

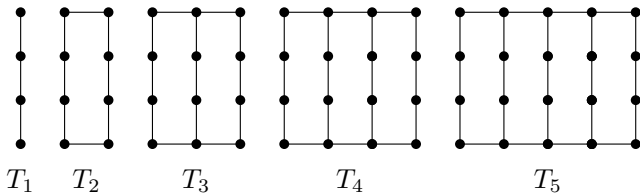
9:00–10:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にする.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).

採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 正整数 $n \geq 1$ に対して, 次の図で表されるグラフ T_n を考える.



グラフ T_n における完全マッチングの総数を t_n としたとき, ある実数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ について次の漸化式が成り立つことを証明せよ. そのとき, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に当てはまる適切な値を定めよ.

$$t_n = \begin{cases} \alpha & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \beta & (n = 2 \text{ のとき}) \\ \gamma t_{n-1} + \delta t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

問題 2 数列 $\{s_n\}_{n \geq 0}$ が次の漸化式を満たすとする.

$$s_n \begin{cases} = 1 & (n = 0, 1 \text{ のとき}) \\ \leq s_{\lfloor n/3 \rfloor} + s_{\lceil n/3 \rceil} + 5n & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

ただし, 実数 x に対して, $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大整数, $\lceil x \rceil$ は x 以上の最小整数を表すとする. このとき, $s_n = O(n)$ が成り立つことを証明せよ.

問題 3 次の漸化式を考える.

$$a_n = \begin{cases} 5 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} - 4n & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって, 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ. (注: 母関数を用いない方法で与えても, 部分点がある.)

問題 4 任意の整数 $n \geq 1$ に対して, 次の満たす整数列 (a_1, a_2, \dots, a_n) を考える.

- $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.
- 任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, $a_i \leq i$.

例えば, $n = 3$ のとき, この性質を満たす数列をすべて挙げると, 以下の5つとなる.

$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 3)$.

以下の問いに答えよ.

1. $n = 4$ のとき, この性質を満たす数列をすべて挙げ, その総数が何であるか, 答えよ.
2. この性質を満たす数列の総数が第 n カタラン数と等しいことを, 全単射による証明によって示せ. 入れ子状の括弧列, 順序付きラベルなし全二分木, ディック道のどれを用いてもよい.