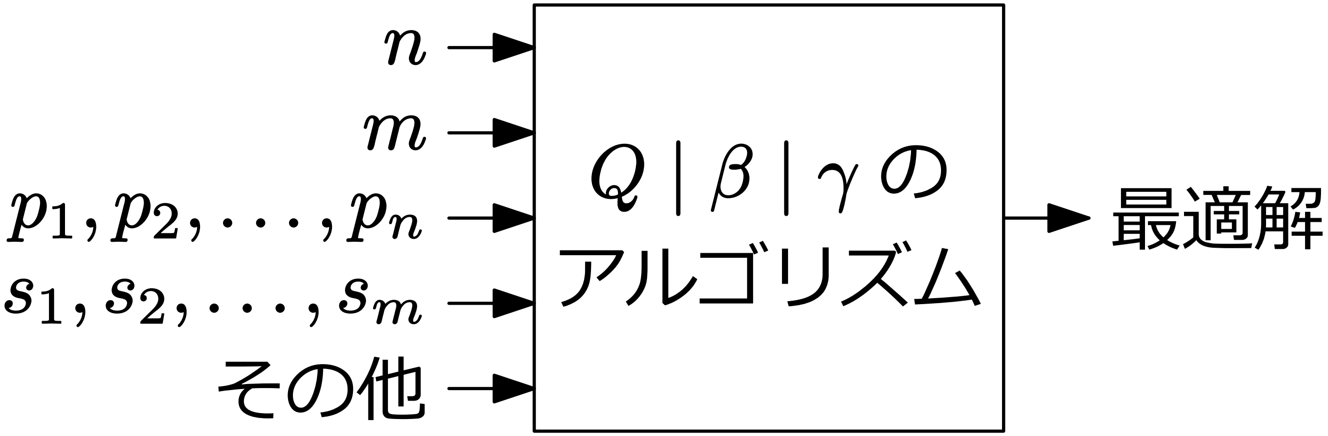
- $\alpha = Q$：**一様並列機械**
  - 各ジョブに対して，$p_j > 0$ が与えられ，各機械 M_i に対して $s_i > 0$ が与えらえて，$p_{i,j} = p_j / s_i$ と書ける

- $\alpha = R$：**無関係並列機械**
  - $p_{i,j}$ = ジョブ J_j を機械 M_i で処理する時間

つまり，P は Q の特別な場合で，Q は R の特別な場合

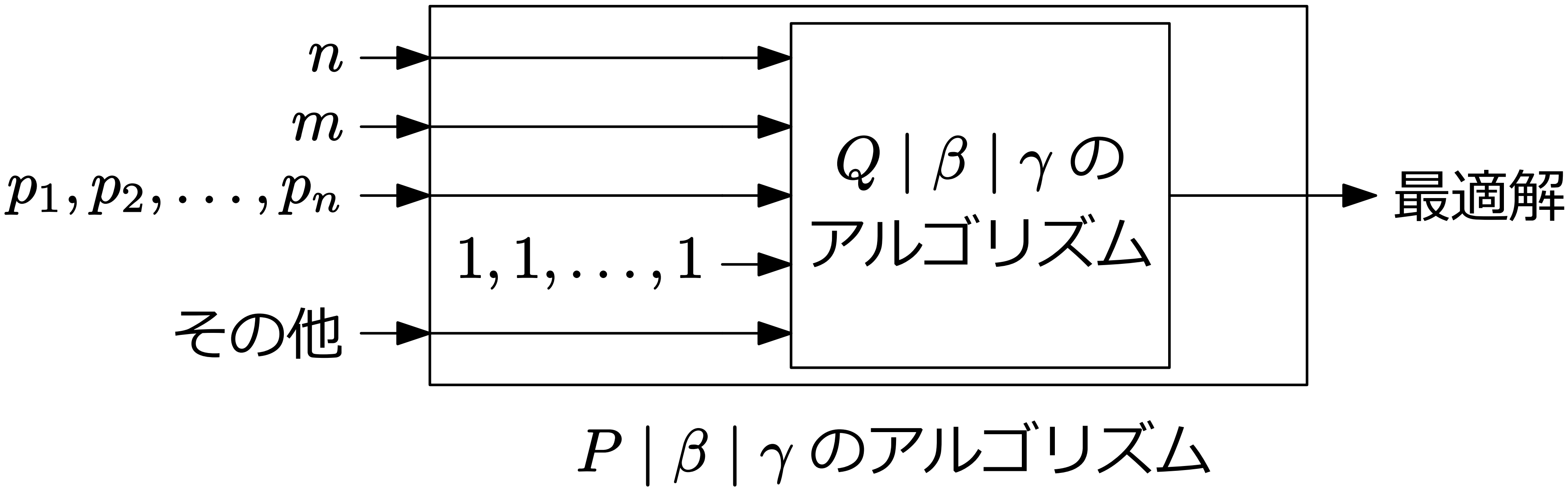
性質：$P \to Q$

問題 $Q \mid \beta \mid \gamma$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $P \mid \beta \mid \gamma$ は多項式時間で解ける



性質：$P \to Q$

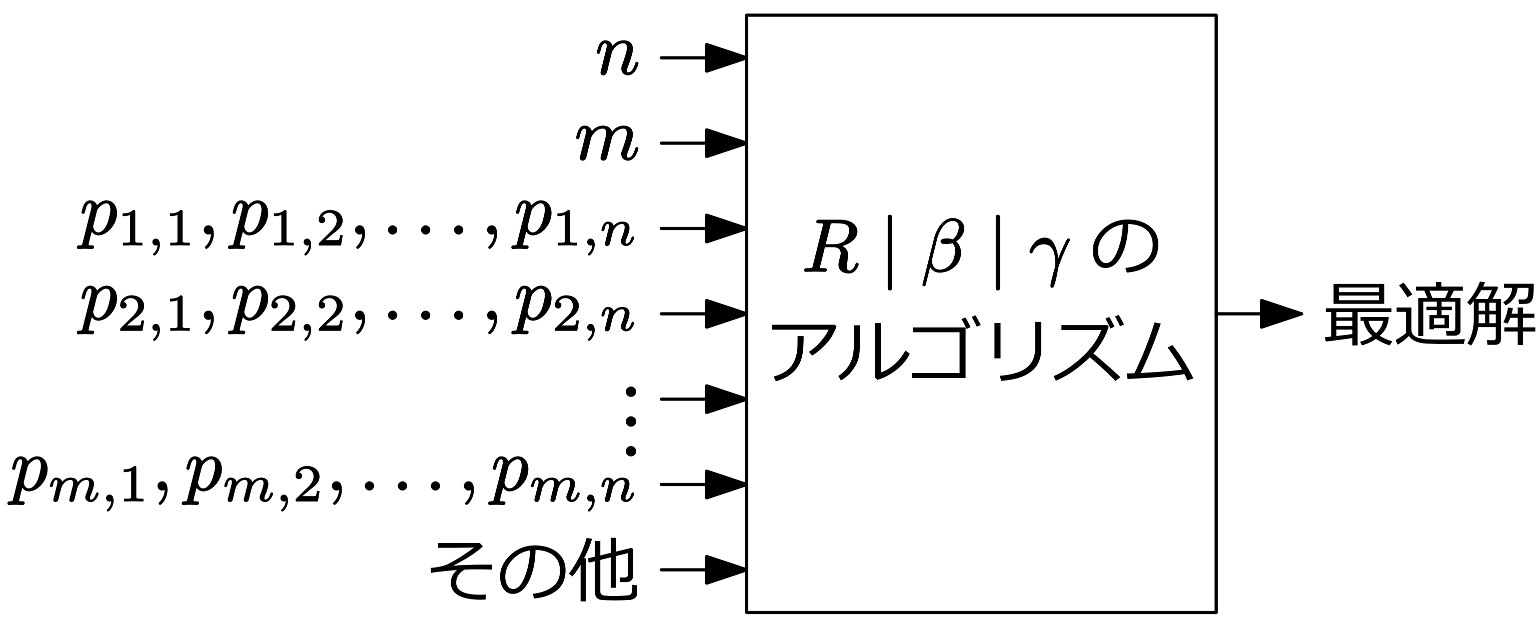
問題 $Q \mid \beta \mid \gamma$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $P \mid \beta \mid \gamma$ は多項式時間で解ける



$Q \to R$

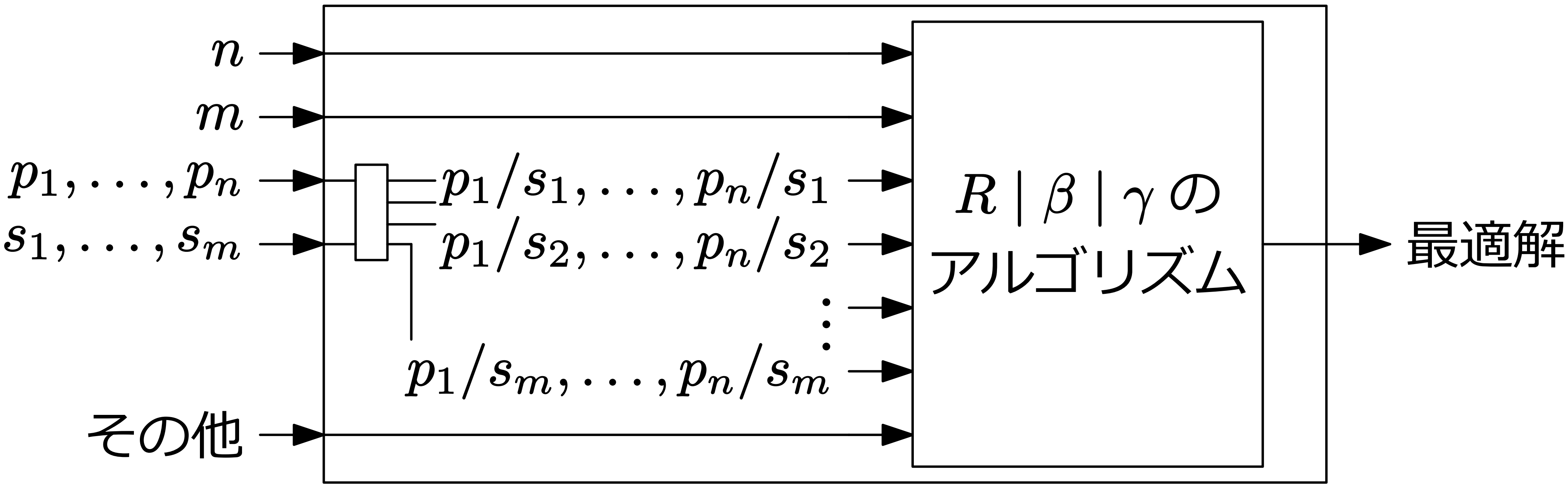
性質：$Q \to R$

問題 $R \mid \beta \mid \gamma$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $Q \mid \beta \mid \gamma$ は多項式時間で解ける

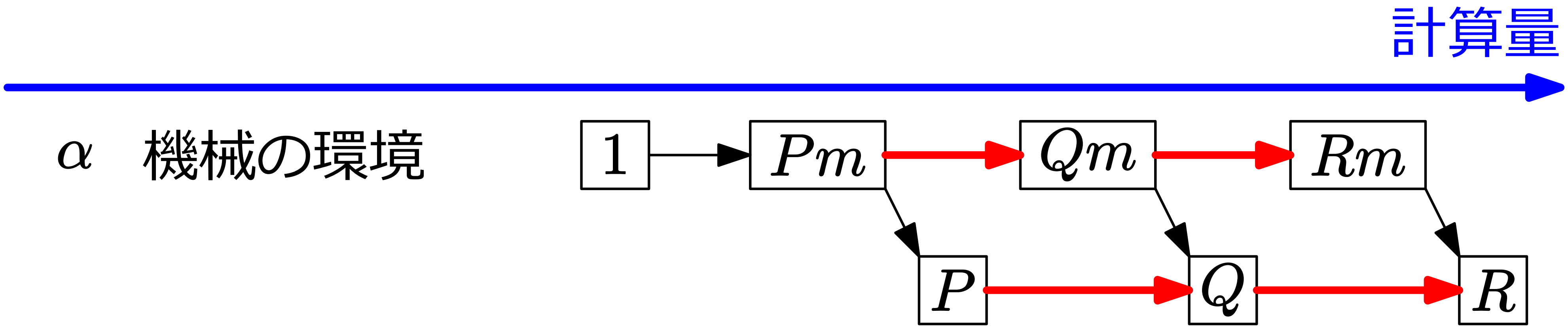


性質：$Q \to R$

問題 $R \mid \beta \mid \gamma$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $Q \mid \beta \mid \gamma$ は多項式時間で解ける



$Q \mid \beta \mid \gamma$ のアルゴリズム

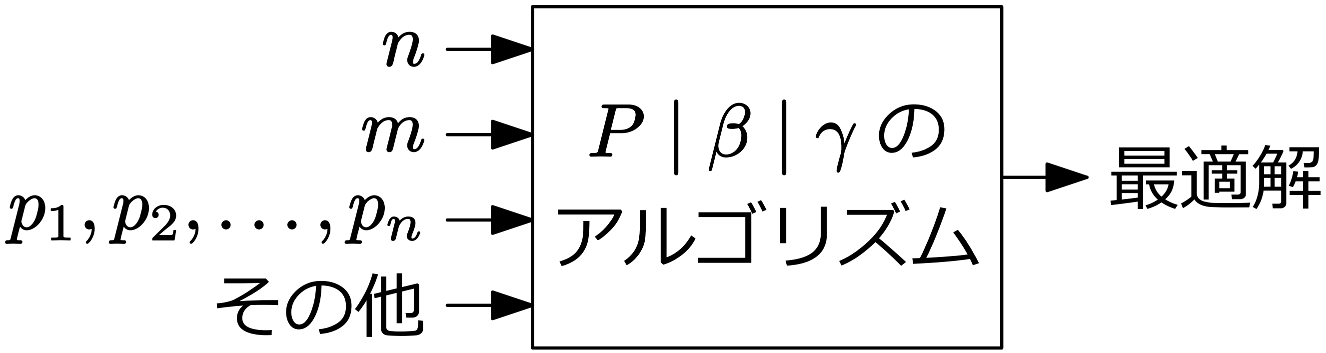


$Pm \to Qm$ と $Qm \to Rm$ も同様に正しいと分かる

$Pm \to P$

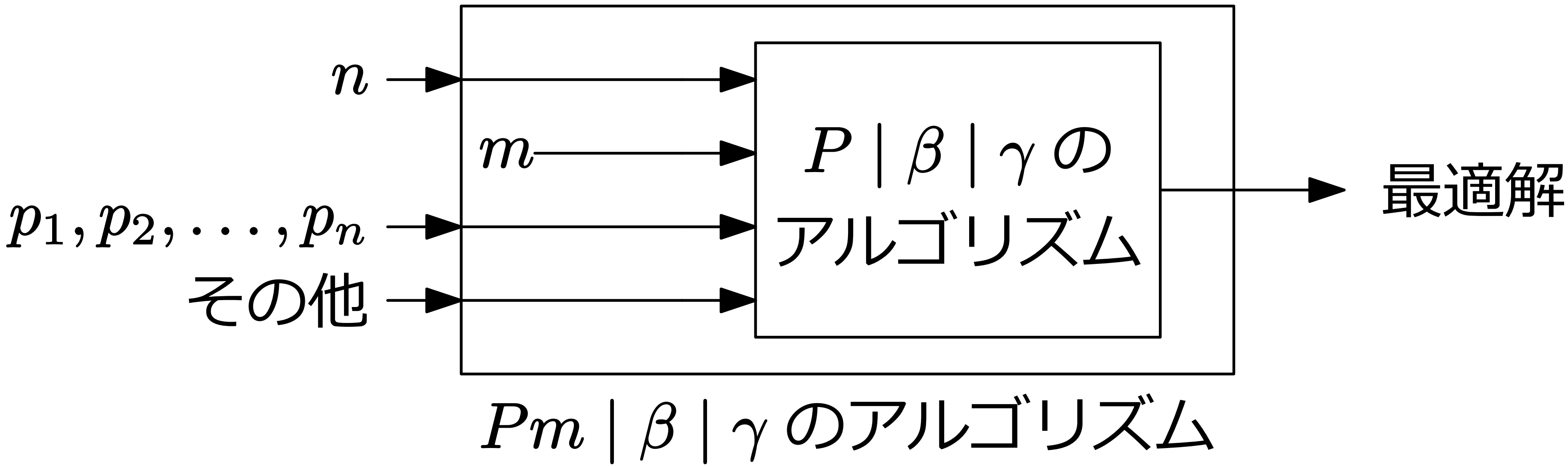
性質：$Pm \to P$

問題 $P \mid \beta \mid \gamma$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 任意の整数 $m \geq 1$ に対して，
問題 $Pm \mid \beta \mid \gamma$ は多項式時間で解ける



性質：$Pm \to P$

問題 $P \mid \beta \mid \gamma$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 任意の整数 $m \geq 1$ に対して，
問題 $Pm \mid \beta \mid \gamma$ は多項式時間で解ける

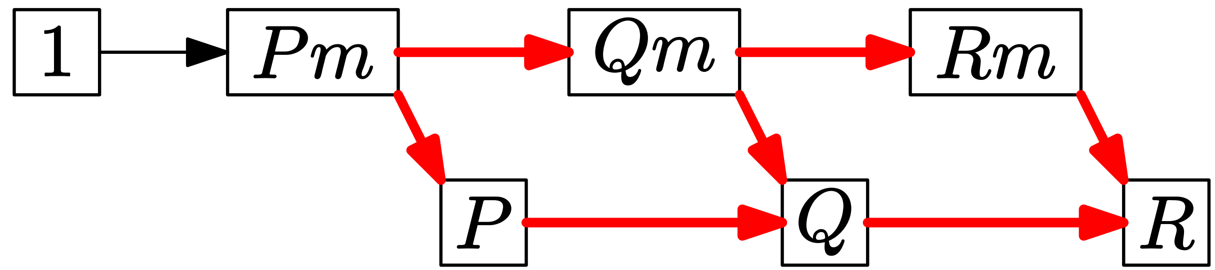


$Qm \to Q$ と $Rm \to R$ も同様に正しいことが分かる

機械の環境：まとめ

計算量

α　機械の環境



$1 \to Pm$ はすぐ分かる ($m = 1$ とすればよい)

機械の環境：まとめ

計算量 →

α　機械の環境

$$\begin{tikzcd} \boxed{1} \arrow[r] & \boxed{Pm} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{Qm} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{Rm} \arrow[d] \\ & \boxed{P} \arrow[r] & \boxed{Q} \arrow[r] & \boxed{R} \end{tikzcd}$$

$1 \to Pm$ はすぐ分かる ($m = 1$ とすればよい)

帰結 (の 1 つ)

問題 $Q \,||\, C_{\max}$，$R \,||\, C_{\max}$ は強 NP 困難

$\because$ 前回，問題 $P \,||\, C_{\max}$ が強 NP 困難であると証明したから

注：ここで確認した性質 (8 つの矢印) は
「多項式時間」を「擬多項式時間」としても成立する

本日の内容

1. 機械の環境に基づく問題間の関係
2. **最適化の目的に基づく問題間の関係**
3. ジョブの特性に基づく問題間の関係

- W. E. Smith, Various optimizers for single-stage production. *Naval Research Logistics Quarterly* 3 (1956) pp. 59–66.
- R. K. Karp, Reducibility Among Combinatorial Problems. In R. E. Miller, J. W. Thatcher (eds.). *Complexity of Computer Computations*. Plenum, 1972, pp. 85–103.
- E. L. Lawler, A “pseudopolynomial” algorithm for sequencing jobs to minimize total tardiness. *Annals of Discrete Mathematics* 1 (1977) 331–342.

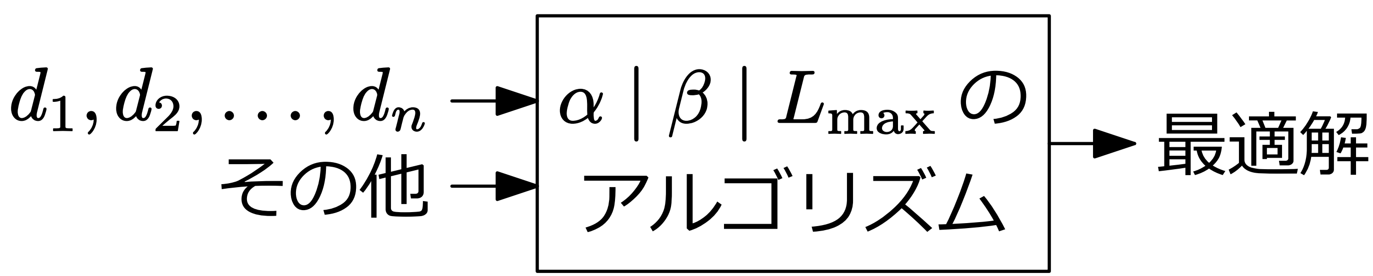
$C_{\max} \to L_{\max}$

復習：$C_{\max}$：最大完了時刻，$L_{\max}$：最大納期ずれ

$$L_j = C_j - d_j$$

性質：$C_{\max} \to L_{\max}$

問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid C_{\max}$ は多項式時間で解ける



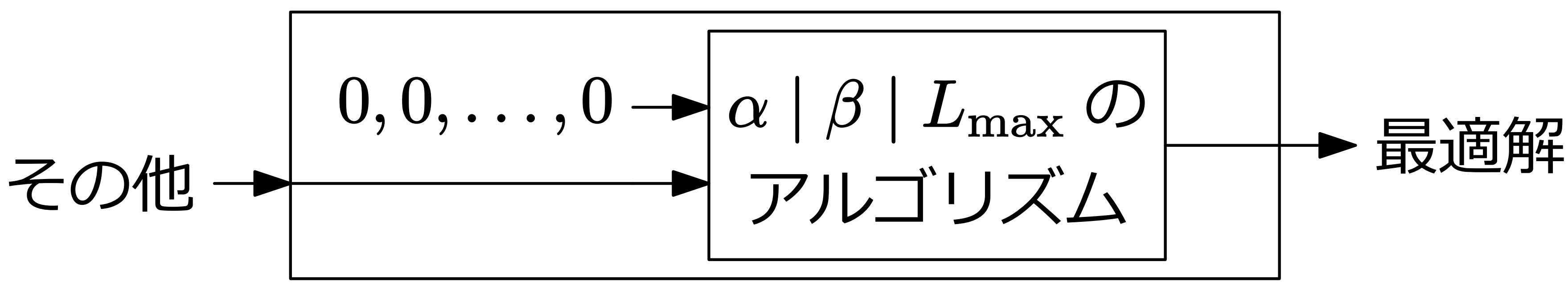
$C_{\max} \to L_{\max}$

復習：$C_{\max}$：最大完了時刻，$L_{\max}$：最大納期ずれ

$$L_j = C_j - d_j$$

性質：$C_{\max} \to L_{\max}$

問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid C_{\max}$ は多項式時間で解ける



$\alpha \mid \beta \mid C_{\max}$ のアルゴリズム

$d_j = 0$ とすると，$L_j = C_j - d_j = C_j$

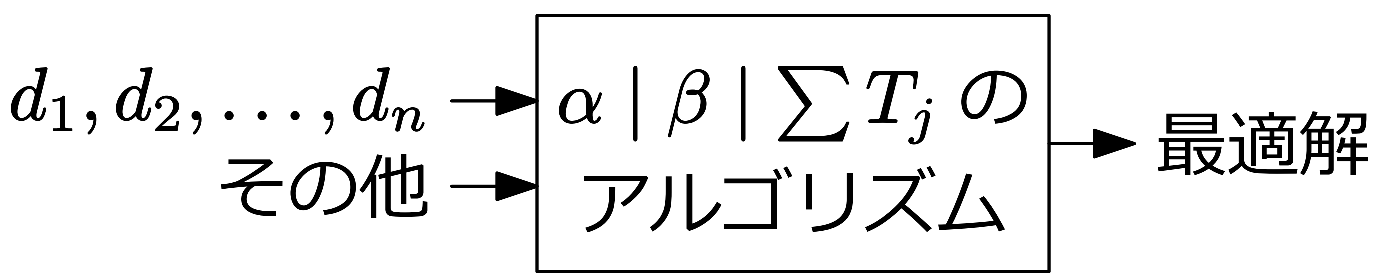
$\sum C_j \to \sum T_j$

復習：$\sum C_j$：総完了時刻，$\sum T_j$：総納期遅れ

$$T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$$

性質：$\sum C_j \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum C_j$ は多項式時間で解ける

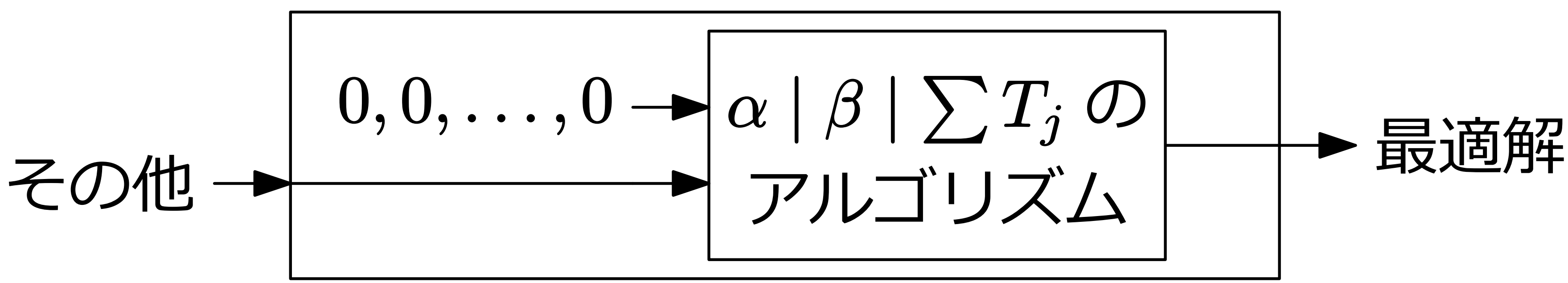


復習：$\sum C_j$：総完了時刻，$\sum T_j$：総納期遅れ

$$T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$$

性質：$\sum C_j \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum C_j$ は多項式時間で解ける

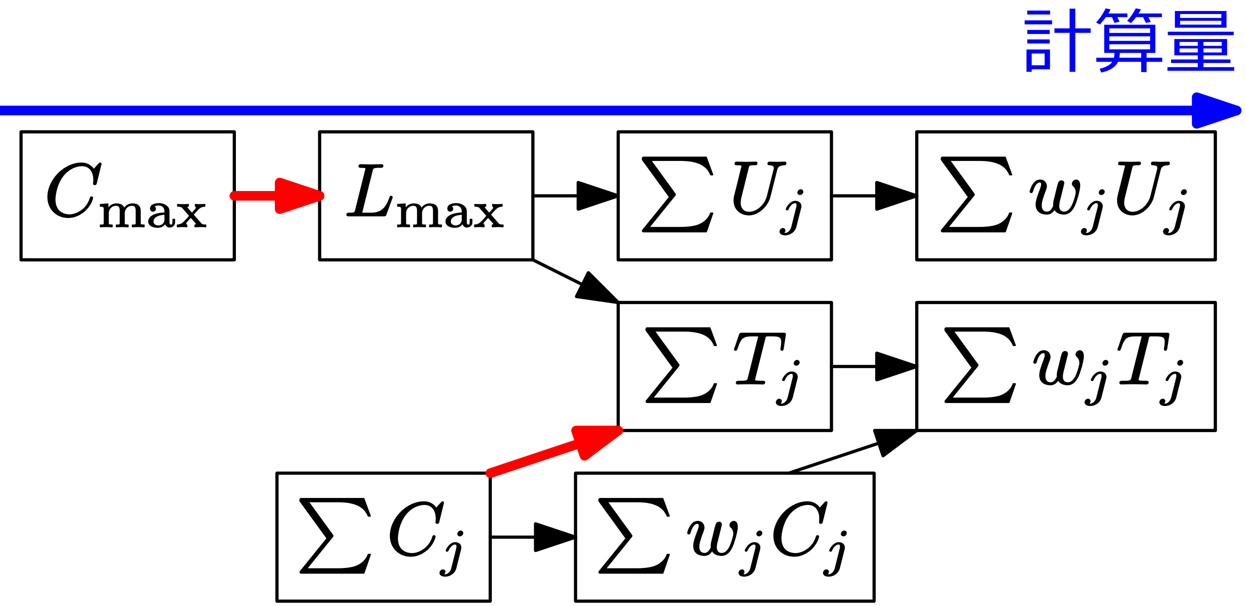


$\alpha \mid \beta \mid \sum C_j$ のアルゴリズム

$d_j = 0$ とすると，$T_j = \max\{0, C_j - d_j\} = \max\{0, C_j\} = C_j$

最適化の目的：ここまでのまとめ

γ　最適化の目的



重み付き総完了時刻

設定：各ジョブ J_j に重み $w_j \in \mathbb{Q}_{>0}$ が入力として与えられる

最適化する目的：重み付き総完了時刻

$\gamma = \sum w_j C_j$

- 次を最小化

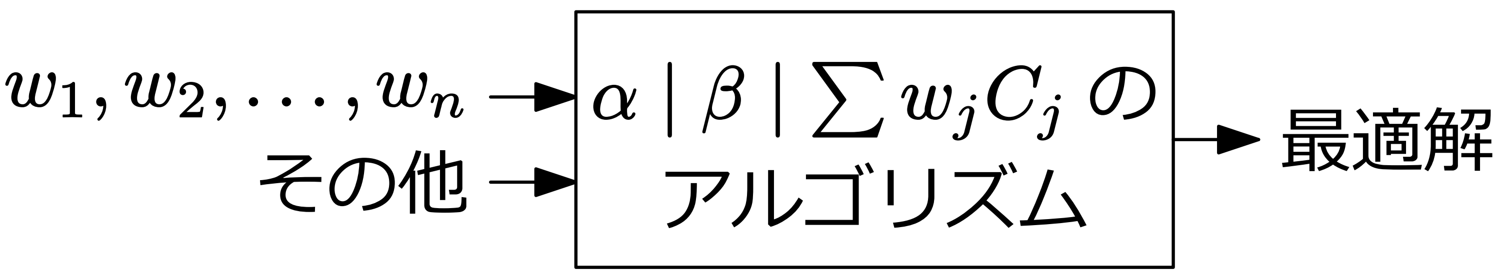
$$\sum w_j C_j(\sigma) = w_1 C_1(\sigma) + w_2 C_2(\sigma) + \cdots + w_n C_n(\sigma)$$

- ただし，各 $j \in [n]$ に対して，
  $C_j(\sigma) =$ スケジュール σ における J_j の完了時刻

同様に，重み付き総納期遅れ $\sum w_j T_j$ と
重み付き納期遅れジョブ数 $\sum w_j U_j$ も定義する

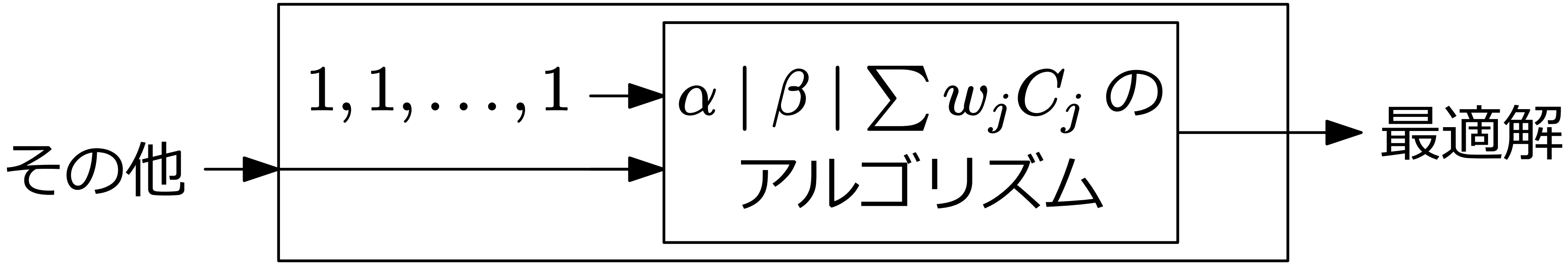
性質：$\sum C_j \to \sum w_j C_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum w_j C_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum C_j$ は多項式時間で解ける



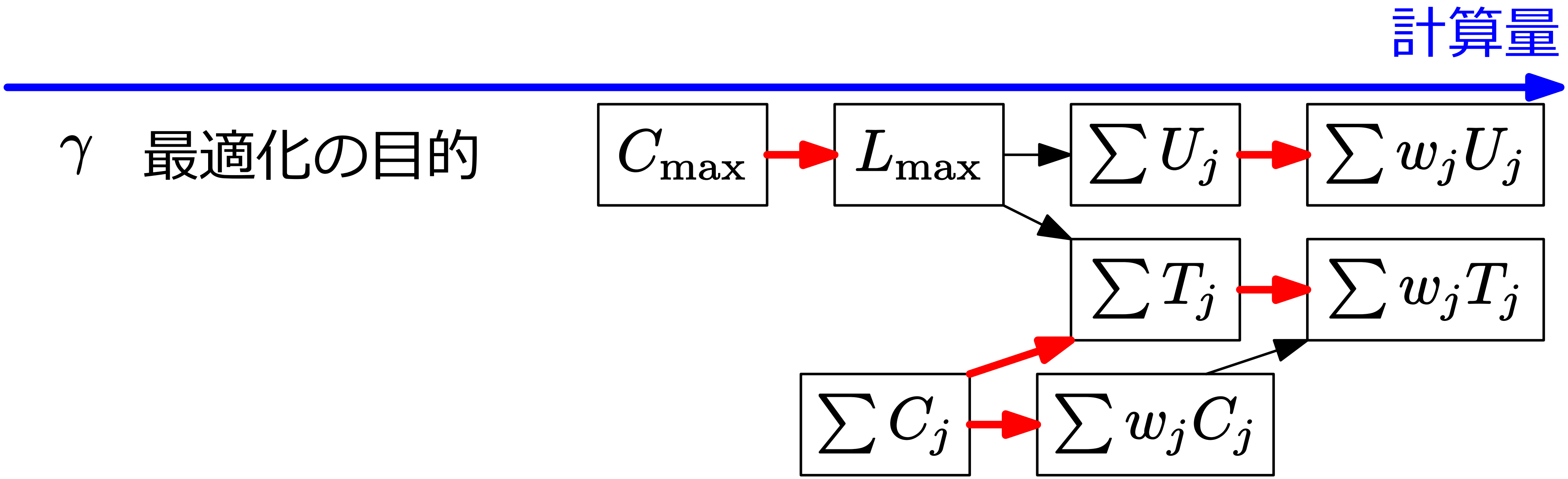
性質：$\sum C_j \to \sum w_j C_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum w_j C_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum C_j$ は多項式時間で解ける



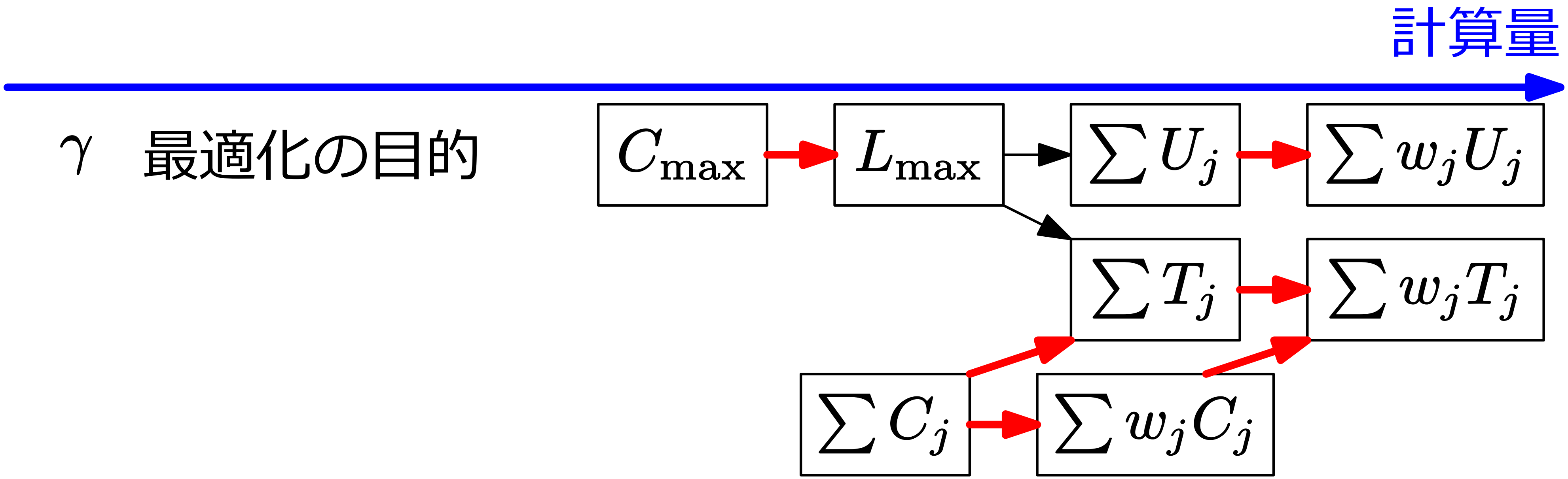
$\alpha \mid \beta \mid \sum C_j$ のアルゴリズム

最適化の目的：ここまでのまとめ



$\sum U_j \to \sum w_j U_j$ と $\sum T_j \to \sum w_j T_j$ も同様

最適化の目的：ここまでのまとめ



$\sum U_j \to \sum w_j U_j$ と $\sum T_j \to \sum w_j T_j$ も同様

$\sum w_j C_j \to \sum w_j T_j$ は $\sum C_j \to \sum T_j$ と同様

復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$L_j = C_j - d_j$　　$T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る

$L_{\max}$ の候補

$L_{\max} \to \sum T_j$

復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$$L_j = C_j - d_j \qquad T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る

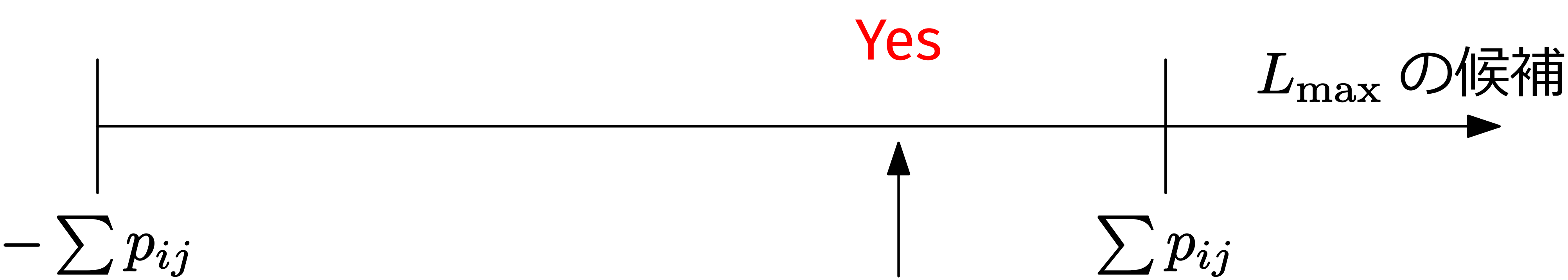
復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$L_j = C_j - d_j$　　　$T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \le L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$

復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

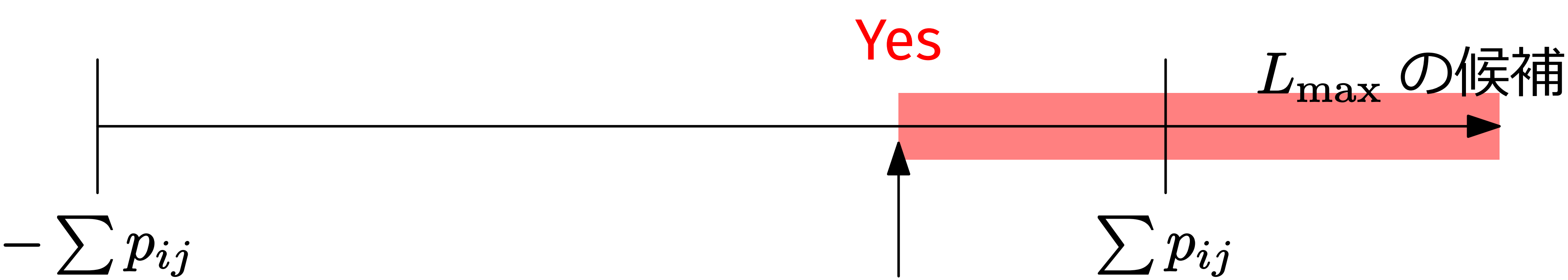
$$L_j = C_j - d_j \qquad\qquad T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，

「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$

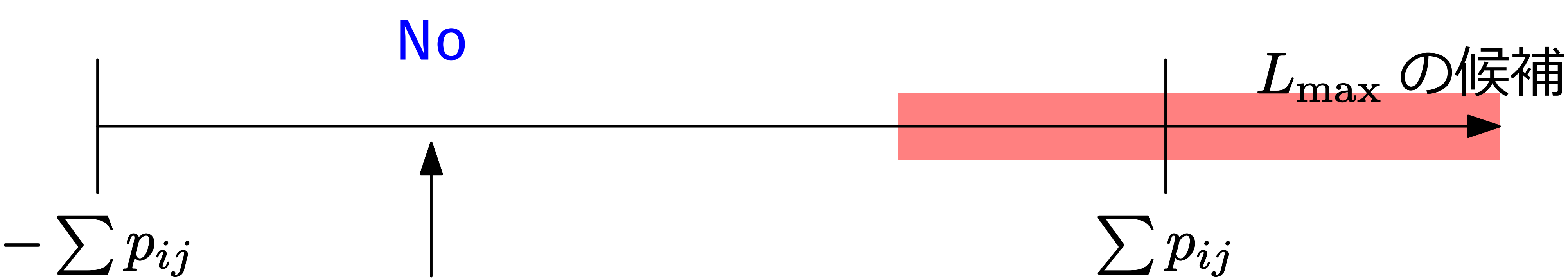
復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$L_j = C_j - d_j$　　　$T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$

復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

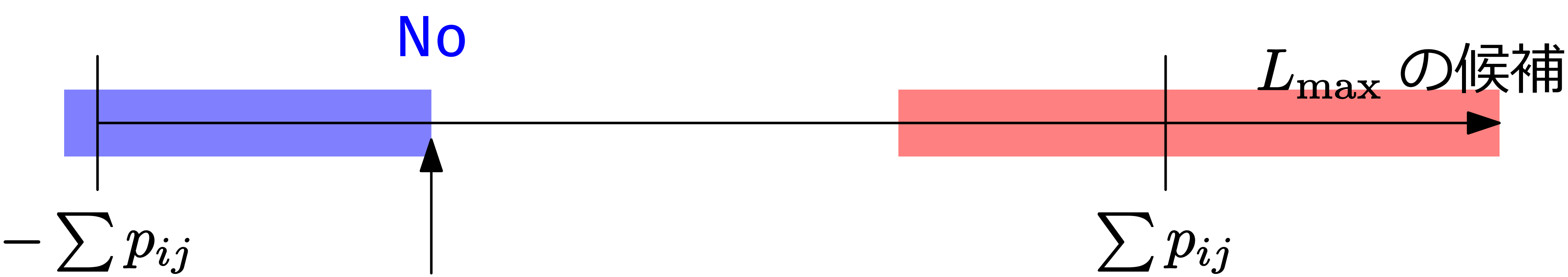
$$L_j = C_j - d_j \qquad\qquad T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，

「最適値 $L_{\max} \le L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$

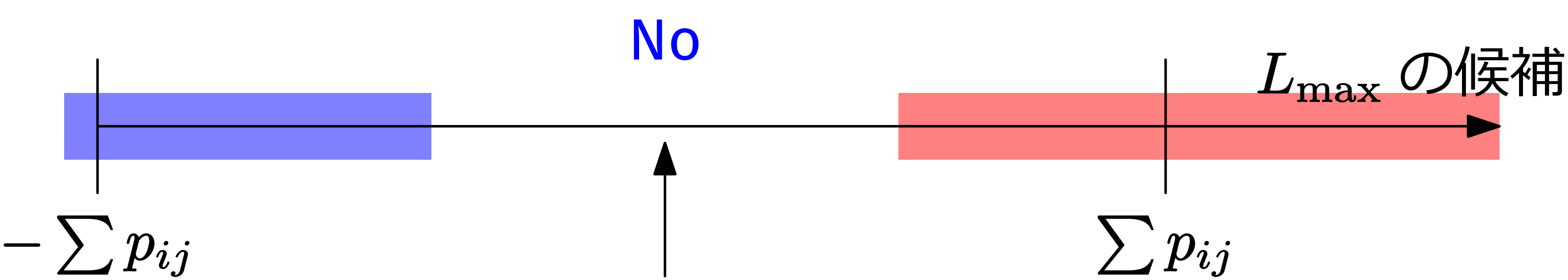
復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$L_j = C_j - d_j$ $\quad\quad$ $T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



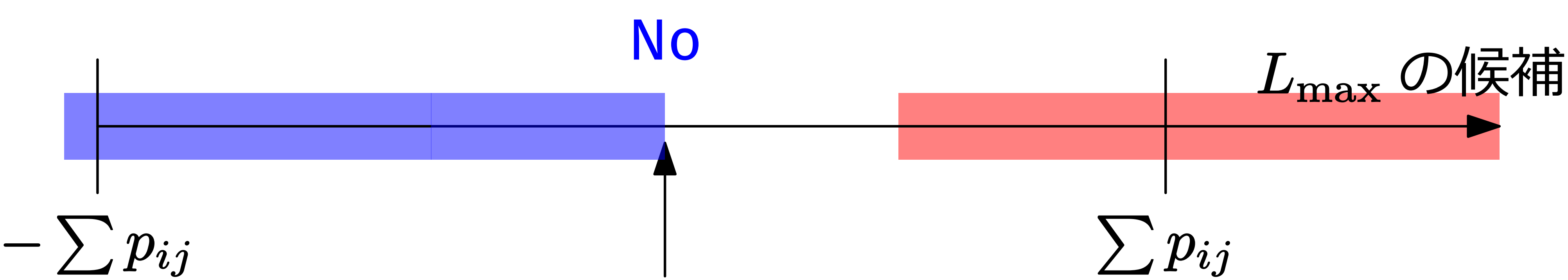
復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$L_j = C_j - d_j$ $\qquad$ $T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \le L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



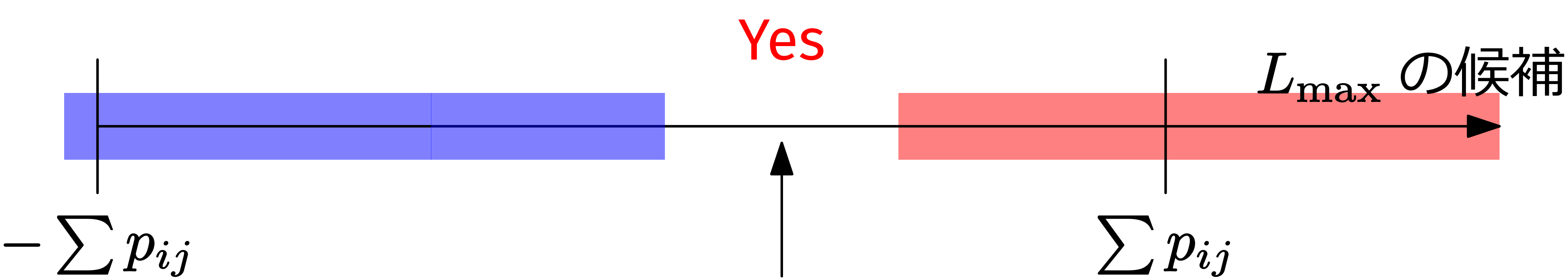
復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$L_j = C_j - d_j$ $\qquad$ $T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$

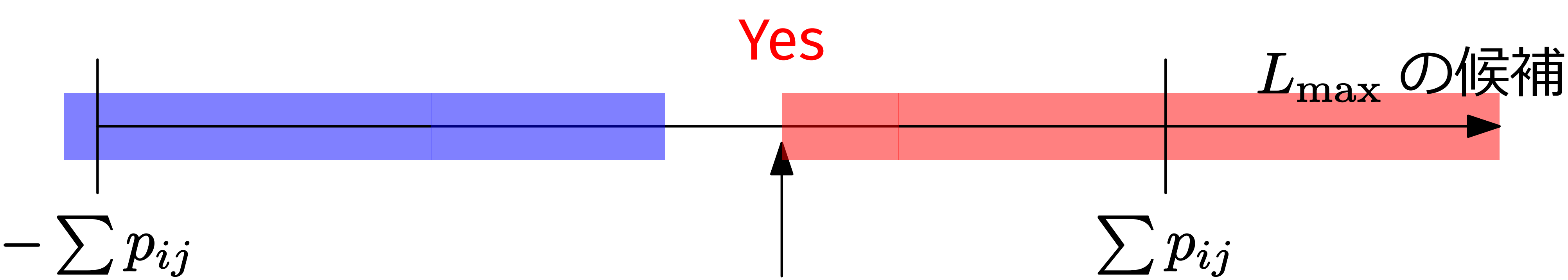
<u>復習</u>：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$$L_j = C_j - d_j \qquad\qquad T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$

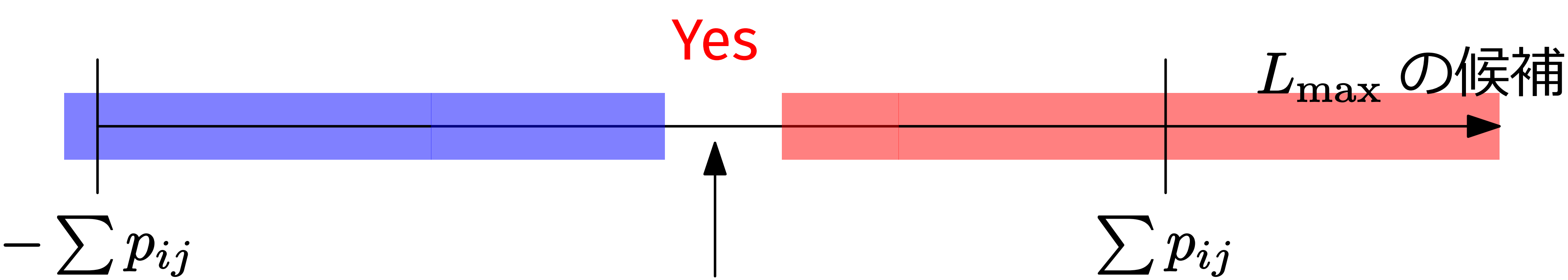
復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$L_j = C_j - d_j$　　$T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$

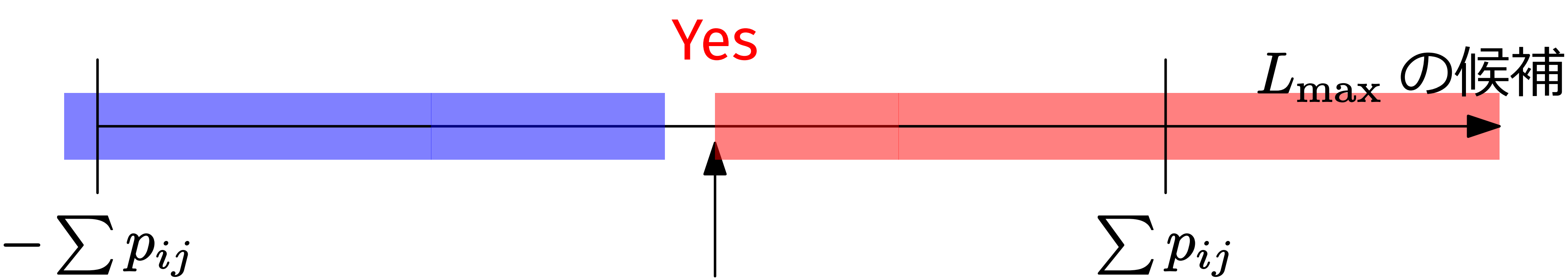
復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$$L_j = C_j - d_j \qquad T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \le L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$

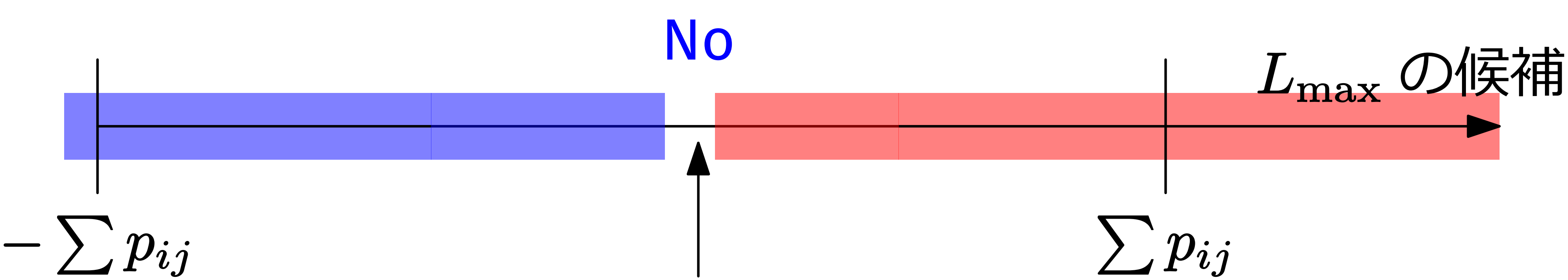
復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$$L_j = C_j - d_j \qquad\qquad T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \le L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



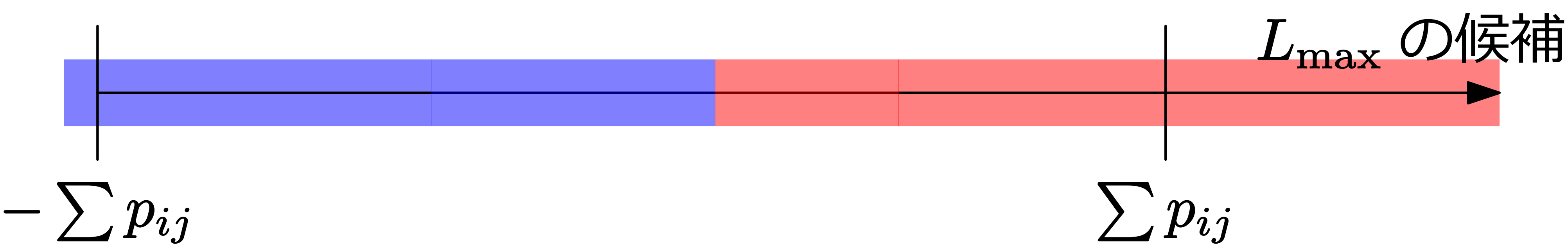
復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$$L_j = C_j - d_j \qquad T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \le L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$

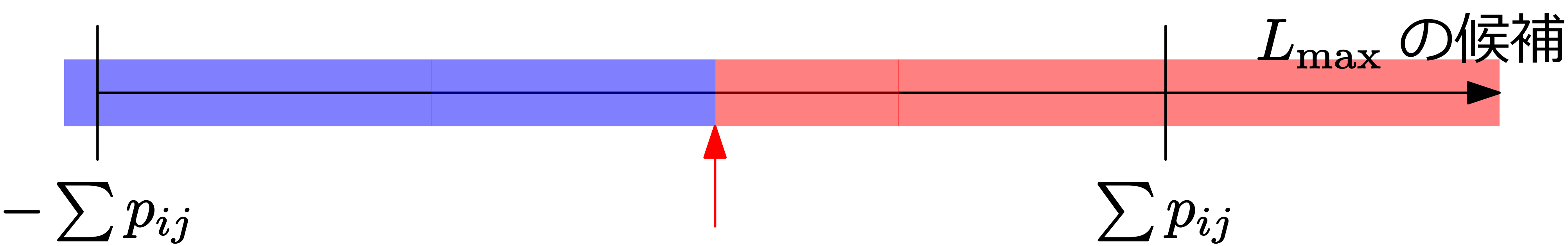
復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$L_j = C_j - d_j$ $\qquad$ $T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$

性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



Yes となる L の最小値 $=$ 最適値 $L_{\max}$

$L_{\max} \to \sum T_j$

復習：$L_{\max}$：最大納期ずれ，$\sum T_j$：総納期遅れ

$$L_j = C_j - d_j \qquad\qquad T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$$

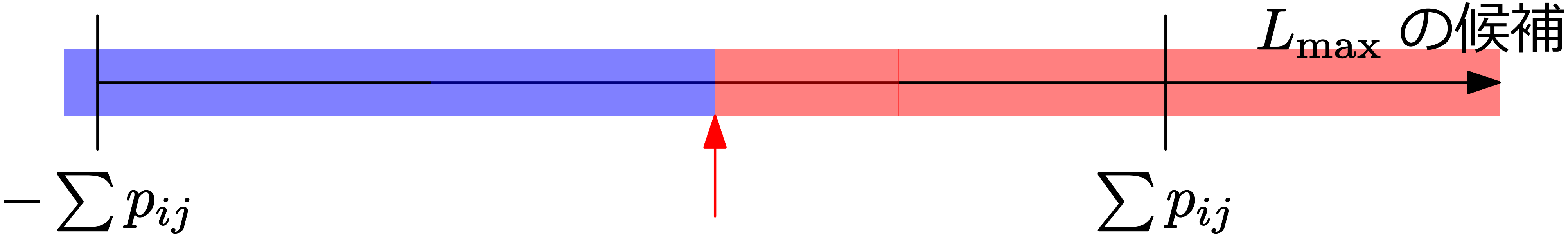
性質：$L_{\max} \to \sum T_j$

問題 $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid L_{\max}$ は多項式時間で解ける

与えられた数値 L に対して，

「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る

$\rightsquigarrow$ これを $O(\log \sum p_{ij})$ 回呼び出すと，最適値が分かる

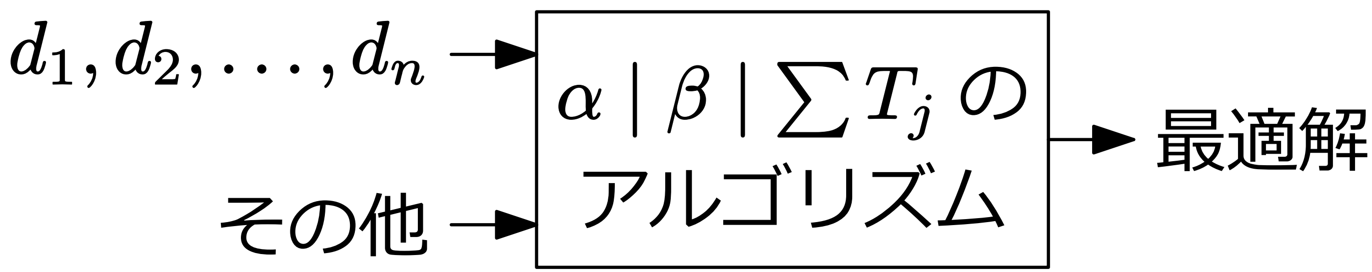


Yes となる L の最小値 = 最適値 $L_{\max}$

$L_{\max} \to \sum T_j$ (続き)

与えられた数値 L に対して，

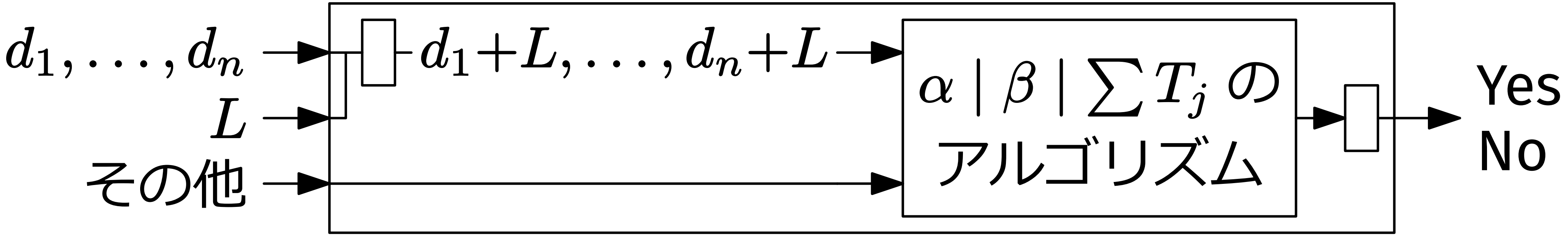
「最適値 $L_{\max} \le L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$ (続き)

与えられた数値 L に対して，

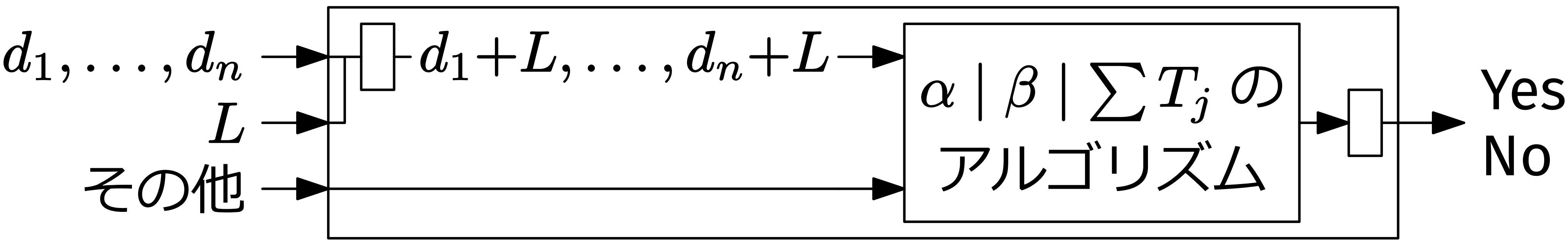
「最適値 $L_{\max} \leq L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$L_{\max} \to \sum T_j$ (続き)

与えられた数値 L に対して,

「最適値 $L_{\max} \le L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$d'_j = d_j + L$ とする

$L_{\max} \le L$

$\Leftrightarrow$ ∃スケジュール σ: $L_j(\sigma) \le L$

$\Leftrightarrow$ ∃スケジュール σ: $C_j(\sigma) - d_j \le L$

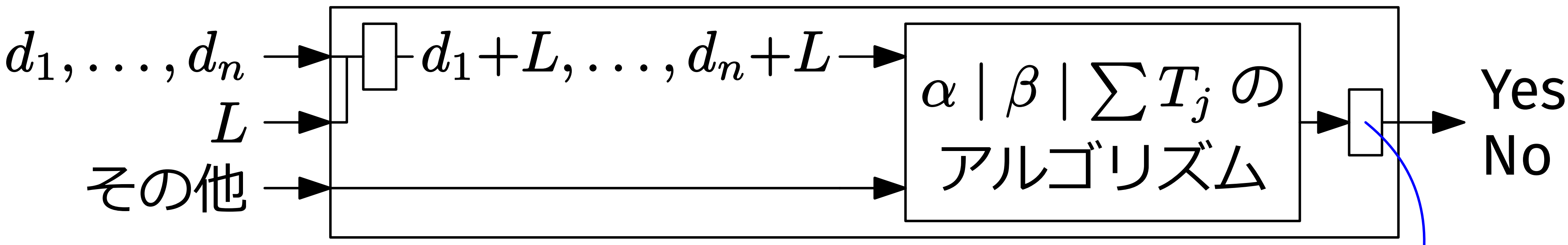
$\Leftrightarrow$ ∃スケジュール σ: $C_j(\sigma) - (d_j + L) \le 0$

$\Leftrightarrow$ ∃スケジュール σ: $d'_1, \ldots, d'_n$ に対して $T_j(\sigma) = 0$

$\Leftrightarrow$ $d'_1, \ldots, d'_n$ に対する $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ の最適値 $= 0$

$L_{\max} \to \sum T_j$ (続き)

与えられた数値 L に対して，
「最適値 $L_{\max} \le L$ か？」に答えるアルゴリズムを作る



$d'_j = d_j + L$ とする

最適値 $= 0 \quad \Rightarrow \quad$ Yes
最適値 $> 0 \quad \Rightarrow \quad$ No

$L_{\max} \le L$

$\Leftrightarrow$ ∃スケジュール σ: $L_j(\sigma) \le L$

$\Leftrightarrow$ ∃スケジュール σ: $C_j(\sigma) - d_j \le L$

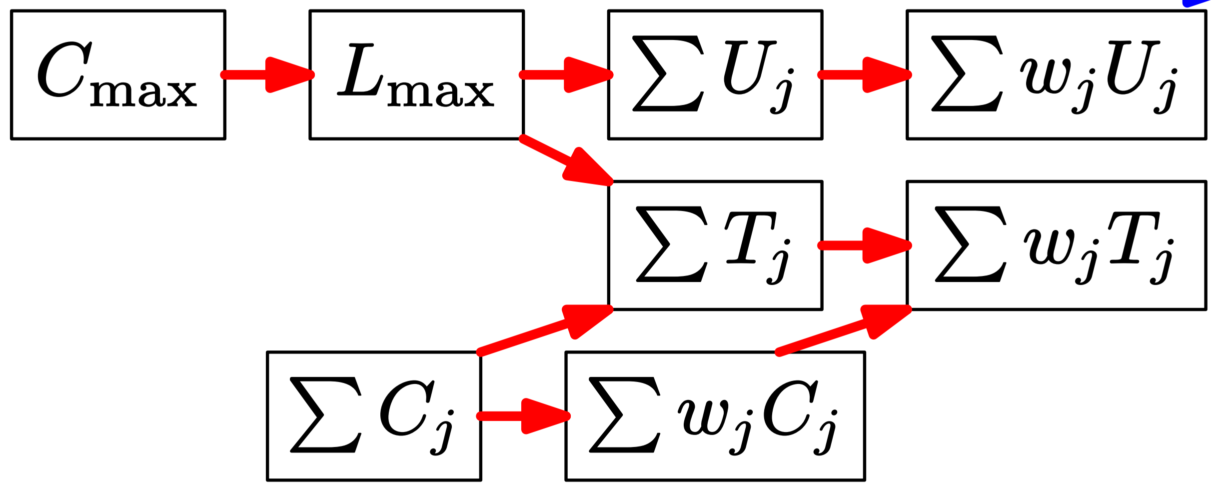
$\Leftrightarrow$ ∃スケジュール σ: $C_j(\sigma) - (d_j + L) \le 0$

$\Leftrightarrow$ ∃スケジュール σ: $d'_1, \ldots, d'_n$ に対して $T_j(\sigma) = 0$

$\Leftrightarrow$ $d'_1, \ldots, d'_n$ に対する $\alpha \mid \beta \mid \sum T_j$ の最適値 $= 0$

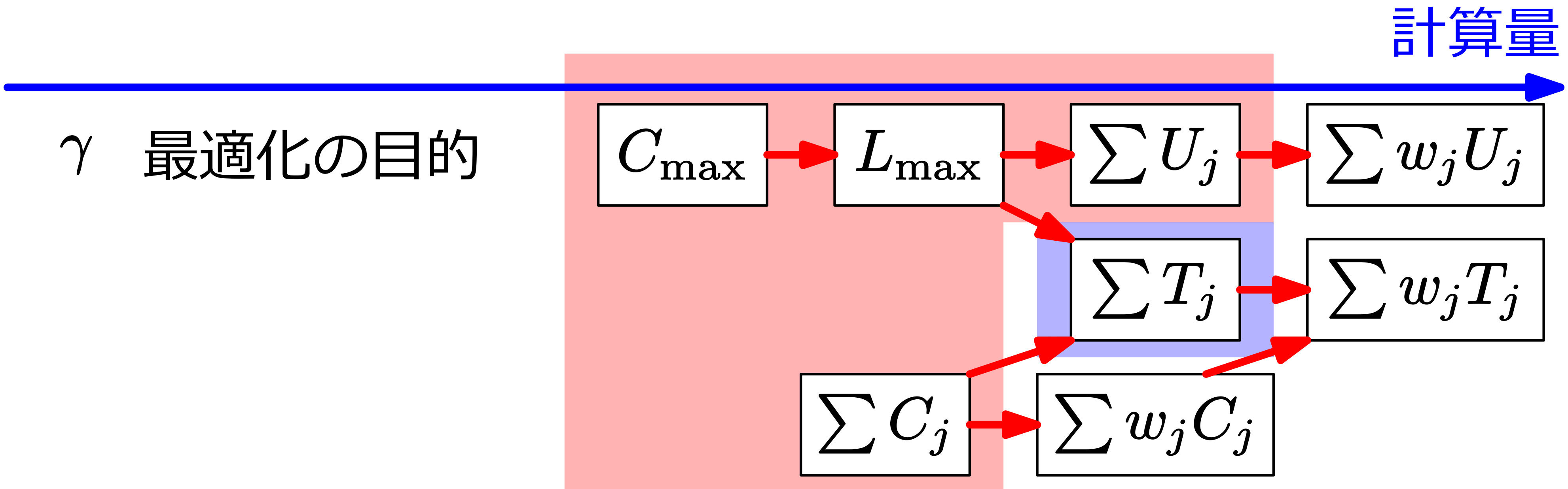
計算量

γ　最適化の目的



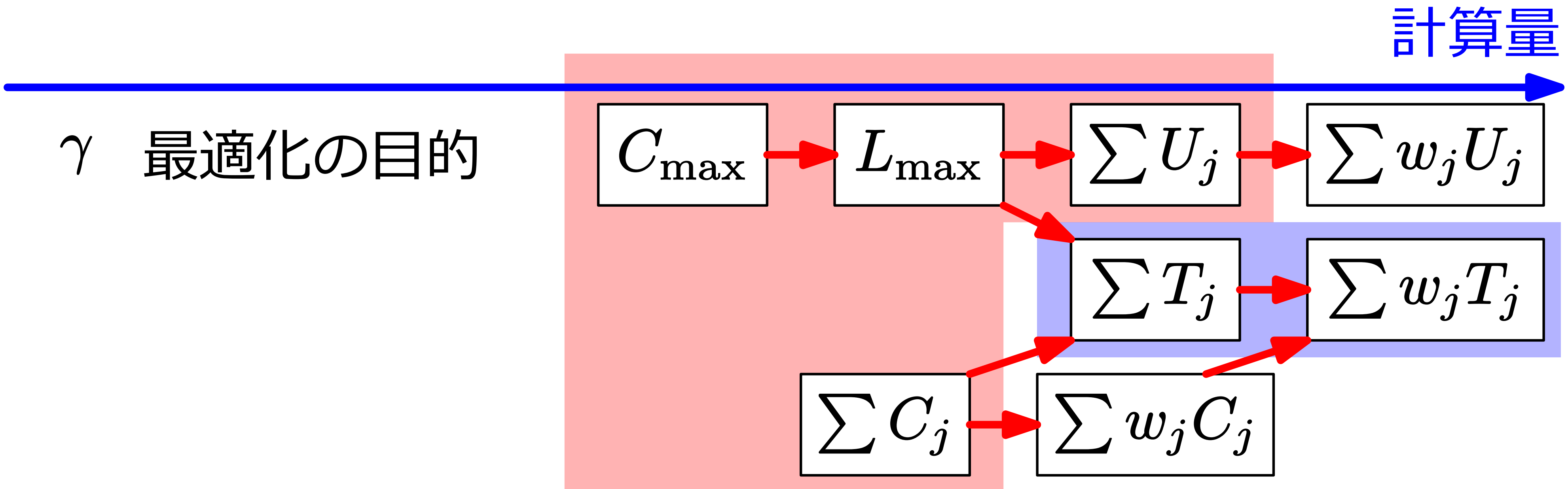
$L_{\max} \to \sum U_j$ も同様

最適化の目的：まとめ



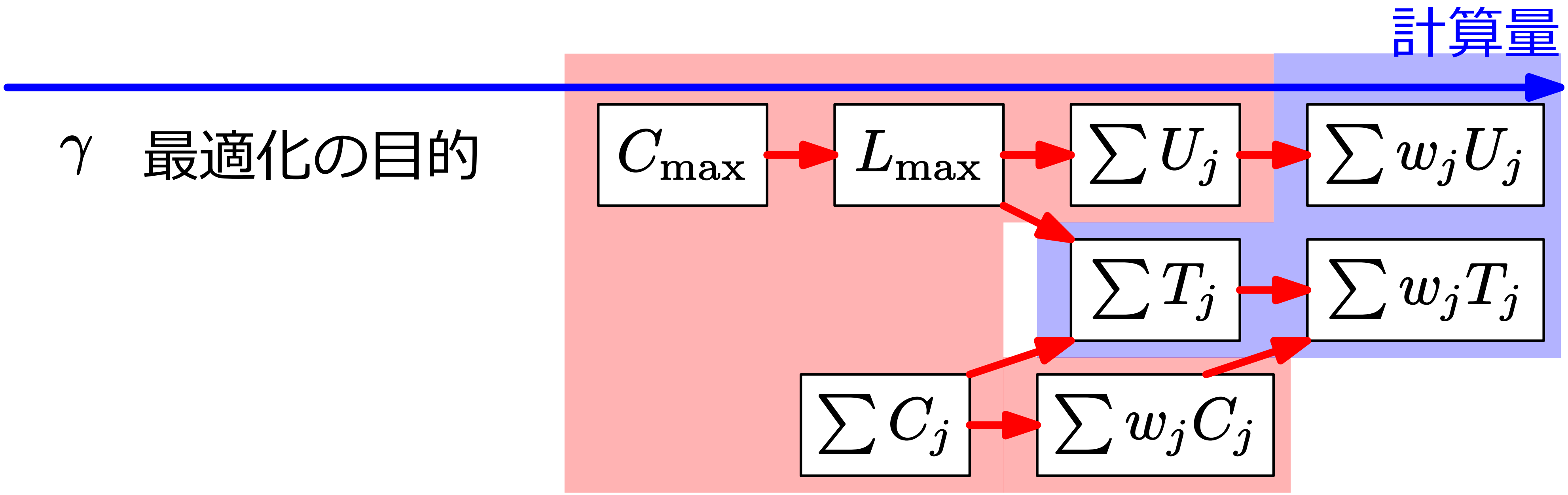
$1 \,||\, \gamma$ のとき　　多項式時間で解ける　　NP 困難

最適化の目的：まとめ



$1 \,||\, \gamma$ のとき　多項式時間で解ける　NP 困難

最適化の目的：まとめ



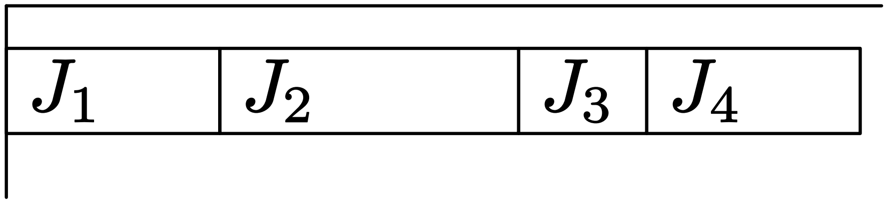
$1 \mid\mid \gamma$ のとき　　多項式時間で解ける　　NP 困難

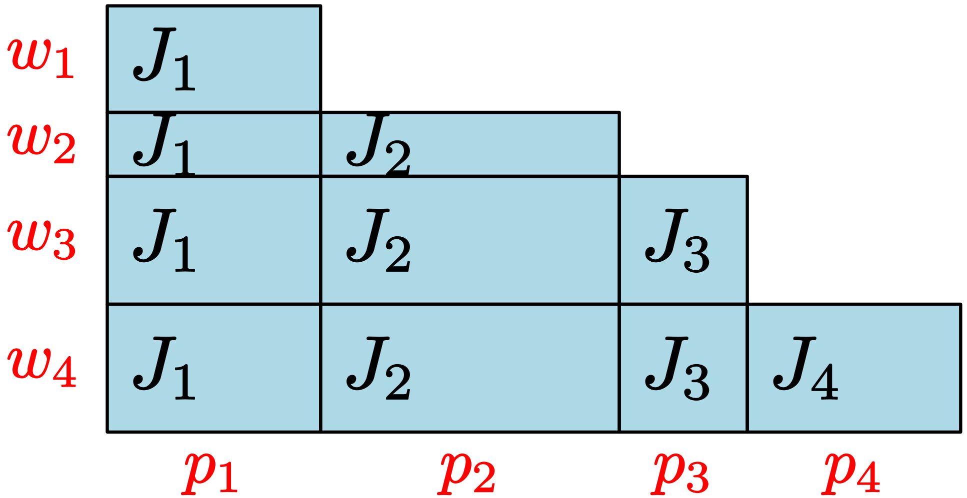
定理

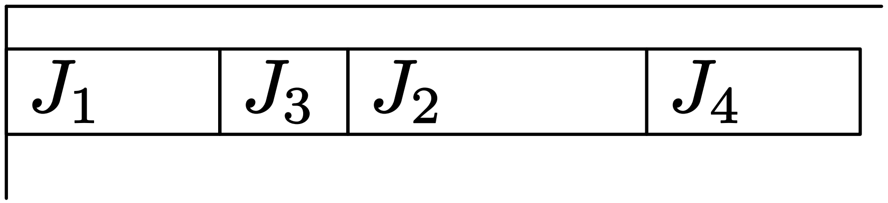
- $1 \mid\mid \sum w_j C_j$ は 強多項式時間で解ける　(Smith ’56)
- $1 \mid\mid \sum w_j U_j$ は 弱 NP 困難　(Karp ’72)
- $1 \mid\mid \sum w_j T_j$ は 強 NP 困難　(Lawler ’77)

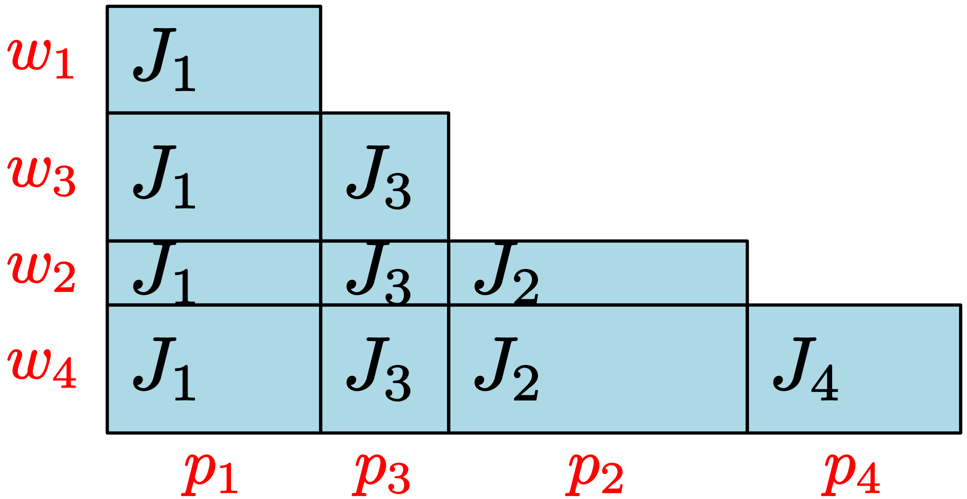
$1 \mid\mid \sum w_j T_j$ の NP 困難性証明は付録

$1 \,||\, \sum w_j C_j$：考え方

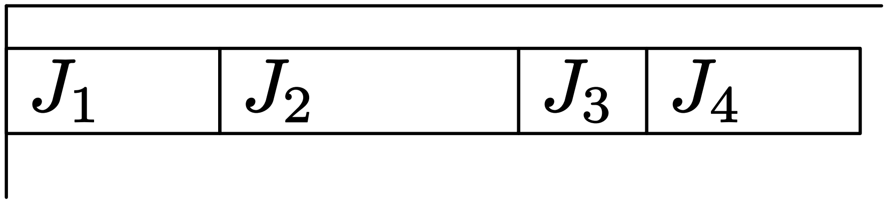


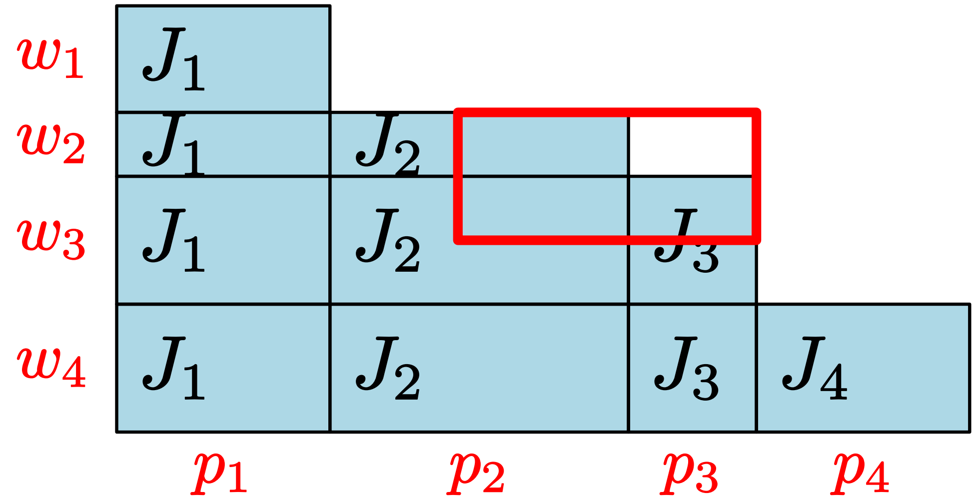


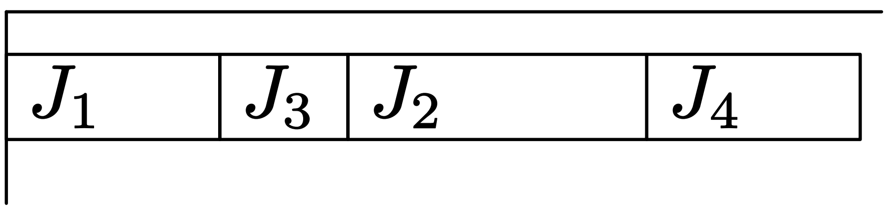


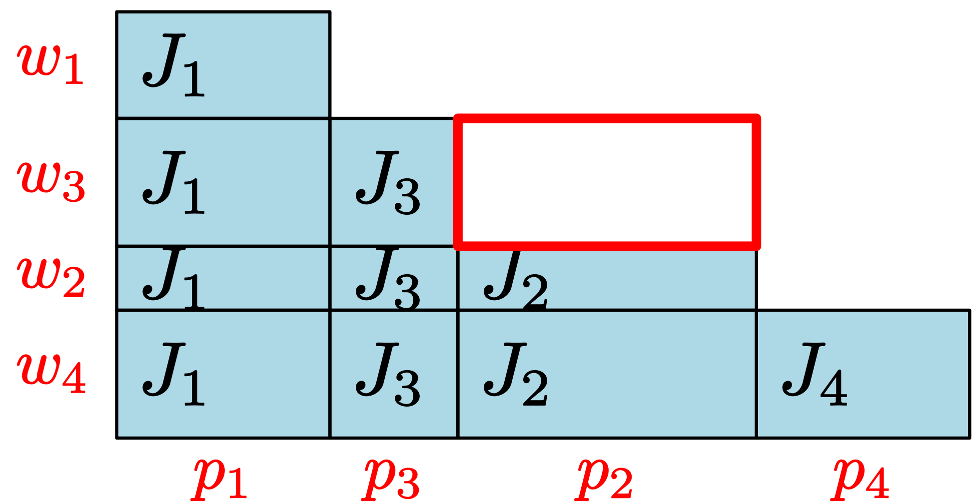


$1 \,\|\, \sum w_j C_j$：考え方

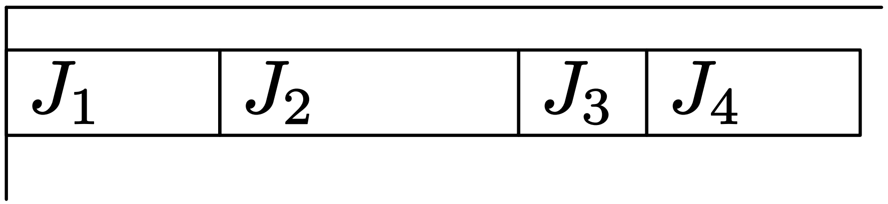


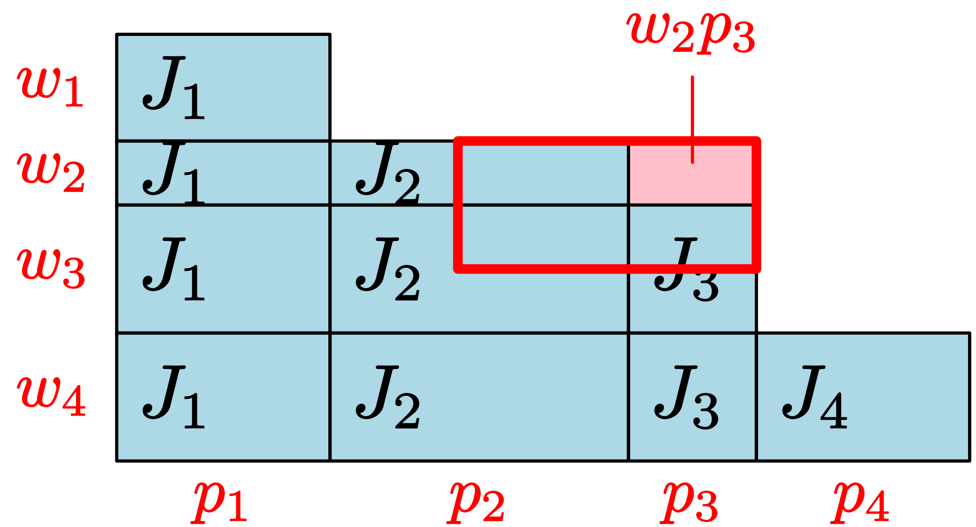


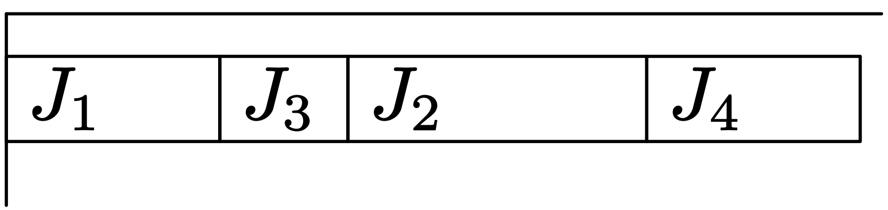


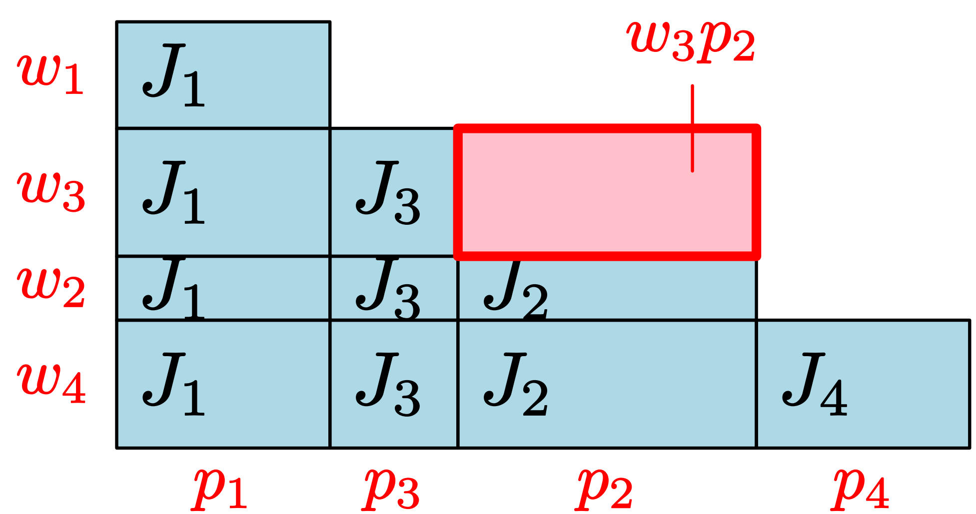


$1 \,||\, \sum w_j C_j$：考え方

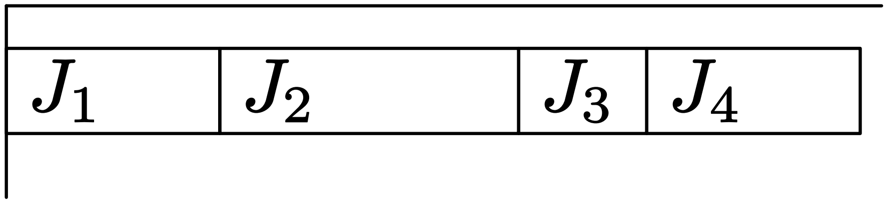


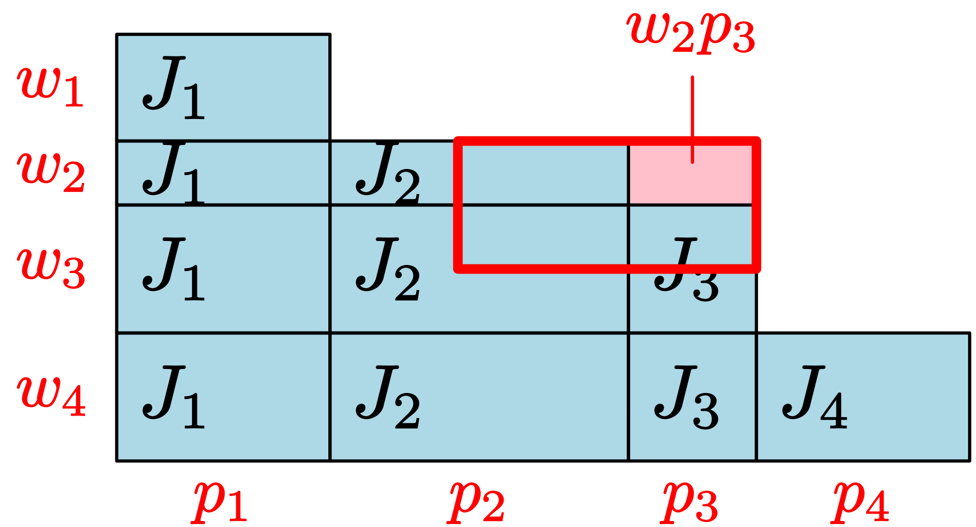


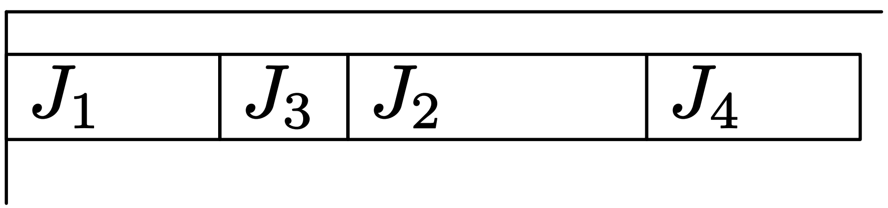


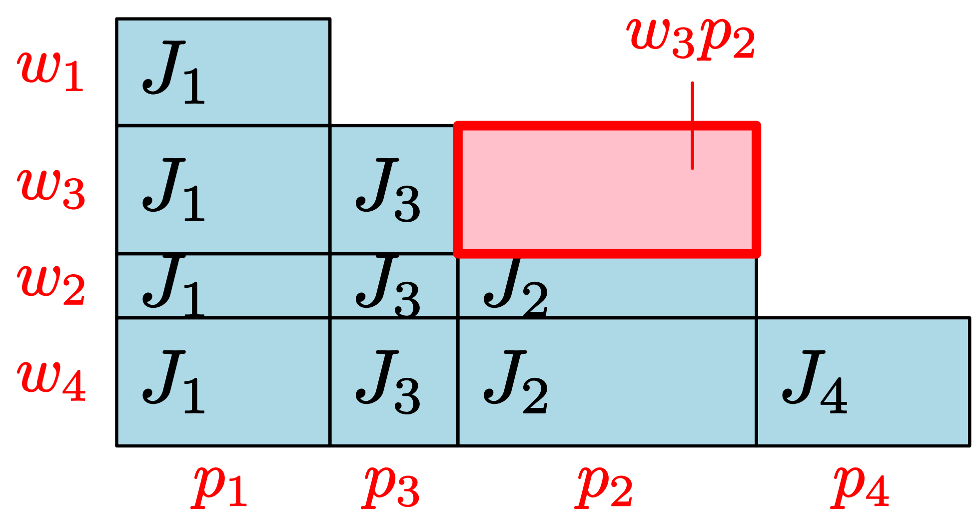


$1 \,||\, \sum w_j C_j$：考え方





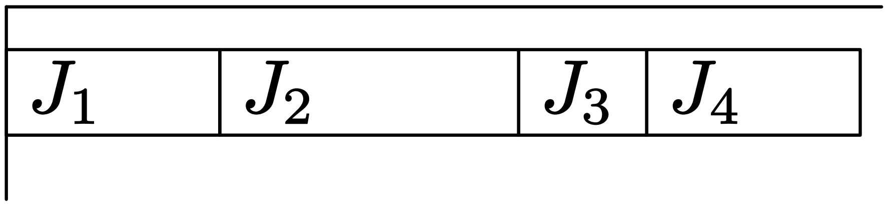


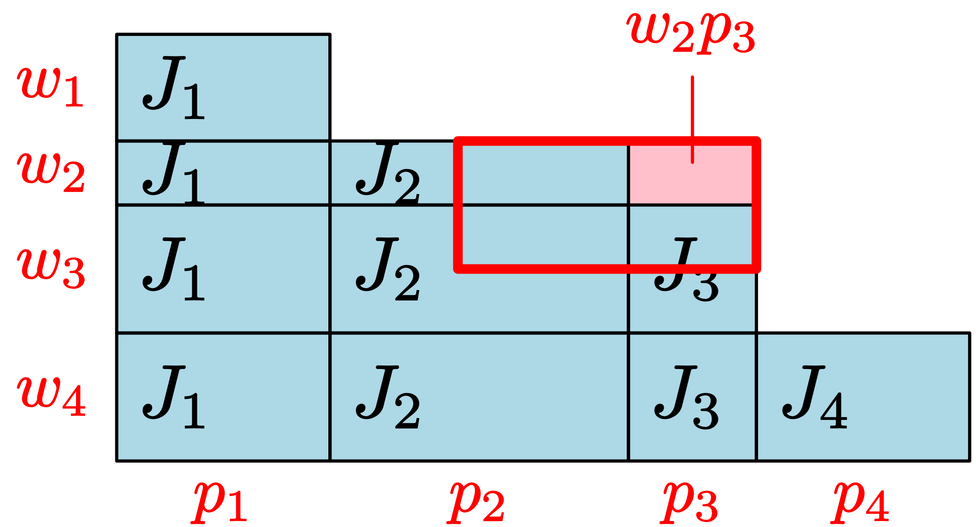


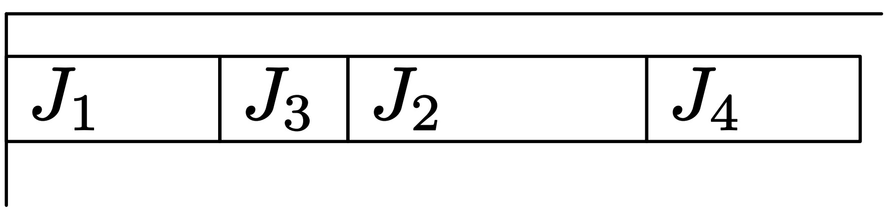
$w_3p_2 - w_2p_3 > 0 \Rightarrow$

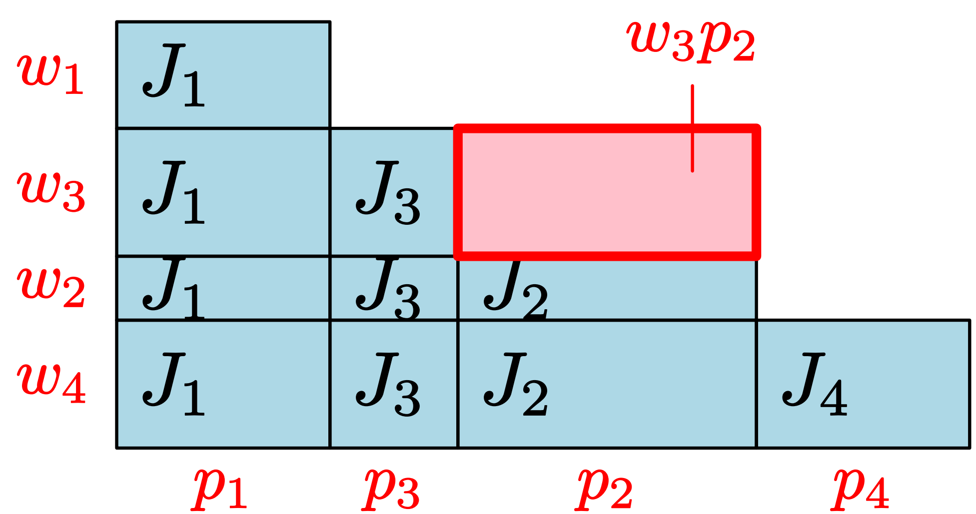
J_3 を J_2 の前に処理したほうがよい

$1 \,||\, \sum w_j C_j$：考え方









$$\left(\frac{p_3}{w_3} < \frac{p_2}{w_2}\right)$$

$$w_3 p_2 - w_2 p_3 > 0 \Rightarrow$$

J_3 を J_2 の前に処理したほうがよい

定理：$1 \,||\, \sum w_j C_j$ のアルゴリズム (Smith '56)

$1 \,||\, \sum w_j C_j$ に対して，次のアルゴリズムは最適解を与える

アルゴリズム：重み付き最短処理時間優先規則 (WSPT)

1. $\frac{p_j}{w_j}$ が小さい順にジョブを並べる
2. その順に従ってジョブを処理する

WSPT = Weighted Shortest Processing Time

定義：分割問題 (partition problem)

正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が与えられたとき，
それらを同じ和の 2 つのグループに分けられるか？

例：$\underline{1, 1, 2, 2}, \underline{3, 4}, \underline{6}, \underline{6, 7}, \underline{8}$

- $1 + 1 + 2 + 2 + 6 + 8 \ = 20$
- $3 + 4 + 6 + 7 \ = 20$

できる

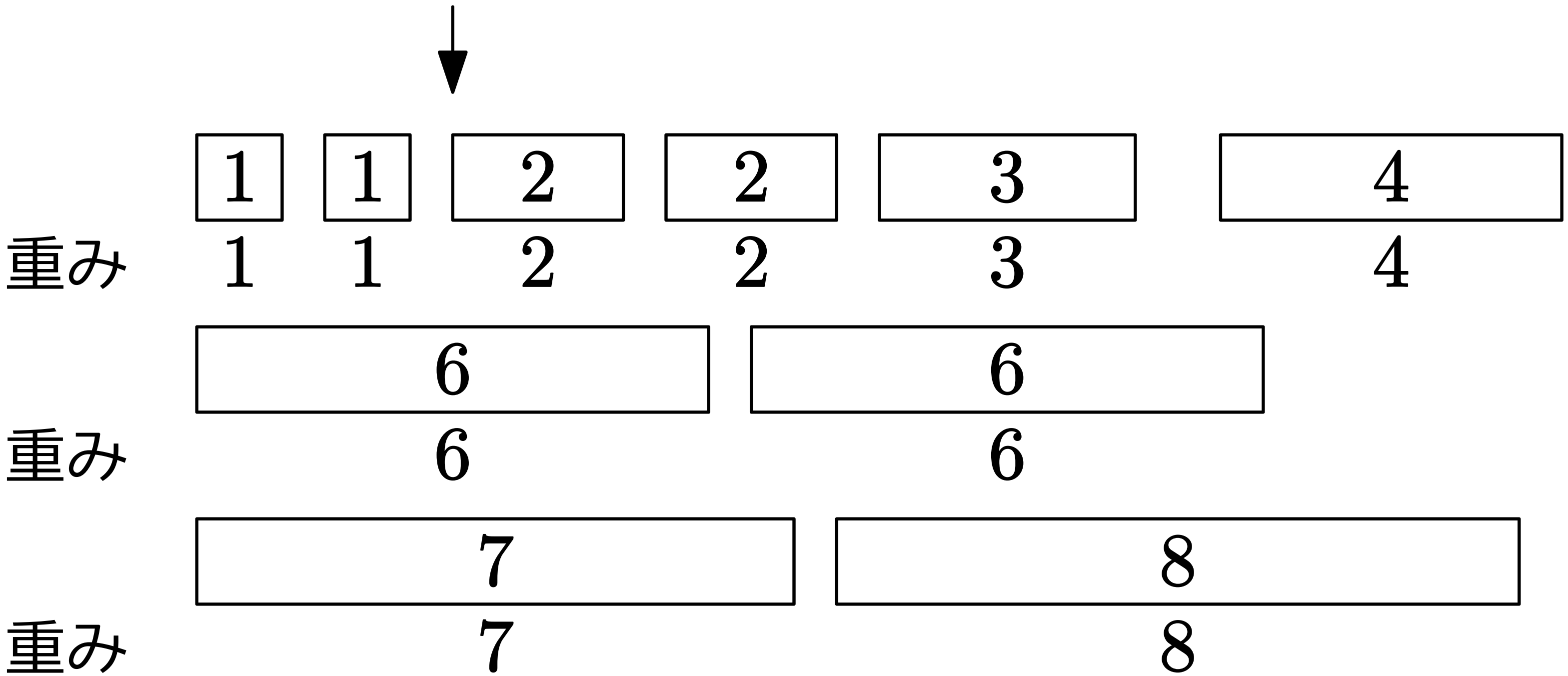
例：$1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 10$ できない

事実 (Karp ’72)

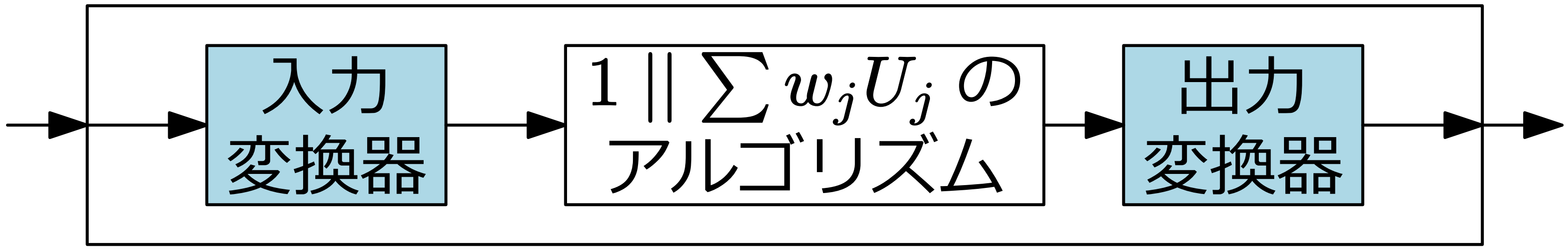
分割問題は 弱 NP 困難

証明：分割問題を帰着する

入力の変換：$1, 1, 2, 2, 3, 4, 6, 6, 7, 8$



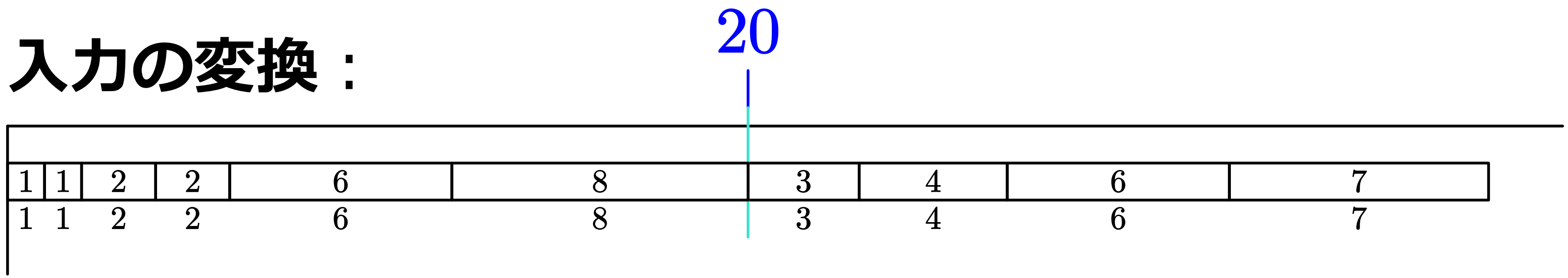
分割問題を解くアルゴリズム



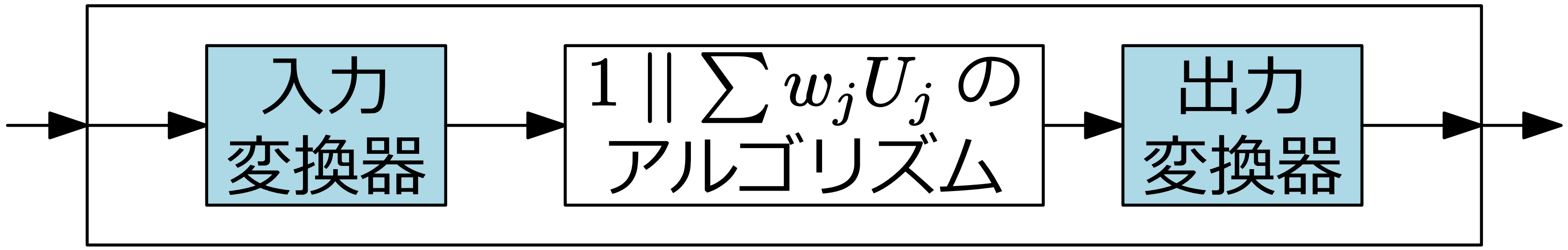
$1 \,||\, \sum w_j U_j$：弱 NP 困難性の証明 (2)

証明：分割問題を帰着する

入力の変換：



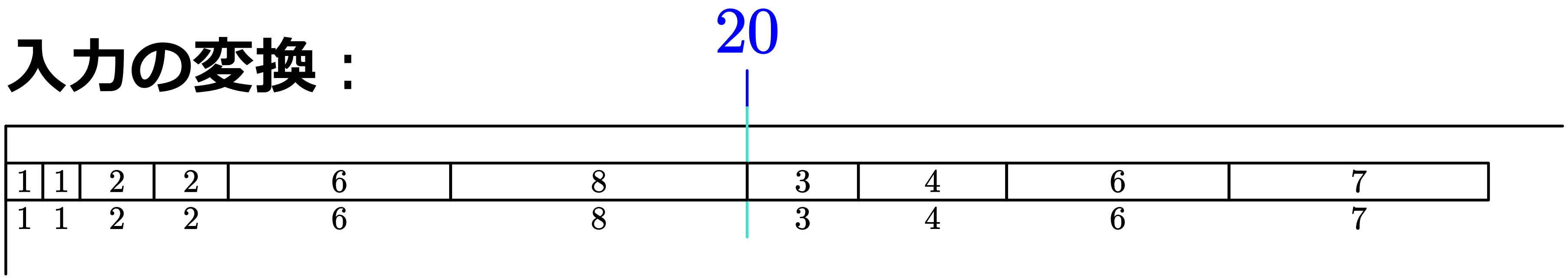
分割問題を解くアルゴリズム



$1 \,||\, \sum w_j U_j$：弱 NP 困難性の証明 (2)

証明：分割問題を帰着する

入力の変換：



出力の変換：

$$\text{最適値} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow \text{分割問題の答えは「できる」}$$

$$\text{最適値} > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow \text{分割問題の答えは「できない」}$$ □

分割問題を解くアルゴリズム

本日の内容

1. 機械の環境に基づく問題間の関係
2. 最適化の目的に基づく問題間の関係
3. **ジョブの特性に基づく問題間の関係**

- R. McNaughton, Scheduling with deadlines and loss functions. *Management Science* 6 (1959) pp. 1–12.
- J. Bruno, F. G. Coffman Jr., R. Sethi, Scheduling independent tasks to reduce mean finishing time. *Communications of the ACM* 17 (1974) pp. 382–387.
- W. Horn, Minimizing average flow time with parallel machines. *Operations Research* 21 (1973) pp. 846–847.
- R. Sitters, Complexity of preemptive minsum scheduling on unrelated parallel machines. *Journal of Algorithms* 57 (2005) pp. 37–48.
- R. Sitters, Approximability of average completion time scheduling on unrelated machines. *Mathematical Programming* 161 (2017) pp. 135–158.

復習：$r_j \in \mathbb{Q}_{>0}$：ジョブ J_j の到着時刻

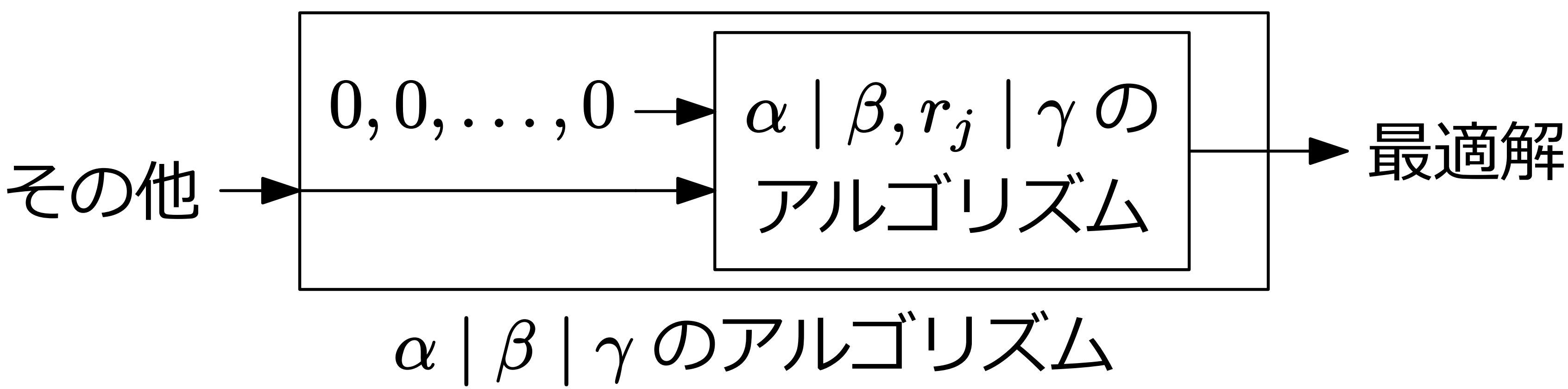
性質：$\circ \to r_j$

問題 $\alpha \mid \beta, r_j \mid \gamma$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid \gamma$ は多項式時間で解ける

<u>復習</u>：$r_j \in \mathbb{Q}_{>0}$：ジョブ J_j の到着時刻

性質：$\circ \to r_j$

問題 $\alpha \mid \beta, r_j \mid \gamma$ が多項式時間で解ける
$\Rightarrow$ 問題 $\alpha \mid \beta \mid \gamma$ は多項式時間で解ける



分割可能性と計算複雑性 (1)

ジョブが分割可能であると，問題が簡単になることがある

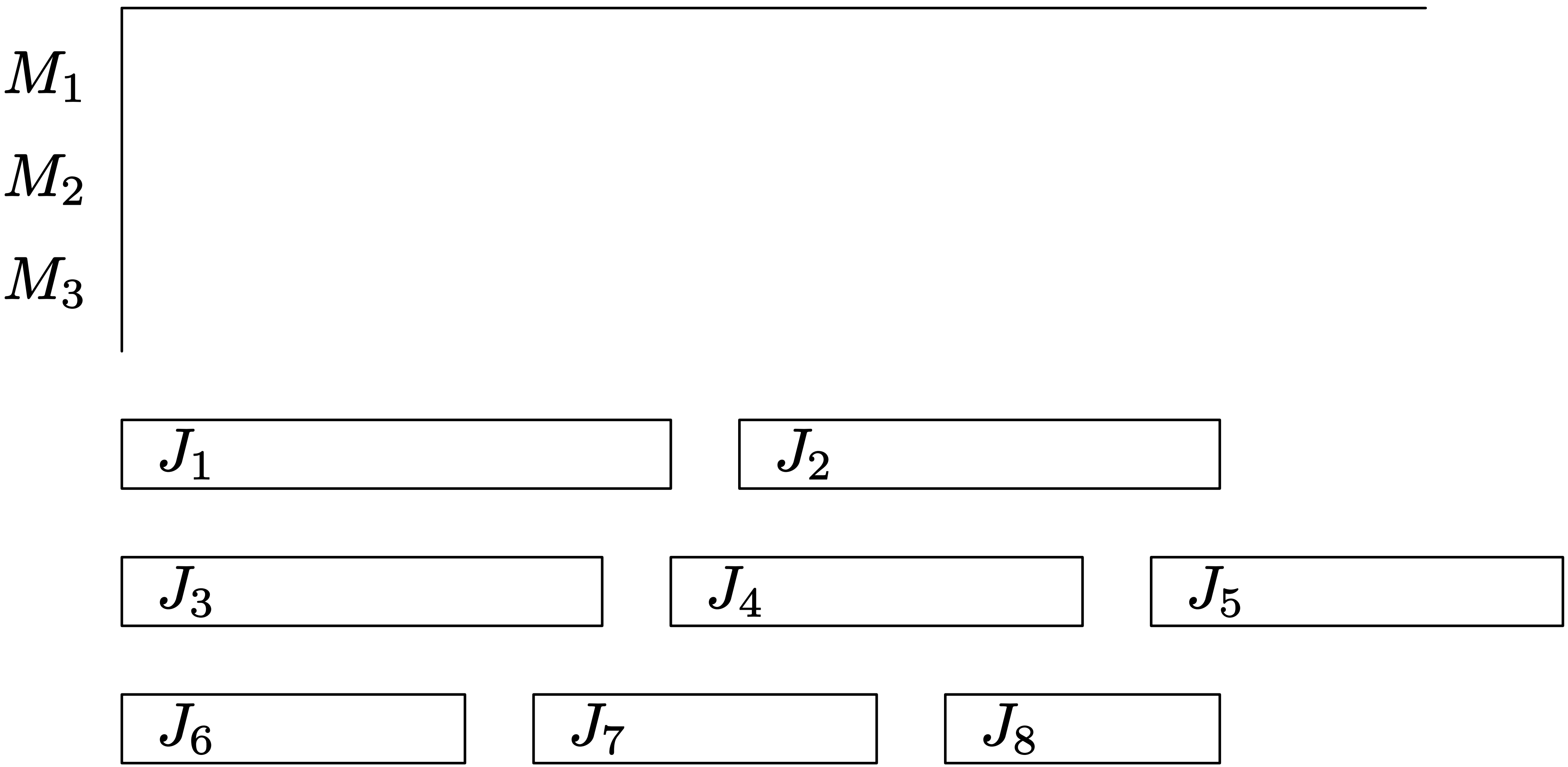
定理 (McNaughton '59)

問題 $P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$ は強多項式時間で解ける

復習：問題 $P \mid\mid C_{\max}$ は強 NP 困難

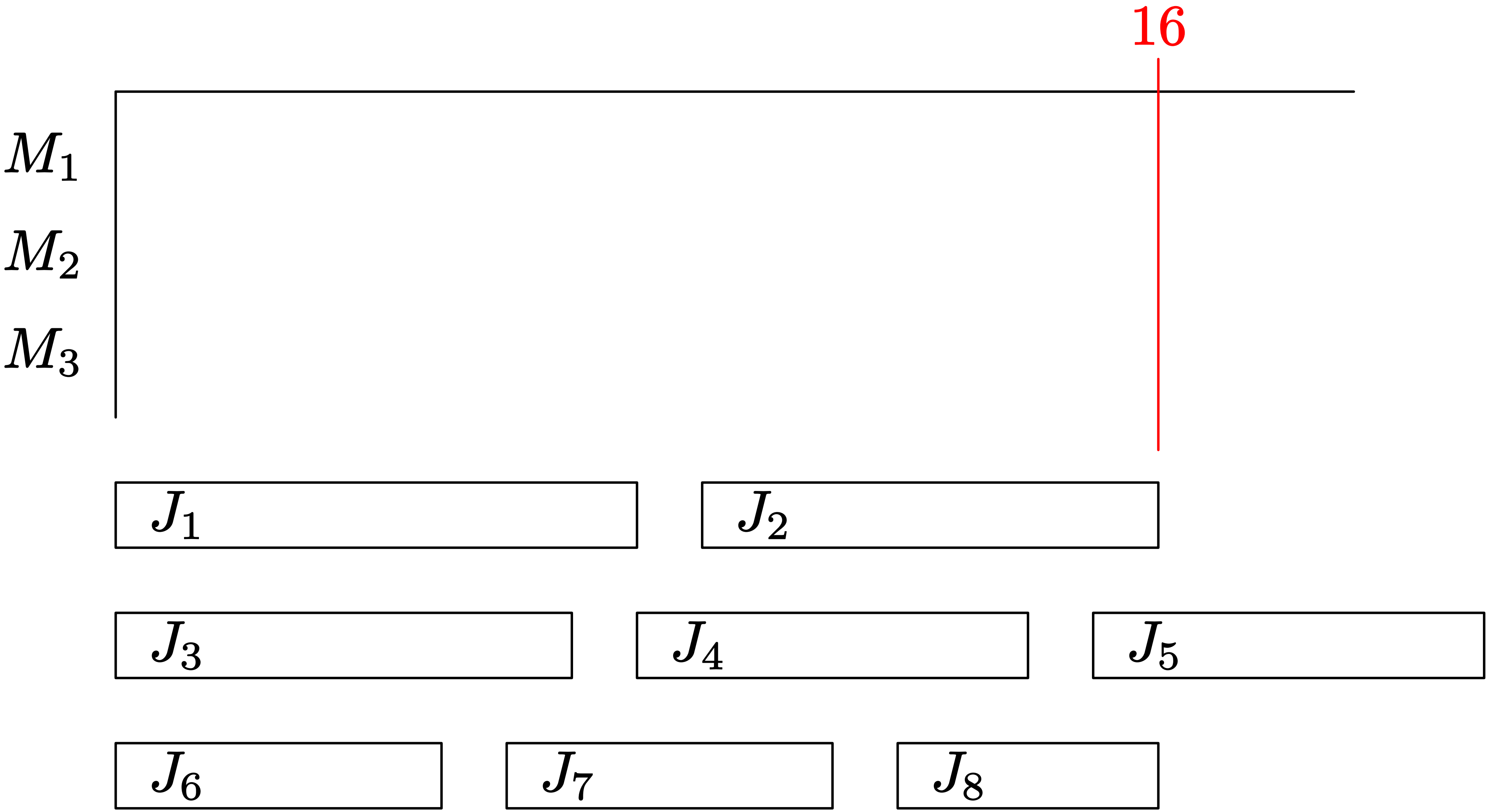
(Lenstra, Rinnooy Kan, Brucker '77)

$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (1)



$$p = (8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4)$$

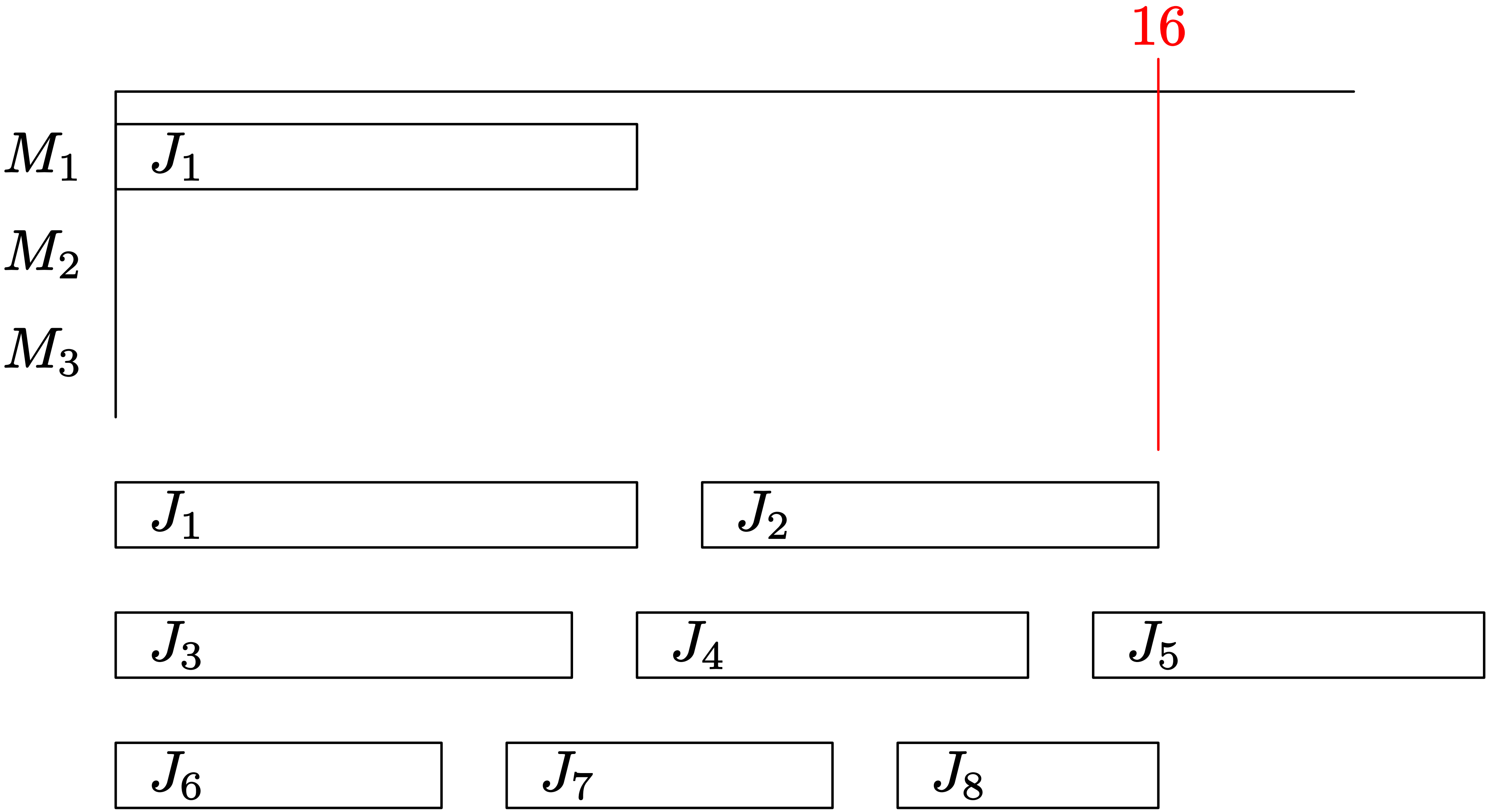
$P \mid$ pmtn $\mid C_{\max}$: McNaughton (1)



$$p = (8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4)$$

$$\frac{1}{m} \sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

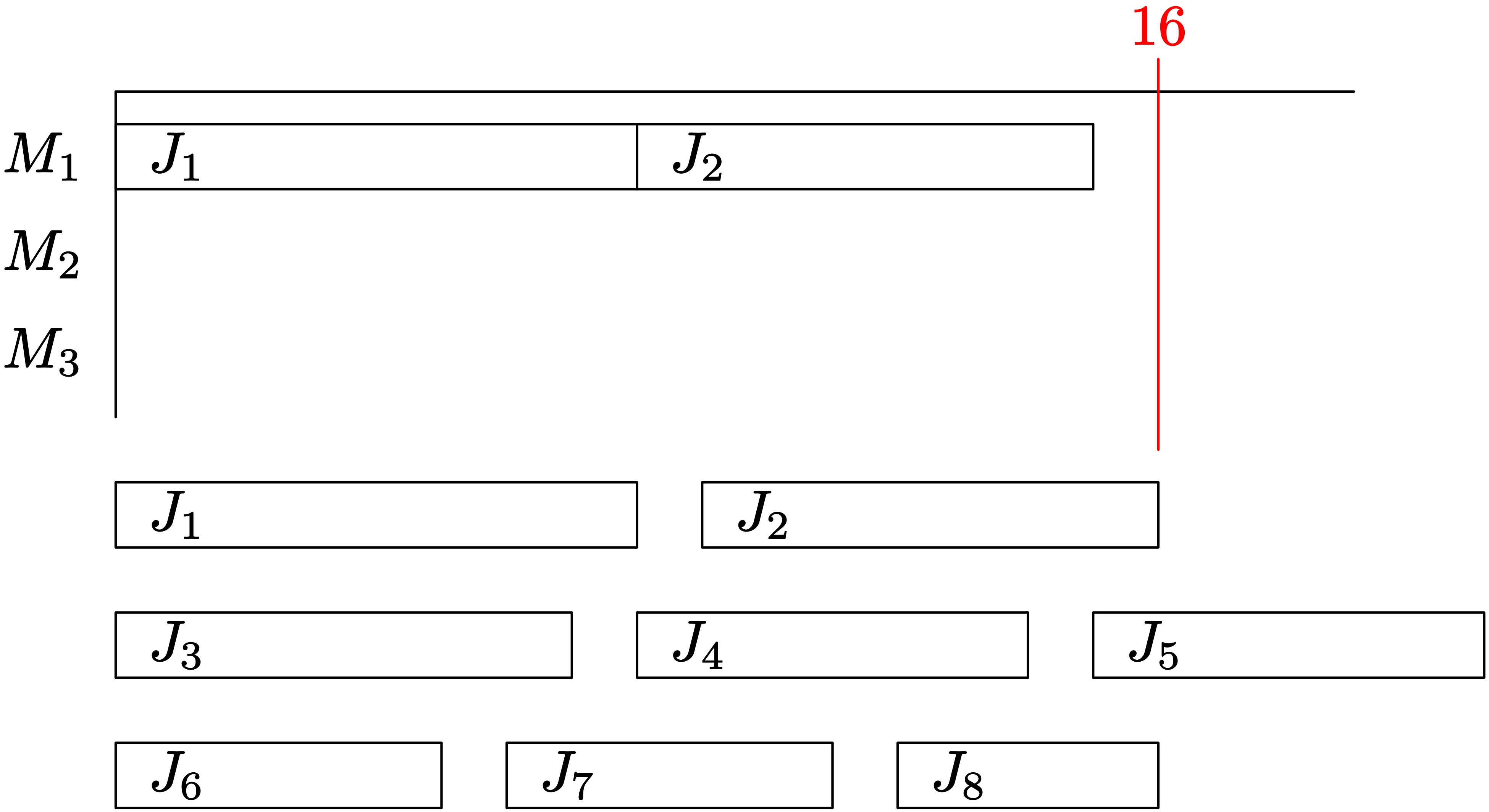
$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (1)



$$p = (8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4)$$

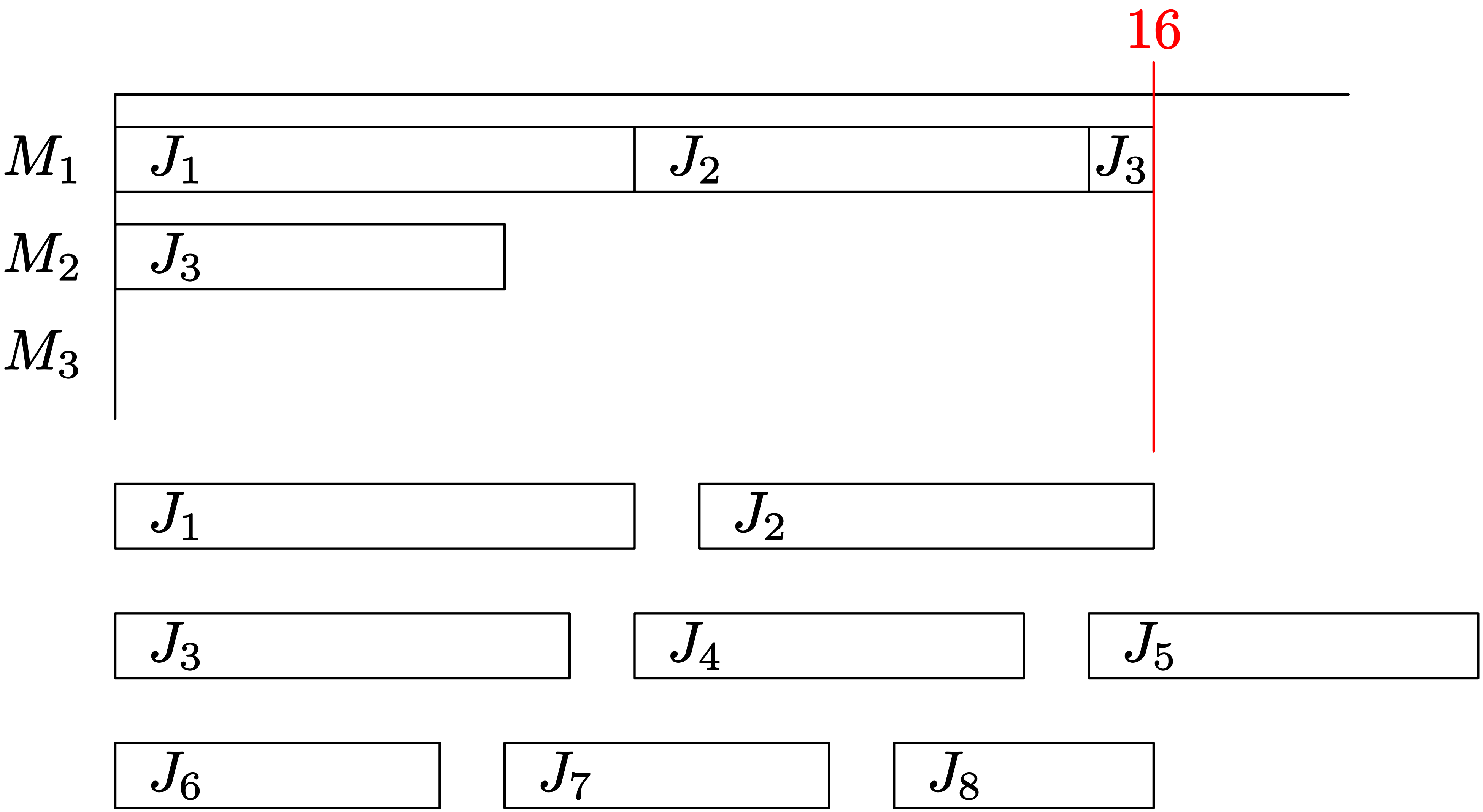
$$\frac{1}{m}\sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

$P \mid$ pmtn $\mid C_{\max}$: McNaughton (1)



$p = (8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4)$

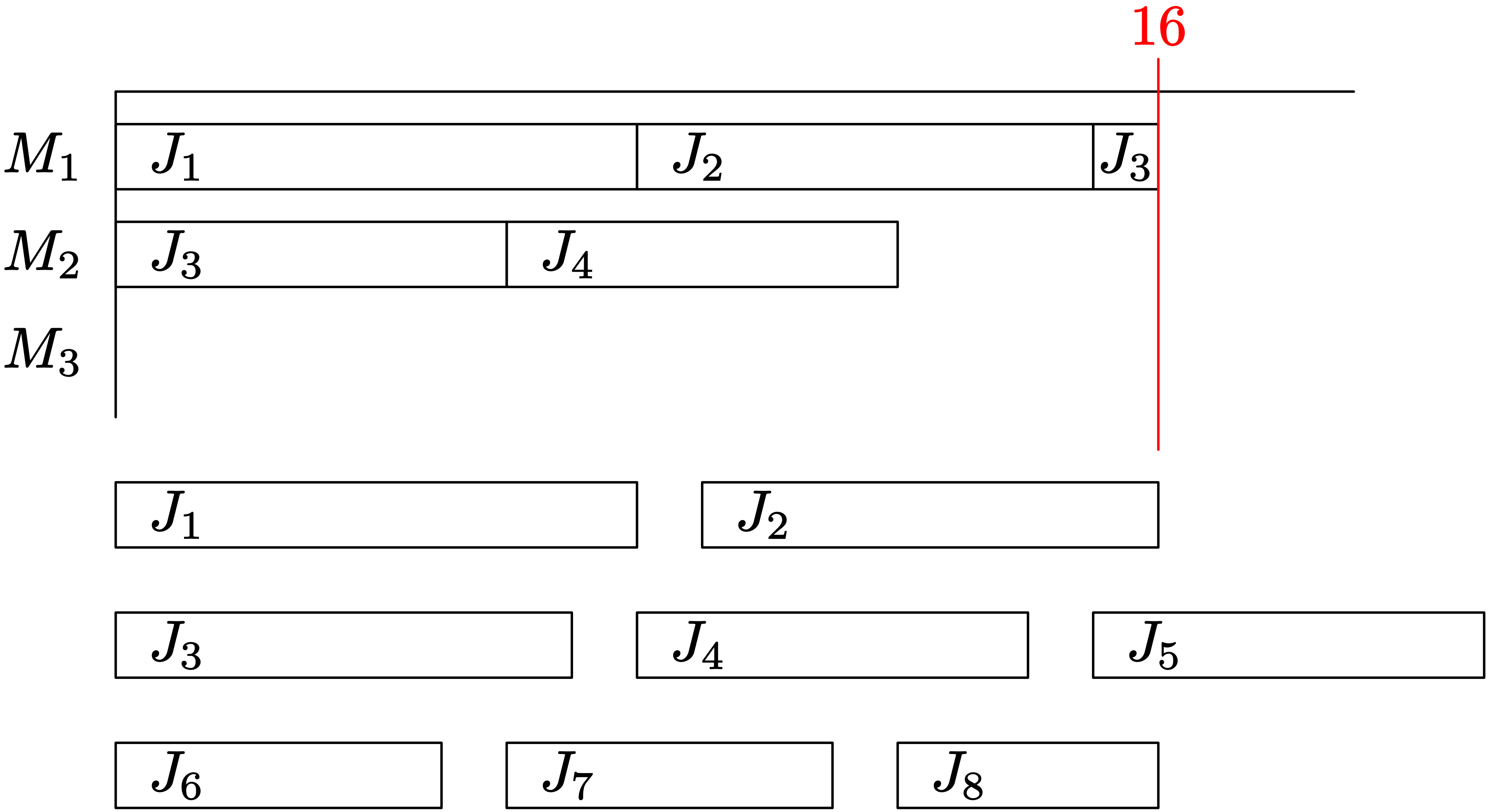
$$\frac{1}{m} \sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$



$$p = (8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4)$$

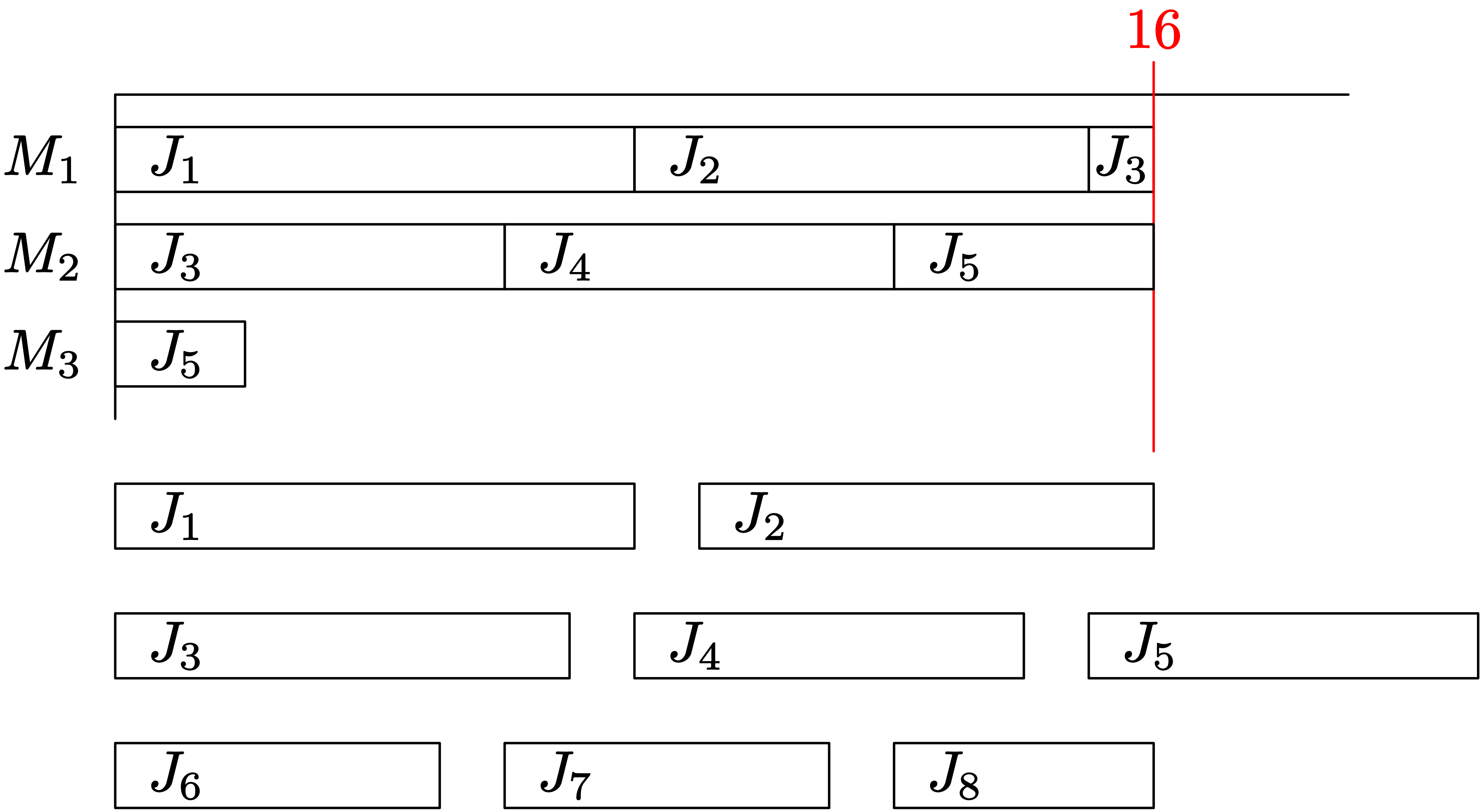
$$\frac{1}{m} \sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (1)



$$p = (8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4) \qquad \frac{1}{m} \sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

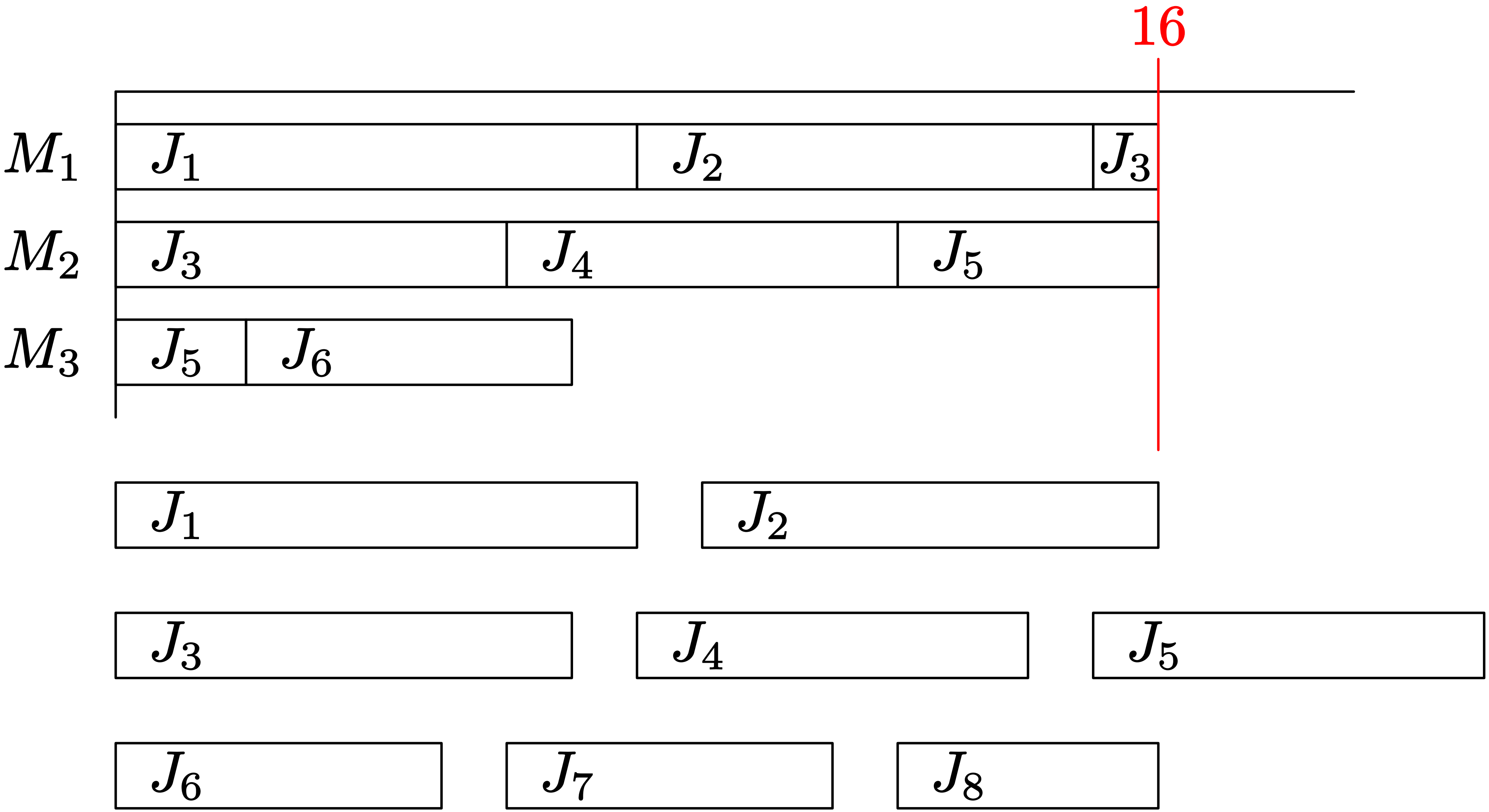
$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (1)



$p = (8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4)$

$$\frac{1}{m} \sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

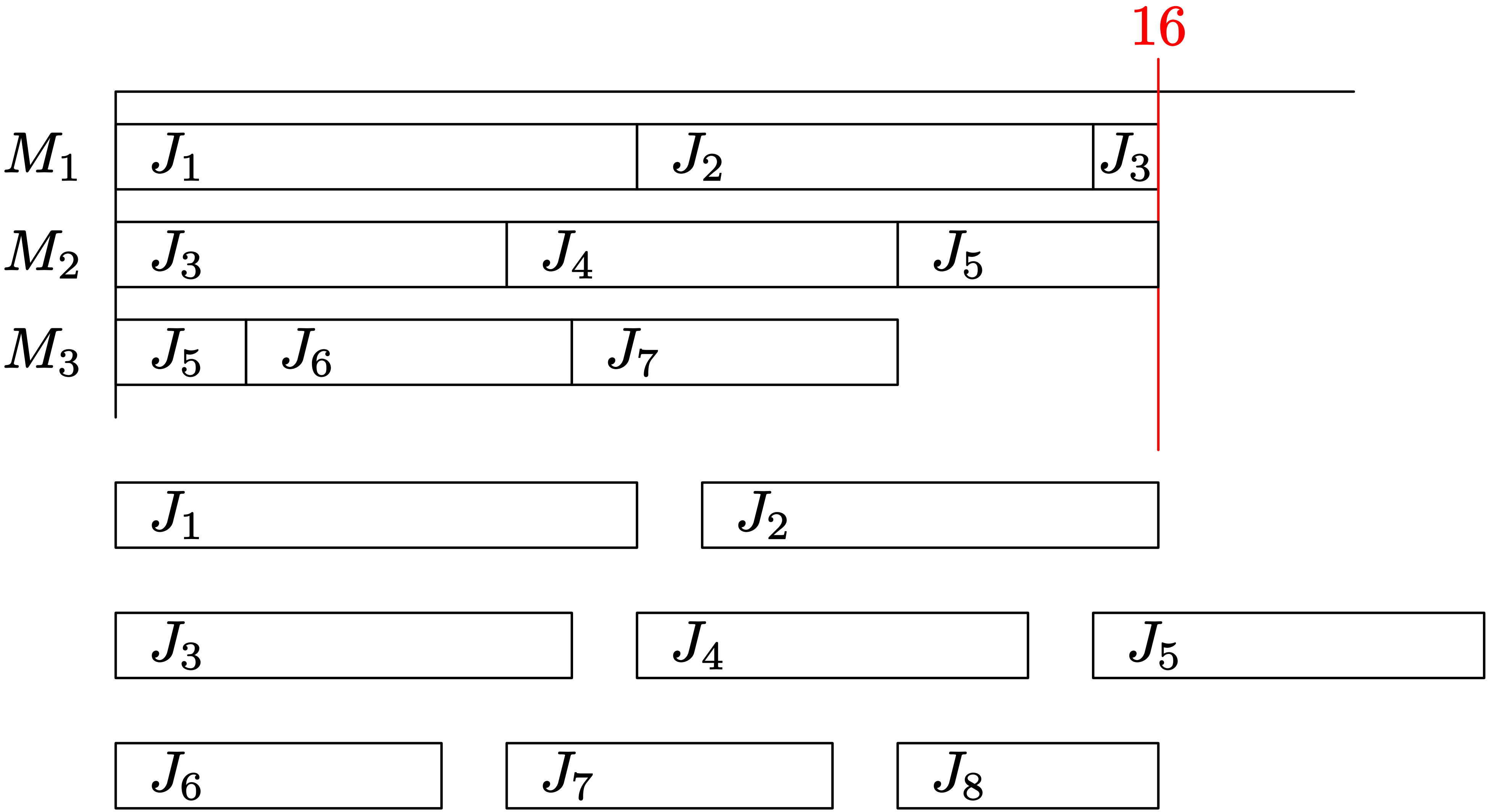
$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (1)



$p = (8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4)$

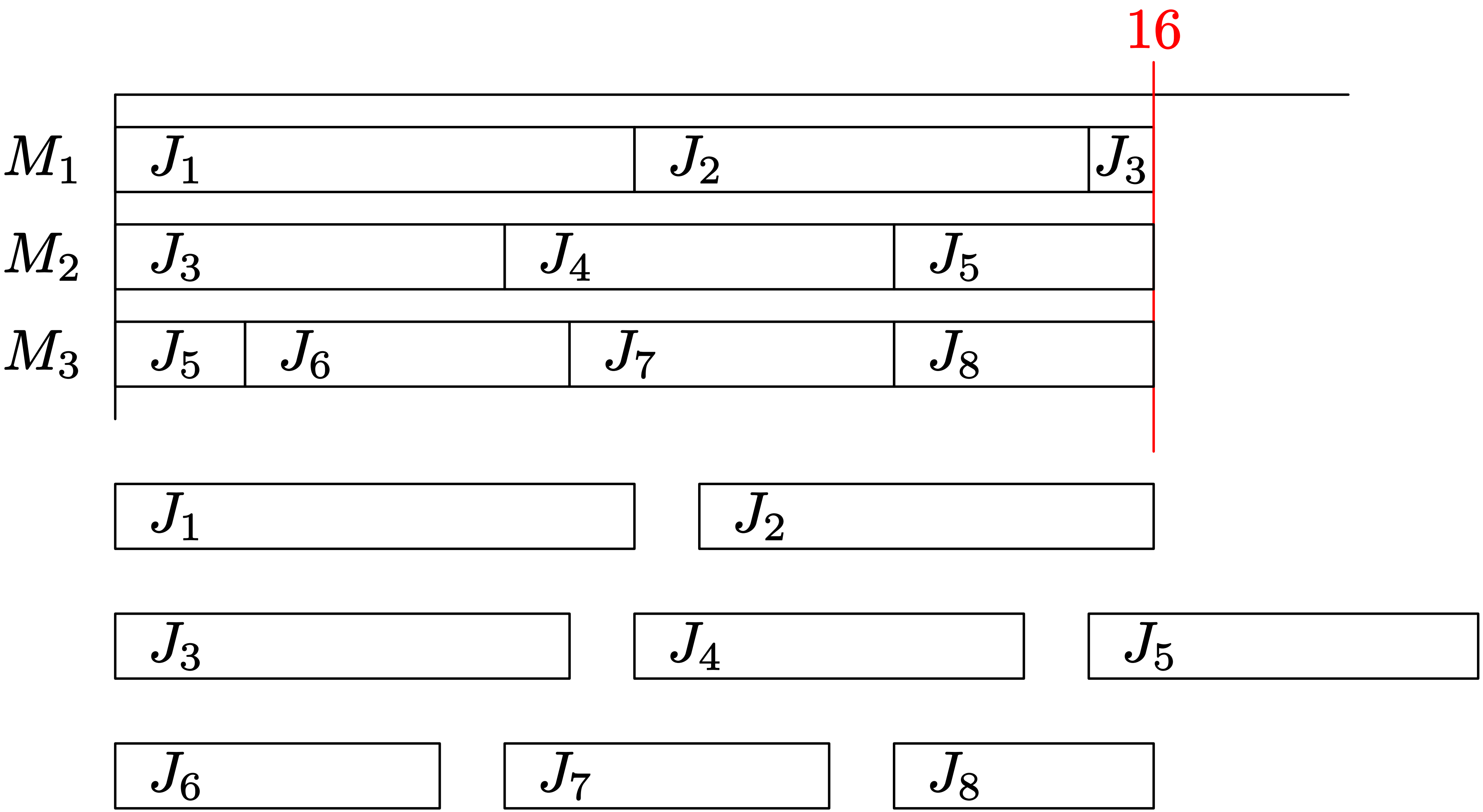
$$\frac{1}{m} \sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (1)



$$p = (8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4) \qquad \frac{1}{m}\sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

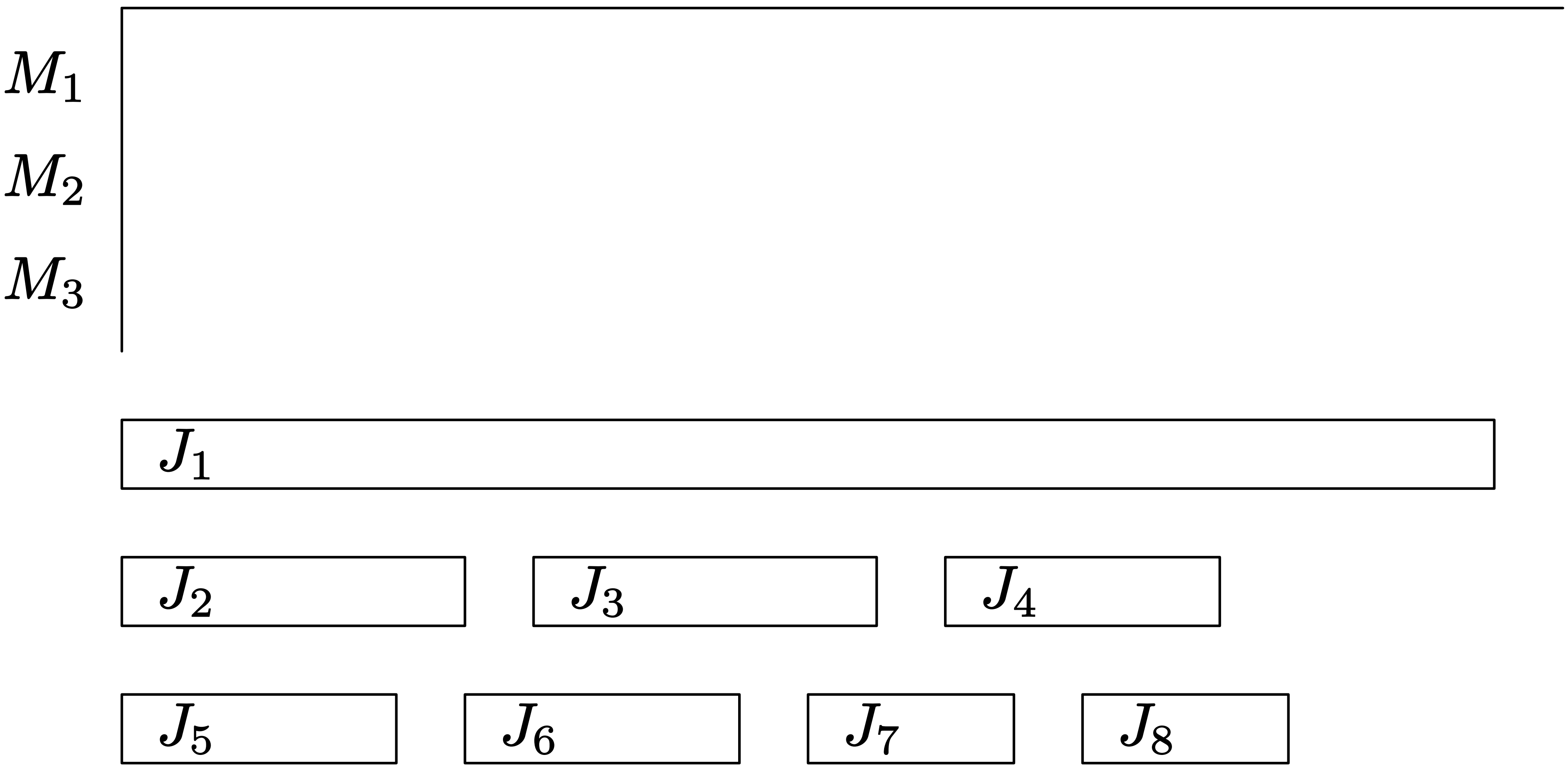
$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (1)



$p = (8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4)$

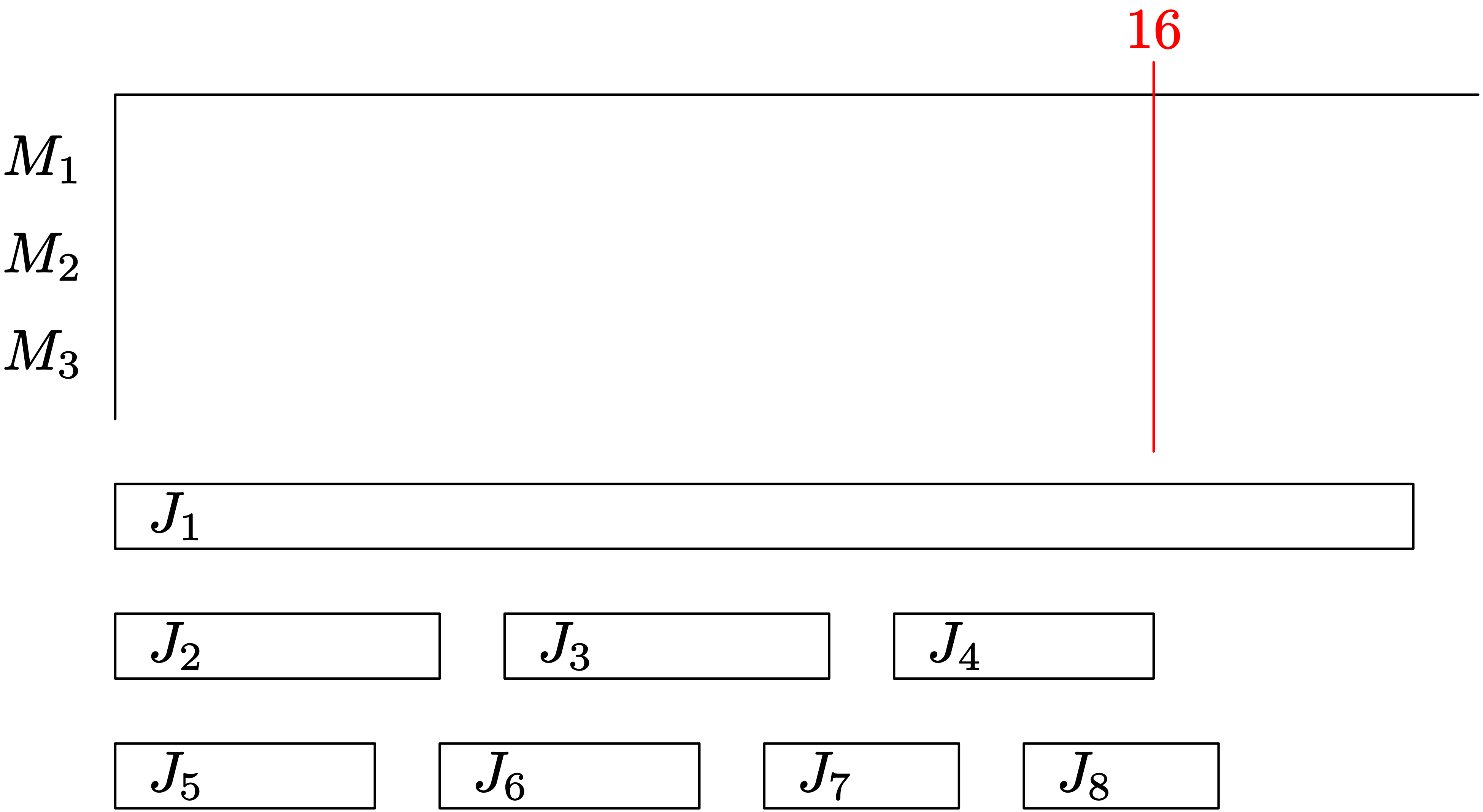
$$\frac{1}{m}\sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

$P \mid$ pmtn $\mid C_{\max}$: McNaughton (2)



$$p = (20, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3)$$

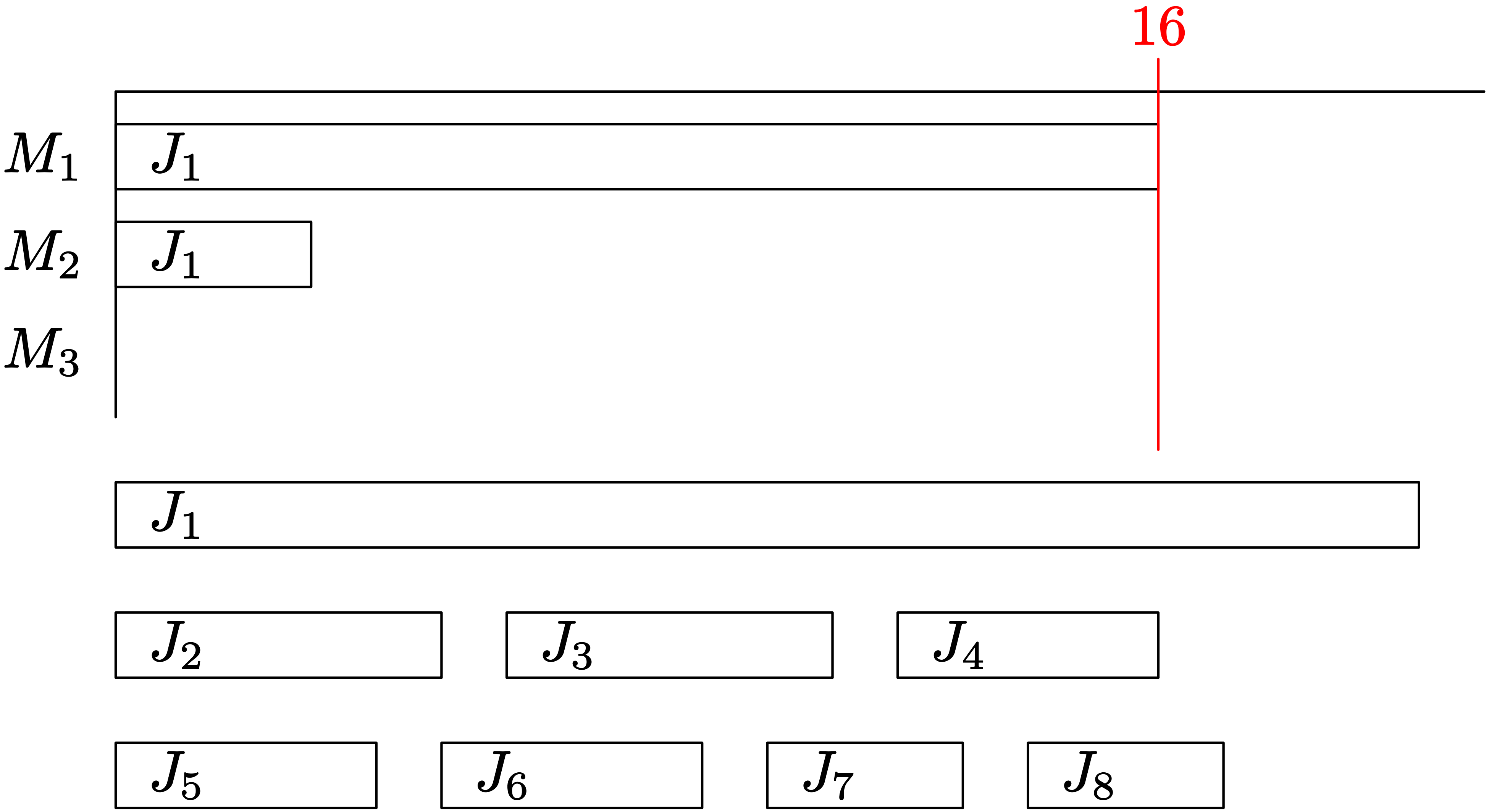
$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (2)



$$p = (20, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3)$$

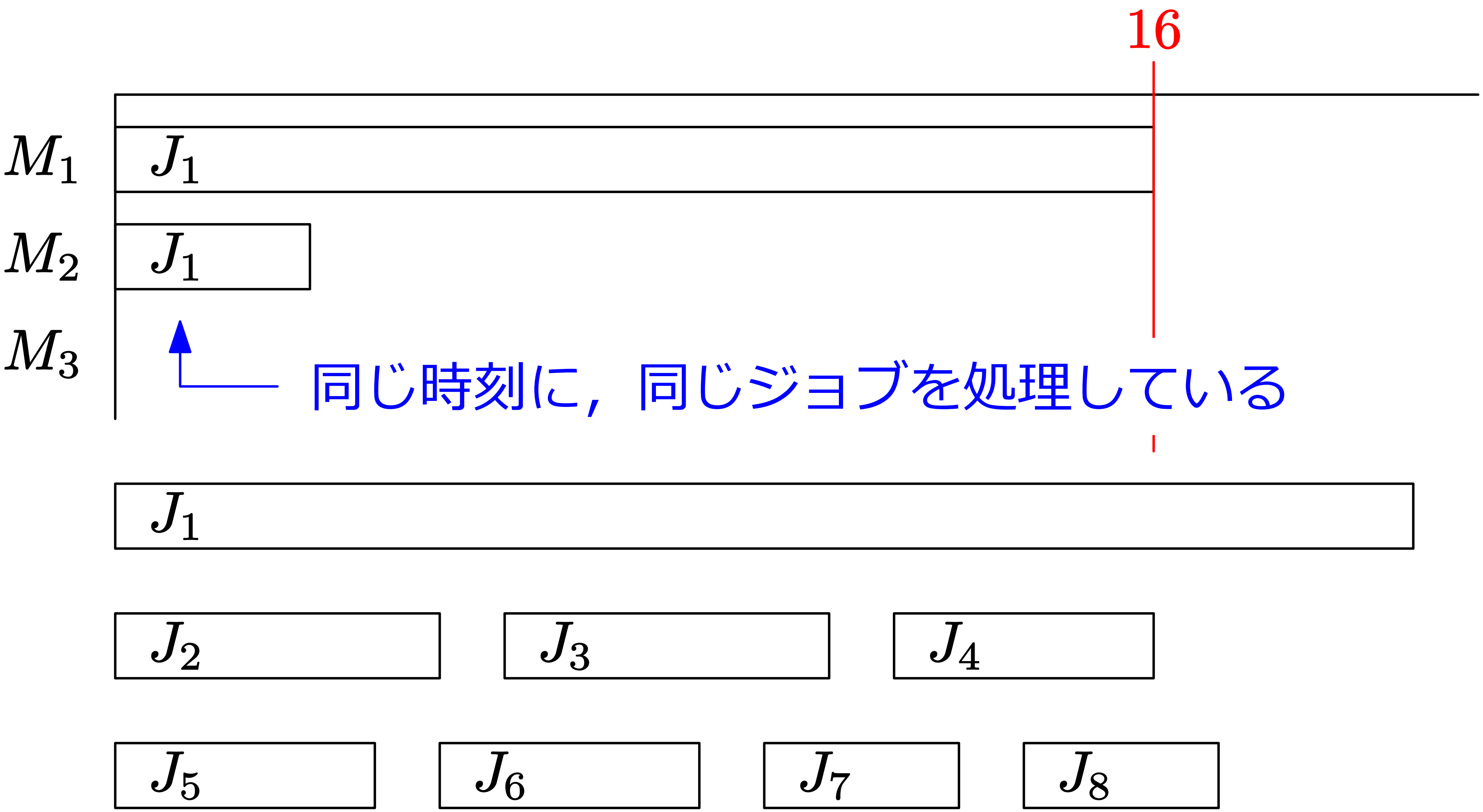
$$\frac{1}{m}\sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (2)



$$p = (20, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3) \qquad \frac{1}{m}\sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

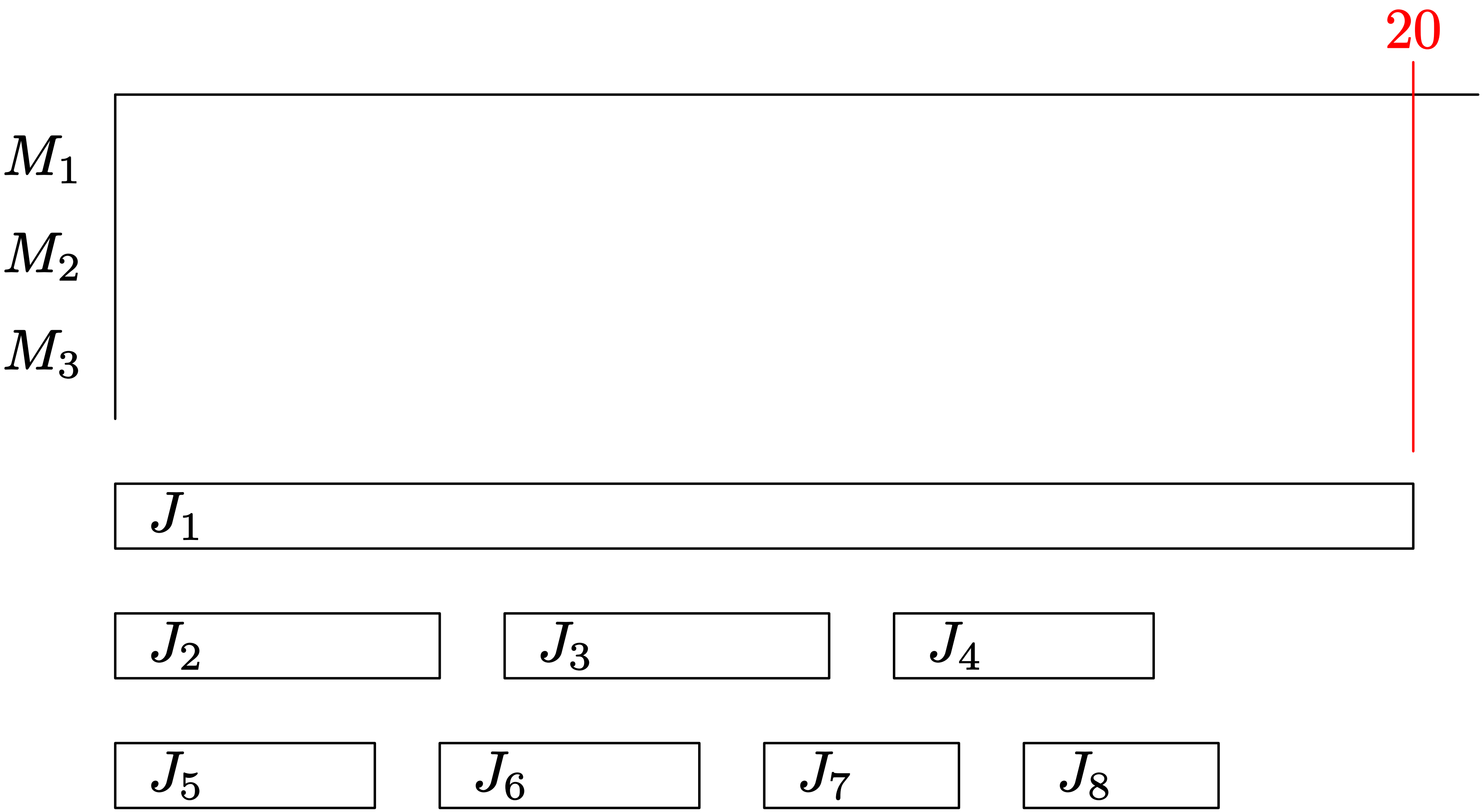
$P \mid \mathrm{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (2)



$p = (20, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3)$

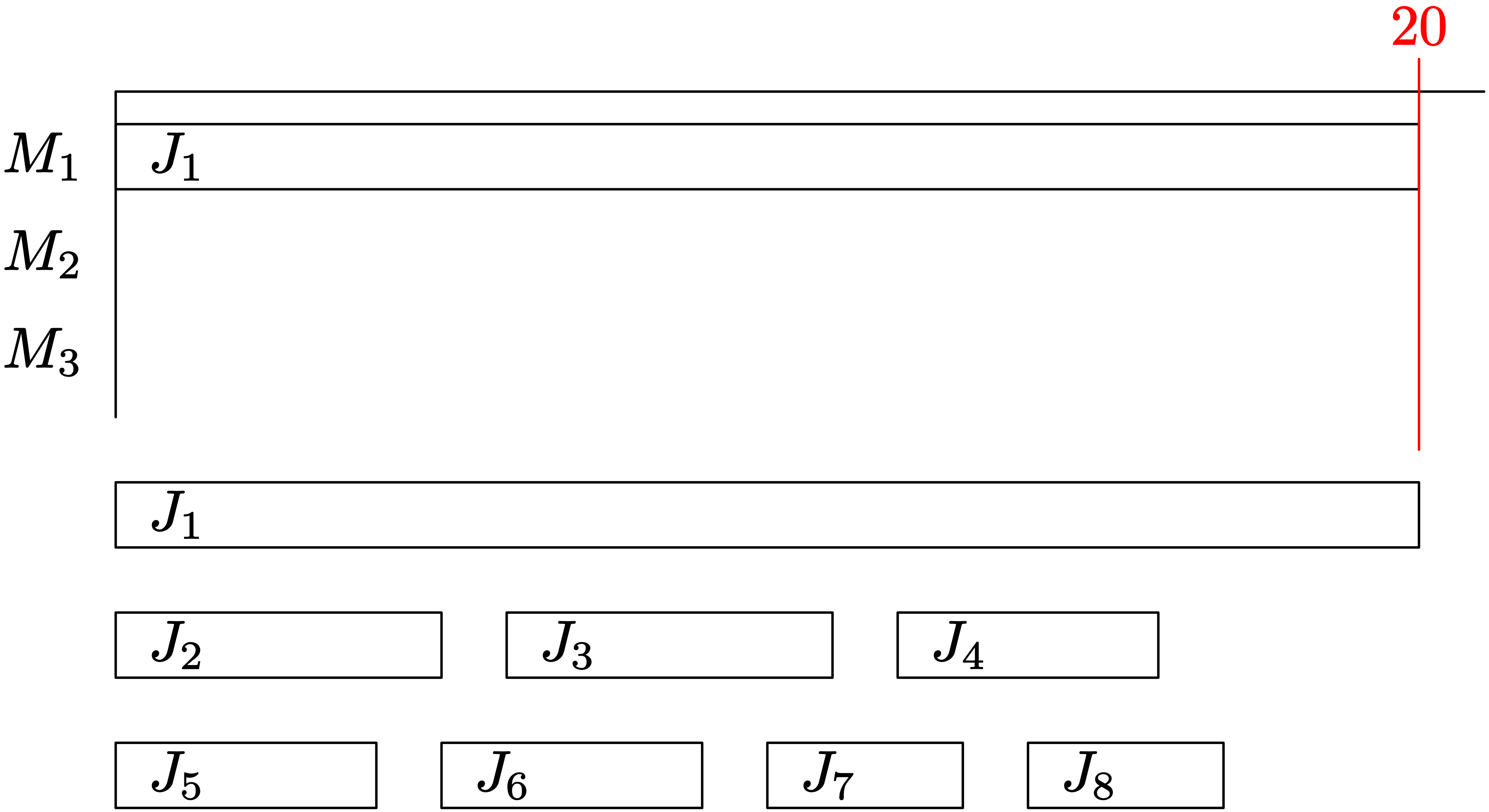
$$\frac{1}{m}\sum p_j = \frac{48}{3} = 16$$

$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (2)



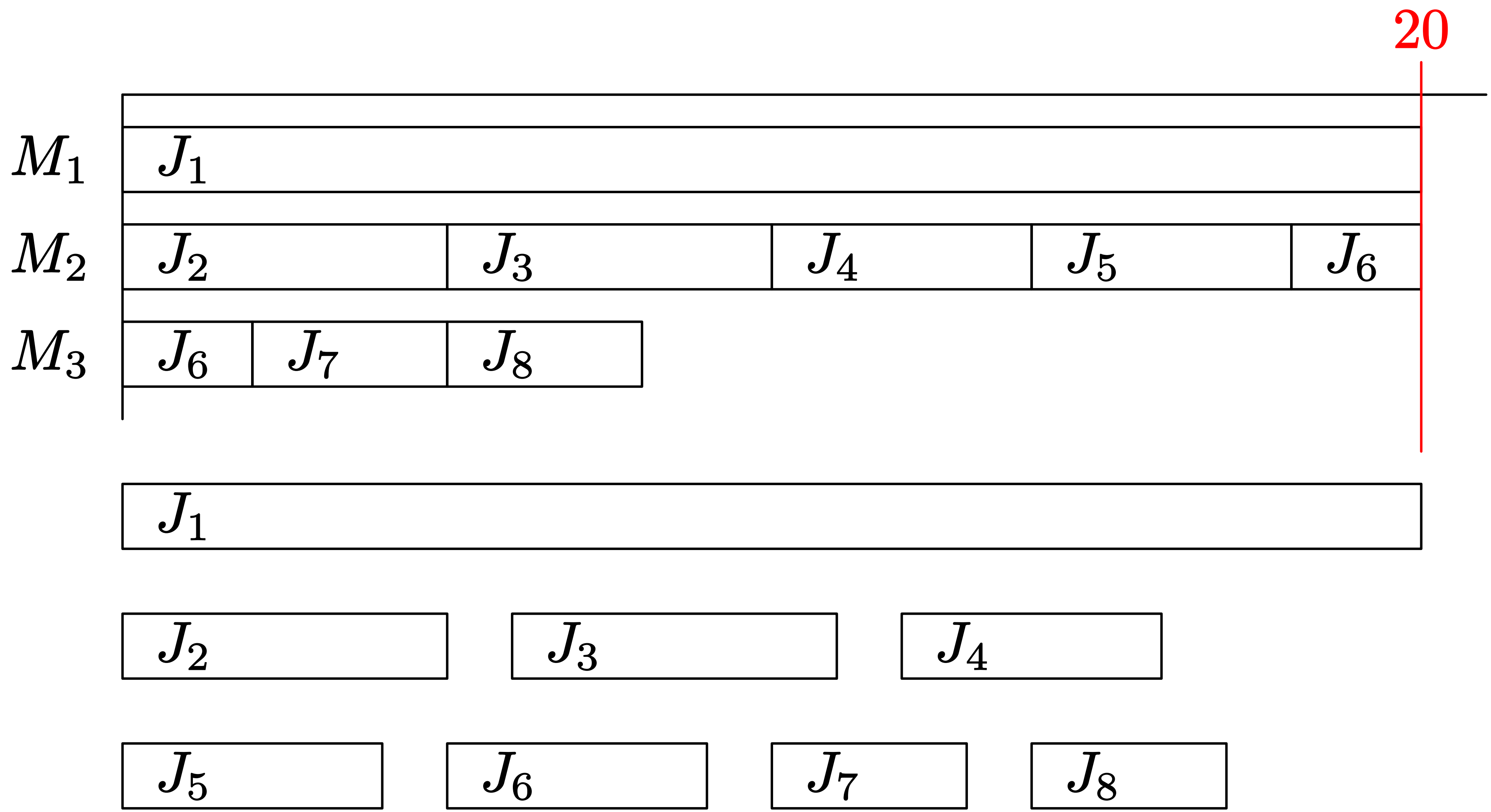
$p = (20, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3)$ $\qquad$ $\max p_j = 20$

$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (2)



$p = (20, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3)$ $\qquad$ $\max p_j = 20$

$P \mid \text{pmtn} \mid C_{\max}$: McNaughton (2)



$p = (20, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3)$ $\max p_j = 20$

McNaughton のアルゴリズム

1. $C^* = \max\left\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} p_j\right\}$ とする
2. 各機械の完了時刻の上限を C^* として，
   上限に至るまで，1 つの機械へジョブを割り当てる
   - 上限に至ったら，(必要ならジョブを分割して)
     次の機械へジョブを割り当てる

正当性：いままでの議論から分かる

計算量：$O(n)$

注：1 つのジョブは高々 2 つの部分にしか分割されない

分割可能性と計算複雑性 (2)

ジョブが分割可能であると，問題が難しくなることがある
(ただし，そのような例は稀)

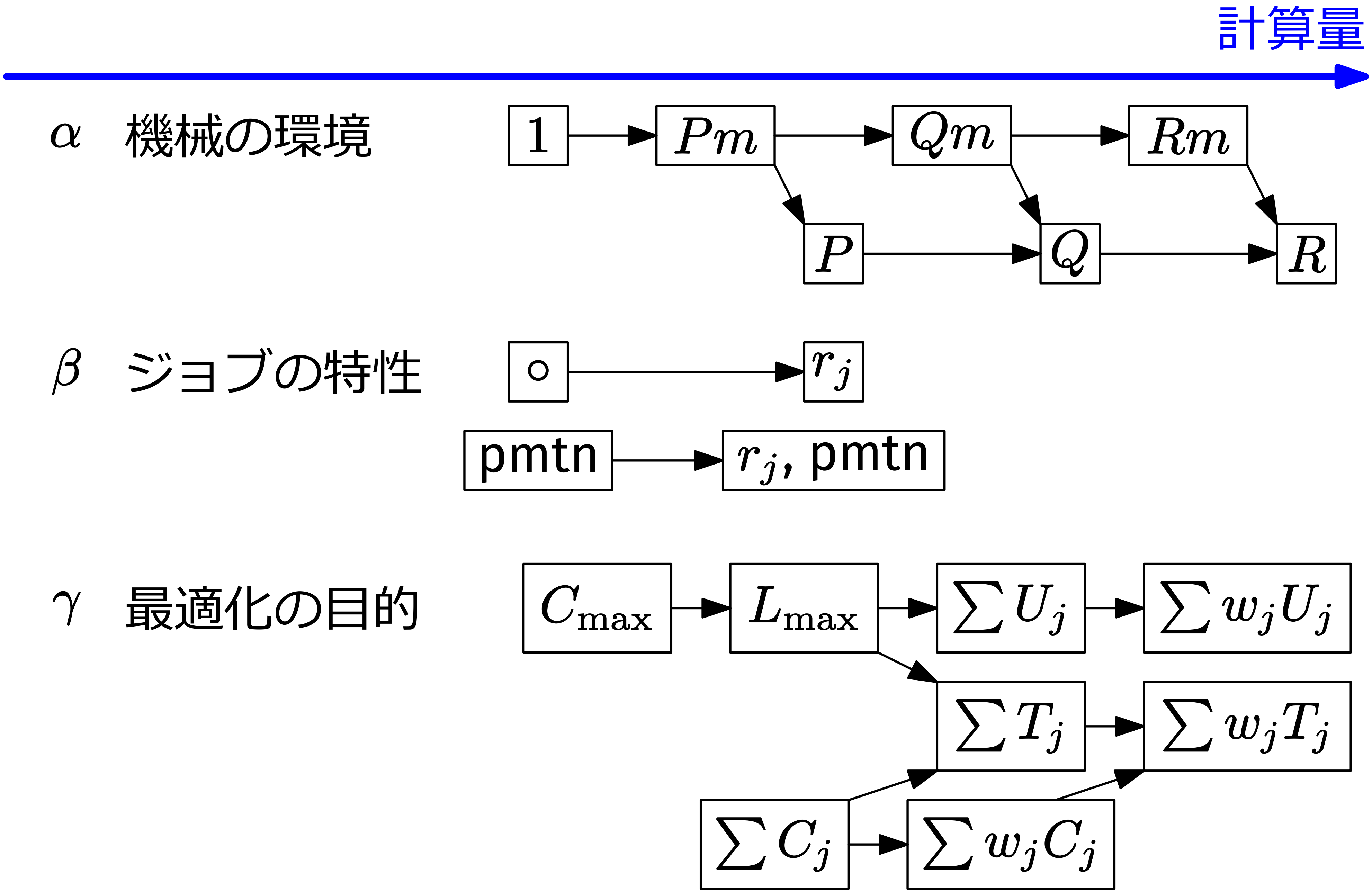
定理

- 問題 $R \mid\mid \sum C_j$ は 強多項式時間で解ける
  (Bruno, Coffman Jr., Sethi ’74; Horn ’73)
- 問題 $R \mid \text{pmtn} \mid \sum C_j$ は 強 NP 困難
  (Sitters ’05, ’17)

付録：$R \mid\mid \sum C_j$ に対するアルゴリズムの考え方
(割当問題 (二部グラフの最大重みマッチング) を使う)

$R \mid \text{pmtn} \mid \sum C_j$ の NP 困難性証明は省略

今日のまとめ


計算量
α 機械の環境
1
Pm
Qm
Rm
P
Q
R
β ジョブの特性
$\circ$
r_j
pmtn
r_j, pmtn
γ 最適化の目的
$C_{\max}$
$L_{\max}$
$\sum U_j$
$\sum w_j U_j$
$\sum T_j$
$\sum w_j T_j$
$\sum C_j$
$\sum w_j C_j$

$C_{\max} \not\to \sum C_j$

定理

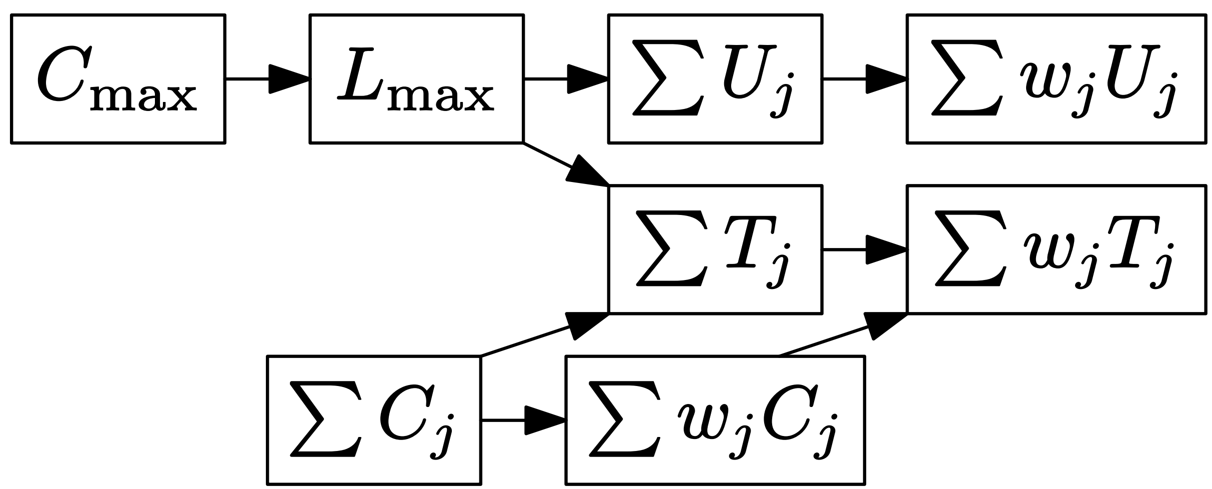
- 問題 $P \,||\, \sum C_j$ は 強多項式時間で解ける

  (Bruno, Coffman Jr., Sethi '74; Horn '73)

- 問題 $P \,||\, C_{\max}$ は 強 NP 困難

  (Garey, Johnson '75)

γ　最適化の目的



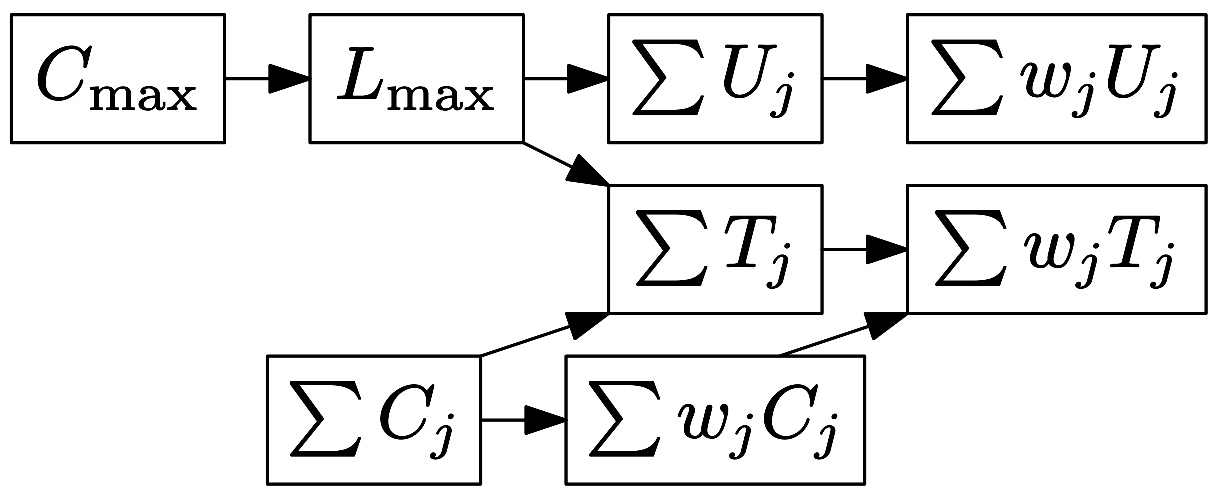
$\sum C_j \not\to C_{\max}$

定理

- 問題 $1 \mid r_j \mid C_{\max}$ は 強多項式時間で解ける
  (到着時刻の早い順に処理)
- 問題 $1 \mid r_j \mid \sum C_j$ は 強 NP 困難
  (Lenstra, Rinnooy Kan, Brucker '77)

$1 \mid r_j \mid \sum C_j$ の NP 困難性証明は省略

γ　最適化の目的



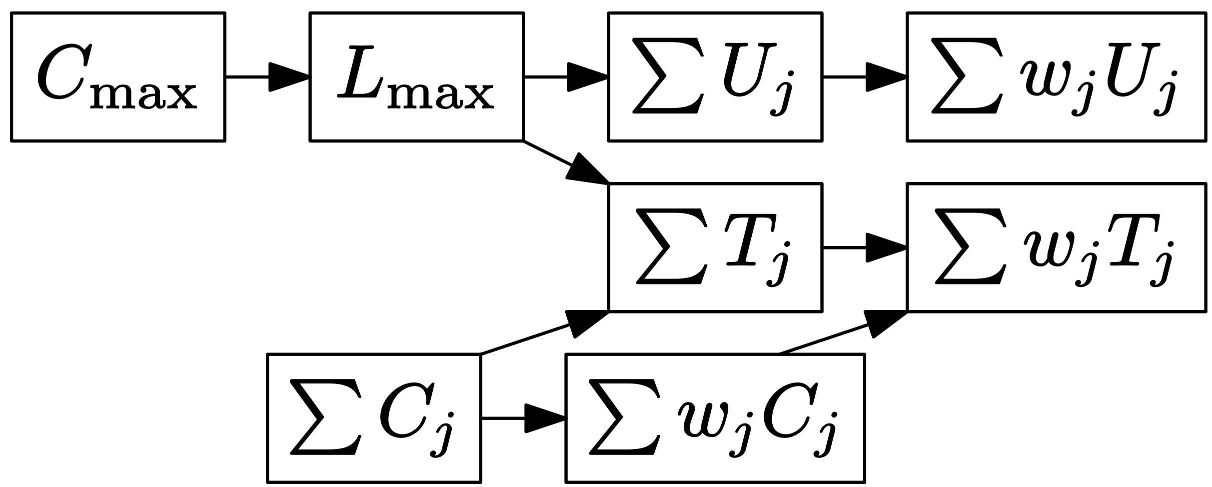
$\sum C_j \not\to L_{\max}$

定理

- 問題 $R \mid \text{pmtn} \mid L_{\max}$ は 弱多項式時間で解ける (Lawler, Labetoulle ’78)
- 問題 $R \mid \text{pmtn} \mid \sum C_j$ は 強 NP 困難 (Sitters ’05, ’17)

付録：$R \mid \text{pmtn} \mid L_{\max}$ に対するアルゴリズムの考え方 (線形計画法を使う)

γ 最適化の目的



まとめと次回の予告

今日の目標

ジョブ・スケジューリング問題の間の関係 を
計算複雑性の観点から調査 する方法を身に付ける

- 機械の環境 α
- 最適化する目的 γ
- ジョブの特性 β

次回の予告

近似保証 (approximation guarantee) という考え方

付録

1. **$1 \mid\mid \sum w_j T_j$ の強 NP 困難性**
2. $R \mid\mid \sum C_j$ のアルゴリズム
3. $R \mid \text{pmtn} \mid L_{\max}$ のアルゴリズム

- E. L. Lawler, A “pseudopolynomial” time algorithm for sequencing jobs to minimize total tardiness. *Annals of Discrete Mathematics* 1 (1977) pp. 331–342.

[復習] 3 分割問題

定義：3 分割問題 (3-partition problem)

次を満たす正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{3n}$ が与えられる

$$\frac{1}{4}T < a_i < \frac{1}{2}T \quad \text{ただし，} T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$$

それらを同じ和の n 個のグループに分けられるか？

例：$119, 120, 122, 123, 125, 127, 130, 130, 130, 140, 145, 149$

- $120 + 125 + 145 = 390$
- $123 + 127 + 140 = 390$
- $119 + 122 + 149 = 390$
- $130 + 130 + 130 = 390$

できる

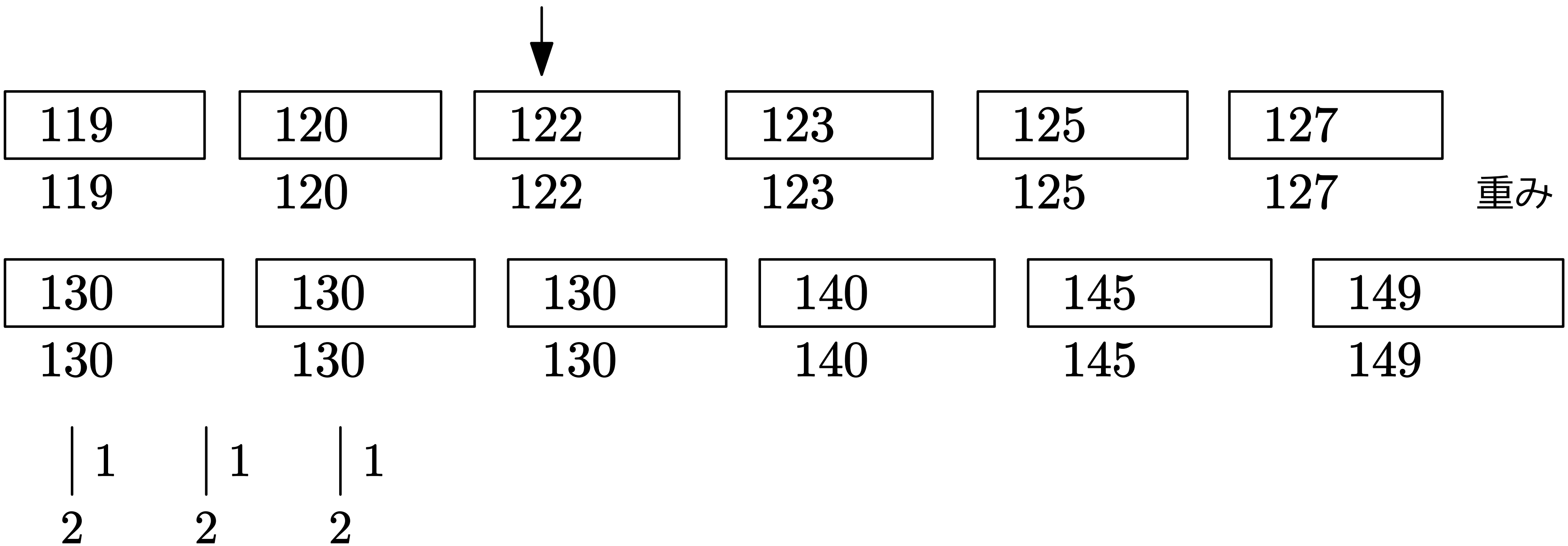
事実 (Garey, Johnson '75)

3 分割問題 は強 NP 困難

$1 \| \sum w_j T_j$ の強 NP 困難性 (1)

証明：3 分割問題を帰着する

入力の変換：119, 120, 122, 123, 125, 127, 130, 130, 130, 140, 145, 149

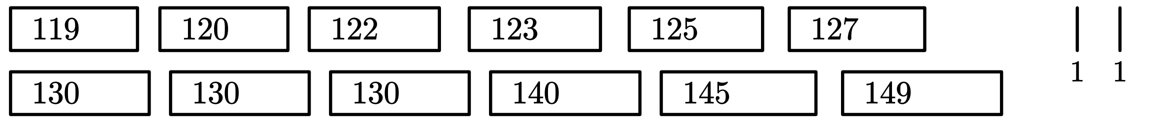


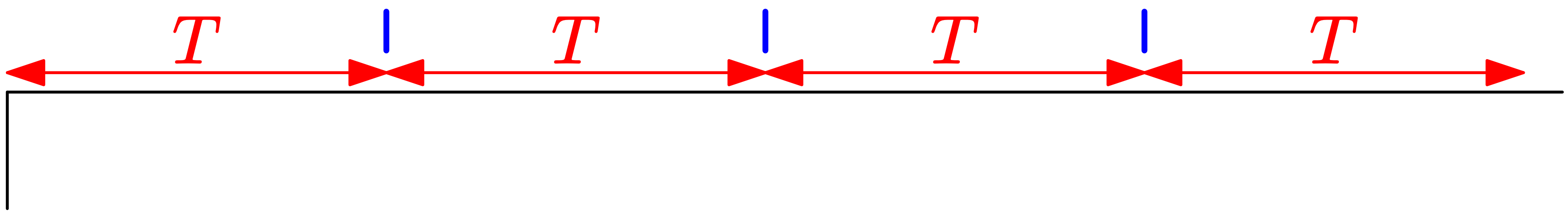
3 分割問題を解くアルゴリズム

$1 \,||\, \sum w_j T_j$ の強 NP 困難性 (2)

証明：3 分割問題を帰着する

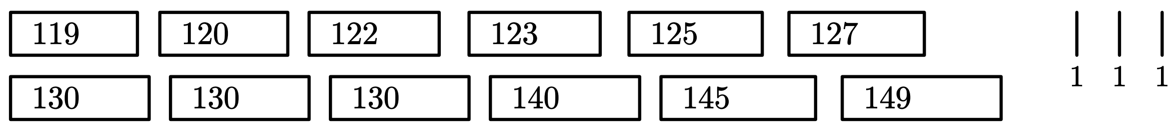
入力の変換：

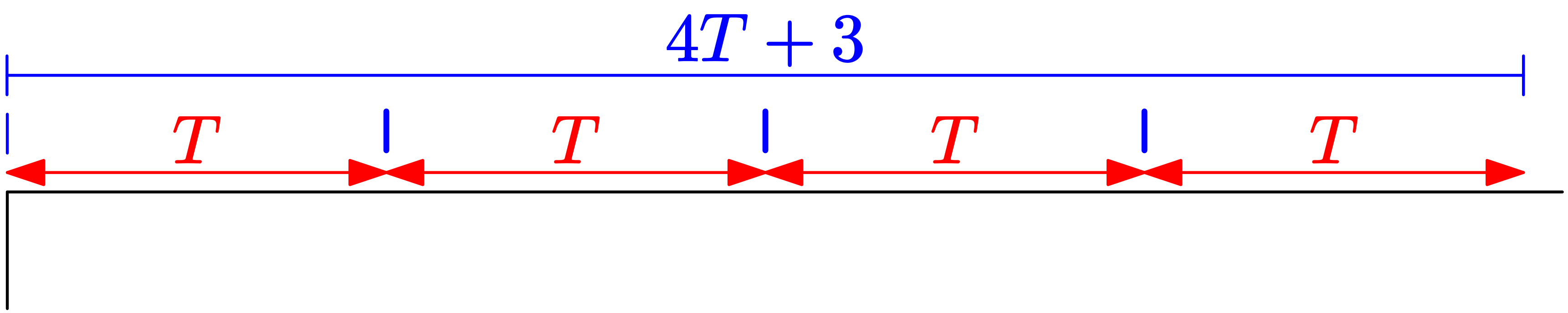




証明：3 分割問題を帰着する

入力の変換：

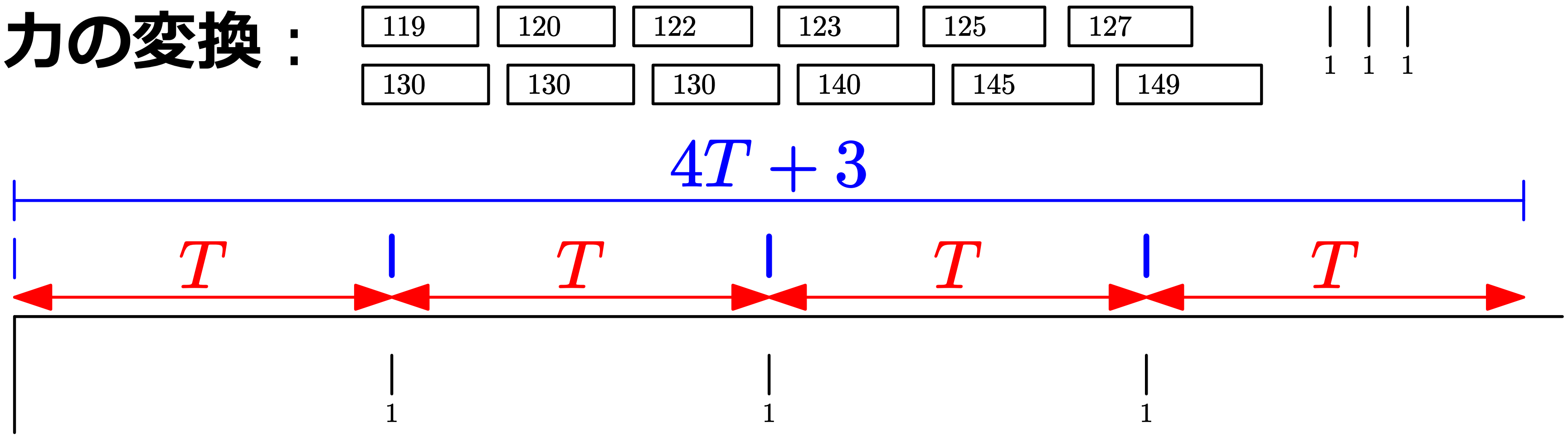




$1 \,||\, \sum w_j T_j$ の強 NP 困難性 (2)

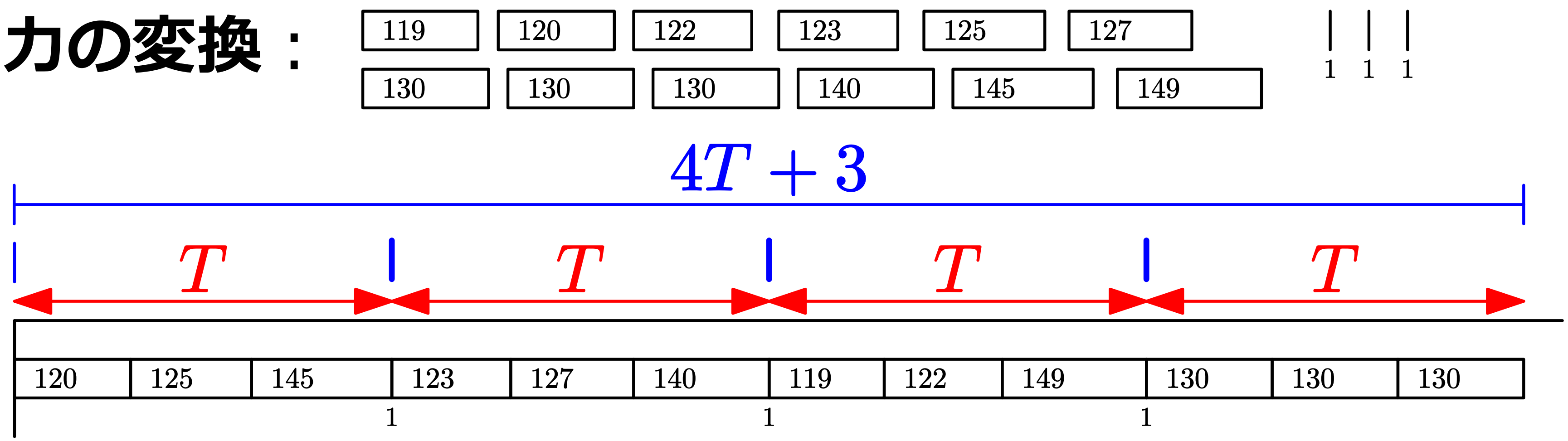
証明：3 分割問題を帰着する

入力の変換：



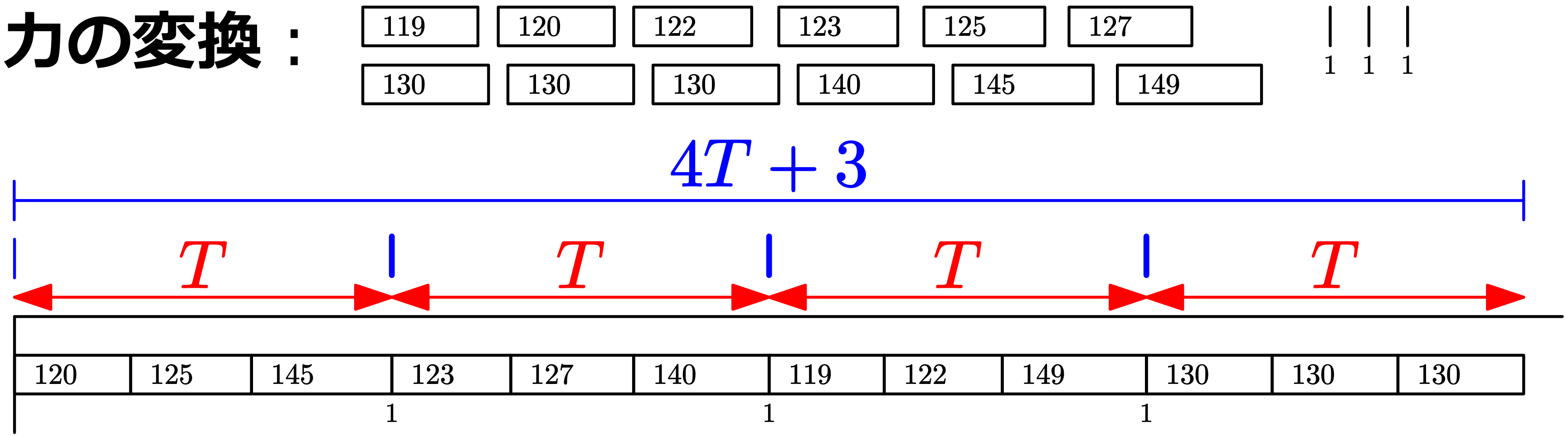
証明：3 分割問題を帰着する

入力の変換：



証明：3 分割問題を帰着する

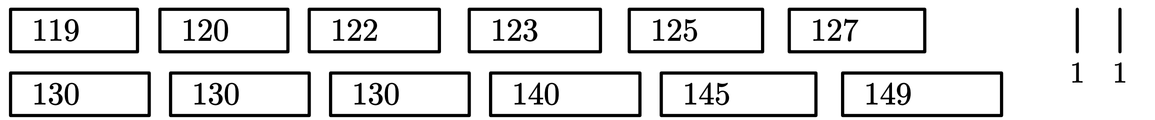
入力の変換：

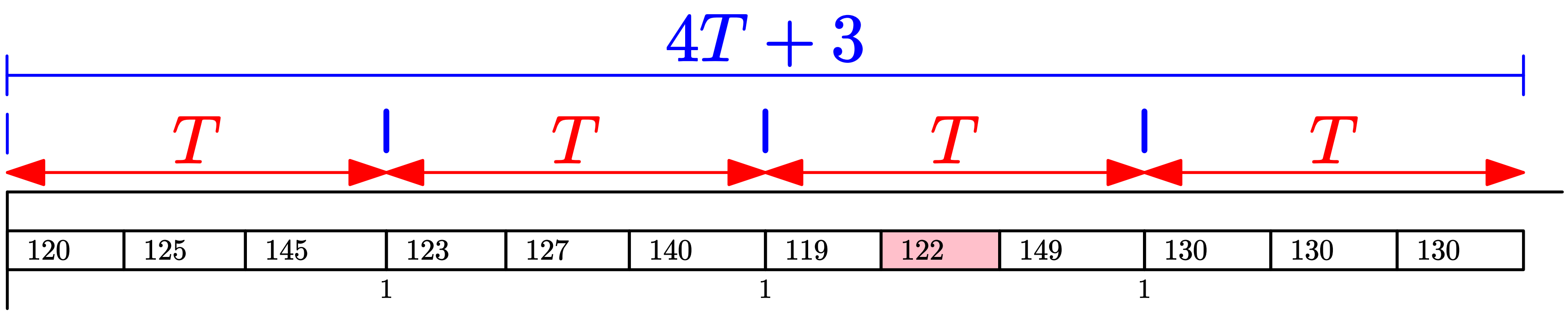


$$\text{最適値} \leq \sum_{j=1}^{3n} \sum_{k=j}^{3n} a_j a_k + \frac{1}{2}(n-1)nT$$ の解があるか？

証明：3 分割問題を帰着する

入力の変換：





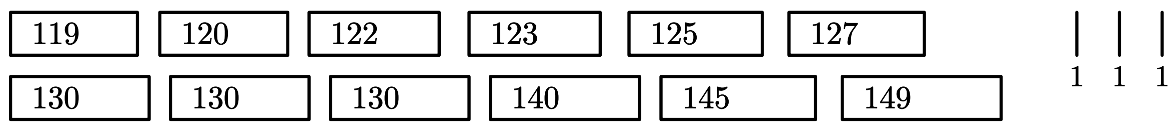
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_j + 2) \cdot a_j$$

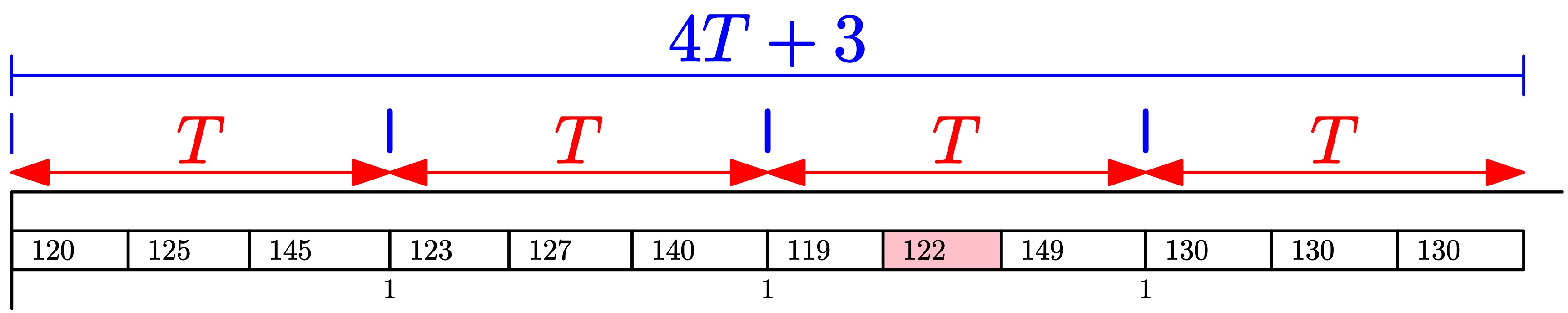
最適値 $\leq \displaystyle\sum_{j=1}^{3n}\sum_{k=j}^{3n} a_j a_k + \frac{1}{2}(n-1)nT$ の解があるか？

$1 \| \sum w_j T_j$ の強 NP 困難性 (2)

証明：3 分割問題を帰着する

入力の変換：





$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_j + 2) \cdot a_j$$

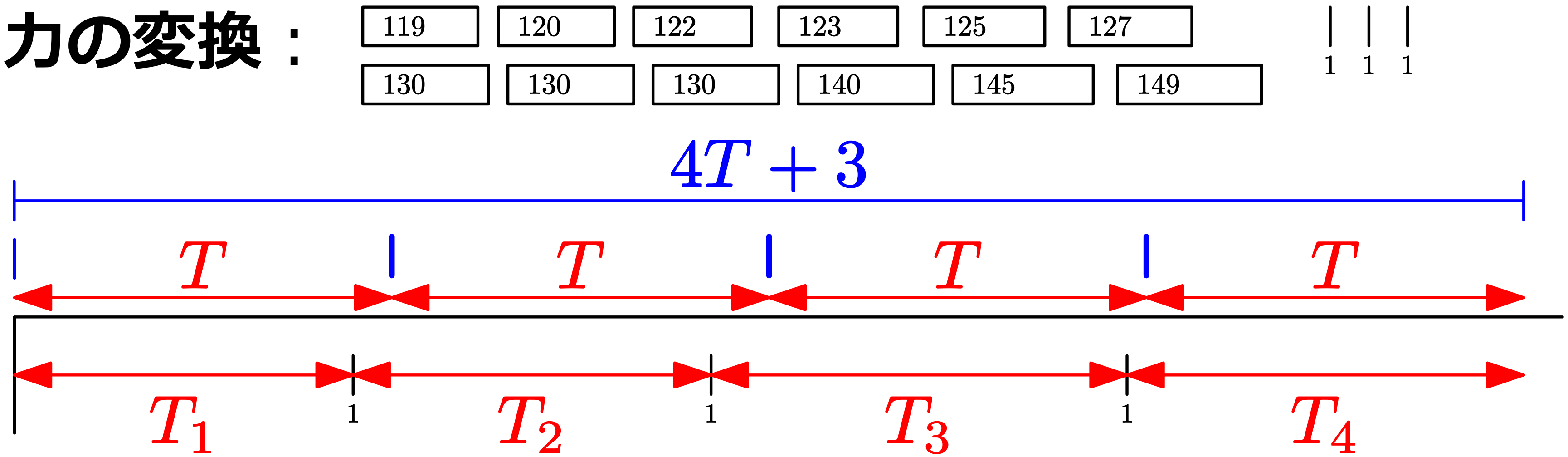
最適値 $\leq \displaystyle\sum_{j=1}^{3n} \sum_{k=j}^{3n} a_j a_k + \frac{1}{2}(n-1)nT$ の解があるか？

$$1 \cdot T + 2 \cdot T + \cdots + (n-1) \cdot T = \frac{1}{2} n(n-1)T$$

$1 \,||\, \sum w_j T_j$ の強 NP 困難性 (3)

証明：3 分割問題を帰着する

入力の変換：



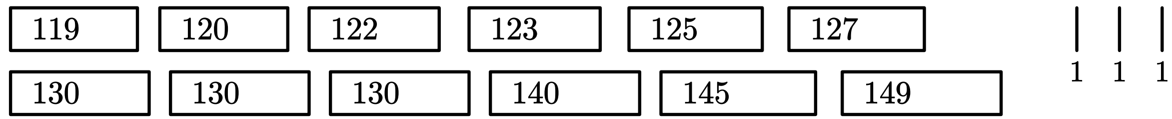
$$最適値 \leq \sum_{j=1}^{3n}\sum_{k=j}^{3n} a_j a_k + \frac{1}{2}(n-1)nT$$ の解があるか？

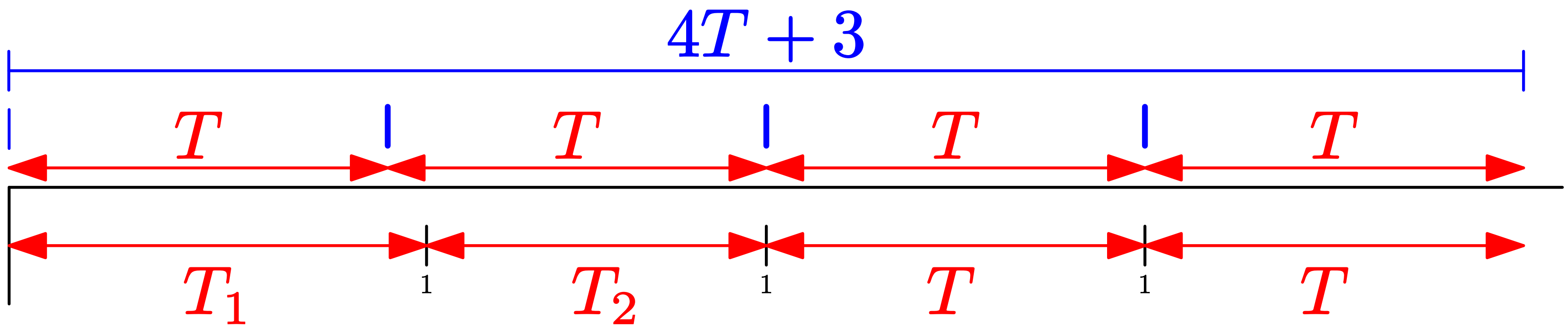
$$1 \cdot T_2 + 2 \cdot T_3 + \cdots + (n-1) \cdot T_n > \frac{1}{2}n(n-1)T$$

$1 \,||\, \sum w_j T_j$ の強 NP 困難性 (4)

証明：3 分割問題を帰着する

入力の変換：





$$\text{最適値} \leq \sum_{j=1}^{3n} \sum_{k=j}^{3n} a_j a_k + \frac{1}{2}(n-1)nT \text{ の解があるか？}$$

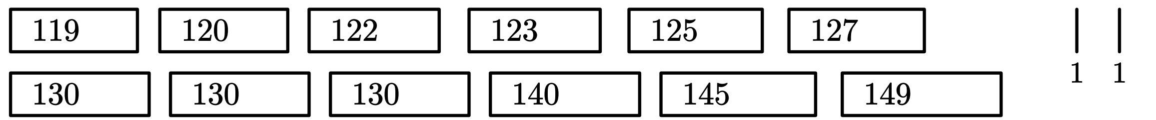
$$\underline{2 \cdot (T_1 - T) + 1 \cdot T_2} + 2 \cdot T + \cdots + (n-1) \cdot T > \frac{1}{2} n(n-1)T$$

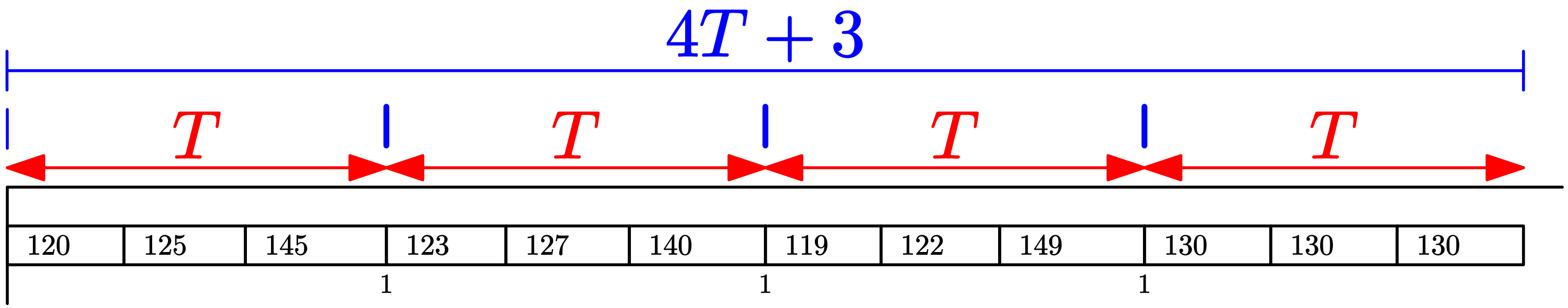
$$= 2T_1 + T_2 - 2T = T_1 + (T_1 + T_2) - 2T = T_1 > T$$

$1 \,||\, \sum w_j T_j$ の強 NP 困難性 (5)

証明：3 分割問題を帰着する

出力の変換：





$$\text{最適値} \leq \sum_{j=1}^{3n} \sum_{k=j}^{3n} a_j a_k + \frac{1}{2}(n-1)nT \text{ の解があるか？}$$

ある ⇒ 3 分割問題の答えは「できる」

ない ⇒ 3 分割問題の答えは「できない」 □

1. $1 \,||\, \sum w_j T_j$ の強 NP 困難性
2. **$R \,||\, \sum C_j$ のアルゴリズム**
3. $R \mid \text{pmtn} \mid L_{\max}$ のアルゴリズム

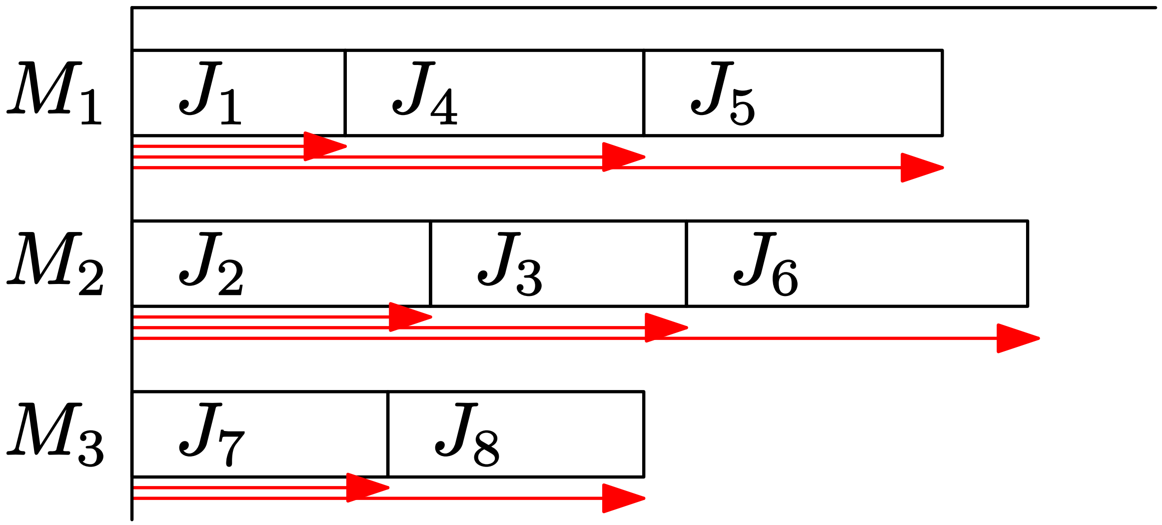
- J. Bruno, F. G. Coffman Jr., R. Sethi, Scheduling independent tasks to reduce mean finishing time. *Communications of the ACM* 17 (1974) pp. 382–387.
- W. Horn, Minimizing average flow time with parallel machines. *Operations Research* 21 (1973) pp. 846–847.

機械の環境

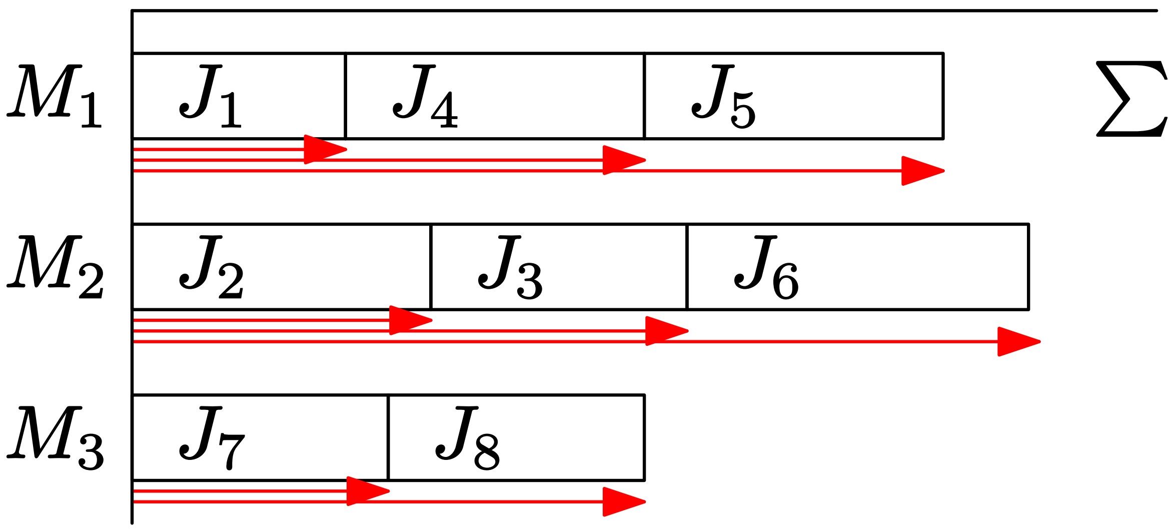
- 無関係並列機械，機械数 $= m$ (入力の一部)
  - $p_{i,j} =$ ジョブ J_j を機械 M_i で処理するときの処理時間

最適化する目的

- 総完了時刻の最小化

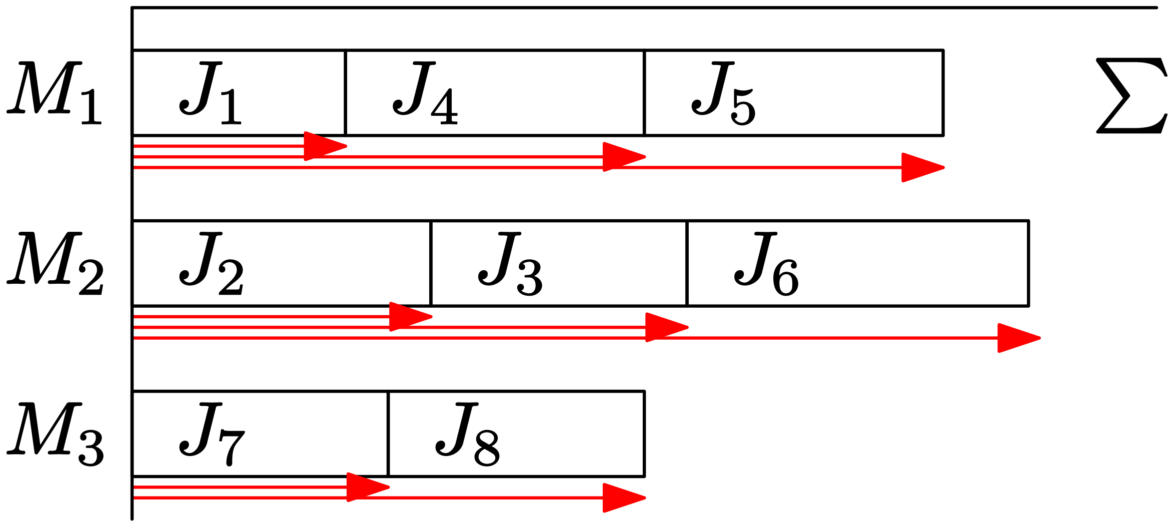


$R \,||\, \sum C_j$：考え方



$$\sum C_j = 3p_{11} + 2p_{14} + p_{15} + 3p_{22} + 2p_{23} + p_{26} + 2p_{37} + p_{38}$$

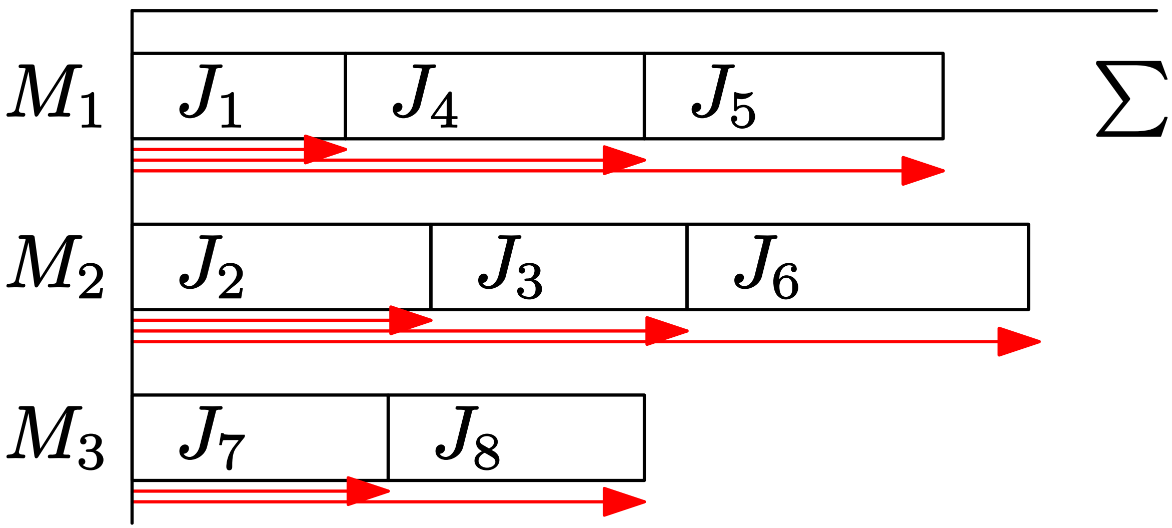
$R \,||\, \sum C_j$: 考え方



$$\sum C_j = 3p_{11} + 2p_{14} + p_{15} + 3p_{22} + 2p_{23} + p_{26} + 2p_{37} + p_{38}$$

	$\times 1$	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$	$\times 7$	$\times 8$
M_1								
M_2								
M_3								

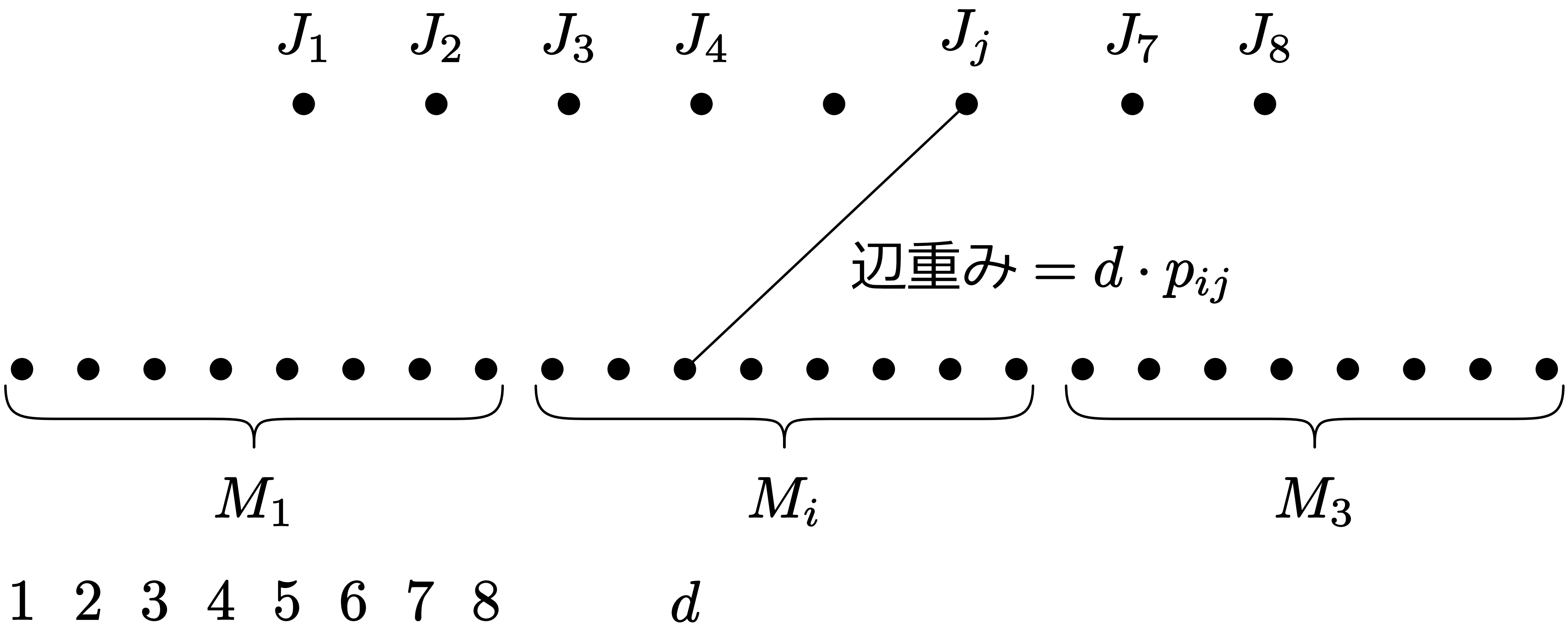
$R \,||\, \sum C_j$: 考え方



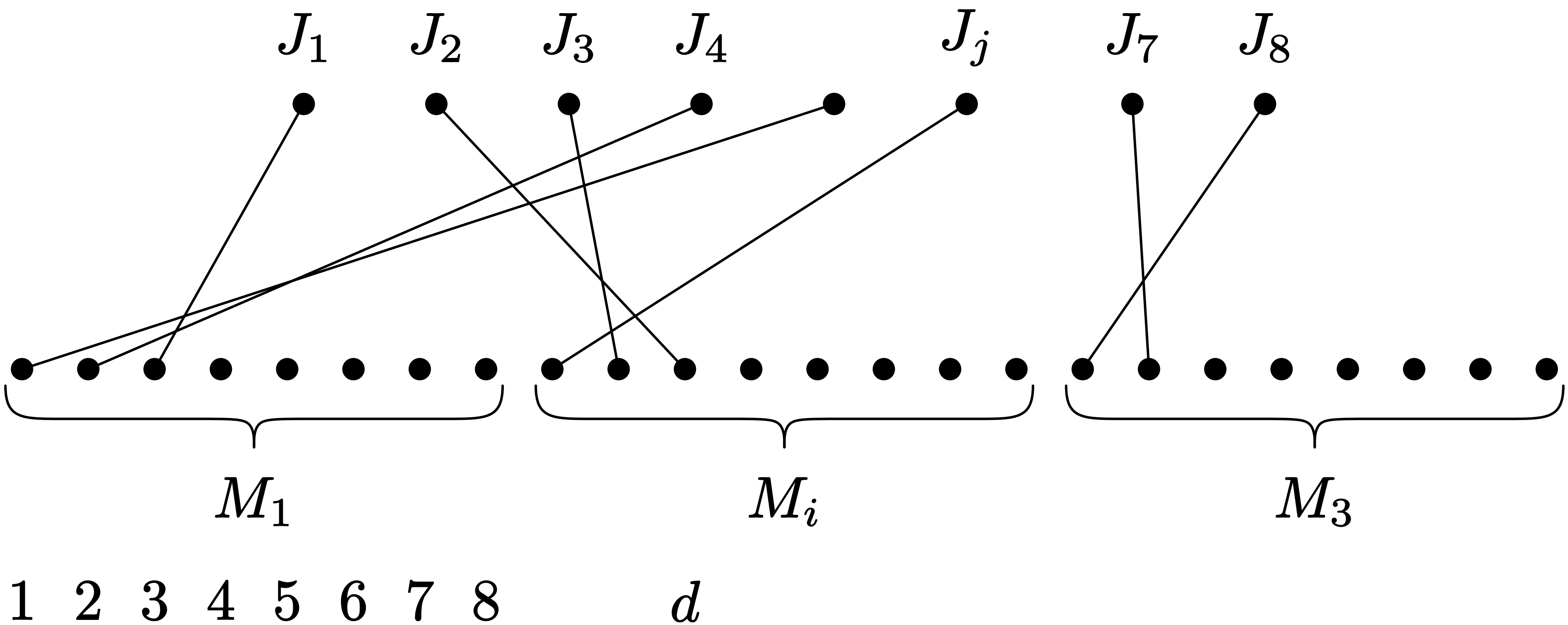
$$\sum C_j = 3p_{11} + 2p_{14} + p_{15} + 3p_{22} + 2p_{23} + p_{26} + 2p_{37} + p_{38}$$

	$\times 1$	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$	$\times 5$	$\times 6$	$\times 7$	$\times 8$
M_1	J_5	J_4	J_1					
M_2	J_6	J_3	J_2					
M_3	J_8	J_7						

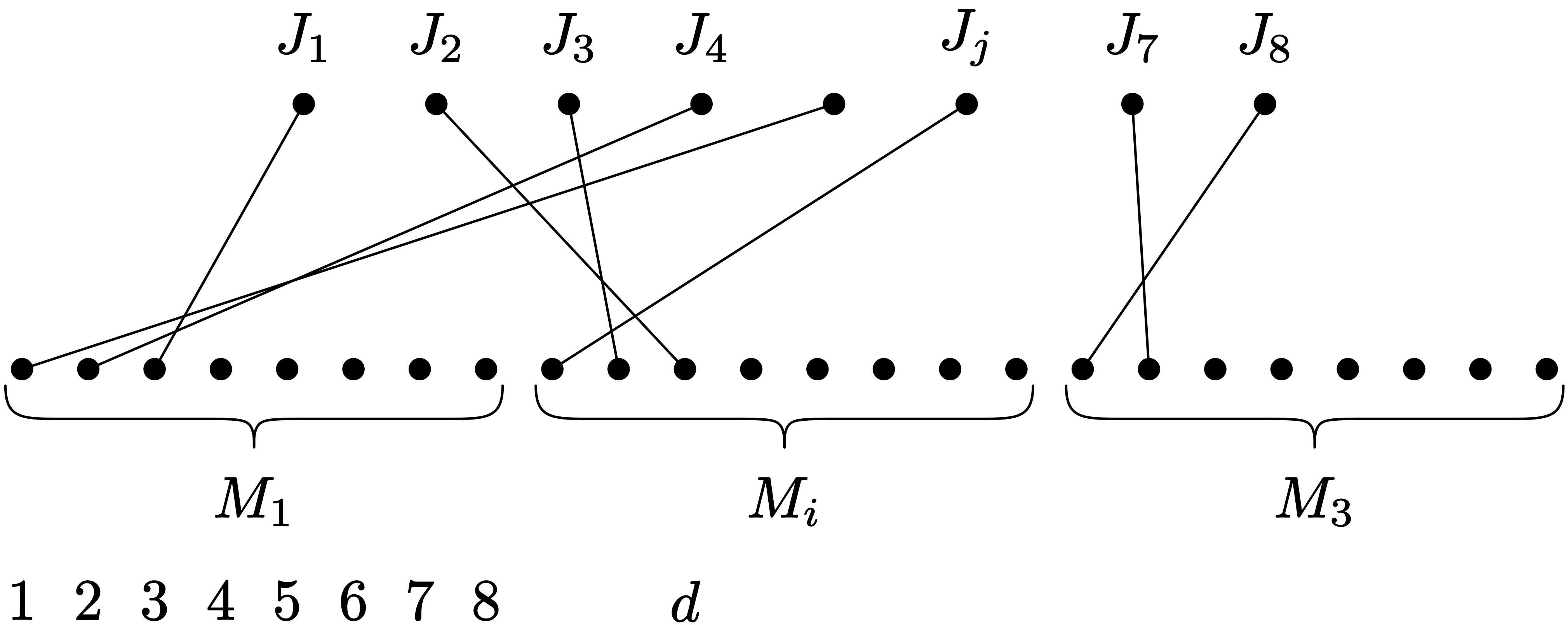
$R \mid\mid \sum C_j$: グラフの構成



$R \,||\, \sum C_j$：グラフの構成



最小重みのマッチングで，$J_1, \ldots, J_n$ を飽和するもの
(二部グラフの最大マッチングのアルゴリズムで見つけられる)



頂点数 $= O(mn)$

最小重みのマッチングで，$J_1, \ldots, J_n$ を飽和するもの
(二部グラフの最大マッチングのアルゴリズムで見つけられる)

事実 (Edmonds, Karp '72)

頂点数 N の二部グラフにおける最大重みマッチングは $O(N^3)$ 時間で見つけられる

$N = O(mn)$ なので ...

定理

問題 $R \,||\, \sum C_j$ は $O(m^3 n^3)$ 時間で解ける

(Bruno, Coffman Jr., Sethi '74; Horn '73)

<u>注</u>：二部グラフの最大重みマッチングを
今ではもっと速く見つけられる

付録

1. $1 \mid\mid \sum w_j T_j$ の強 NP 困難性
2. $R \mid\mid \sum C_j$ のアルゴリズム
3. **$R \mid \mathbf{pmtn} \mid L_{\max}$ のアルゴリズム**

- E. L. Lawler, J. Labetoulle, On preemptive scheduling of unrelated parallel processors by linear programming. Journal of the Association for Computing Machinery 25 (1978) pp. 612–619.

機械の環境

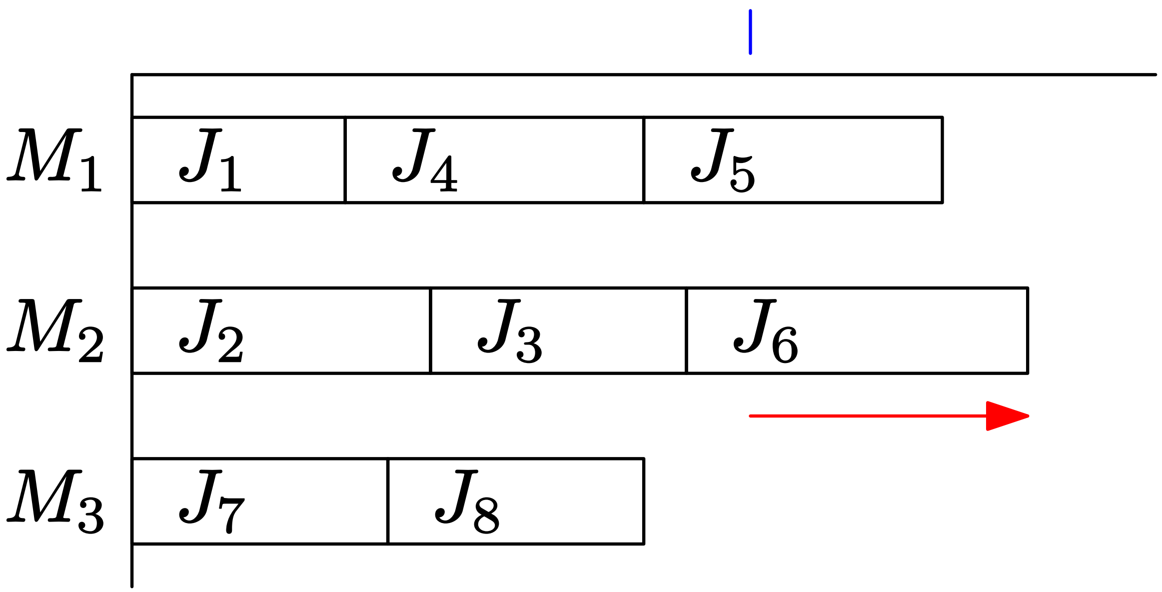
- 無関係並列機械，機械数 $= m$ (入力の一部)
  - $p_{i,j} =$ ジョブ J_j を機械 M_i で処理するときの処理時間

ジョブの特性

- $d_j =$ ジョブ J_j の納期
- ジョブは分割可能 (preemptive)

最適化する目的

- 最大納期ずれの最小化



線形計画法

$R \mid \mathrm{pmtn} \mid L_{\max}$ を線形計画法によって解く

線形計画法とは？

次の形式の最適化問題を解く手法

minimize	線形関数
subject to	線形等式／線形不等式で書ける制約

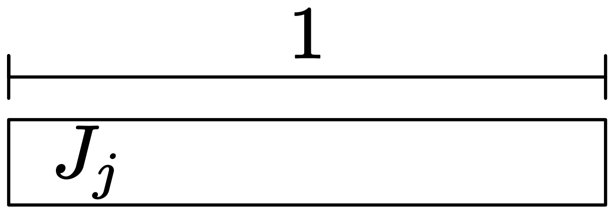
事実 (Khachiyan ’79)

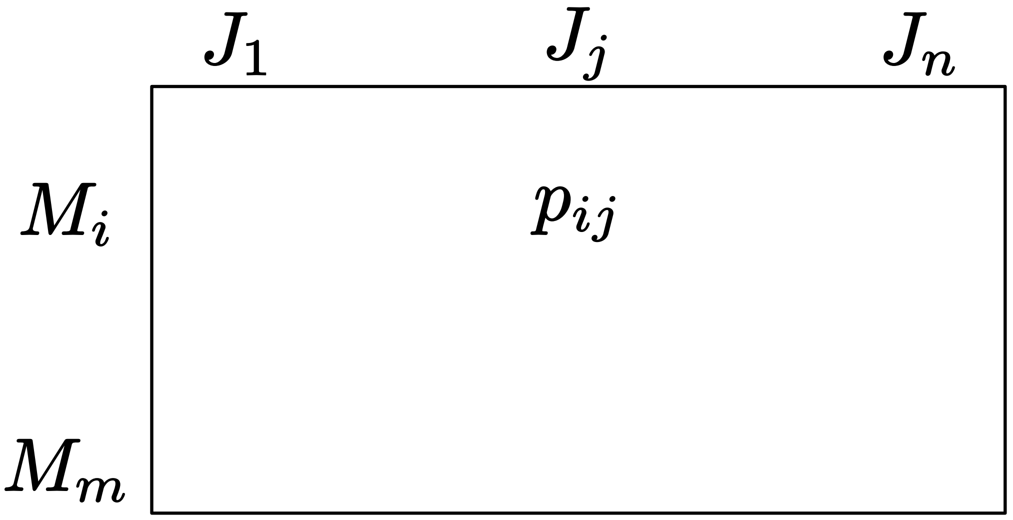
線形計画法の問題は弱多項式時間で解ける

いまでは，弱多項式時間アルゴリズムが多く知られている

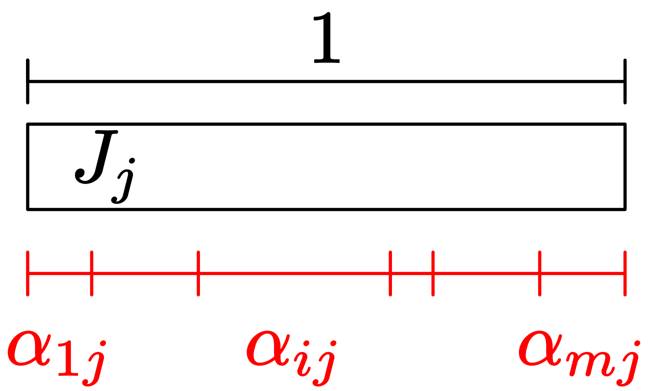
$\boxed{\text{未解決}}$：線形計画法の問題は強多項式時間で解けるか？

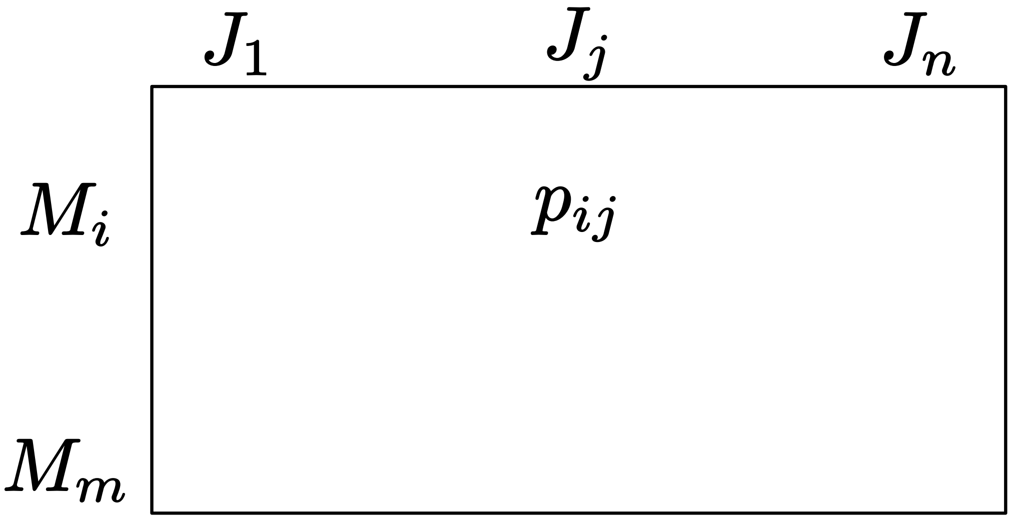
無関係機械におけるジョブの分割



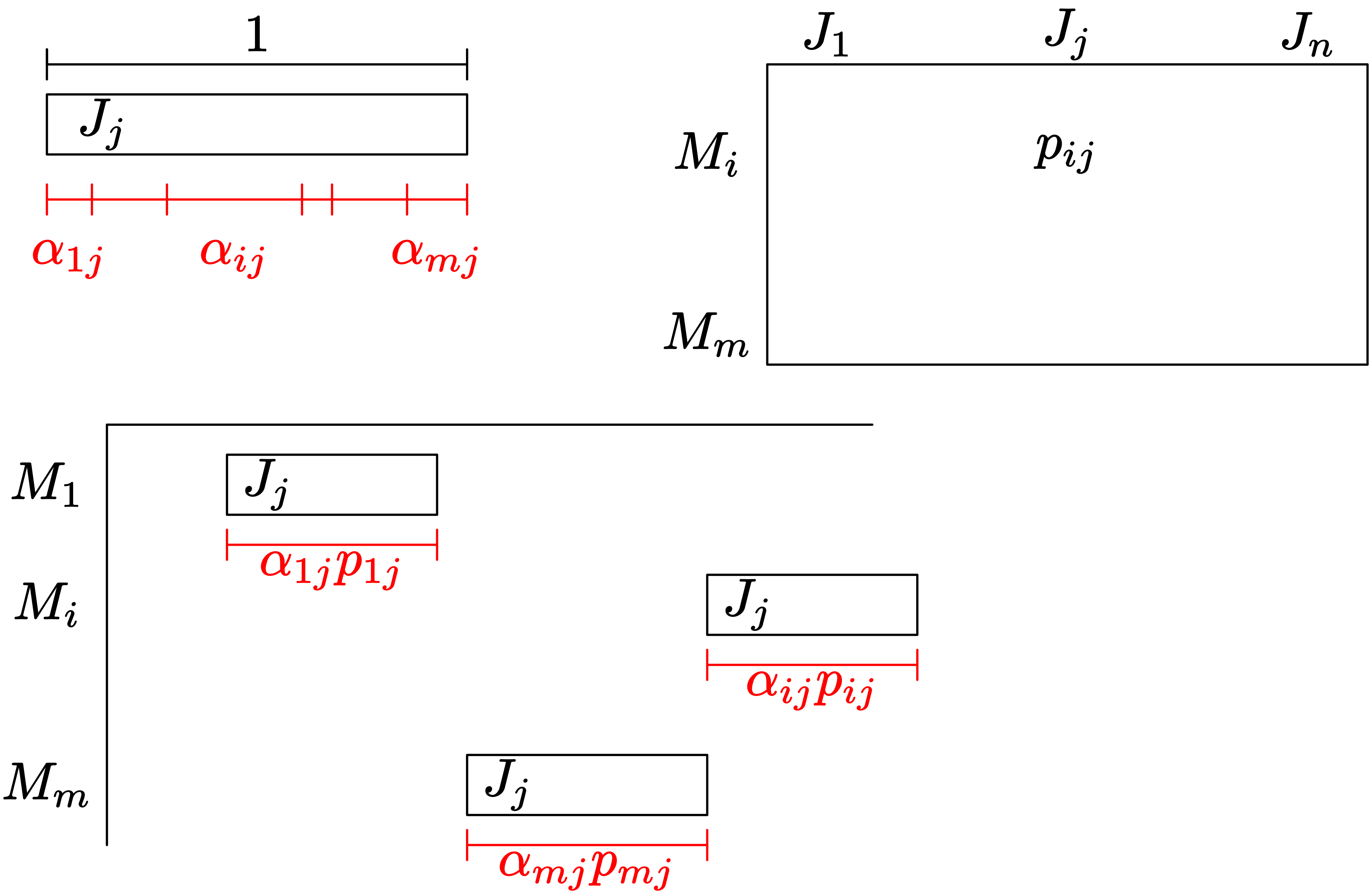


無関係機械におけるジョブの分割



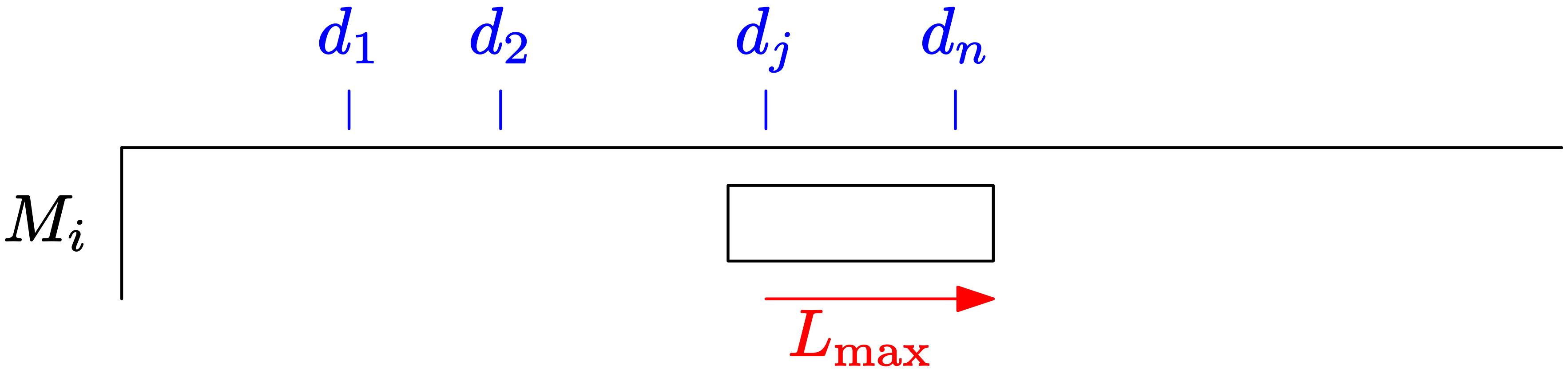


無関係機械におけるジョブの分割



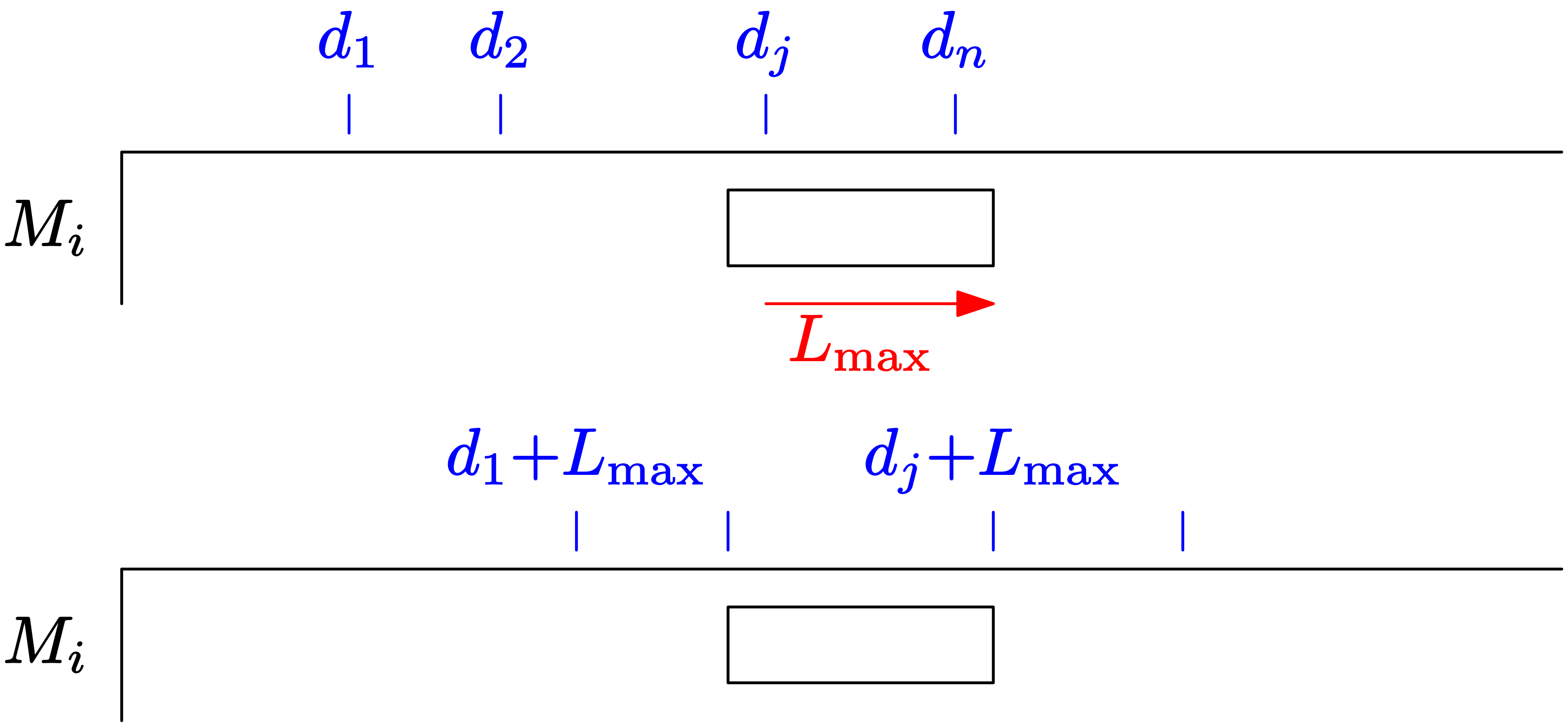
変数 $L_{\max}$

ジョブは EDD 順に並び替えておく $(d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n)$



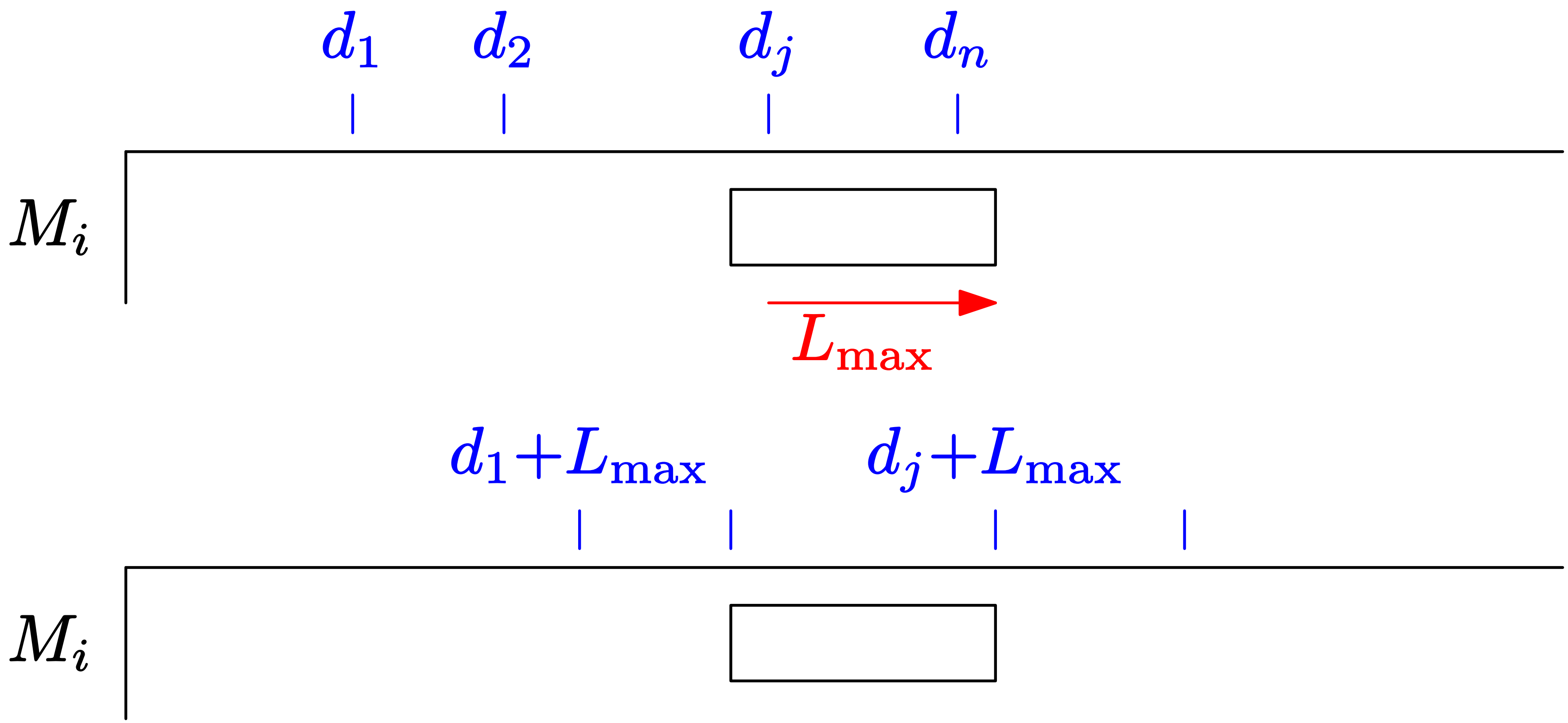
変数 $L_{\max}$

ジョブは EDD 順に並び替えておく ($d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$)



変数 $L_{\max}$

ジョブは EDD 順に並び替えておく $(d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n)$



発想の転換

すべてのジョブが間に合うような,
最小の $L_{\max}$ を見つけたい

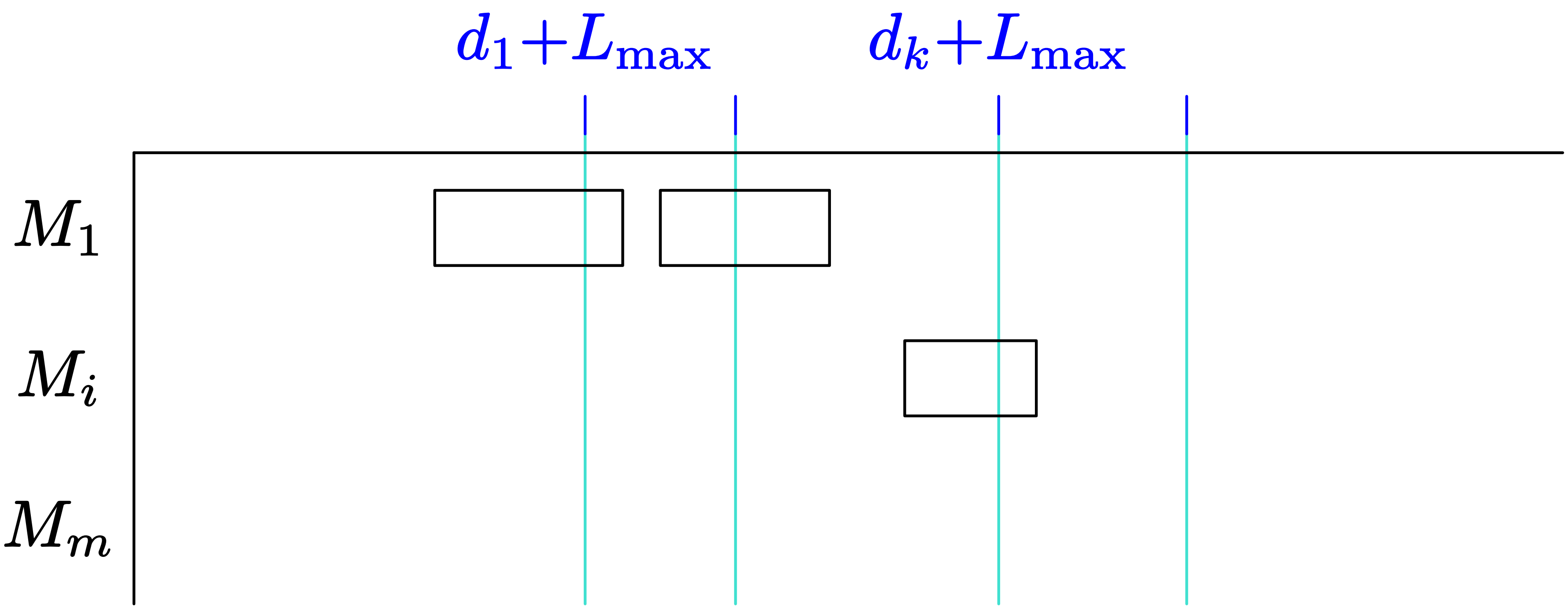
変数 $t_{ij}^{(k)}$

$t_{ij}^{(k)}$ = 時間 $[d_{k-1} + L_{\max}, d_k + L_{\max}]$ において

機械 M_i がジョブ J_j を処理する時間

$(i \in [m], j \in [n], k \in [n])$

ただし，$d_{-1} = 0$ とする

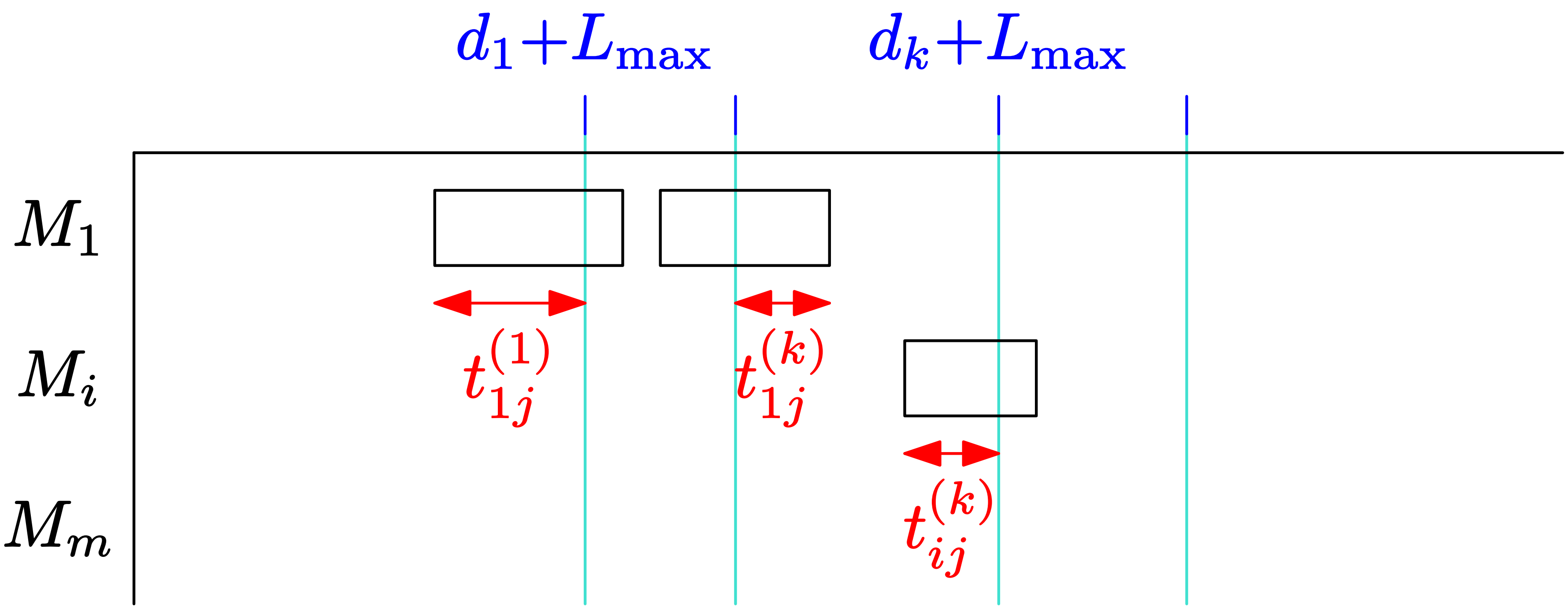


$t_{ij}^{(k)}$ = 時間 $[d_{k-1} + L_{\max}, d_k + L_{\max}]$ において

機械 M_i がジョブ J_j を処理する時間

$(i \in [m], j \in [n], k \in [n])$

ただし，$d_{-1} = 0$ とする



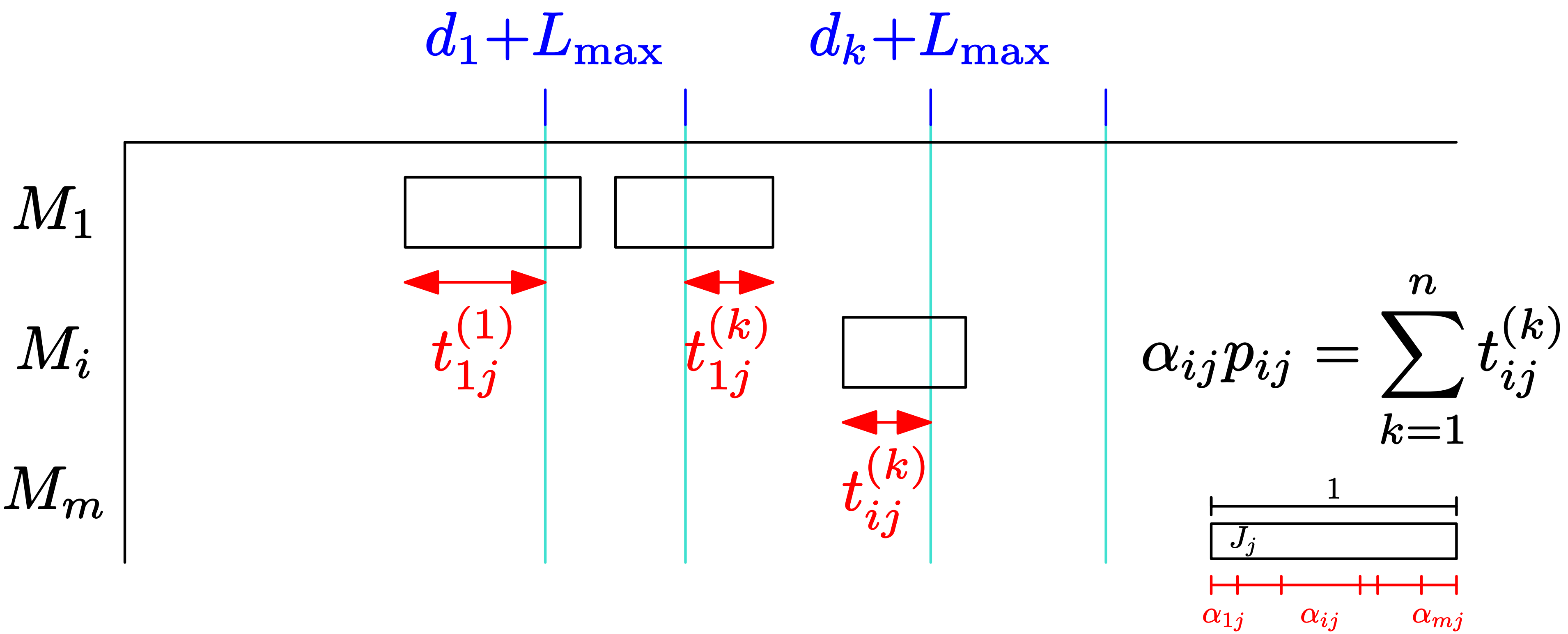
変数 $t_{ij}^{(k)}$

$t_{ij}^{(k)}$ = 時間 $[d_{k-1} + L_{\max}, d_k + L_{\max}]$ において

機械 M_i がジョブ J_j を処理する時間

$(i \in [m], j \in [n], k \in [n])$

ただし，$d_{-1} = 0$ とする



$R \mid \mathrm{pmtn} \mid L_{\max}$：線形計画問題

変数：$L_{\max}, t_{ij}^{(k)}$ $(i \in [m], j \in [n], k \in [n])$

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2,\ldots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2,\ldots,j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \ge 0 & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$

変数：$L_{\max}, t_{ij}^{(k)}$ $(i \in [m], j \in [n], k \in [n])$

$$
\begin{array}{lll}
\boxed{\text{minimize} \quad L_{\max}} & \text{$L_{\max}$ の最小化} & \\
\text{subject to} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & & (\forall\, j \in [n]) \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \leq d_1 + L_{\max} & & (\forall\, i \in [m]) \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \leq d_k - d_{k-1} & & (\forall\, i \in [m], k \in \{2, \ldots, n\}) \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \leq d_1 + L_{\max} & & (\forall\, j \in [n]) \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \leq d_k - d_{k-1} & & (\forall\, j \in [n], k \in \{2, \ldots, j\}) \\
t_{ij}^{(k)} \geq 0 & & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$

$R \mid \mathrm{pmtn} \mid L_{\max}$：線形計画問題

変数：$L_{\max}, t_{ij}^{(k)}$ $(i \in [m], j \in [n], k \in [n])$

$t_{ij}^{(k)} =$ 時間 $[d_{k-1} + L_{\max}, d_k + L_{\max}]$ において機械 M_i がジョブ J_j を処理する時間

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& \boxed{t_{ij}^{(k)} \ge 0} & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$

処理する時間は非負

$R \mid \text{pmtn} \mid L_{\max}$：線形計画問題

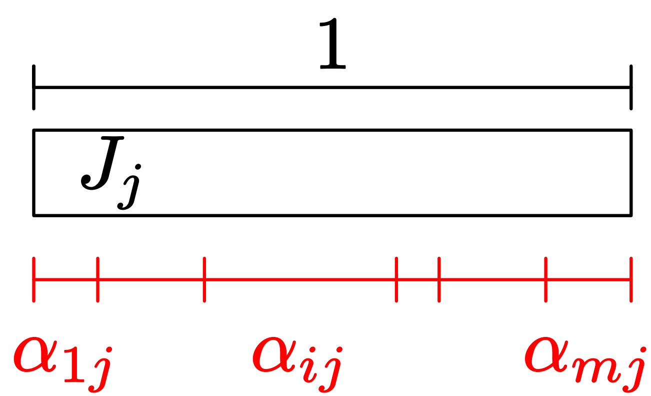
変数：$L_{\max}, t_{ij}^{(k)}$ $(i \in [m], j \in [n], k \in [n])$

$t_{ij}^{(k)} =$ 時間 $[d_{k-1} + L_{\max}, d_k + L_{\max}]$ において機械 M_i がジョブ J_j を処理する時間

minimize $\quad L_{\max}$

subject to $\quad \boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1} \qquad (\forall\, j \in [n])$

各ジョブ J_j の処理が
機械と時間枠に過不足なく割り当てられる



$$\alpha_{ij}p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ij}^{(k)}$$

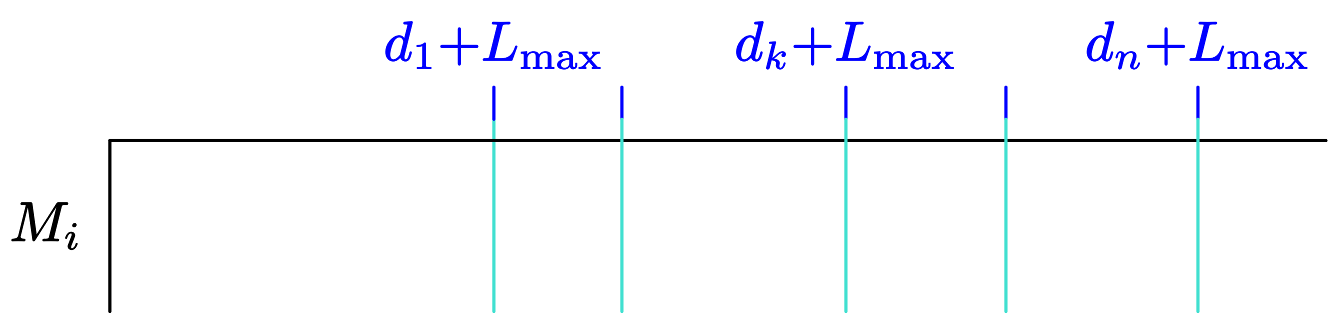
$R \mid \mathrm{pmtn} \mid L_{\max}$: 線形計画問題

変数 : $L_{\max}, t_{ij}^{(k)}$ $(i \in [m], j \in [n], k \in [n])$

$t_{ij}^{(k)}$ = 時間 $[d_{k-1} + L_{\max}, d_k + L_{\max}]$ において
機械 M_i がジョブ J_j を処理する時間

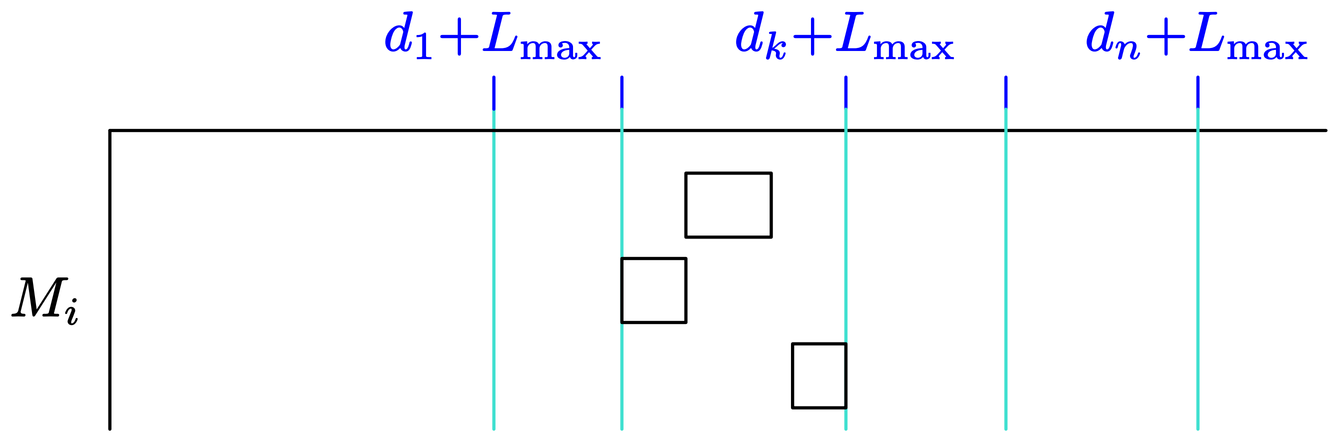
各機械と各時間枠において
ジョブを処理する総時間が枠の長さを超えない

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} &\le d_1 + L_{\max} \\ \sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} &\le d_k - d_{k-1} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(\forall\, i \in [m]) \\ &(\forall\, i \in [m], k \in \{2, \ldots, n\}) \end{aligned}$$



変数：$L_{\max}, t_{ij}^{(k)}$ $(i \in [m], j \in [n], k \in [n])$

$t_{ij}^{(k)}$ = 時間 $[d_{k-1} + L_{\max}, d_k + L_{\max}]$ において
機械 M_i がジョブ J_j を処理する時間



各ジョブと各時間枠において
機械がそのジョブを処理する総時間が枠の長さを超えない

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \leq d_1 + L_{\max} \qquad (\forall\, j \in [n])$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \leq d_k - d_{k-1} \qquad (\forall\, j \in [n], k \in \{2, \ldots, j\})$$

変数：$L_{\max}, t_{ij}^{(k)}$ $(i \in [m], j \in [n], k \in [n])$

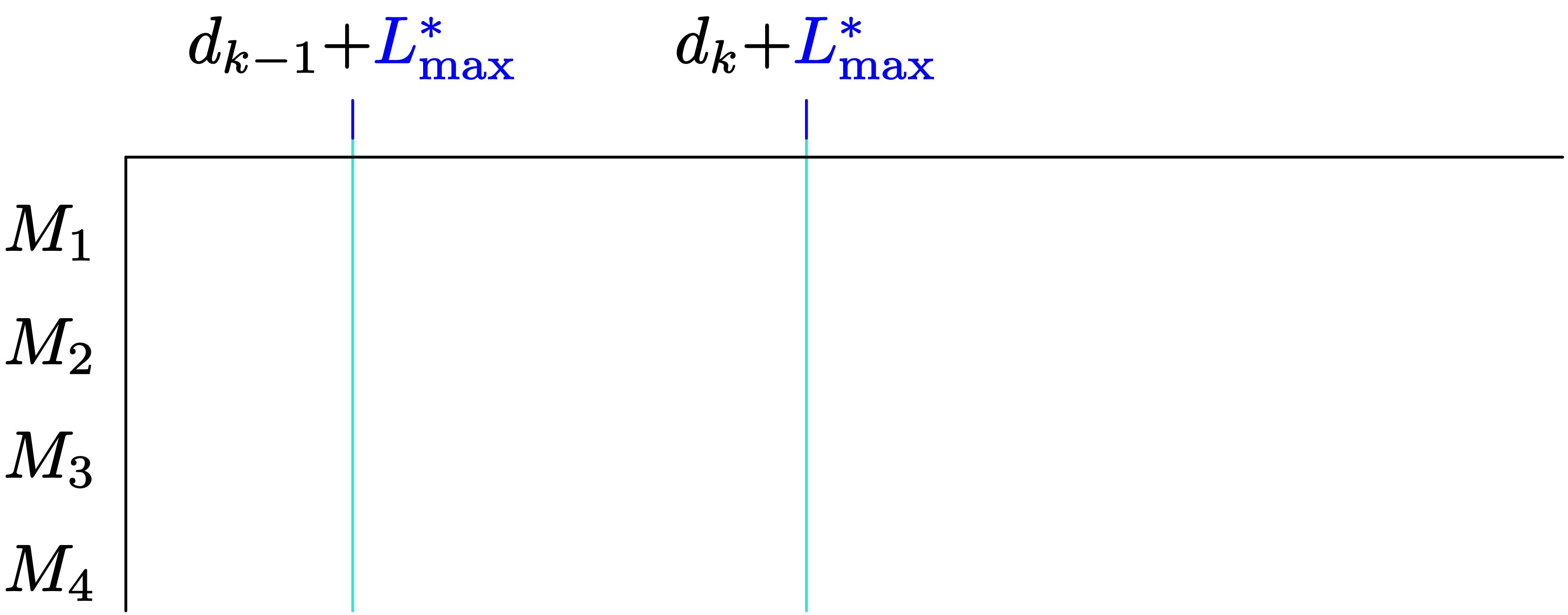
変数の数 $= mn^2 + 1$
制約の数 $\leq mn + n^2 + 1$
(普通，非負制約は数えない)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \leq d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \leq d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2,\ldots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \leq d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \leq d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2,\ldots,j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \geq 0 & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$

線形計画からスケジュールへ

最適解：$L^*_{\max}, t_{ij}^{(k)*}$

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \ge 0 & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$

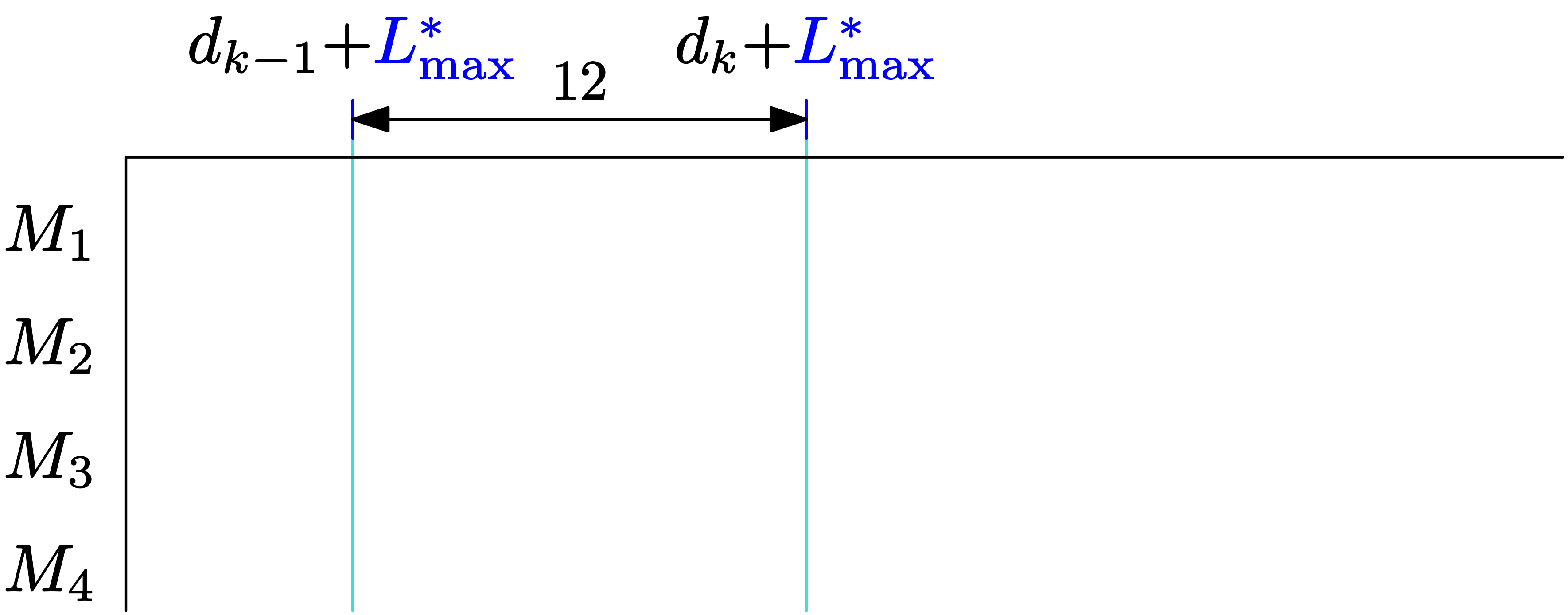


線形計画からスケジュールへ

最適解：$L^*_{\max}, t_{ij}^{(k)*}$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 5 & 0 & 4 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 0 \\
3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 2 \\
4 & 0 & 5 & 0 & 5 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \leq d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \leq d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2, \ldots, n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \leq d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \leq d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2, \ldots, j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \geq 0 & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$



線形計画からスケジュールへ

最適解：$L^*_{\max}, t^{(k)*}_{ij}$

i \ j	1	2	3	4	5	和
1	5	0	4	1	2	12
2	3	3	4	2	0	12
3	1	4	2	1	2	10
4	0	5	0	5	1	11

minimize $L_{\max}$

subject to

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t^{(k)}_{ij} = 1 \qquad (\forall\, j\in[n])$$

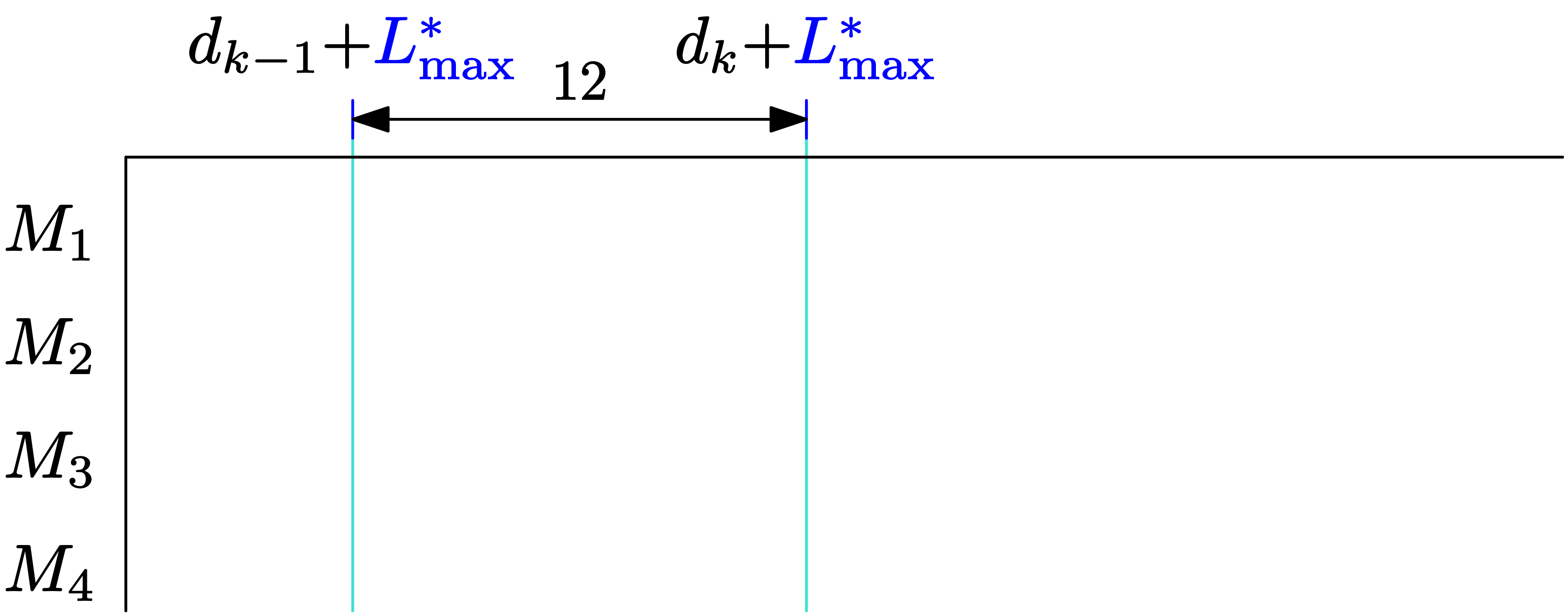
$$\sum_{j=1}^{n} t^{(1)}_{ij} \le d_1 + L_{\max} \qquad (\forall\, i\in[m])$$

$$\sum_{j=1}^{n} t^{(k)}_{ij} \le d_k - d_{k-1} \qquad (\forall\, i\in[m], k\in\{2,\dots,n\})$$

$$\sum_{i=1}^{m} t^{(1)}_{ij} \le d_1 + L_{\max} \qquad (\forall\, j\in[n])$$

$$\sum_{i=1}^{m} t^{(k)}_{ij} \le d_k - d_{k-1} \qquad (\forall\, j\in[n], k\in\{2,\dots,j\})$$

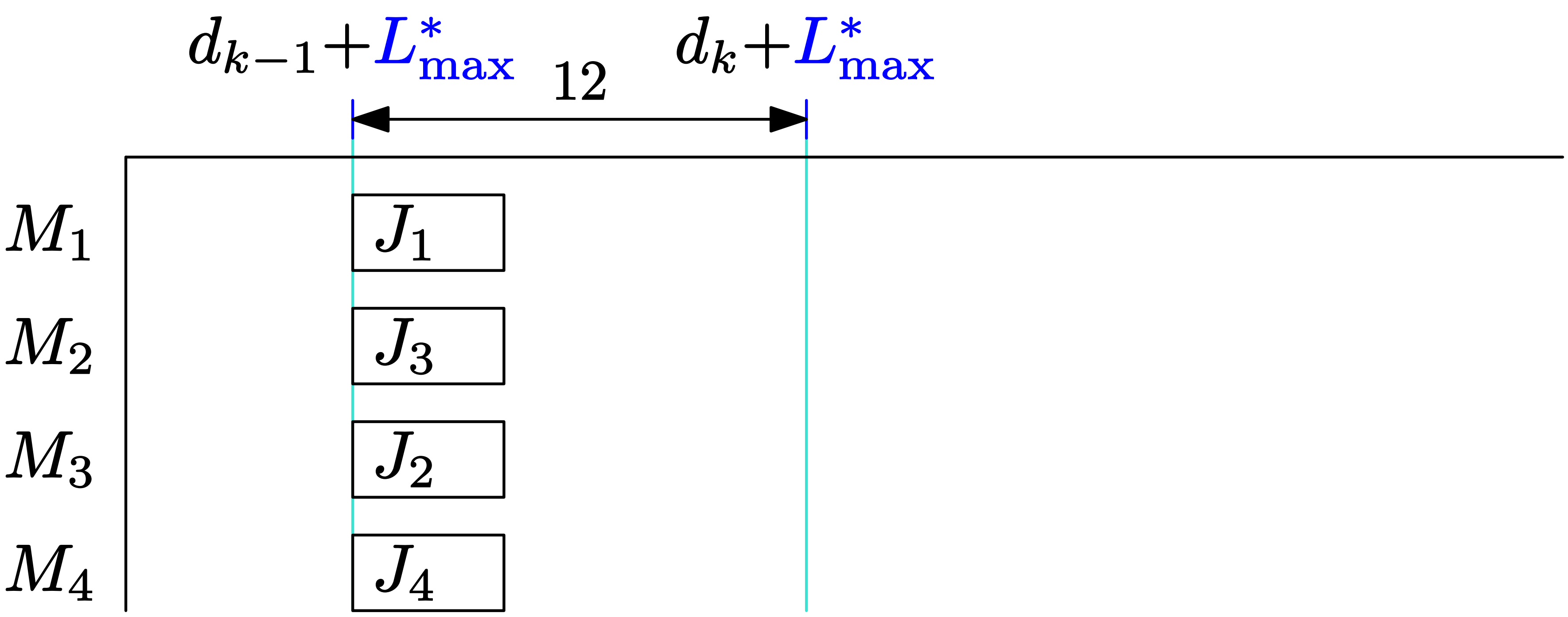
$$t^{(k)}_{ij} \ge 0 \qquad (\forall\, i\in[m], j\in[n], k\in[n])$$



$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \ge 0 & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$

最適解：$L^*_{\max}, t_{ij}^{(k)*}$

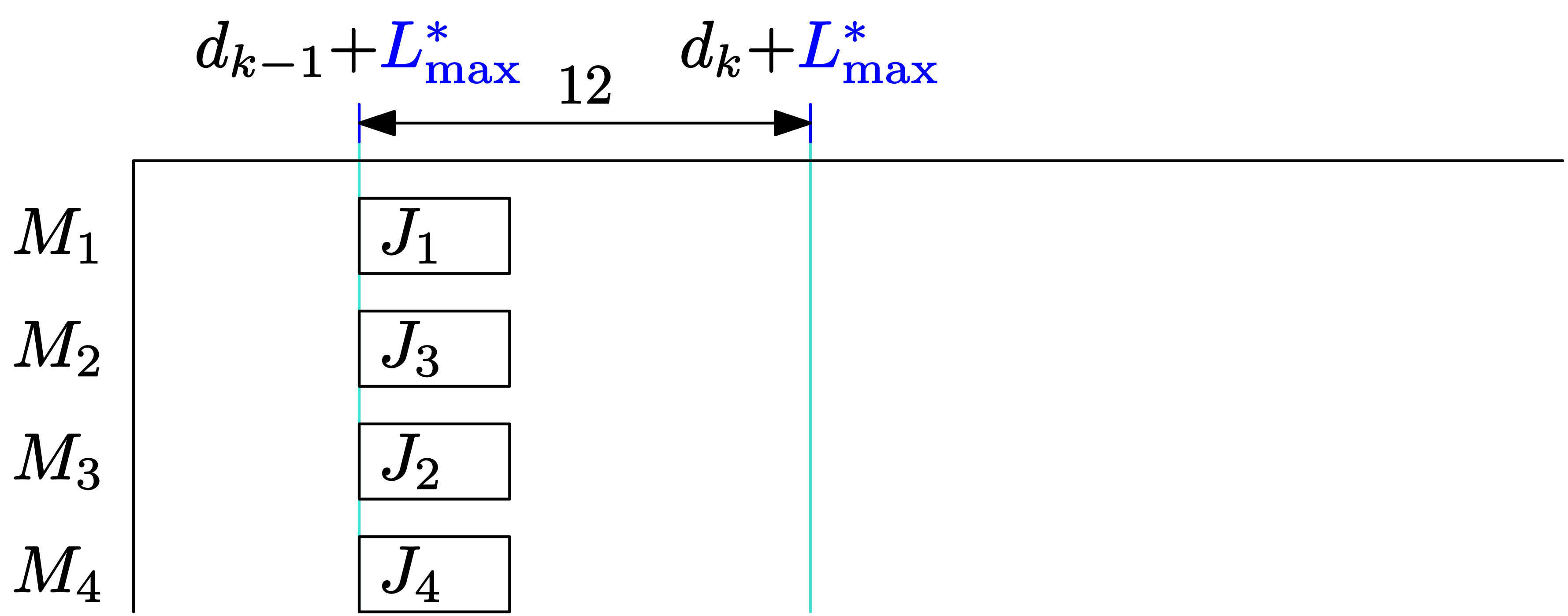
$i \backslash j$	1	2	3	4	5	和
1	$\boxed{5}$	0	4	1	2	12
2	3	3	$\boxed{4}$	2	0	12
3	1	$\boxed{4}$	2	1	2	10
4	0	5	0	$\boxed{5}$	1	11



最適解：$L^*_{\max}, t^{(k)*}_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	和
1	1	0	4	1	2	8
2	3	3	0	2	0	8
3	1	0	2	1	2	6
4	0	5	0	1	1	7

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t^{(k)}_{ij} = 1 & (\forall j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t^{(1)}_{ij} \le d_1 + L_{\max} & (\forall i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t^{(k)}_{ij} \le d_k - d_{k-1} & (\forall i \in [m], k \in \{2,\ldots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t^{(1)}_{ij} \le d_1 + L_{\max} & (\forall j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t^{(k)}_{ij} \le d_k - d_{k-1} & (\forall j \in [n], k \in \{2,\ldots,j\}) \\
& t^{(k)}_{ij} \ge 0 & (\forall i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$



線形計画からスケジュールへ

最適解：$L^*_{\max}, t^{(k)*}_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	和
1	1	0	$\boxed{4}$	1	2	8
2	$\boxed{3}$	3	0	2	0	8
3	1	0	2	1	$\boxed{2}$	6
4	0	$\boxed{5}$	0	1	1	7

minimize $L_{\max}$

subject to

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 \qquad (\forall j \in [n])$$

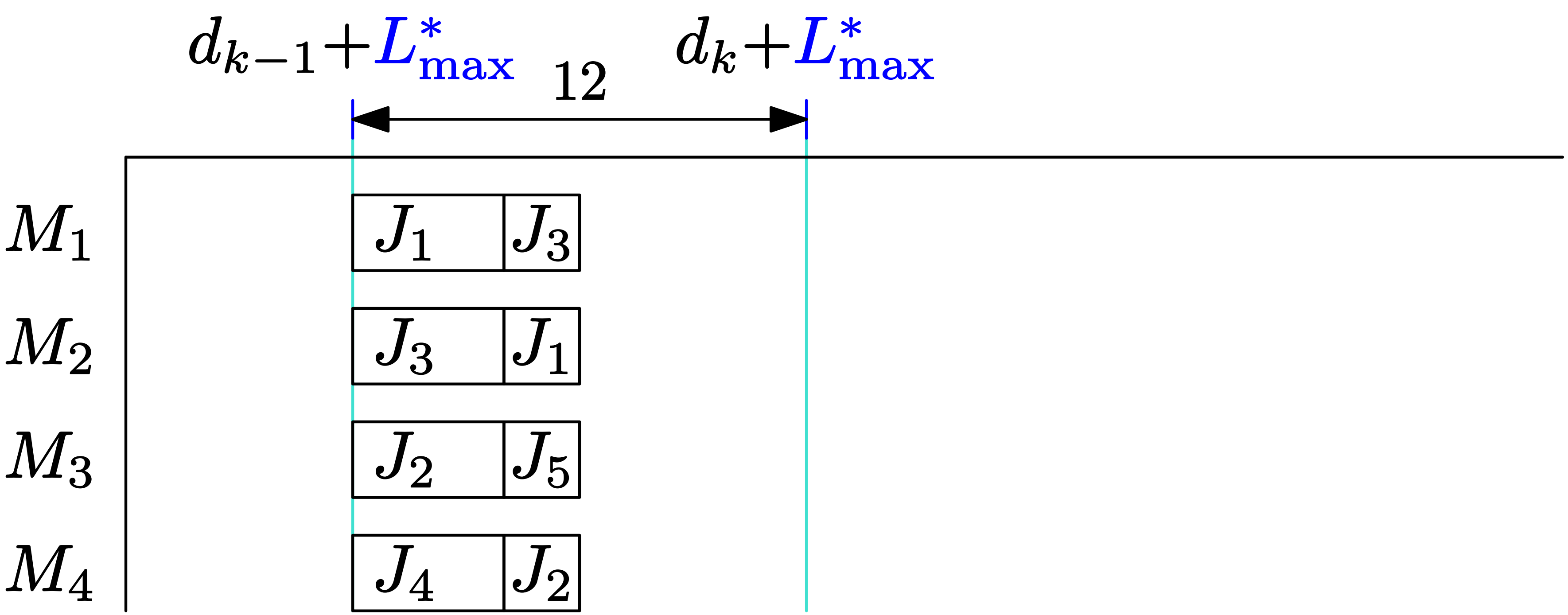
$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} \qquad (\forall i \in [m])$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} \qquad (\forall i \in [m], k \in \{2, \ldots, n\})$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} \qquad (\forall j \in [n])$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} \qquad (\forall j \in [n], k \in \{2, \ldots, j\})$$

$$t_{ij}^{(k)} \ge 0 \qquad (\forall i \in [m], j \in [n], k \in [n])$$

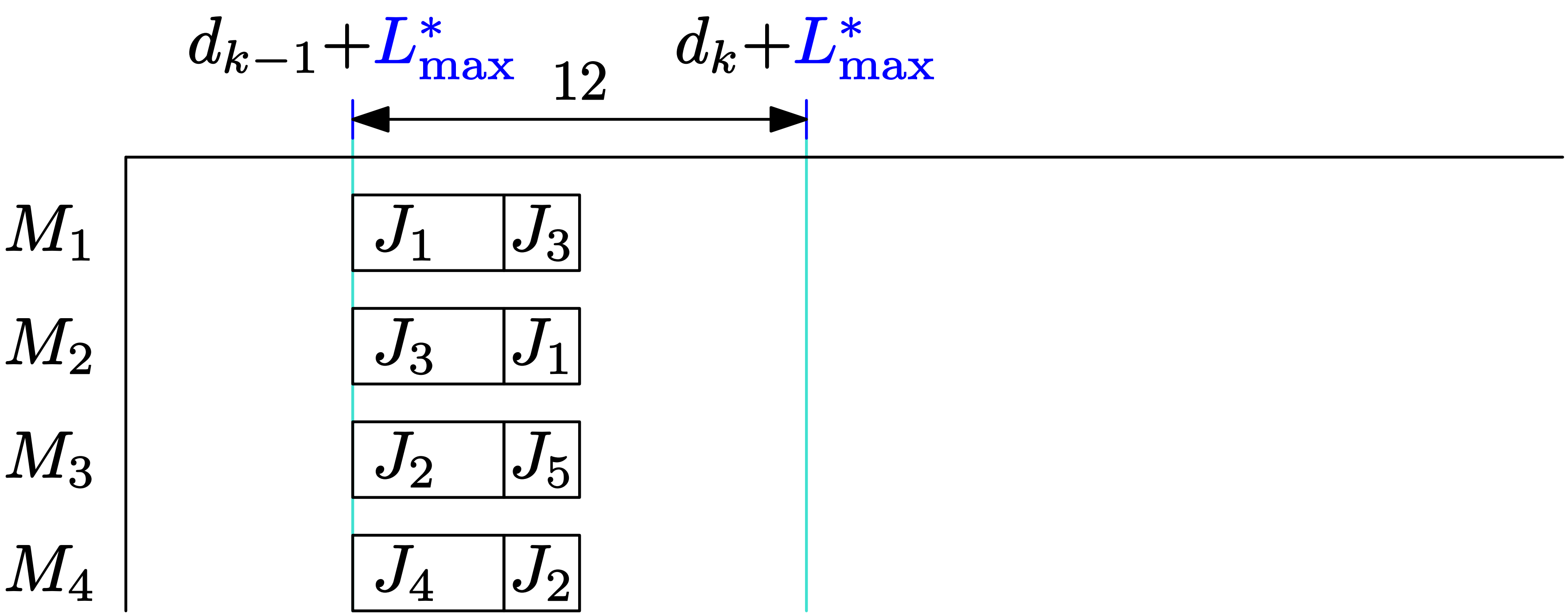


線形計画からスケジュールへ

最適解：$L^*_{\max}, t^{(k)*}_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	和
1	1	0	2	1	2	6
2	1	3	0	2	0	6
3	1	0	2	1	0	4
4	0	3	0	1	1	5

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t^{(k)}_{ij} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t^{(1)}_{ij} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t^{(k)}_{ij} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t^{(1)}_{ij} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t^{(k)}_{ij} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& t^{(k)}_{ij} \ge 0 & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$

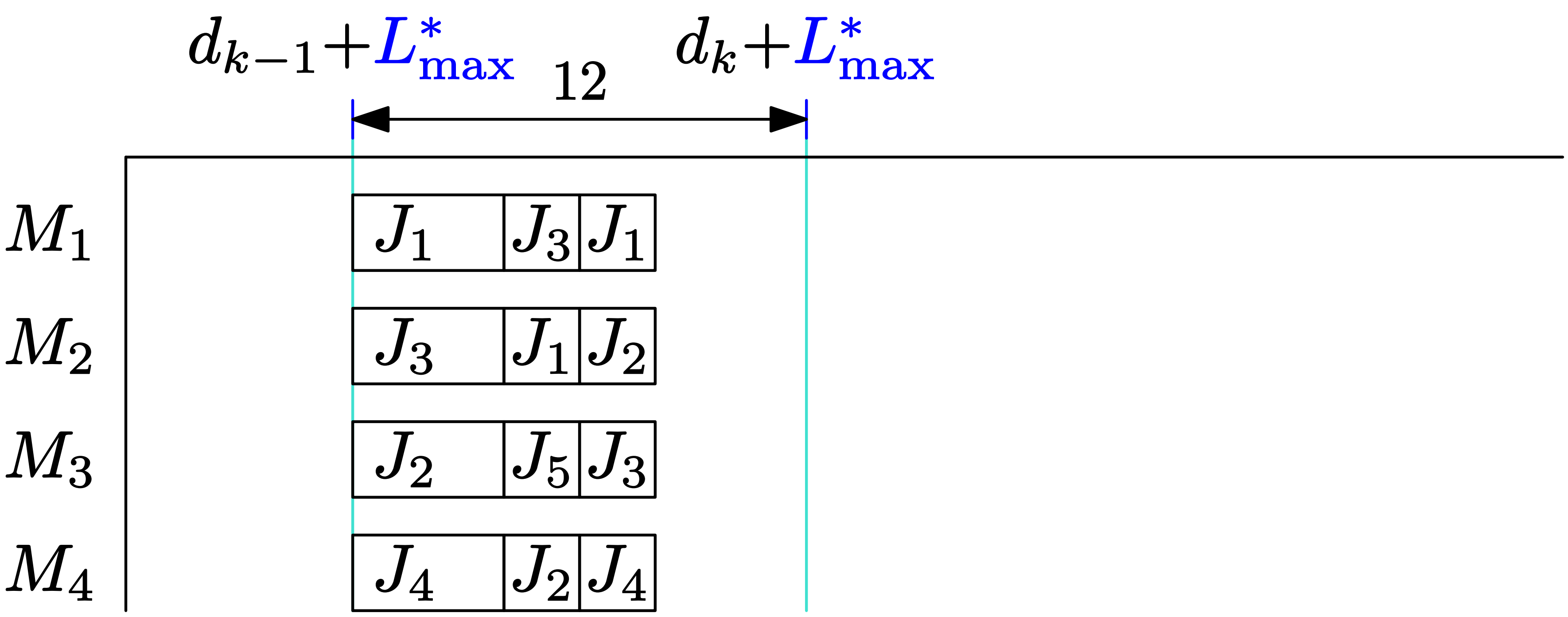


線形計画からスケジュールへ

最適解：$L^*_{\max}, t_{ij}^{(k)*}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	和
1	1	0	2	1	$\boxed{2}$	6
2	1	3	0	$\boxed{2}$	0	6
3	1	0	$\boxed{2}$	1	0	4
4	0	$\boxed{3}$	0	1	1	5

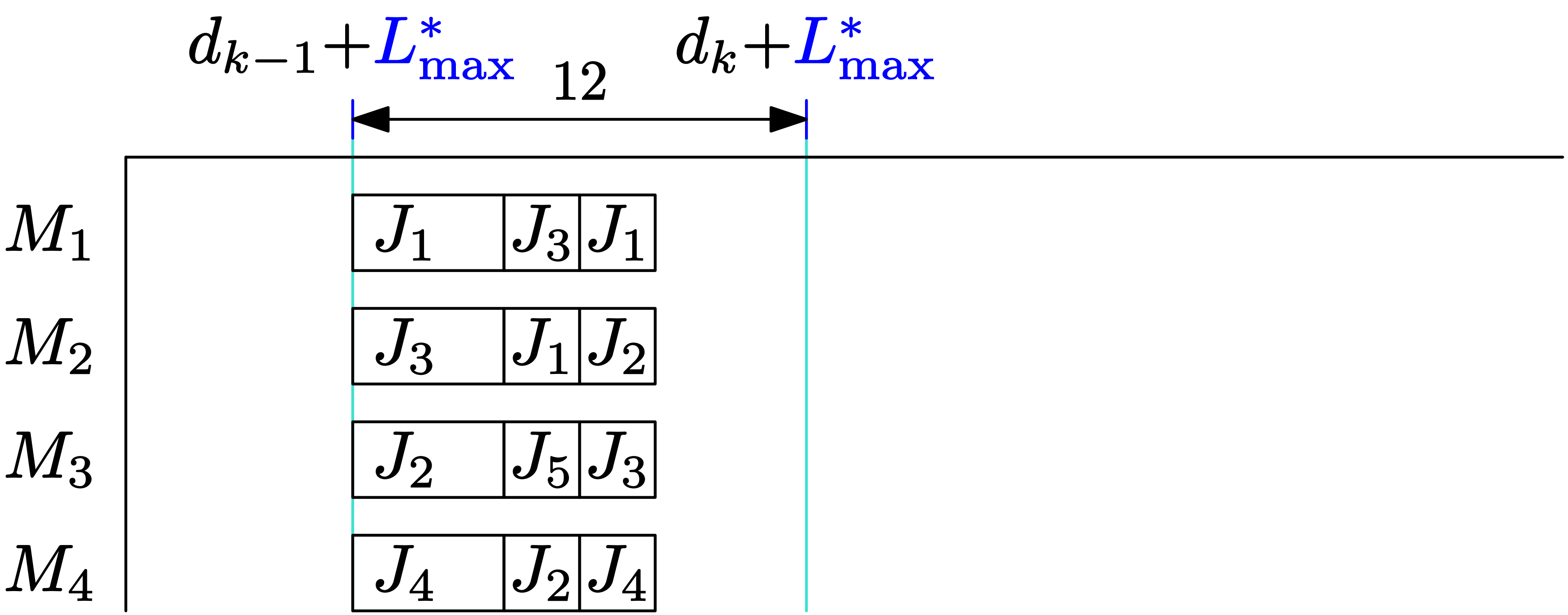
$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \ge 0 & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$



最適解：$L^*_{\max}, t^{(k)*}_{ij}$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 和 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\
2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \ge 0 & (\forall i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$



線形計画からスケジュールへ

minimize $L_{\max}$

subject to

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 \qquad (\forall j \in [n])$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} \qquad (\forall i \in [m])$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} \qquad (\forall i \in [m], k \in \{2,\dots,n\})$$

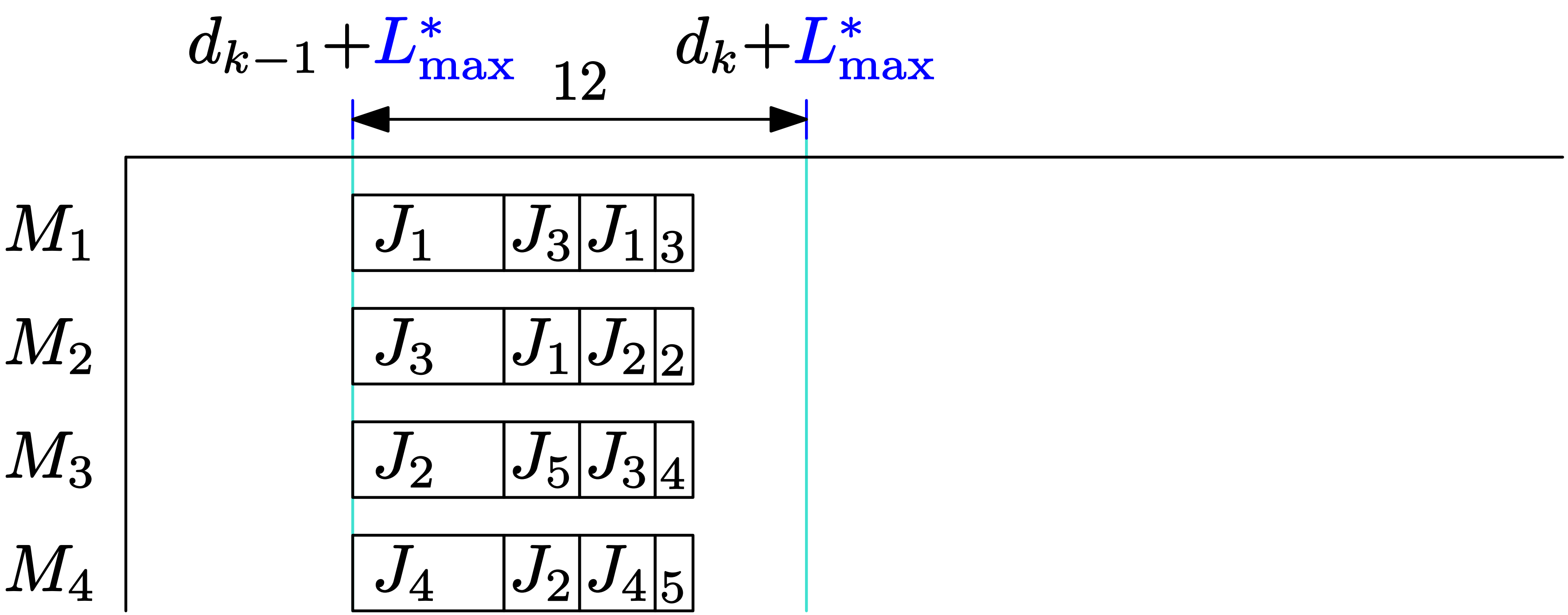
$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} \qquad (\forall j \in [n])$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} \qquad (\forall j \in [n], k \in \{2,\dots,j\})$$

$$t_{ij}^{(k)} \ge 0 \qquad (\forall i \in [m], j \in [n], k \in [n])$$

最適解：$L^*_{\max}, t_{ij}^{(k)*}$

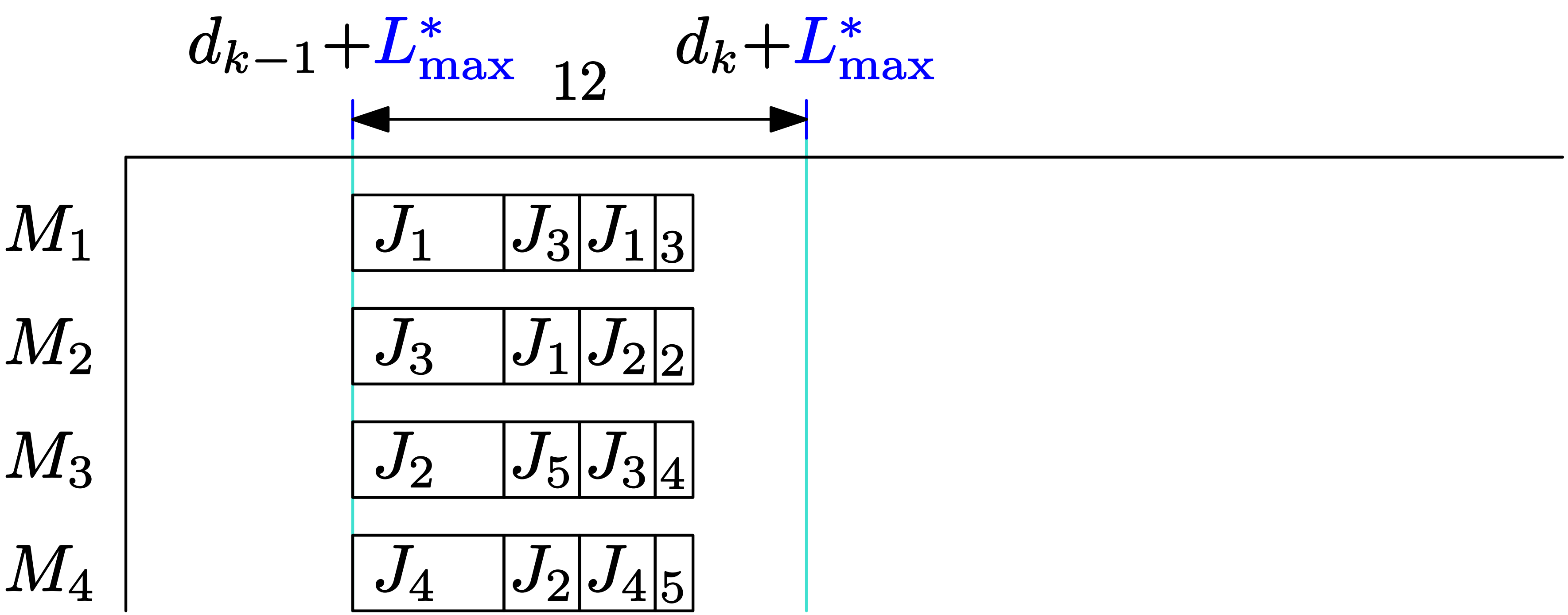
i \ j	1	2	3	4	5	和
1	1	0	$\boxed{2}$	1	0	4
2	1	$\boxed{3}$	0	0	0	4
3	1	0	0	$\boxed{1}$	0	2
4	0	1	0	1	$\boxed{1}$	3



最適解：$L^*_{\max}, t^{(k)*}_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	和
1	1	0	1	1	0	3
2	1	2	0	0	0	3
3	1	0	0	0	0	1
4	0	1	0	1	0	2

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t^{(k)}_{ij} = 1 & (\forall j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t^{(1)}_{ij} \le d_1 + L_{\max} & (\forall i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t^{(k)}_{ij} \le d_k - d_{k-1} & (\forall i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t^{(1)}_{ij} \le d_1 + L_{\max} & (\forall j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t^{(k)}_{ij} \le d_k - d_{k-1} & (\forall j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& t^{(k)}_{ij} \ge 0 & (\forall i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$

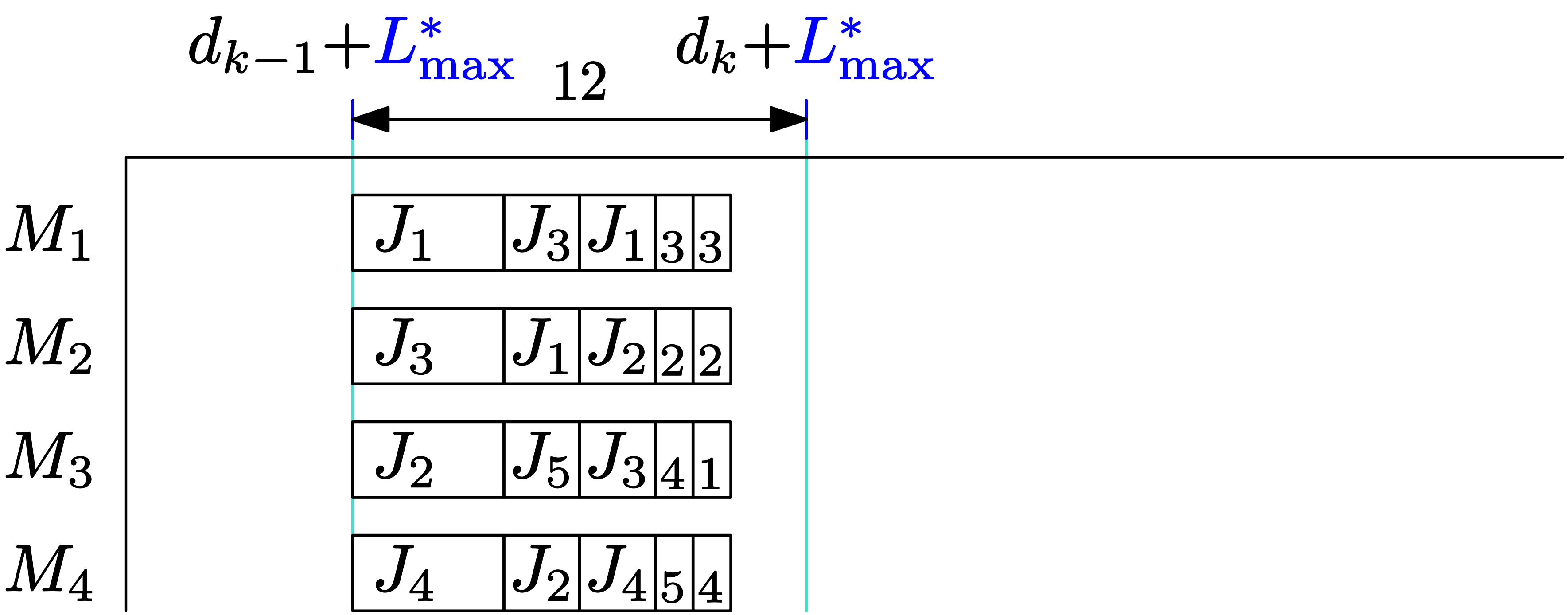


線形計画からスケジュールへ

最適解：$L^*_{\max}, t_{ij}^{(k)*}$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \text{和} \\
\hline
1 & 1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 3 \\
2 & 1 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 3 \\
3 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2
\end{array}
$$

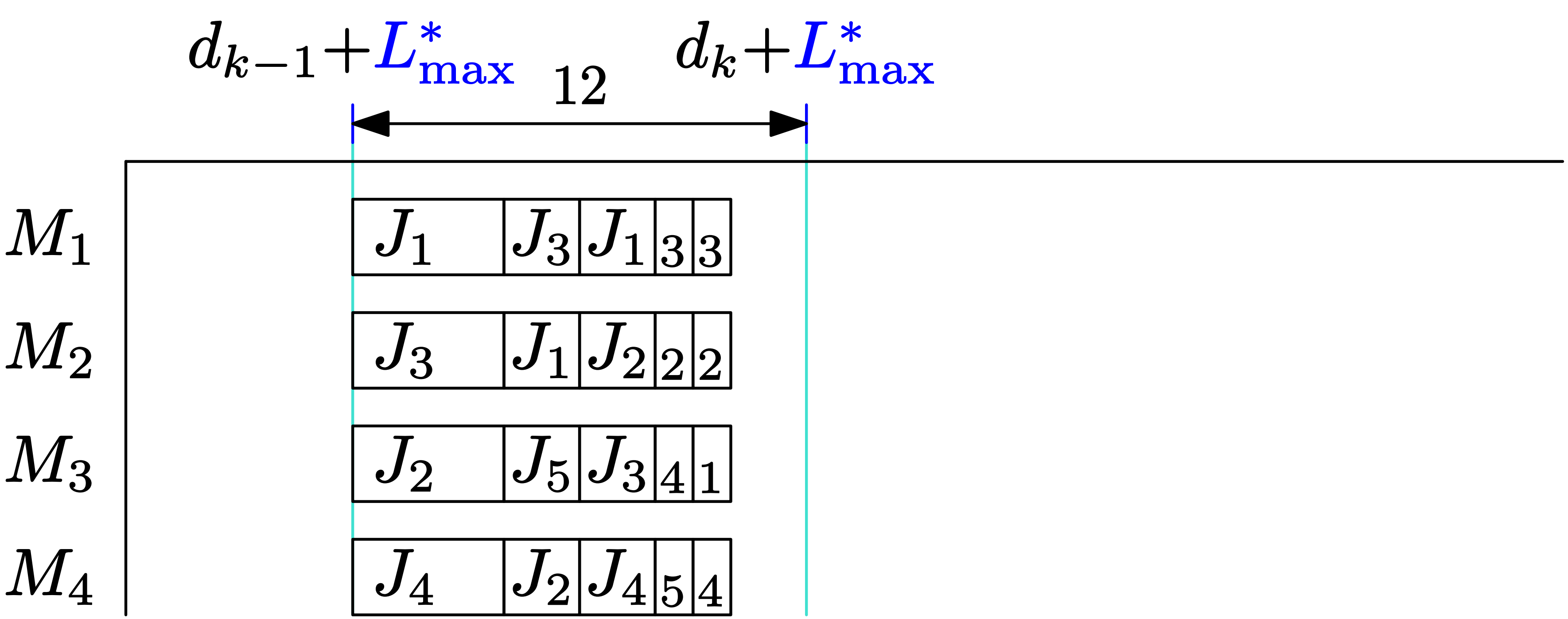
$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_{ij}} t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall i \in [m], k \in \{2, \ldots, n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall j \in [n], k \in \{2, \ldots, j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \ge 0 & (\forall i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$



最適解：$L^*_{\max}, t^{(k)*}_{ij}$

i \ j	1	2	3	4	5	和
1	1	0	0	1	0	2
2	1	1	0	0	0	2
3	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	1

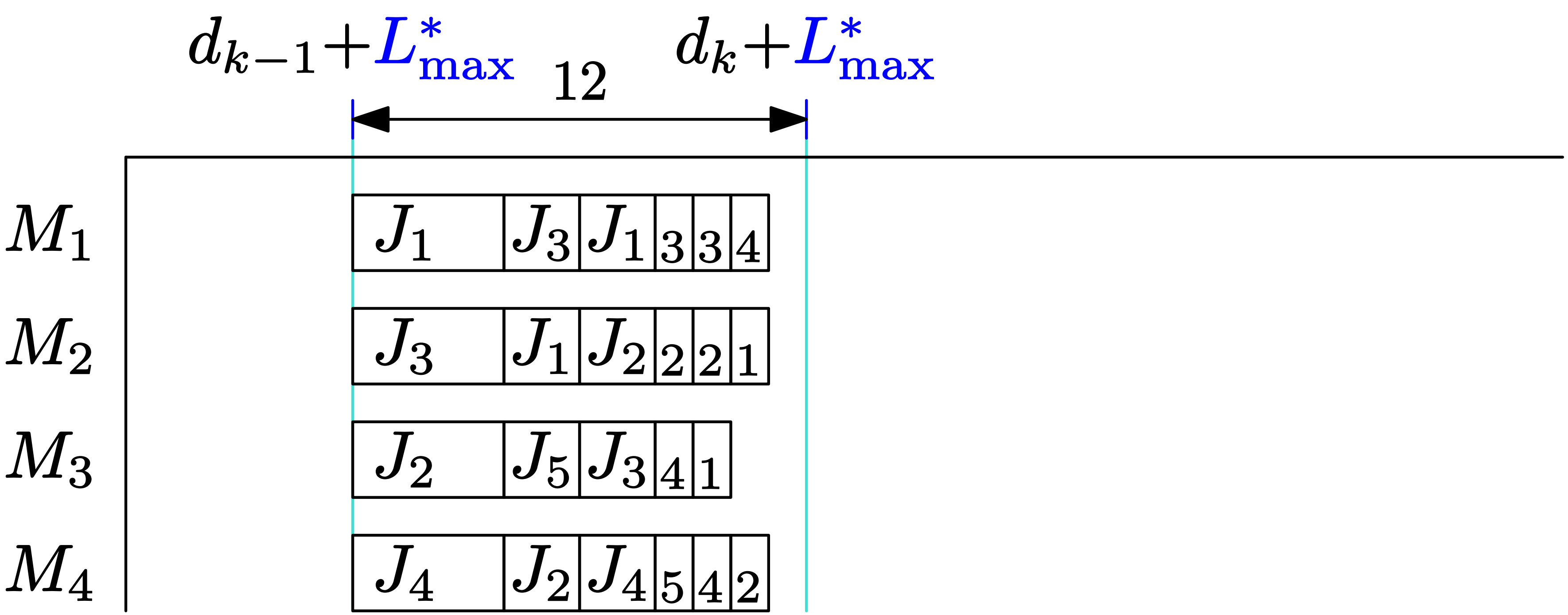
$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \leq d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \leq d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \leq d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \leq d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \geq 0 & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$



最適解：$L^*_{\max}, t_{ij}^{(k)*}$

i \ j	1	2	3	4	5	和
1	1	0	0	$\boxed{1}$	0	2
2	$\boxed{1}$	1	0	0	0	2
3	0	0	0	0	0	0
4	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \ge 0 & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$

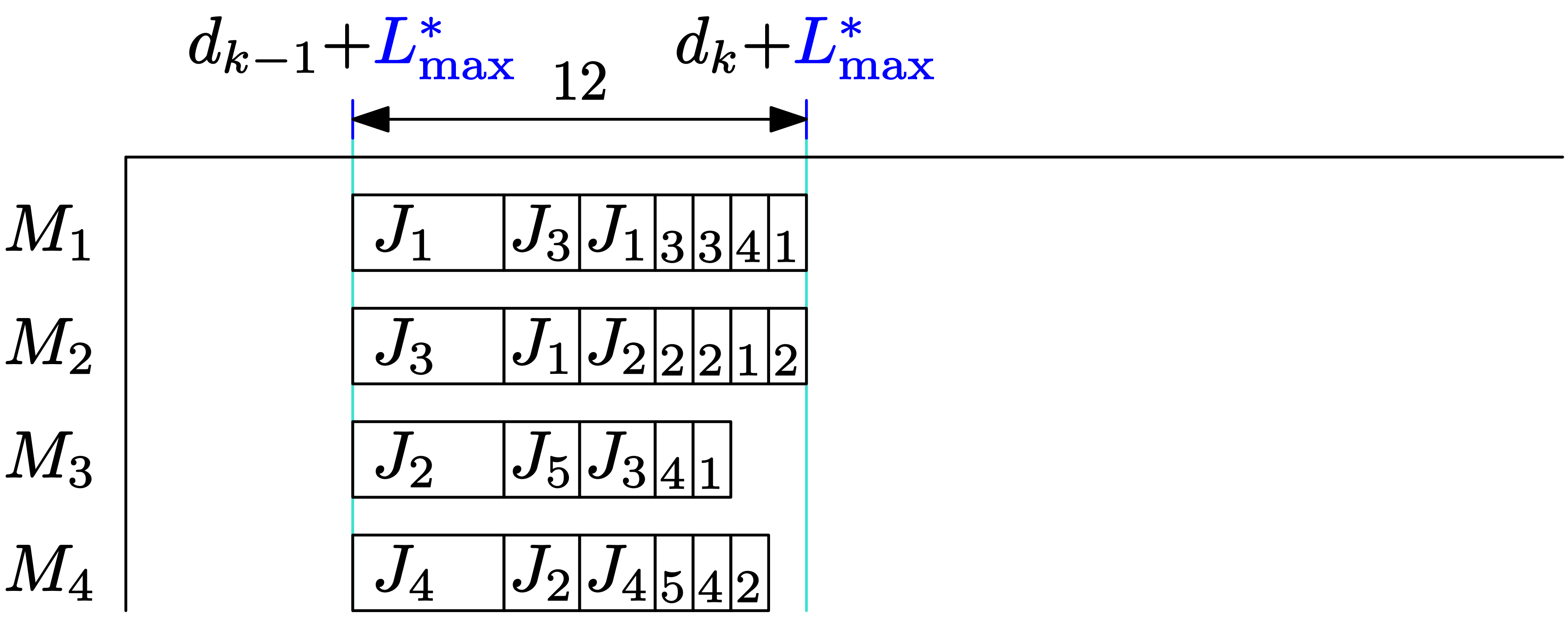


線形計画からスケジュールへ

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & L_{\max} \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 \quad (\forall j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} \quad (\forall i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} \quad (\forall i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} \quad (\forall j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} \quad (\forall j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \ge 0 \quad (\forall i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$

最適解：$L_{\max}^{*}, t_{ij}^{(k)*}$

i \ j	1	2	3	4	5	和
1	$\boxed{1}$	0	0	0	0	1
2	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0

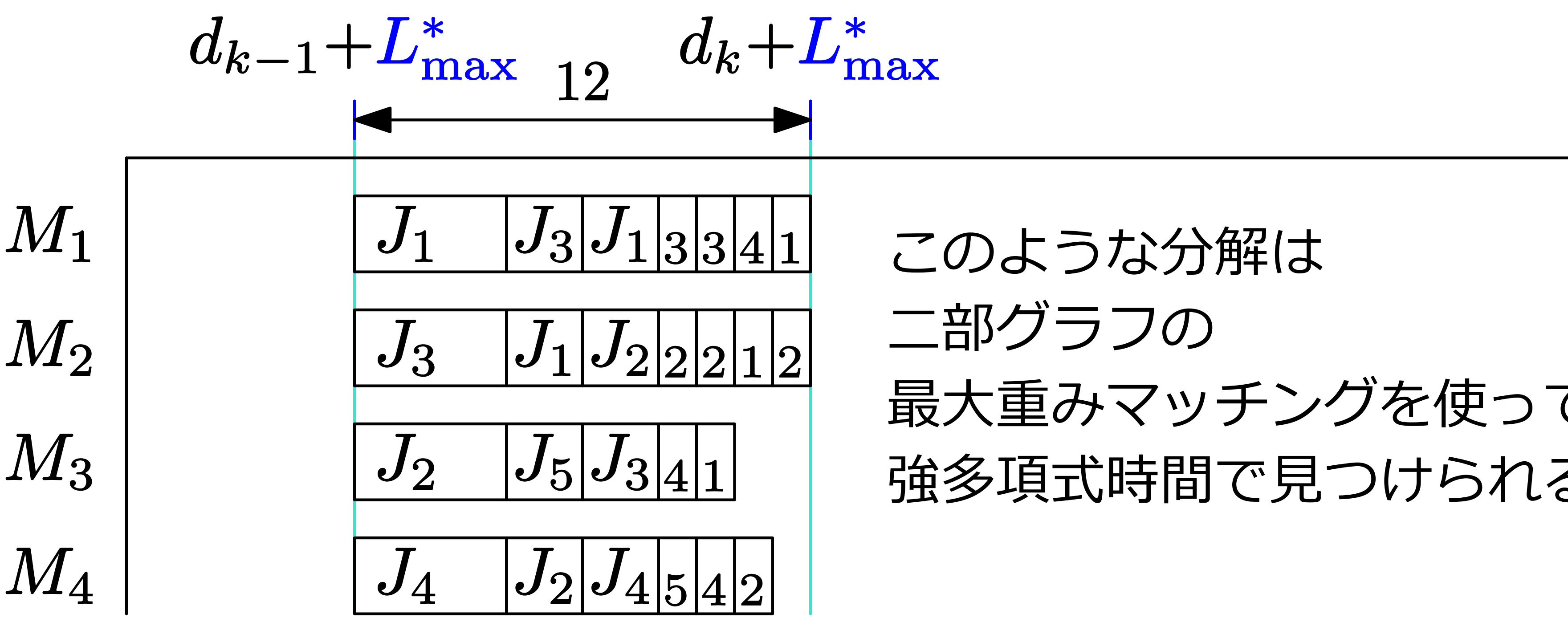


線形計画からスケジュールへ

最適解：$L^*_{\max}, t^{(k)*}_{ij}$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \text{和} \\
\hline
1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & L_{\max} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_{ij}}t_{ij}^{(k)} = 1 & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, i \in [m]) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, i \in [m], k \in \{2,\dots,n\}) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(1)} \le d_1 + L_{\max} & (\forall\, j \in [n]) \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_{ij}^{(k)} \le d_k - d_{k-1} & (\forall\, j \in [n], k \in \{2,\dots,j\}) \\
& t_{ij}^{(k)} \ge 0 & (\forall\, i \in [m], j \in [n], k \in [n])
\end{array}
$$



このような分解は
二部グラフの
最大重みマッチングを使って
強多項式時間で見つけられる