離散数理工学　第 12 回

離散確率論：エントロピー

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2025 年 1 月 28 日

最終更新：2025 年 1 月 19 日　21:20

今日の目標

- エントロピーの基本的な性質を導出できる
  - 条件つきエントロピーと結合エントロピー
  - 劣加法性
  - シアラーの不等式
- エントロピーを使って，離散数学の基礎事項を証明できる
  - 二項係数の和の評価
  - 体積と射影の面積の関係

格言

エントロピーを使って，離散数学の事項を証明できる

目次

エントロピー

整数値確率変数 X

定義：エントロピー

X の **エントロピー** とは次の量のこと

$$\mathrm{H}(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Pr(X = i) \log_2 \frac{1}{\Pr(X = i)}$$

ただし，$\Pr(X = i) = 0$ のとき，$\Pr(X = i) \log_2 \dfrac{1}{\Pr(X = i)} = 0$ とする

例：次の確率変数 X を考える

$$\Pr(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \Pr(X = 2) = \frac{1}{4}, \quad \Pr(X = 3) = \frac{1}{8}, \quad \Pr(X = 4) = \frac{1}{8}$$

このとき，$\mathrm{H}(X) = \dfrac{1}{2} \log_2 2 + \dfrac{1}{4} \log_2 4 + \dfrac{1}{8} \log_2 8 + \dfrac{1}{8} \log_2 8 = \dfrac{9}{4}$

エントロピーの考え方

エントロピーの直感

$\mathsf{H}(X) \approx X$ のもつ不確実性

$\mathsf{H}(X)$ が大きい $\leftrightarrow$ X のもつ不確実性が大きい

例

X が $\{0, 1, 2, 3\}$ の値を取る確率変数であるとき

i	0	1	2	3
$\mathrm{Pr}(X = i)$	1	0	0	0

  $\rightsquigarrow \mathsf{H}(X) = 0$

i	0	1	2	3
$\mathrm{Pr}(X = i)$	$1/2$	$1/2$	0	0

  $\rightsquigarrow \mathsf{H}(X) = 1$

i	0	1	2	3
$\mathrm{Pr}(X = i)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

  $\rightsquigarrow \mathsf{H}(X) = 2$

二値エントロピー関数

X の取る値が 2 つ (例えば，0 と 1) の場合
$\mathrm{Pr}(X=0)=p$，$\mathrm{Pr}(X=1)=1-p$ だとすると $(0 \leq p \leq 1)$

$$\mathrm{H}(X) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$

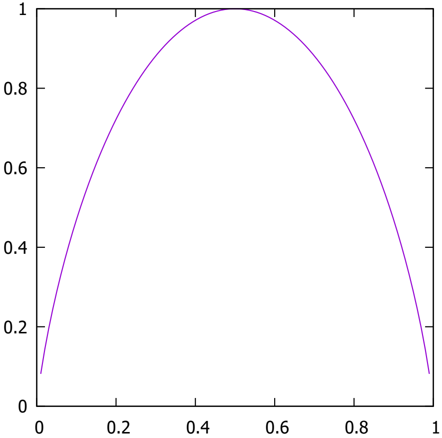
定義：二値エントロピー関数

次の関数 $\mathrm{H}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を**二値エントロピー関数** と呼ぶ

$$\mathrm{H}(p) := p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$

二値エントロピー関数：プロット

$$\mathsf{H}(p) := p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$



二値エントロピー関数の性質

$$\mathsf{H}(p) := p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$

性質：二値エントロピー関数の導関数 (演習問題)

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathsf{H}(p) = \log_2 \dfrac{1-p}{p}$
- $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\mathsf{H}(p) = -\dfrac{1}{p(1-p)\ln 2}$

$0 \le p \le 1$ なので，$\mathsf{H}(p)$ は $p = 1/2$ で最大値 1 を取る

p	0		$1/2$		1
$\mathsf{H}(p)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\mathsf{H}(p)'$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\mathsf{H}(p)''$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

エントロピーの最大値

性質：エントロピーの最大値

確率変数 X が n 個の異なる値しか正の確率で取らないとき

$$\mathrm{H}(X) \leq \log_2 n$$

注：X が異なる n 個の値をそれぞれ確率 $\frac{1}{n}$ でとると

$$\mathrm{H}(X) = n \cdot \frac{1}{n} \log_2 n = \log_2 n$$

(一様分布がエントロピーを最大にする)

エントロピーの最大値：補題 (ギブスの不等式)

補題：ギブスの不等式

正実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i$ を満たすとき

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log_2 x_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \log_2 y_i$$

証明：$\log_2$ ではなく ln で証明すれば十分 (なぜ？)

$$\begin{aligned}\sum x_i \ln y_i - \sum x_i \ln x_i &= \sum x_i \ln \frac{y_i}{x_i} \\ &\leq \sum x_i \left(\frac{y_i}{x_i} - 1 \right) = \sum y_i - \sum x_i \leq 0 \qquad \square\end{aligned}$$

エントロピーの最大値：補題 (ギブスの不等式)

補題：ギブスの不等式

正実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i$ を満たすとき

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log_2 x_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \log_2 y_i$$

証明：$\log_2$ ではなく ln で証明すれば十分 (なぜ？)

$$\begin{aligned}\sum x_i \ln y_i - \sum x_i \ln x_i &= \sum x_i \ln \frac{y_i}{x_i} \\ &\leq \sum x_i \left(\frac{y_i}{x_i} - 1\right) = \sum y_i - \sum x_i \leq 0\end{aligned}$$

□

事実：有用な不等式 (第 1 回講義の復習)

任意の実数 x に対して $1 + x \leq \mathrm{e}^x$

エントロピーの最大値：証明

- 確率変数 X が取る値は $1, 2, \ldots, n$ であるとして，$\Pr(X = i) = p_i > 0$ とする
- ギブスの不等式を $x_i = p_i, y_i = \dfrac{1}{n}$ として用いると

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \\ &\leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n \end{aligned}$$

□

条件つきエントロピー：条件が事象

整数値確率変数 X，事象 E

定義：条件つきエントロピー

E のもとでの X の **条件つきエントロピー** は

$$\mathsf{H}(X \mid E) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Pr(X = i \mid E) \log_2 \frac{1}{\Pr(X = i \mid E)}$$

条件つきエントロピー：条件が確率変数

整数値確率変数 X, Y

定義：条件つきエントロピー

Y のもとでの X の **条件つきエントロピー** は

$$\mathsf{H}(X \mid Y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Pr(Y = j) \mathsf{H}(X \mid Y = j)$$

条件つきエントロピー：公式の導出

$$
\begin{aligned}
\mathsf{H}(X \mid Y) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Pr(Y = j) \mathsf{H}(X \mid Y = j) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Pr(Y = j) \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Pr(X = i \mid Y = j) \log_2 \frac{1}{\Pr(X = i \mid Y = j)} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Pr(Y = j) \Pr(X = i \mid Y = j) \log_2 \frac{1}{\Pr(X = i \mid Y = j)} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Pr(X = i, Y = j) \log_2 \frac{1}{\Pr(X = i \mid Y = j)}
\end{aligned}
$$

(この式を条件つきエントロピーの定義とすることもある)

条件つきエントロピーの性質：条件づけ

有限個の値をとる確率変数 X, Y

性質：条件づけ

$$\mathrm{H}(X \mid Y) \leq \mathrm{H}(X)$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(X) &= \sum_i \Pr(X = i) \log_2 \frac{1}{\Pr(X = i)} \\
&= \sum_i \sum_j \Pr(X = i, Y = j) \log_2 \frac{1}{\Pr(X = i)}
\end{aligned}$$

なので，

(次のページに続く)

条件つきエントロピーの性質：条件づけ (証明の続き)

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{H}(X) - \mathsf{H}(X \mid Y) \\
&= \sum_i \sum_j \Pr(X = i, Y = j) \left(\log_2 \frac{1}{\Pr(X = i)} - \log_2 \frac{1}{\Pr(X = i \mid Y = j)} \right) \\
&= \sum_i \sum_j \Pr(X = i, Y = j) \log_2 \frac{\Pr(X = i \mid Y = j)}{\Pr(X = i)} \\
&= \sum_i \sum_j \Pr(X = i, Y = j) \log_2 \frac{\Pr(X = i, Y = j)}{\Pr(X = i) \Pr(Y = j)} \\
&\geq 0 \quad \text{(ギブスの不等式)}
\end{aligned}
$$

したがって，$\mathsf{H}(X) \geq \mathsf{H}(X \mid Y)$ □

目次

結合エントロピー

整数値確率変数 X, Y

定義：結合エントロピー (同時エントロピー)

X, Y の **結合エントロピー** とは，次の量のこと

$$\mathsf{H}(X, Y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Pr(X = i, Y = j) \log_2 \frac{1}{\Pr(X = i, Y = j)}$$

3 つ以上の確率変数の結合エントロピーも同様に定義する

注 1：X, Y は独立であるとは限らない
注 2：$\mathsf{H}(X, Y) = \mathsf{H}(Y, X)$

結合エントロピーと条件つきエントロピー

整数値確率変数 X, Y

性質：結合エントロピーと条件つきエントロピー

$$\mathsf{H}(X, Y) = \mathsf{H}(X \mid Y) + \mathsf{H}(Y)$$

証明：演習問題

エントロピーの劣加法性

有限個の異なる値を取る確率変数 X, Y

性質：エントロピーの劣加法性

$$\mathrm{H}(X, Y) \le \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y)$$

証明：

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(X, Y) &= \mathrm{H}(X \mid Y) + \mathrm{H}(Y) \\ &\le \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y)\end{aligned}$$

□

エントロピーの劣加法性 (3 つ以上の場合)

劣加法性は 3 つ以上の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対しても成り立つ (ただし，取る値は有限とする)

性質：エントロピーの劣加法性 (演習問題)

$$\mathrm{H}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(X_i)$$

証明は，2 変数の場合と同様にできる (n に関する数学的帰納法)

シアラーの不等式 (簡単な場合)

有限個の値をとる確率変数 X, Y, Z

性質：シアラーの不等式 (簡単な場合)

$$2\mathrm{H}(X, Y, Z) \leq \mathrm{H}(X, Y) + \mathrm{H}(X, Z) + \mathrm{H}(Y, Z)$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(X, Y, Z) &= \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y, Z \mid X) \\
\mathrm{H}(X, Y) &= \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y \mid X) \\
\mathrm{H}(X, Z) &= \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Z \mid X) \\
\mathrm{H}(Y, Z) &= \mathrm{H}(Y) + \mathrm{H}(Z \mid Y)
\end{aligned}$$

シアラーの不等式 (簡単な場合)

有限個の値をとる確率変数 X, Y, Z

性質：シアラーの不等式 (簡単な場合)

$$2\mathsf{H}(X, Y, Z) \leq \mathsf{H}(X, Y) + \mathsf{H}(X, Z) + \mathsf{H}(Y, Z)$$

証明：

$$\mathsf{H}(X, Y, Z) = \mathsf{H}(X) + \mathsf{H}(Y, Z \mid X) = \mathsf{H}(X) + \mathsf{H}(Y \mid X) + \mathsf{H}(Z \mid X, Y)$$

$$\mathsf{H}(X, Y) = \mathsf{H}(X) + \mathsf{H}(Y \mid X)$$

$$\mathsf{H}(X, Z) = \mathsf{H}(X) + \mathsf{H}(Z \mid X)$$

$$\mathsf{H}(Y, Z) = \mathsf{H}(Y) + \mathsf{H}(Z \mid Y)$$

シアラーの不等式 (簡単な場合)

有限個の値をとる確率変数 X, Y, Z

性質：シアラーの不等式 (簡単な場合)

$$2\mathsf{H}(X, Y, Z) \leq \mathsf{H}(X, Y) + \mathsf{H}(X, Z) + \mathsf{H}(Y, Z)$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathsf{H}(X, Y, Z) &= \mathsf{H}(X) + \mathsf{H}(Y, Z \mid X) = \mathsf{H}(X) + \mathsf{H}(Y \mid X) + \mathsf{H}(Z \mid X, Y) \\
\mathsf{H}(X, Y) &= \mathsf{H}(X) + \mathsf{H}(Y \mid X) \\
\mathsf{H}(X, Z) &= \mathsf{H}(X) + \mathsf{H}(Z \mid X) \geq \mathsf{H}(X) + \mathsf{H}(Z \mid X, Y) \\
\mathsf{H}(Y, Z) &= \mathsf{H}(Y) + \mathsf{H}(Z \mid Y)
\end{aligned}$$

シアラーの不等式 (簡単な場合)

有限個の値をとる確率変数 X, Y, Z

性質：シアラーの不等式 (簡単な場合)

$$2\mathrm{H}(X, Y, Z) \leq \mathrm{H}(X, Y) + \mathrm{H}(X, Z) + \mathrm{H}(Y, Z)$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(X, Y, Z) &= \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y, Z \mid X) = \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y \mid X) + \mathrm{H}(Z \mid X, Y) \\
\mathrm{H}(X, Y) &= \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y \mid X) \\
\mathrm{H}(X, Z) &= \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Z \mid X) \geq \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Z \mid X, Y) \\
\mathrm{H}(Y, Z) &= \mathrm{H}(Y) + \mathrm{H}(Z \mid Y) \geq \mathrm{H}(Y) + \mathrm{H}(Z \mid X, Y)
\end{aligned}$$

シアラーの不等式 (簡単な場合)

有限個の値をとる確率変数 X, Y, Z

性質：シアラーの不等式 (簡単な場合)

$$2\mathrm{H}(X, Y, Z) \leq \mathrm{H}(X, Y) + \mathrm{H}(X, Z) + \mathrm{H}(Y, Z)$$

証明：

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(X, Y, Z) &= \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y, Z \mid X) = \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y \mid X) + \mathrm{H}(Z \mid X, Y) \\
\mathrm{H}(X, Y) &= \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y \mid X) \\
\mathrm{H}(X, Z) &= \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Z \mid X) \geq \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Z \mid X, Y) \\
\mathrm{H}(Y, Z) &= \mathrm{H}(Y) + \mathrm{H}(Z \mid Y) \geq \mathrm{H}(Y) + \mathrm{H}(Z \mid X, Y)
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
2\mathrm{H}(X, Y, Z) &= 2\mathrm{H}(X) + 2\mathrm{H}(Y \mid X) + 2\mathrm{H}(Z \mid X, Y) \\
&\leq 2\mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y \mid X) + \mathrm{H}(Y) + 2\mathrm{H}(Z \mid X, Y) \\
&\leq \mathrm{H}(X, Y) + \mathrm{H}(X, Z) + \mathrm{H}(Y, Z) \qquad \square
\end{aligned}$$

シアラーの不等式 (一般的な場合)

設定

有限個の値をとる確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$

- 添字の集合 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，
  X_I と書いたら，X_i $(i \in I)$ を並べた確率変数とする
- 添字の集合 $I_1, I_2, \ldots, I_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，
  各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ がこの中の k 個以上に含まれるとする

性質：シアラーの不等式 (一般的な場合)　(演習問題)

上の設定のもとで，次が成り立つ

$$k \cdot \mathsf{H}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{\ell=1}^{m} \mathsf{H}(X_{I_\ell})$$

先ほどの「簡単な場合」は
$n = 3, m = 3, I_1 = \{1, 2\}, I_2 = \{1, 3\}, I_3 = \{2, 3\}, k = 2$ の場合に対応する

シアラーの不等式：例

- $2\mathsf{H}(X_1, X_2, X_3) \leq \mathsf{H}(X_1, X_2) + \mathsf{H}(X_1, X_3) + \mathsf{H}(X_2, X_3)$
- $2\mathsf{H}(X_1, X_2, X_3, X_4) \leq \mathsf{H}(X_1, X_2, X_3) + \mathsf{H}(X_1, X_4) + \mathsf{H}(X_2, X_4) + \mathsf{H}(X_3, X_4)$
- $(n-1)\mathsf{H}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathsf{H}(X_i, X_j)$

設定 (再掲)

有限個の値をとる確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$

- 添字の集合 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，
  X_I と書いたら，X_i $(i \in I)$ を並べた確率変数とする
- 添字の集合 $I_1, I_2, \ldots, I_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，
  各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ がこの中の k 個以上に含まれるとする

目次

極値組合せ論のある定理

設定

- $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$
- 各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$p_i = \frac{1}{m}|\{j \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid i \in S_j\}|$
  (p_i は $S_1, \ldots, S_m$ の中で i を含むものの割合)

定理 (Kleitman, Shearer, Sturtevant '81)

上の設定のもとで

$$\log_2 m \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(p_i)$$

極値組合せ論のある定理：証明 (1)

証明：$S_1, \ldots, S_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ から次のような確率変数を作る

- $S_1, \ldots, S_m$ の 1 つを等確率 $1/m$ で選ぶ (選んだものを S_j とする)
- 各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，次のように X_i を作る

$$X_i = \begin{cases} 1 & (i \in S_j), \\ 0 & (i \notin S_j) \end{cases}$$

このとき，次が成り立つ

- $\mathsf{H}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = m \cdot \frac{1}{m} \log_2 m = \log_2 m$
- 各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$\mathsf{H}(X_i) = \mathsf{H}(p_i)$

極値組合せ論のある定理：証明 (2)

証明 (続き)：したがって，エントロピーの劣加法性より

$$\log_2 m = \mathrm{H}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(p_i)$$

□

応用：二項係数の和の評価

定理：二項係数の和の評価

任意の正整数 n と実数 $p \in (0, 1/2]$ に対して，次が成り立つ

$$\sum_{i=0}^{\lfloor np \rfloor} \binom{n}{i} \leq 2^{n\mathsf{H}(p)}$$

証明：Kleitman–Shearer–Sturtevant の定理を使う

- $\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合で要素数が $0, 1, \ldots, \lfloor np \rfloor$ であるものを全部考えて，$S_1, S_2, \ldots, S_m$ とする
  - このとき，$m = \sum_{i=0}^{\lfloor np \rfloor} \binom{n}{i}$

応用：二項係数の和の評価：続き

定理：二項係数の和の評価

任意の正整数 n と実数 $p \in (0, 1/2]$ に対して，次が成り立つ

$$\sum_{i=0}^{\lfloor np \rfloor} \binom{n}{i} \leq 2^{n\mathsf{H}(p)}$$

証明 (続き)：Kleitman–Shearer–Sturtevant の定理を使う

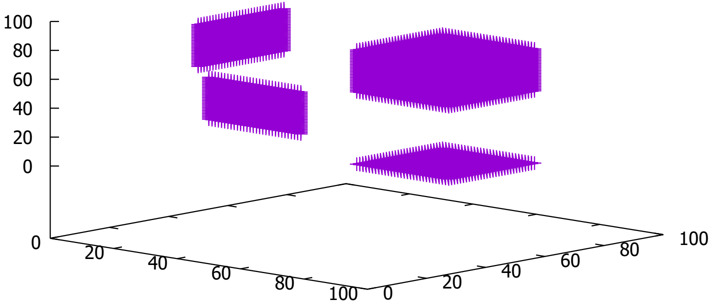
- $p_1, p_2, \ldots, p_n$ は次を満たす
  - $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$
  - $p_1 + p_2 + \cdots + p_n \leq np$ (なぜ？)
- $\therefore p_1 = p_2 = \cdots = p_n \leq p$
- したがって，Kleitman–Shearer–Sturtevant の定理より

$$\log_2 m \leq \sum_{i=1}^{n} \mathsf{H}(p_i) \leq n\mathsf{H}(p)$$

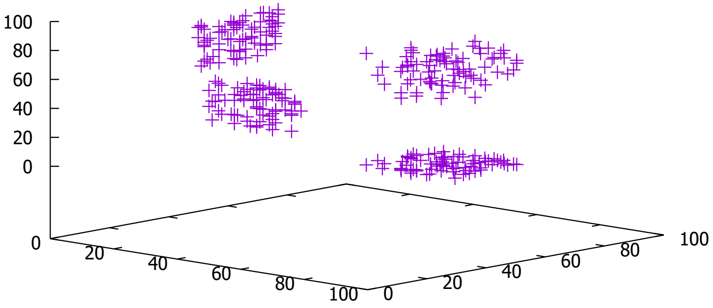
$0 \leq p_i \leq p \leq 1/2$ より，$\mathsf{H}(p_i) \leq \mathsf{H}(p)$ であることに注意 □

目次

応用：体積と射影の面積 (例 1)



応用：体積と射影の面積 (例 2)



応用：体積と射影の面積

設定

- $A \subseteq \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$
- $A_x = \{(0, y, z) \mid (x, y, z) \in A\}$,
  $A_y = \{(x, 0, z) \mid (x, y, z) \in A\}$,
  $A_z = \{(x, y, 0) \mid (x, y, z) \in A\}$,

性質

$$|A|^2 \leq |A_x| \cdot |A_y| \cdot |A_z|$$

体積と射影の面積：証明

証明：次のように確率変数 X, Y, Z を構成する
- A の要素を 1 つ一様分布に従って選ぶ
- 選んだ要素を (X, Y, Z) とする

シアラーの不等式より

$$2\mathsf{H}(X, Y, Z) \leq \mathsf{H}(X, Y) + \mathsf{H}(X, Z) + \mathsf{H}(Y, Z)$$

ここで,
- $\mathsf{H}(X, Y, Z) = \log_2 |A|$
- $\mathsf{H}(X, Y) \leq \log_2 |A_z|$, $\mathsf{H}(X, Z) \leq \log_2 |A_y|$, $\mathsf{H}(Y, Z) \leq \log_2 |A_x|$

したがって，$\log_2 |A|^2 \leq \log_2 |A_z||A_y||A_x|$ □

目次

今日の目標

今日の目標

- エントロピーの基本的な性質を導出できる
  - 条件つきエントロピーと結合エントロピー
  - 劣加法性
  - シアラーの不等式
- エントロピーを使って，離散数学の基礎事項を証明できる
  - 二項係数の和の評価
  - 体積と射影の面積の関係

格言

エントロピーを使って，離散数学の事項を証明できる

目次