離散数理工学 **2025 年 2 月 11 日**
期末試験 **岡本 吉央**

9:00–10:30．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1 次の疑似コードで記述される乱択アルゴリズムは，停止するとき，入力の配列 A の最小値を返す．(この事実は以下の議論で使用してもよい．) 入力において，A の要素数は必ず 1 以上であると仮定する．

```
1: def f(A) # A: array of distinct numbers
2:   p = a number in A chosen uniformly at random
3:   return p if length(A) == 1
4:   x = f(A-{p})
5:   print "G"
6:   if p < x then x = f(A)
7:   return x
8: end
```

ここで，4 行目における `A-{p}` は，入力配列 A から要素 p を削除して得られる配列を表すものとする．

1. 配列 A を入力としたときに画面に書かれる `G` の数を X_A で表し，$x_n = \max\{\mathsf{E}[X_A] \mid |A| = n\}$ とする．このとき，$x_1 = 0$ であることを証明せよ．
2. $n \geq 2$ であるとき，
$$x_n \leq x_{n-1} + 1 + \frac{1}{n} x_n$$
が成り立つことを証明せよ．
3. 次の漸化式を満たす数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ を考える．
$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_n &= t_{n-1} + 1 + \frac{1}{n} t_n \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$
このとき，任意の $n \geq 1$ に対して $x_n \leq t_n$ が成り立つことを証明せよ．
4. 数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ の一般項を求めよ．
5. 以上から，$x_n = O(n \log n)$ であることを導出せよ．

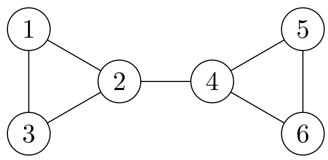
問題 2 n を正の整数とする．値を $\{1, 2, \ldots, n\}$ に取る任意の確率変数 X, Y と任意の実数 $\alpha \in [0, 1]$ に対して，確率変数 Z を次のように定義する．

任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して
$$\Pr(Z = i) = \alpha \Pr(X = i) + (1 - \alpha) \Pr(Y = i).$$

このとき，エントロピーが
$$\mathsf{H}(Z) \geq \alpha \mathsf{H}(X) + (1 - \alpha) \mathsf{H}(Y)$$
を満たすことを証明せよ．(ヒント：ギブスの不等式を用いてもよい．)

問題 3 n を正の整数として，$G = (V, E)$ を頂点数 $2n$ の無向グラフとする．このとき，G のカット C で，$|C| = n$ かつ
$$|E(C)| \geq \frac{n}{2n-1} |E|$$
を満たすものが存在することを証明せよ．

問題 4 次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える．



このとき，頂点 1 から頂点 6 への到達時刻の期待値を求めよ．

以上