離散数理工学　第 5 回

数え上げの基礎：カタラン数

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2024 年 11 月 19 日

最終更新：2024 年 11 月 12 日　08:58

今日の目標

カタラン数について，次ができるようになる

- 組合せ構造がカタラン数で数えられることを証明する
- カタラン数の一般項を母関数を用いて導出する
- カタラン数が満たす性質を導出する

いままでの内容を活用していく

目次

カタラン数：漸化式による定義

定義：カタラン数

非負整数 $n \geq 0$ に対して，**第 n カタラン数** C_n を次の漸化式で定義する

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

- $C_0 = 1$
- $C_1 = C_0 C_0 = 1 \cdot 1 = 1$
- $C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$
- $C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- $C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$

Eugène C. Catalan

ウジェーヌ・カタラン
(1814–1894)

- ベルギーの数学者
- カタラン数を導入
  - ただ，その前から知られていたらしい
  - カタラン数という名称はリオーダンによるらしい

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Catalan/

カタラン数の組合せ的解釈

リチャード・スタンレイ (1944–)

- MIT 数学科の名誉教授
- 組合せ論の研究者 (大家)
- カタラン数の組合せ的解釈を 214 個収集した

ここでは 3 つだけ紹介

http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_P._Stanley

カタラン数の組合せ的解釈 (1)：入れ子状の括弧列

整数 $n \geq 1$

性質：カタラン数と入れ子状の括弧列

$C_n = 2n$ 個の括弧の列で，入れ子状になっているもの

入れ子状 $=$ 左右の対応が取れている

()	()() (())	()()() (())() ()(()) ((())) (()())

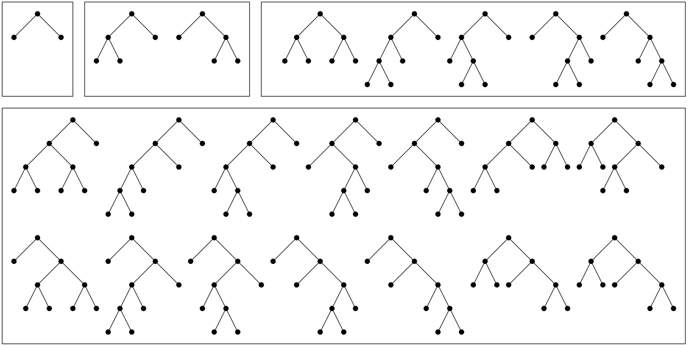
()()()()	()(())()	()()(())	()((()))	()(()())	(())()()	(())(())
((()))()	(()())()	(()()())	((())())	(()(()))	((()()))	(((())))

カタラン数の組合せ的解釈 (2)：全二分木

整数 $n \geq 1$

性質：カタラン数と全二分木

C_n = 葉の数が $n+1$ である順序付きラベルなし全二分木の総数



全二分木 = 葉以外の頂点には子がちょうど 2 つ

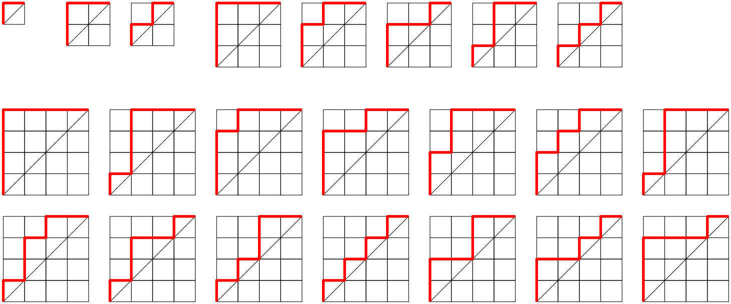
順序付き = 左右を区別する，ラベルなし = 頂点・辺にラベル (名) がない

カタラン数の組合せ的解釈 (3)：ディック道

定義：ディック道 (Dyck path) とは？

ディック道 とは，$(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道で，
直線 $y=x$ の下側を通らないもの

$C_n = (0,0)$ から (n,n) へ至るディック道の総数



なぜカタラン数がこれらを数えるのか？

カタラン数が数えるもの

- 入れ子状の括弧列
- 全二分木 (順序付きラベルなし)
- ディック道
- …

疑問

カタラン数は なぜ これらを数えるのか？

二とおりの説明を紹介

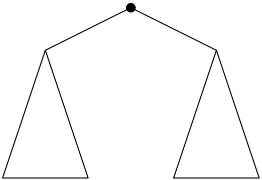
1. **漸化式の導出**
2. 全単射の構成

漸化式：順序付きラベルなし全二分木

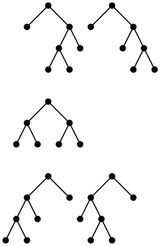
性質：カタラン数と全二分木

$C_n =$ 葉の数が $n+1$ である順序付きラベルなし全二分木の総数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$



$n+1$

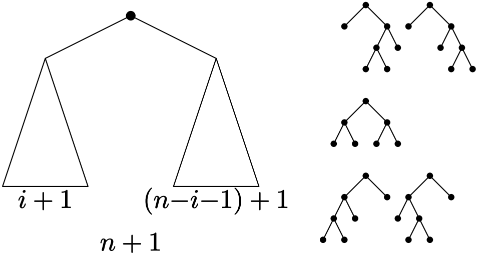


漸化式：順序付きラベルなし全二分木

性質：カタラン数と全二分木

$C_n =$ 葉の数が $n+1$ である順序付きラベルなし全二分木の総数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

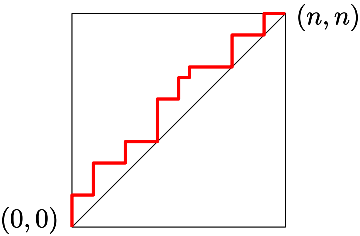


漸化式：ディック道

性質：カタラン数とディック道

$C_n = (0,0)$ から (n,n) へ至るディック道の総数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

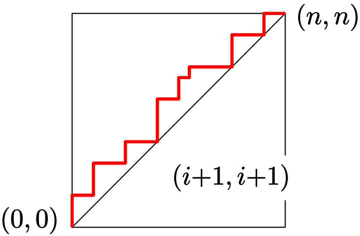


漸化式：ディック道

性質：カタラン数とディック道

$C_n =$ (0,0) から (n, n) へ至るディック道の総数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

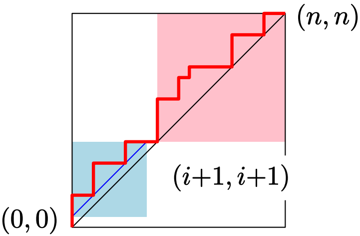


漸化式：ディック道

性質：カタラン数とディック道

C_n = $(0,0)$ から (n,n) へ至るディック道の総数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

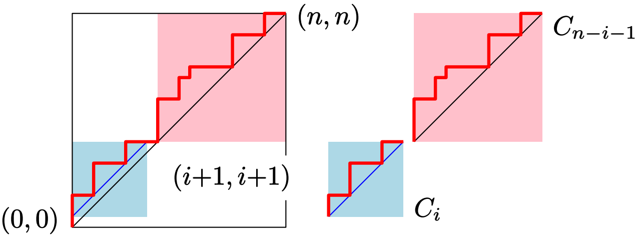


漸化式：ディック道

性質：カタラン数とディック道

$C_n = (0,0)$ から (n,n) へ至るディック道の総数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$



漸化式：入れ子状の括弧列

性質：カタラン数と入れ子状の括弧列

$C_n = 2n$ 個の括弧の列で，入れ子状になっているもの

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

((()(())(())))((()())())

漸化式：入れ子状の括弧列

性質：カタラン数と入れ子状の括弧列

$C_n = 2n$ 個の括弧の列で，入れ子状になっているもの

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

((()(())(())))((()())())

漸化式：入れ子状の括弧列

性質：カタラン数と入れ子状の括弧列

$C_n = 2n$ 個の括弧の列で，入れ子状になっているもの

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(\underbrace{(()(())(()))}_{2i})\underbrace{((()())())}_{2(n-i-1)}$$

なぜカタラン数がこれらを数えるのか？ (再)

カタラン数が数えるもの

- 入れ子状の括弧列
- 全二分木 (順序付きラベルなし)
- ディック道
- …

疑問

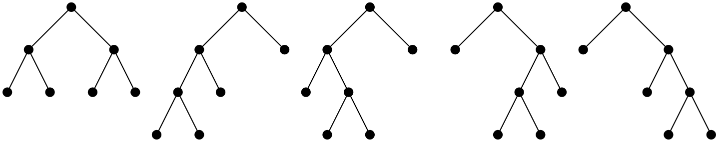
カタラン数は なぜ これらを数えるのか？

二とおりの説明を紹介

1. 漸化式の導出
2. **全単射の構成**

入れ子状の括弧列 $\leftrightarrow$ 順序付きラベルなし全二分木

(())()　　((()))　　(()())　　()(())　　()()()

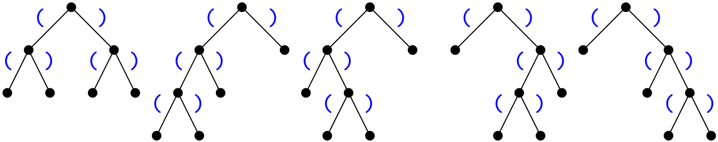


- 括弧列の「(」 $\leftrightarrow$ 二分木で，左に降りる辺
- 括弧列の「)」 $\leftrightarrow$ 二分木で，右に降りる辺

「左優先」の深さ優先探索で辺を訪問する順に従って，括弧列が得られる

入れ子状の括弧列 ↔ 順序付きラベルなし全二分木

(())()　　((()))　　(()())　　()(())　　()()()

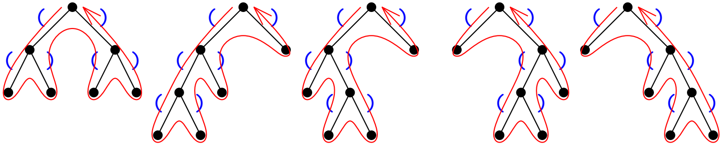


- 括弧列の「(」 ↔ 二分木で，左に降りる辺
- 括弧列の「)」 ↔ 二分木で，右に降りる辺

「左優先」の深さ優先探索で辺を訪問する順に従って，括弧列が得られる

入れ子状の括弧列 ↔ 順序付きラベルなし全二分木

(())()　((()))　(()())　()(())　()()()

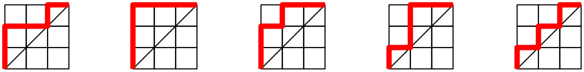


- 括弧列の「(」 ↔ 二分木で，左に降りる辺
- 括弧列の「)」 ↔ 二分木で，右に降りる辺

「左優先」の深さ優先探索で辺を訪問する順に従って，括弧列が得られる

入れ子状の括弧列 ↔ ディック道

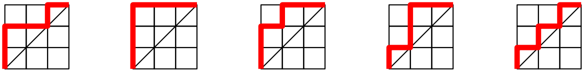
(())()　　((()))　　(()())　　()(())　　()()()



- 括弧列の「(」 ↔ ディック道で，上に進む
- 括弧列の「)」 ↔ ディック道で，右に進む

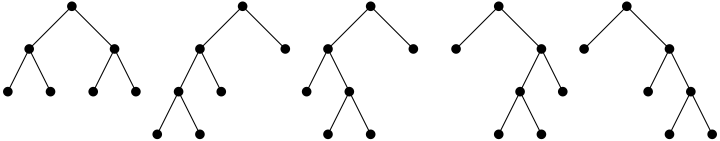
入れ子状の括弧列 $\leftrightarrow$ ディック道

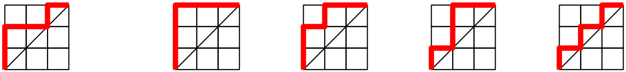
(())()	((()))	(()())	()(())	()()()
$\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow$	$\uparrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$	$\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow$	$\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow$	$\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow$



- 括弧列の「(」 $\leftrightarrow$ ディック道で，上に進む
- 括弧列の「)」 $\leftrightarrow$ ディック道で，右に進む

全二分木 $\leftrightarrow$ ディック道

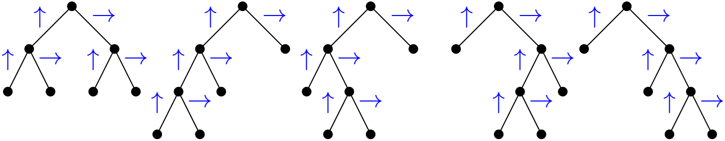


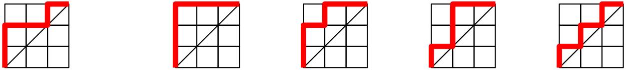


- 二分木で，左に降りる辺 $\leftrightarrow$ ディック道で，上に進む
- 二分木で，右に降りる辺 $\leftrightarrow$ ディック道で，右に進む

「左優先」の深さ優先探索で辺を訪問する順に従って，進み方が得られる

全二分木 $\leftrightarrow$ ディック道

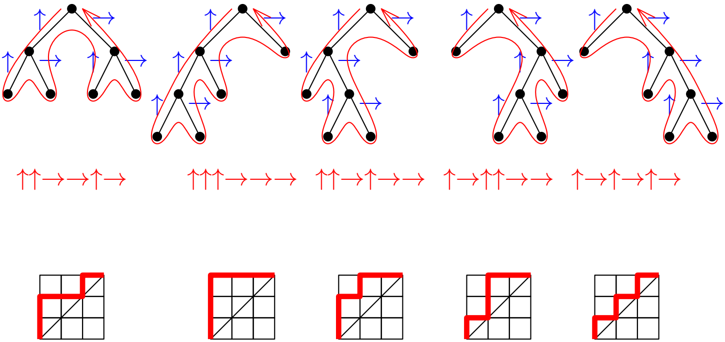




- 二分木で，左に降りる辺 $\leftrightarrow$ ディック道で，上に進む
- 二分木で，右に降りる辺 $\leftrightarrow$ ディック道で，右に進む

「左優先」の深さ優先探索で辺を訪問する順に従って，進み方が得られる

全二分木 ↔ ディック道



- 二分木で，左に降りる辺 ↔ ディック道で，上に進む
- 二分木で，右に降りる辺 ↔ ディック道で，右に進む

「左優先」の深さ優先探索で辺を訪問する順に従って，進み方が得られる

目次

カタラン数の一般項を母関数から導く

定義：カタラン数 (再掲)

カタラン数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

今から行うこと：この漸化式を解くこと $\rightsquigarrow$ 母関数を用いる方法

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\
C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\ C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1}) \end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\
C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1})
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\ C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1}) \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)$$

母関数を $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ と書くことにする

カタラン数：母関数による解法 Step 2

2 各辺を $C(x)$ によって表す

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 = C(x) - 1 \\
\text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right) \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^{n-1} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \right) x^{n} \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^{n} \right)
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n\right) \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n\right)
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n\right) \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n\right) = x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j}\right)
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} \quad &= \quad x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n\right) \\
&= \quad x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n\right) = x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j}\right) \\
&= \quad x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j\right)
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n\right) \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n\right) = x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j}\right) \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j\right) = x\sum_{i=0}^{\infty}\left(C_i x^i\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j\right)\right)
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n\right) \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n\right) = x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j}\right) \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j\right) = x\sum_{i=0}^{\infty}\left(C_i x^i \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j\right)\right) \\
&= x\left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j\right)
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n\right) \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n\right) = x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j}\right) \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j\right) = x\sum_{i=0}^{\infty}\left(C_i x^i\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j\right)\right) \\
&= x\left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j\right) = xC(x)^2
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 3

3 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$C(x) - 1 \quad = \quad xC(x)^2$$

カタラン数：母関数による解法 Step 3

3 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\
xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 3

3. 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\
xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0 \\
C(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}
\end{aligned}
$$

どちらが正しいのか？

カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで，$\lim_{x \to 0} C(x) = C_0 = 1$ なので，

- $C(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると，

- $C(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると，

カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで，$\lim_{x\to 0} C(x) = C_0 = 1$ なので，

- $C(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

  となり，合わない

- $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで，$\lim_{x \to 0} C(x) = C_0 = 1$ なので，

- $C(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty$$

  となり，合わない

- $C(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 - 4x)}{2x(1 + \sqrt{1 - 4x})} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}} = 1$$

  となり，合う

カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0} C(x) = C_0 = 1$ なので，

- $C(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

となり，合わない

- $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-4x)}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} = 1$$

となり，合う

したがって，$C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ である

母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3. 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3. 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\
xC(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}
\end{aligned}
$$

母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\
xC(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}
\end{aligned}
$$

ここで，$C(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ なので，

$$
xC(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n
$$

つまり，$xC(x)$ は次の数列 $\{a_n\}$ の母関数

$$
a_n = \begin{cases} 0 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ C_{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

まずは，$xC(x)$ の級数展開を導く

母関数を用いた漸化式の解法

補題 (テイラー展開を使うことで証明できる (証明は省略))

任意の実数 α に対して，$|z| < 1$ であるとき，

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

ただし，

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

すなわち，$\alpha = 1/2$, $z = -4x$ とすれば，次が得られる

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

母関数を用いた漸化式の解法

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad xC(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n\right)x^n
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して} \quad C_{n-1} = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n
$$

整理

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n &= -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4)^n \\
&= -\frac{1}{2}\frac{-2(-2+4)(-2+8)\cdots(-2+4n-4)}{n!} \\
&= \frac{2\cdot 6\cdot\cdots\cdot(4n-6)}{n!} = \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^{n-1} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{(n-1)!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}
$$

まとめ

以上の議論より，任意の $n \geq 1$ に対して，

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

つまり，次の公式が得られる

第 n カタラン数の一般項

任意の整数 $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

目次

カタラン数に対する上界と下界

第 n カタラン数の一般項

任意の整数 $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

二項係数：簡単な評価 (復習)

任意の整数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}a}{b}\right)^b$$

したがって，カタラン数に対する以下の上界と下界が得られる

$$\frac{2^n}{n+1} \leq C_n \leq \frac{(2\mathrm{e})^n}{n+1}$$

$\therefore$ カタラン数は n に関して指数関数的に増加する

カタラン数に対する恒等式

性質：カタラン数に対する恒等式

任意の整数 $n \geq 1$ に対して

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

例

- $n = 1$：右辺 $= \binom{2}{1} - \binom{2}{2} = 2 - 1 = 1$
- $n = 2$：右辺 $= \binom{4}{2} - \binom{4}{3} = 6 - 4 = 2$
- $n = 3$：右辺 $= \binom{6}{3} - \binom{6}{4} = 20 - 15 = 5$
- $n = 4$：右辺 $= \binom{8}{4} - \binom{8}{5} = 70 - 56 = 14$

カタラン数に対する恒等式：式による証明

性質：カタラン数に対する恒等式

任意の整数 $n \geq 1$ に対して

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

式による証明：

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{(2n)!}{(n-1)!n!} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}\\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n\end{aligned}$$

□

カタラン数に対する恒等式：組合せ的解釈による証明 (1)

性質：カタラン数に対する恒等式

任意の整数 $n \geq 1$ に対して

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

組合せ的解釈による証明：式を書き換える

$$C_n + \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n}$$

カタラン数に対する恒等式：組合せ的解釈による証明 (2)

書き換えた式

任意の整数 $n \geq 1$ に対して

$$C_n + \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n}$$

格子道による解釈で証明する

- 右辺 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の総数
- 左辺の C_n $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至るディック道の総数
- $\therefore$ 左辺の第 2 項 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道で, $y = x$ の下を通るものの総数 (本当？)

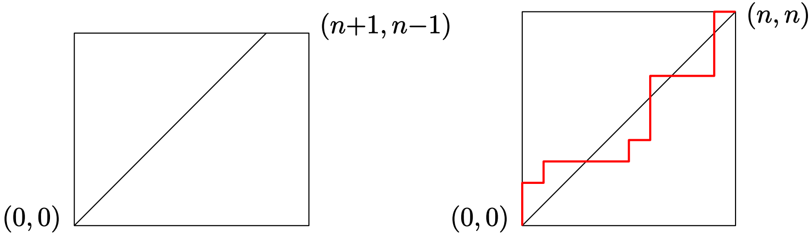
カタラン数に対する恒等式：組合せ的解釈による証明 (3)

証明したい目標

$$\binom{2n}{n+1} = \begin{array}{l}(0,0) \text{ から } (n,n) \text{ へ至る格子道で,} \\ y = x \text{ の下を通るものの総数}\end{array}$$

全単射による証明

- 左辺 $=$ $(0,0)$ から $(n+1, n-1)$ へ至る格子道の総数



「アンドレの鏡映法」とも呼ばれる手法

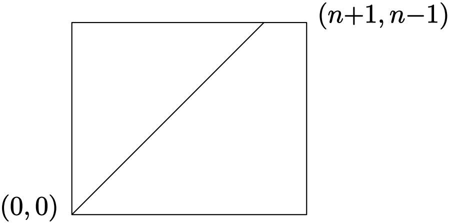
カタラン数に対する恒等式：組合せ的解釈による証明 (3)

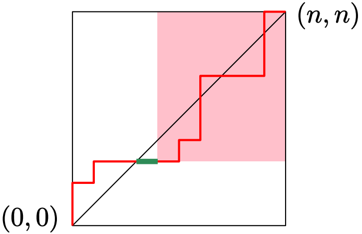
証明したい目標

$$\binom{2n}{n+1} = \begin{array}{l}(0,0) \text{ から } (n,n) \text{ へ至る格子道で,} \\ y = x \text{ の下を通るものの総数}\end{array}$$

全単射による証明

- 左辺 $=$ $(0,0)$ から $(n+1, n-1)$ へ至る格子道の総数





「アンドレの鏡映法」とも呼ばれる手法

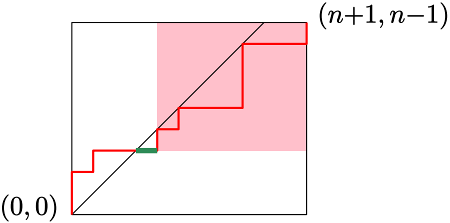
カタラン数に対する恒等式：組合せ的解釈による証明 (3)

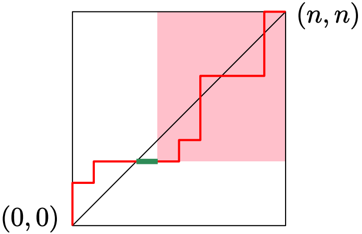
証明したい目標

$$\binom{2n}{n+1} = \begin{array}{l}(0,0) \text{ から } (n,n) \text{ へ至る格子道で,} \\ y = x \text{ の下を通るものの総数}\end{array}$$

全単射による証明

- 左辺 $=$ $(0,0)$ から $(n+1, n-1)$ へ至る格子道の総数

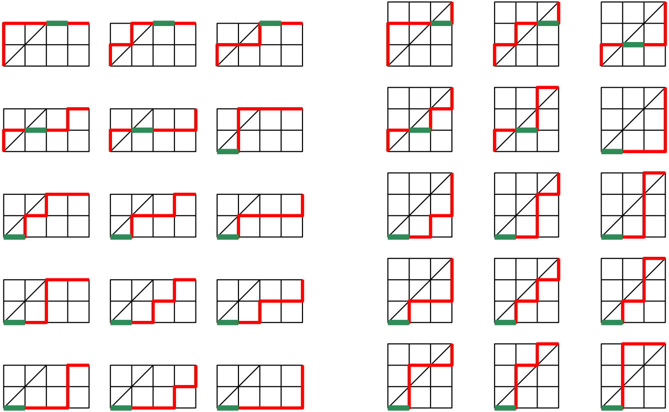




「アンドレの鏡映法」とも呼ばれる手法

アンドレの鏡映法：例

$n = 3$ のとき



カタラン数の一般項：組合せ的解釈

カタラン数の一般項を組合せ的に解釈できるか？

第 n カタラン数の一般項

任意の整数 $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

書き換えると，$(n+1)C_n = \binom{2n}{n}$

さらに書き換えると

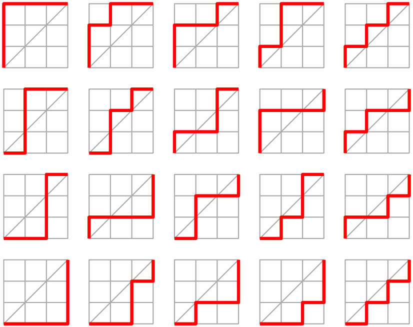
$$\sum_{k=0}^{n} C_n = \binom{2n}{n}$$

- 左辺と右辺は何を数えていて，なぜそれらが等しいのか？

チャン・フェラー性：例

右辺 $\binom{2n}{n}$ = $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の総数

$n = 3$

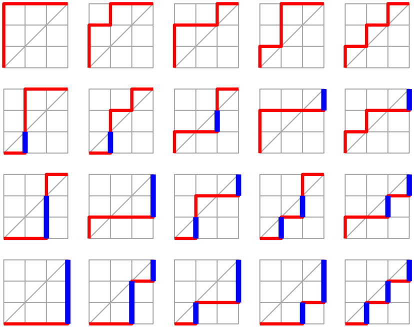


$k =$「対角線 $y = x$ より下の領域で上向きを選ぶ回数」

チャン・フェラー性：例

右辺 $\binom{2n}{n}$ = $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の総数

$n=3$



$k=0$

$k=1$

$k=2$

$k=3$

$k=$「対角線 $y=x$ より下の領域で上向きを選ぶ回数」

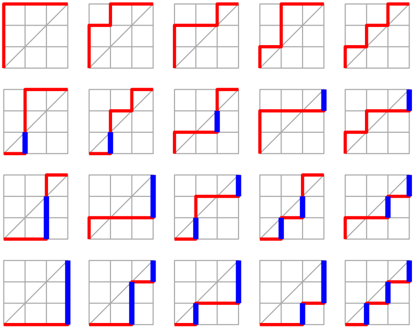
チャン・フェラー性

性質：チャン・フェラー性

整数 $n \geq 0$ と $0 \leq k \leq n$ に対して

$$C_n = \begin{cases} (0,0) \text{ から } (n,n) \text{ へ至る格子道で,} \\ y = x \text{ より下の領域で上向きを選ぶ回数が} \\ \text{ちょうど } k \text{ であるものの総数} \end{cases}$$

$n = 3$



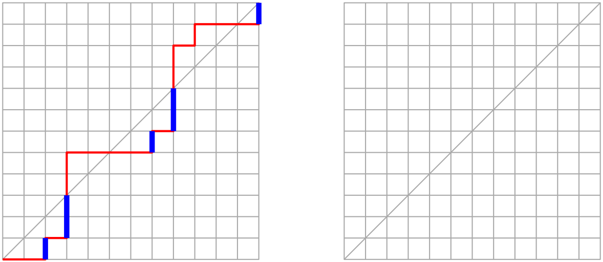
$k = 0$

$k = 1$

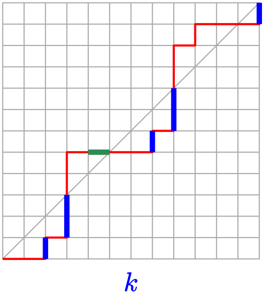
$k = 2$

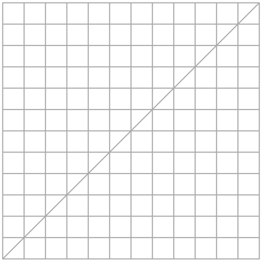
$k = 3$

チャン・フェラー性：証明 (1)



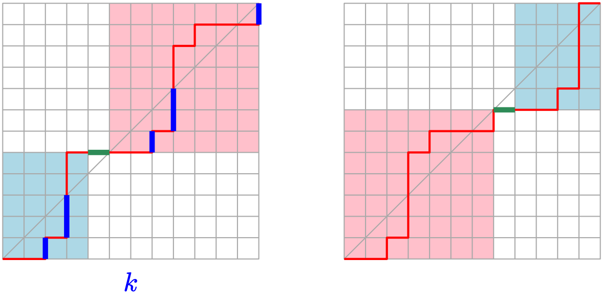
チャン・フェラー性：証明 (1)





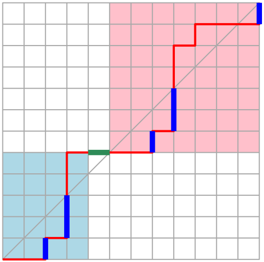
- 対角線の左から対角線に戻る最初のステップ に着目

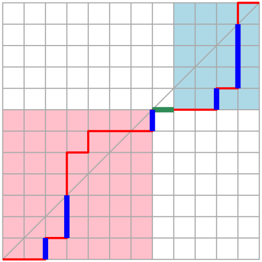
チャン・フェラー性：証明 (1)



- **対角線の左から対角線に戻る最初のステップ** に着目
- そこで分けて新たな格子道を作成 (どうやって？)

チャン・フェラー性：証明 (1)





- **対角線の左から対角線に戻る最初のステップ** に着目
- そこで分けて新たな格子道を作成　(どうやって？)
- 新たな格子道では，対角線の下で上向きを選ぶ回数が 1 だけ増加
- これは，
  対角線の下で上向きを選ぶ回数が k の格子道全体の集合から
  対角線の下で上向きを選ぶ回数が $k+1$ の格子道全体の集合への
  全単射!　(なぜ？)

チャン・フェラー性：証明 (2)

したがって，$(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道全体において

$$\begin{aligned} C_n &= \text{ディック道の総数} \\ &= \text{対角線の下で上向きを選ぶ回数が } 0 \text{ の格子道の総数} \end{aligned}$$

$\square$

チャン・フェラー性：証明 (2)

したがって，$(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道全体において

$$
\begin{aligned}
C_n &= \text{ディック道の総数} \\
&= \text{対角線の下で上向きを選ぶ回数が } 0 \text{ の格子道の総数} \\
&= \text{対角線の下で上向きを選ぶ回数が } 1 \text{ の格子道の総数} \\
&= \text{対角線の下で上向きを選ぶ回数が } 2 \text{ の格子道の総数} \\
&= \cdots \\
&= \text{対角線の下で上向きを選ぶ回数が } k \text{ の格子道の総数} \\
&= \cdots \\
&= \text{対角線の下で上向きを選ぶ回数が } n \text{ の格子道の総数} \qquad \square
\end{aligned}
$$

カタラン数の一般項：組合せ的解釈 (続き)

カタラン数の一般項を組合せ的に解釈できるか？

第 n カタラン数の一般項を書き換えたもの

$$\sum_{k=0}^{n} C_n = \binom{2n}{n}$$

- 右辺 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の総数
- 左辺の第 k 項 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道で対角線 $y=x$ の下で上向きを選ぶ回数が k であるものの総数　　($\because$ チャン・フェラー性)

$\therefore$ 左辺の総和は右辺の数える格子道を漏れなく，重複なく数えている $\square$

目次

今日の目標

今日の目標

カタラン数について，次ができるようになる

- 組合せ構造がカタラン数で数えられることを証明する
- カタラン数の一般項を母関数を用いて導出する
- カタラン数が満たす性質を導出する

目次