離散数理工学　第 6 回

数え上げの基礎：スターリング数と集合の分割

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2024 年 11 月 26 日

最終更新：2024 年 11 月 17 日　19:52

今日の目標

集合の分割 について次ができるようになる

- 第 2 種スターリング数とベル数を用いて，集合の分割に関する数え上げを行う
- ベル数の指数型母関数を導出する
- 第 2 種スターリング数とベル数の性質を証明できる

いままでの内容を活用していく

目次

集合の分割

集合 A

定義：集合の分割

A の **分割** とは次を性質をすべて満たす集合 $\mathcal{P} \subseteq 2^A$ のこと

- 任意の $X \in \mathcal{P}$ に対して，$X \neq \emptyset$ (非空性)
- 任意の $X, Y \in \mathcal{P}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$ (素性)
- 任意の $a \in A$ に対して，ある $X \in \mathcal{P}$ が存在して，$a \in X$ (被覆性)

分割 $\mathcal{P}$ の要素を $\mathcal{P}$ の **ブロック** や **パーツ** と呼ぶことがある

例：$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ のとき，$\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\}$ は A の分割

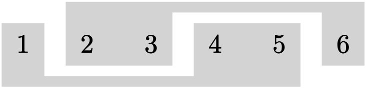
1	2	3	4	5	6

集合の分割：例

次の 4 つはどれも $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の分割

$\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$

$\{\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 6\}\}$



$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$

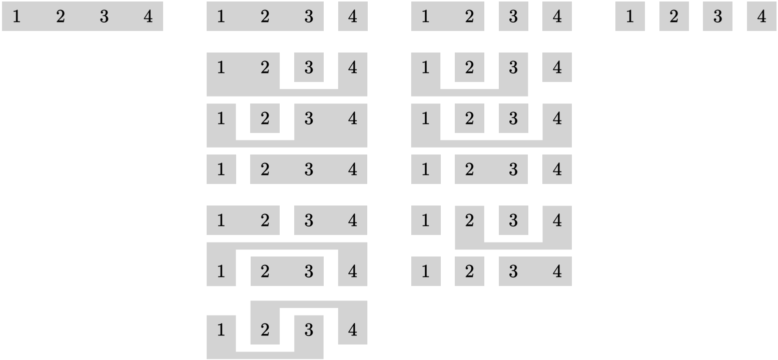
$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$

集合の分割を数え上げる

課題

n, k は非負整数として，$k \leq n$ を満たすとする

- 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の分割はいくつあるか？
- 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の分割で，ブロックをちょうど k 個持つものはいくつあるか？



第 2 種スターリング数

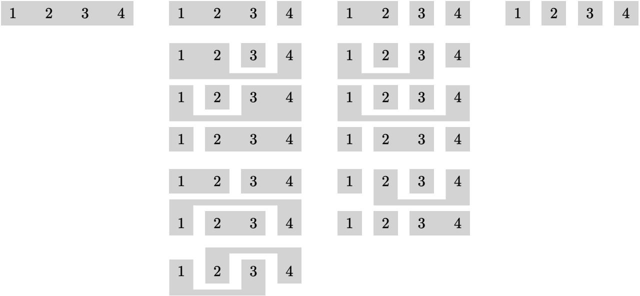
定義：第 2 種スターリング数

非負整数 n, k に対して (ただし，$k \leq n$)

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{集合 } \{1, 2, \ldots, n\} \text{ の分割で} \\ \text{ちょうど } k \text{ 個のブロックを持つものの総数} \end{array} \right.$$

例：

- $\left\{ {4 \atop 1} \right\} = 1$
- $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$
- $\left\{ {4 \atop 3} \right\} = 6$
- $\left\{ {4 \atop 4} \right\} = 1$



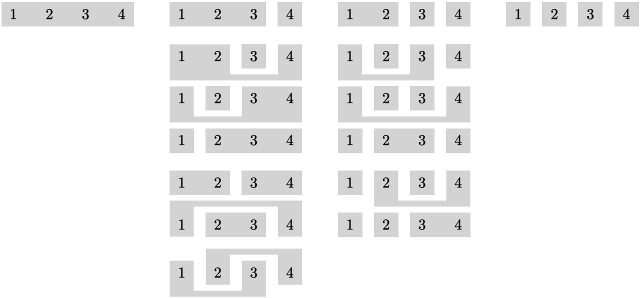
ベル数

定義：ベル数

非負整数 n に対して

$$B_n = \text{集合 } \{1, 2, \ldots, n\} \text{ の分割の総数}$$

例：$B_4 = 15$



第 2 種スターリング数とベル数：例

$k\backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
2			1	3	7	15	31	63	127	255
3				1	6	25	90	301	966	3025
4					1	10	65	350	1701	7770
5						1	15	140	1050	6951
6							1	21	266	2282
7								1	28	462
8									1	36
9										1
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147

注：普通は，行が n，列が k となるように表を書く

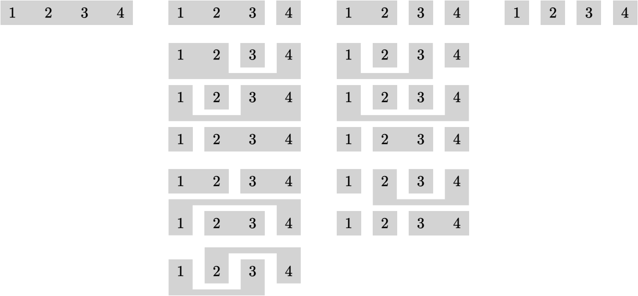
第 2 種スターリング数とベル数の関係

性質：ベル数は第 2 種スターリング数の和

任意の非負整数 $n \geq 0$ に対して

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

正しいことは，定義からただちに分かる



第 2 種スターリング数とベル数：課題

課題

- 第 2 種スターリング数とベル数 を どう計算すればよいか？
- 第 2 種スターリング数とベル数 を 簡単に書けるか？

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
2			1	3	7	15	31	63	127	255
3				1	6	25	90	301	966	3025
4					1	10	65	350	1701	7770
5						1	15	140	1050	6951
6							1	21	266	2282
7								1	28	462
8									1	36
9										1
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147

第 2 種スターリング数の漸化式

性質：第 2 種スターリング数の漸化式

任意の非負整数 n, k に対して (ただし，$k \leq n$)，次が成り立つ

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \begin{cases} 1 & (n = k \text{ のとき}), \\ 0 & (n > 0 \text{ かつ } k = 0 \text{ のとき}), \\ k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} & (\text{その他のとき}). \end{cases}$$

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
2			1	3	7	15	31	63	127	255
3				1	6	25	90	301	966	3025
4					1	10	65	350	1701	7770
5						1	15	140	1050	6951
6							1	21	266	2282
7								1	28	462
8									1	36
9										1
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147

例:

$$\left\{ {8 \atop 4} \right\} = 4 \left\{ {7 \atop 4} \right\} + \left\{ {7 \atop 3} \right\}$$
$$= 4 \cdot 350 + 301$$
$$= 1701$$

第 2 種スターリング数の漸化式：証明 (1)

性質：第 2 種スターリング数の漸化式

任意の非負整数 n, k に対して (ただし，$k \leq n$)，次が成り立つ

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \begin{cases} 1 & (n = k \text{ のとき}), \\ 0 & (n > 0 \text{ かつ } k = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明：

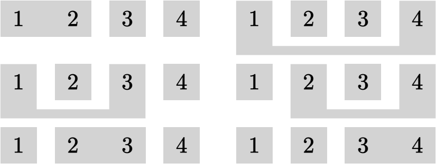
- $n = k$ のとき：($n = 0$ のときに注意)
  $\{1, 2, \ldots, n\}$ を n 個のブロックに分ける方法は 1 とおり
  $\therefore \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$
- $n > 0$ かつ $k = 0$ のとき：
  $\{1, 2, \ldots, n\}$ を 0 個のブロックに分ける方法は 0 とおり
  $\therefore \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$

第 2 種スターリング数の漸化式：証明 (2) — 直感

性質：第 2 種スターリング数の漸化式

任意の非負整数 n, k に対して，$0 < k < n$ のとき，次が成り立つ

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

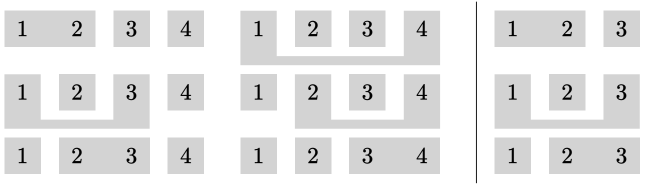


第 2 種スターリング数の漸化式：証明 (2) — 直感

性質：第 2 種スターリング数の漸化式

任意の非負整数 n, k に対して，$0 < k < n$ のとき，次が成り立つ

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

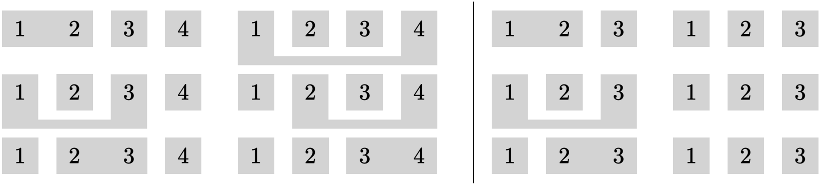


第 2 種スターリング数の漸化式：証明 (2) — 直感

性質：第 2 種スターリング数の漸化式

任意の非負整数 n, k に対して，$0 < k < n$ のとき，次が成り立つ

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

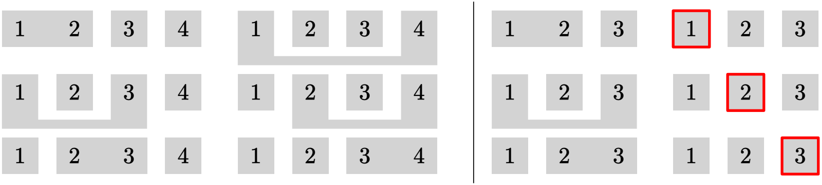


第 2 種スターリング数の漸化式：証明 (2) — 直感

性質：第 2 種スターリング数の漸化式

任意の非負整数 n, k に対して，$0 < k < n$ のとき，次が成り立つ

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$



第 2 種スターリング数の漸化式：証明 (2)

性質：第 2 種スターリング数の漸化式

任意の非負整数 n, k に対して，$0 < k < n$ のとき，次が成り立つ

$$\left\{ n \atop k \right\} = k \left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$$

証明：$0 < k < n$ とする

- $\{1, \ldots, n\}$ の分割で k 個ブロックを持つものは次の 2 つに分類できる
  - $\{n\}$ というブロックを持つもの
  - $\{n\}$ というブロックを持たないもの

第 2 種スターリング数の漸化式：証明 (3)

性質：第 2 種スターリング数の漸化式

任意の非負整数 n, k に対して，$0 < k < n$ のとき，次が成り立つ

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

証明：

- $\{n\}$ というブロックを持つものは
  $\{1, \ldots, n-1\}$ の分割で $k-1$ 個のブロックを持つものに，
  $\{n\}$ を追加することで得られる
- $\rightsquigarrow \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ とおり

$$\boxed{1} \cdots \boxed{n{-}1} \longrightarrow \boxed{1} \cdots \boxed{n{-}1} \quad \boxed{n}$$

第 2 種スターリング数の漸化式：証明 (4)

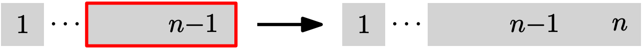
性質：第 2 種スターリング数の漸化式

任意の非負整数 n, k に対して，$0 < k < n$ のとき，次が成り立つ

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

<u>証明</u>：

- $\{n\}$ というブロックを持たないものは $\{1, \ldots, n-1\}$ の分割で k 個のブロックを持つものにおいて，1 つのブロックの中に n を追加することで得られる
- $\rightsquigarrow k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ とおり □



ベル数の漸化式

性質：ベル数の漸化式

第 n ベル数 B_n は次の漸化式を満たす

$$B_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}), \\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

例：

- $B_0 = 1$
- $B_1 = \binom{0}{0} B_0 = 1 \cdot 1 = 1$
- $B_2 = \binom{1}{0} B_0 + \binom{1}{1} B_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$
- $B_3 = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 + \binom{2}{2} B_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$
- $B_4 = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 + \binom{3}{3} B_3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 15$

ベル数の漸化式：証明

性質：ベル数の漸化式

第 n ベル数 B_n は $n \geq 1$ のとき次を満たす

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$$

<u>証明 (組合せ的解釈に基づく)</u>：左辺 $= \{1, \ldots, n\}$ の分割の総数

- 右辺の第 k 項 $= n$ を含まないブロックに入る k 個の要素を選び，その後に，その k 個を分割する方法の総数 □

目次

ベル数の一般項？

性質：ベル数の漸化式

第 n ベル数 B_n は次の漸化式を満たす

$$B_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}), \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

目標

第 n ベル数を閉じた形で書く

$\rightsquigarrow$ (指数型) 母関数を用いる

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (1)

第 4 回で紹介した方法とは違う方法に従って導出する
$\rightsquigarrow$ 指数型母関数を微分する

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x)$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (1)

第 4 回で紹介した方法とは違う方法に従って導出する
$\rightsquigarrow$ 指数型母関数を微分する

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) \quad = \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (1)

第 4 回で紹介した方法とは違う方法に従って導出する
⇝ 指数型母関数を微分する

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B_n\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (1)

第 4 回で紹介した方法とは違う方法に従って導出する
$\rightsquigarrow$ 指数型母関数を微分する

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B_n \frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (1)

第 4 回で紹介した方法とは違う方法に従って導出する
$\rightsquigarrow$ 指数型母関数を微分する

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B_n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k \right) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (1)

第 4 回で紹介した方法とは違う方法に従って導出する
⇝ 指数型母関数を微分する

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B_n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k \right) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{x^n}{n!}$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}B_k\frac{x^n}{n!}\right)
\end{aligned}
$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}B_k\frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^n\right)
\end{aligned}
$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}B_k\frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^{k+(n-k)}\right)
\end{aligned}
$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (2)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}B_k\frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^{k+(n-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!\ell!}x^{k+\ell}\right)
\end{aligned}$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}B_k\frac{x^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{B_k}{k!(n-k)!}x^{k+(n-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!\ell!}x^{k+\ell}\right) \\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}x^{\ell}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^{k}\right)
\end{aligned}
$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!} x^n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{B_k}{k!(n-k)!} x^{k+(n-k)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!\ell!} x^{k+\ell} \right) \\
&= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} x^{\ell} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \right) = \mathrm{e}^x B(x)
\end{aligned}
$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (3)

つまり，$B(x)$ は次の微分方程式の解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) = \mathrm{e}^x B(x),$$
$$B(0) = 1$$

これは変数分離形の微分方程式なので，すぐ解ける

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (3)

つまり，$B(x)$ は次の微分方程式の解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) = \mathrm{e}^x B(x),$$
$$B(0) = 1$$

これは変数分離形の微分方程式なので，すぐ解ける

$$\frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (3)

つまり，$B(x)$ は次の微分方程式の解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) = \mathrm{e}^x B(x),$$
$$B(0) = 1$$

これは変数分離形の微分方程式なので，すぐ解ける

$$\frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$\int \frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (3)

つまり，$B(x)$ は次の微分方程式の解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) = \mathrm{e}^x B(x),$$
$$B(0) = 1$$

これは変数分離形の微分方程式なので，すぐ解ける

$$\frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$\int \frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$\ln B(x) = \mathrm{e}^x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (3)

つまり，$B(x)$ は次の微分方程式の解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) = \mathrm{e}^x B(x),$$
$$B(0) = 1$$

これは変数分離形の微分方程式なので，すぐ解ける

$$\frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$\int \frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$\ln B(x) = \mathrm{e}^x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$
$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + C$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (3)

つまり，$B(x)$ は次の微分方程式の解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) = \mathrm{e}^x B(x),$$
$$B(0) = 1$$

これは変数分離形の微分方程式なので，すぐ解ける

$$\frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$\int \frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$\ln B(x) = \mathrm{e}^x + C \quad (C\text{ は積分定数})$$
$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + C}$$

$B(0) = 1$ なので，$1 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^0 + C} = \mathrm{e}^{1+C}$ であり，つまり，$C = -1$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (3)

つまり，$B(x)$ は次の微分方程式の解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) = \mathrm{e}^x B(x),$$
$$B(0) = 1$$

これは変数分離形の微分方程式なので，すぐ解ける

$$\frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$\int \frac{1}{B(x)}\mathrm{d}B(x) = \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$\ln B(x) = \mathrm{e}^x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$
$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + C}$$

$B(0) = 1$ なので，$1 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^0 + C} = \mathrm{e}^{1+C}$ であり，つまり，$C = -1$

$$\therefore \quad B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (4)

性質：ベル数の指数型母関数

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1$$

したがって,

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (4)

性質：ベル数の指数型母関数

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1$$

したがって，

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{e}^x)^k$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (4)

性質：ベル数の指数型母関数

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1$$

したがって,

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{e}^x)^k = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{kx}$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (4)

性質：ベル数の指数型母関数

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1$$

したがって，

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{e}^x)^k = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{kx}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (kx)^n$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (4)

性質：ベル数の指数型母関数

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1$$

したがって，

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{e}^x)^k = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{kx}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (kx)^n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^n$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (4)

性質：ベル数の指数型母関数

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1$$

したがって，

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{e}^x)^k = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{kx}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (kx)^n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) x^n$$

ベル数の一般項？：母関数を用いた解法 (4)

性質：ベル数の指数型母関数

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1$$

したがって，

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{e}^x)^k = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{kx}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (kx)^n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) x^n$$

つまり，

性質：ベル数の一般項 (ドビンスキの公式)

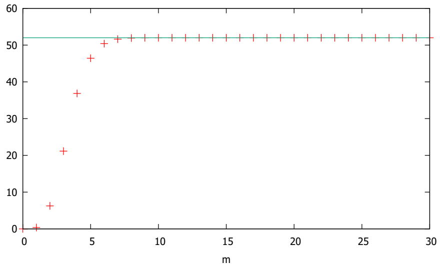
$$B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

ベル数の一般項：収束する様子を見てみる

性質：ベル数の一般項 (ドビンスキの公式)

$$B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

有限和 $\frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{m} \frac{k^n}{k!}$ の列 $m \to \infty$ で B_n に収束する様子を見てみる



$n = 5$ のとき，$B_n = 52$

ベル数の一般項：手で計算してみる

性質：ベル数の一般項 (ドビンスキの公式)

$$B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

例：

$$B_1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e} = 1$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)+1}{(k-1)!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = 2 \end{aligned}$$

目次

第 2 種スターリング数と二項係数の関係

性質

任意の整数 $n \geq k \geq 0$ に対して，次が成り立つ

$$\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop k} \right\}.$$

例：$n = 4, k = 2$ のとき，

- 左辺 $= \left\{ {4+1 \atop 2+1} \right\} = \left\{ {5 \atop 3} \right\} = 25$
- 右辺 $= \displaystyle\sum_{j=2}^{4} \binom{4}{j} \left\{ {j \atop 2} \right\} = \binom{4}{2} \left\{ {2 \atop 2} \right\} + \binom{4}{3} \left\{ {3 \atop 2} \right\} + \binom{4}{4} \left\{ {4 \atop 2} \right\}$
  $= 6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 7 = 25$

第 2 種スターリング数と二項係数の関係：証明

性質

任意の整数 $n \geq k \geq 0$ に対して，次が成り立つ

$$\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop k} \right\}.$$

証明 (組合せ的解釈に基づく)：

- 左辺 $= \{1, \ldots, n+1\}$ を $k+1$ 個のブロックに分割する方法の総数
- 右辺の第 j 項 $= n+1$ を含むブロックの要素数を $n+1-j$ とする
  - 残った k 個のブロックに含まれる要素は j 個で，それらを選び，k 個のブロックに分割する

第 2 種スターリング数と二項係数の関係：証明

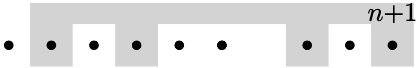
性質

任意の整数 $n \geq k \geq 0$ に対して，次が成り立つ

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}.$$

証明 (組合せ的解釈に基づく)：

- 左辺 $= \{1, \ldots, n+1\}$ を $k+1$ 個のブロックに分割する方法の総数
- 右辺の第 j 項 $= n+1$ を含むブロックの要素数を $n+1-j$ とする
  - 残った k 個のブロックに含まれる要素は j 個で，それらを選び，k 個のブロックに分割する



スパイビーの公式

性質：スパイビーの公式 (Spivey 2008)

任意の非負整数 m, n に対して，次が成り立つ (ただし，$0^0 = 1$ とする)

$$B_{m+n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k$$

特殊な場合：$m = 1$ のとき，

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{1} \left\{ {1 \atop j} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

$n = 0$ のとき，

$$B_{m} = \sum_{k=0}^{0} \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} \binom{0}{k} j^{-k} B_k = \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\}$$

スパイビーの公式：略証 (1)

性質：スパイビーの公式 (Spivey 2008)

任意の非負整数 m, n に対して，次が成り立つ (ただし，$0^0 = 1$ とする)

$$B_{m+n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k$$

<u>略証</u>：右辺の第 k, j 項の組合せ的解釈：次を順に行うような分割の作り方

1. $\{1, \ldots, m\}$ から j 個のブロックを作る ($\left\{ {m \atop j} \right\}$ とおり)

1 2 m

$1'$ $2'$ n'

スパイビーの公式：略証 (1)

性質：スパイビーの公式 (Spivey 2008)

任意の非負整数 m, n に対して，次が成り立つ (ただし，$0^0 = 1$ とする)

$$B_{m+n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k$$

<u>略証</u>：右辺の第 k, j 項の組合せ的解釈：次を順に行うような分割の作り方

1. $\{1, \ldots, m\}$ から j 個のブロックを作る ($\left\{ {m \atop j} \right\}$ とおり)

1　2　　　m　　j blocks

$1'$　$2'$　　n'

スパイビーの公式：略証 (2)

性質：スパイビーの公式 (Spivey 2008)

任意の非負整数 m, n に対して，次が成り立つ (ただし，$0^0 = 1$ とする)

$$B_{m+n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k$$

略証：右辺の第 k, j 項の組合せ的解釈：次を順に行うような分割の作り方

2. $\{1', \ldots, n'\}$ から k 個を選び，分割する $\left(\binom{n}{k} B_k \text{ とおり}\right)$

1 2 | | m — j blocks

$1'$ $2'$ n'

k elements

スパイビーの公式：略証 (2)

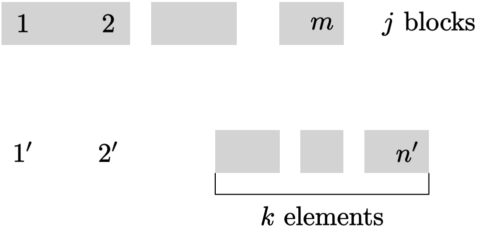
性質：スパイビーの公式 (Spivey 2008)

任意の非負整数 m, n に対して，次が成り立つ (ただし，$0^0 = 1$ とする)

$$B_{m+n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k$$

略証：右辺の第 k, j 項の組合せ的解釈：次を順に行うような分割の作り方

2. $\{1', \ldots, n'\}$ から k 個を選び，分割する　　($\binom{n}{k} B_k$ とおり)



スパイビーの公式：略証 (2)

性質：スパイビーの公式 (Spivey 2008)

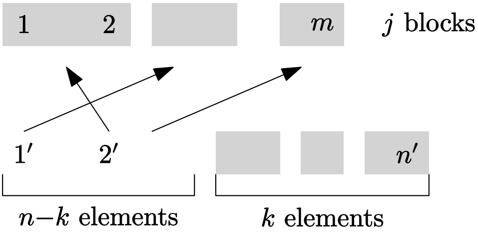
任意の非負整数 m, n に対して，次が成り立つ (ただし，$0^0 = 1$ とする)

$$B_{m+n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m \atop j} \right\} \binom{n}{k} j^{n-k} B_k$$

略証：右辺の第 k, j 項の組合せ的解釈：次を順に行うような分割の作り方

3 $\{1', \ldots, n'\}$ の残りの $n-k$ 個を 1 の j 個の分割に割り振る

(j^{n-k} とおり)



目次

今日のまとめ

今日の目標

集合の分割 について次ができるようになる

- 第 2 種スターリング数とベル数を用いて，集合の分割に関する数え上げを行う
- ベル数の指数型母関数を導出する
- 第 2 種スターリング数とベル数の性質を証明できる

いままでの内容を活用していく

目次