離散数理工学　第 3 回

数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2024 年 11 月 5 日

最終更新：2024 年 10 月 27 日　17:54

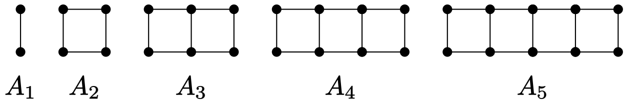
今日の目標

1. 漸化式を解けるようになる
   - 線形漸化式の解法
   - 上界の導出法
2. 数列の母関数が導出できる

目次

例：2 段の格子 — まとめ (第 2 回講義より)

$a_n =$ グラフ A_n における完全マッチングの総数　とするとき



漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

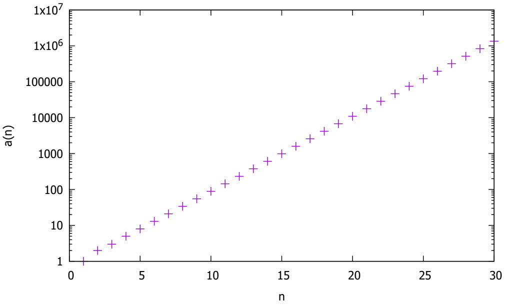
これを解いてみる

解く ＝ 一般項を閉じた形で書く

線形漸化式の解き方：探る

n	a_n
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987

片対数プロット



$\rightsquigarrow$ 指数関数的に増加する
(ある $\lambda > 0$ に対して λ^n の形？)

線形漸化式の解き方 (1)

1. a_n を λ^n で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

線形漸化式の解き方 (1)

1. a_n を λ^n で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

すなわち,

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

これを考えている漸化式の **特性方程式** と呼ぶ

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 \quad = \quad 0$$

線形漸化式の解き方 (1)

2. 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \quad \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \quad \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

この 2 つの解を λ_1, λ_2 と書くとする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (\approx -0.618), \qquad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\approx 1.618)$$

線形漸化式の解き方 (1)：考え方

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- つまり，$a_1 = 1$ と $a_2 = 2$ であることを忘れれば，$a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である

線形漸化式の解き方 (1)：考え方

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- つまり，$a_1 = 1$ と $a_2 = 2$ であることを忘れれば，$a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である
- このとき，線形結合 $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば，}\quad a_n &= c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \text{ であるので，} \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1}) + (c_1\lambda_1^{n-2} + c_2\lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1(\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2(\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (1)：考え方

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- つまり，$a_1 = 1$ と $a_2 = 2$ であることを忘れれば，$a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である
- このとき，線形結合 $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば，} \quad a_n &= c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \text{ であるので，} \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1}) + (c_1\lambda_1^{n-2} + c_2\lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1(\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2(\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \end{aligned}$$

- $a_1 = 1$ と $a_2 = 2$ を思い出すと，c_1, c_2 が定まる

線形漸化式の解き方 (1)

3. λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る
   - $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ とする

線形漸化式の解き方 (1)

3. λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

- $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ とする
- $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ なので,

$$\begin{aligned} 1 &= c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2, \\ 2 &= c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (1)

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

- $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ とする
- $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ なので,

$$\begin{aligned} 1 &= c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2, \\ 2 &= c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 \end{aligned}$$

- c_1, c_2 を変数として，これを解くと

$$c_1 = \frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, c_2 = \frac{2 - \lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

線形漸化式の解き方 (1)

4 整理する

- $c_1 = \dfrac{\lambda_2 - 2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$
- $c_2 = \dfrac{2 - \lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$

$\boxed{注}$: $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_1^2 = \lambda_1 + 1,\ \ \lambda_2^2 = \lambda_2 + 1,$
$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_1\lambda_2 = -1$

線形漸化式の解き方 (1)

4 整理する

- $c_1 = \dfrac{\lambda_2 - 2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$
- $c_2 = \dfrac{2 - \lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$

したがって，任意の整数 $n \geq 1$ に対して

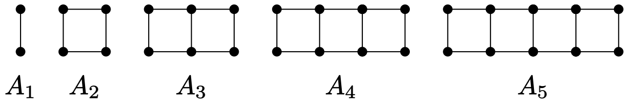
$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

となる

$\boxed{\text{注}}$: $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_1^2 = \lambda_1 + 1$, $\lambda_2^2 = \lambda_2 + 1$,
$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1\lambda_2 = -1$

例：2 段の格子 — まとめ (第 2 回講義より)

a_n = グラフ A_n における完全マッチングの総数　とするとき



漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを別の方法で解いてみる

解く = 一般項を閉じた形で書く

線形漸化式の解き方 (2)

1. 行列を用いて書き換える

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 3 \text{ のとき})$$

線形漸化式の解き方 (2)：一般論

次のように線形漸化式を書けたとする

$$x_1 = c, \quad x_n = Ax_{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

A は正方行列，$x_1, x_2, x_3, \ldots$ と c はベクトル

- このとき，
$$x_n = A^{n-1}x_1 = A^{n-1}c$$
- したがって，A^{n-1} が計算できればよい

線形漸化式の解き方 (2)

2 行列の累乗を計算する

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする

- A の固有値と固有ベクトルを計算する
- A の特性方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

- これを解くと，$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- これが A の固有値で，λ_1, λ_2 と書くことにする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

線形漸化式の解き方 (2)

λ_1 に対する A の固有ベクトルを $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)v_1 &= 0 \\ \therefore \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

したがって，$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は λ_1 に対する A の固有ベクトル

同様に，$v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は λ_2 に対する A の固有ベクトル

線形漸化式の解き方 (2)

これによって対角化：$U = (v_1 \ \ v_2), \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$AU = U\Lambda, \quad \text{すなわち,} \quad A = U\Lambda U^{-1}$$

- $A^n = (U\Lambda U^{-1})^n = U\Lambda^n U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} U^{-1}$
- $U = (v_1 \ \ v_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ なので，$U^{-1} = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって

$$
\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_2 \lambda_1^{n+1} + \lambda_1 \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_2 \lambda_1^n + \lambda_1 \lambda_2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

線形漸化式の解き方 (2)

3 まとめる

$n \geq 3$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & -\lambda_2\lambda_1^{n-1} + \lambda_1\lambda_2^{n-1} \\ \lambda_1^{n-2} - \lambda_2^{n-2} & -\lambda_2\lambda_1^{n-2} + \lambda_1\lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \dfrac{2-\lambda_2}{\lambda_1}\lambda_1^n + \dfrac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2}\lambda_2^n \\ \dfrac{2-\lambda_2}{\lambda_1}\lambda_1^{n-1} + \dfrac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2}\lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\lambda_1^n - \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\lambda_2^n \\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\lambda_1^{n-1} - \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって，$n \geq 3$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\lambda_1^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\lambda_2^n \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

となる ($n = 1, 2$ のときも，この式は正しい) $\square$

例：3 段の格子 (第 2 回講義より)

- $b_n =$ グラフ B_n における完全マッチングの総数
- $c_n =$ グラフ C_n における完全マッチングの総数　とするとき

漸化式

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ b_{n-2} + 2c_{n-1} & (n \geq 4,\text{ 偶数のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-2} & (n \geq 3,\text{ 奇数のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例：3 段の格子 — プログラム実行結果

n	b_n	c_n
1	0	1
2	3	0
3	0	4
4	11	0
5	0	15
6	41	0
7	0	56
8	153	0
9	0	209
10	571	0
11	0	780
12	2131	0
13	0	2911
14	7953	0
15	0	10864

n	b_n	c_n
16	29681	0
17	0	40545
18	110771	0
19	0	151316
20	413403	0
21	0	564719
22	1542841	0
23	0	2107560
24	5757961	0
25	0	7865521
26	21489003	0
27	0	29354524
28	80198051	0
29	0	109552575
30	299303201	0

例：3 段の格子 — 漸化式の書き換え (1)

- 整数 $k \geq 1$ に対して，次のように記号を定義

$$x_k = b_{2k}, \qquad y_k = c_{2k-1}$$

- ここで，$k \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} b_{2k} &= b_{2k-2} + 2c_{2k-1} \\ 2c_{2k-1} &= 2b_{2k-2} + 2c_{2k-3} \\ 2c_{2k-3} &= 2b_{2k-4} + 2c_{2k-5} \\ &\vdots \\ 2c_3 &= 2b_2 + 2c_1 \end{aligned}$$

- これらの式を足し合わせると，$k \geq 2$ のとき，次が得られる

$$b_{2k} = b_{2k-2} + 2\sum_{i=1}^{k-1} b_{2i} + 2c_1$$

例：3 段の格子 — 漸化式の書き換え (2)

- $\therefore\ k \geq 2$ のとき,

$$x_k = x_{k-1} + 2\sum_{i=1}^{k-1} x_i + 2$$

- $\therefore\ k \geq 3$ のとき,

$$x_{k-1} = x_{k-2} + 2\sum_{i=1}^{k-2} x_i + 2$$

- 上の式 から 下の式 を引くと，$k \geq 3$ のとき，次が得られる

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= x_{k-1} - x_{k-2} + 2x_{k-1} \\ \therefore \qquad x_k &= 4x_{k-1} - x_{k-2} \end{aligned}$$

例：3 段の格子 — 漸化式の書き換え (3)

$x_2 = b_4 = 11$ なので，x_k に関して次の漸化式が得られる

x_k の満たす漸化式

$$x_k = \begin{cases} 3 & (k = 1 \text{ のとき}) \\ 11 & (k = 2 \text{ のとき}) \\ 4x_{k-1} - x_{k-2} & (k \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

先ほどと同様の方法で解くと，次が得られる (演習問題)

$$k \geq 1 \text{ のとき,} \quad x_k = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^k + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^k$$

3 段の格子 — まとめ

漸化式

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ b_{n-2} + 2c_{n-1} & (n \geq 4,\text{ 偶数のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-2} & (n \geq 3,\text{ 奇数のとき}) \end{cases}$$

解くと次が得られる

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \geq 1,\text{ 奇数}) \\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^n + \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^n & (n \geq 2,\text{ 偶数}) \end{cases}$$

c_n については演習問題

目次

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
def fnct(n)
  print "a"
  if n > 2
    fnct(n-1)
    fnct(n-2)
  end
end
```

出力される a の数に対する漸化式

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここでは，簡単な上界を求めてみる
(計算量の解析において，欲しいものは上界 (で十分なこと) が多い)

線形漸化式から上界を導く

1. 定数項を取り除く

- 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1$$

-

線形漸化式から上界を導く

1. 定数項を取り除く

- 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

-

線形漸化式から上界を導く

1. 定数項を取り除く

- 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ここで，$f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

線形漸化式から上界を導く

1. 定数項を取り除く

- 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ここで，$f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- 帰結：f_n と f'_n のオーダーは同じ

線形漸化式から上界を導く

1 定数項を取り除く

- 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ここで，$f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- 帰結：f_n と f'_n のオーダーは同じ
- 注意：ここから f'_n を厳密に求めて，f_n を求めてもよいが，ここではそうしない

線形漸化式から上界を導く

2 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- 特性方程式：$\lambda^2 = \lambda + 1$

線形漸化式から上界を導く

2 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- 特性方程式：$\lambda^2 = \lambda + 1$
- この方程式はただ 1 つ正の解を持ち，それは

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である

ただ 1 つ正の解を持つことは，
例えば「デカルトの符号規則」から分かる

線形漸化式から上界を導く

3. 数学的帰納法で不等式を証明

ここで，次を証明する

任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$f'_n \leq 2\lambda^n$

証明：$n = 1$ のとき

- $f'_1 = 2$
- $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$
- したがって，$f'_1 < 2\lambda^1$ となる

線形漸化式から上界を導く

3. 数学的帰納法で不等式を証明

ここで，次を証明する

任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$f'_n \leq 2\lambda^n$

証明：$n = 1$ のとき

- $f'_1 = 2$
- $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$
- したがって，$f'_1 < 2\lambda^1$ となる

$n = 2$ のとき

- $f'_2 = 2$
- $2\lambda^2 > 2\lambda = 1 + \sqrt{5}$
- したがって，$f'_2 < 2\lambda^2$ となる

線形漸化式から上界を導く

証明の続き：整数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$

$$f'_{k+1} \quad = \quad f'_k + f'_{k-1} \qquad (f'_k \text{ の定義})$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き：整数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き：整数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$

$$
\begin{aligned}
f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\
&\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\
&= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理})
\end{aligned}
$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き：整数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$

$$
\begin{aligned}
f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\
&\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\
&= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\
&= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから})
\end{aligned}
$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き：整数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$

$$
\begin{aligned}
f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\
&\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\
&= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\
&= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\
&= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理})
\end{aligned}
$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き：整数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$

$$
\begin{aligned}
f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\
&\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\
&= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\
&= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\
&= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理})
\end{aligned}
$$

帰結

$$f_n = O(\lambda^n) = O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

オーダー記法：復習

O 記法の定義

非負の値を取る単調非減少数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ と $\{b_n\}_{n\geq 1}$ に対して,

$$a_n = O(b_n)$$

であるとは,
ある非負整数 n_0 と正の実数 C が存在して,
任意の整数 $n \geq n_0$ に対して

$$a_n \leq Cb_n$$

が成り立つこと

$a_n = O(b_n)$ であることの直感的な意味

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の増加率は数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ の増加率以下である

ユークリッドのアルゴリズムの計算量

漸化式

$$g_n \begin{cases} = 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$\boxed{\text{直感}}$：まずは g_n がどのように増加するか知る必要があるので，
それを探る

- 「$\leq$」を「$=$」に置き換える
- $n = 2^k$ の場合だけを考える ($n = 2^k$ のとき，$\lfloor n/2 \rfloor = 2^{k-1}$)

注：$g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$

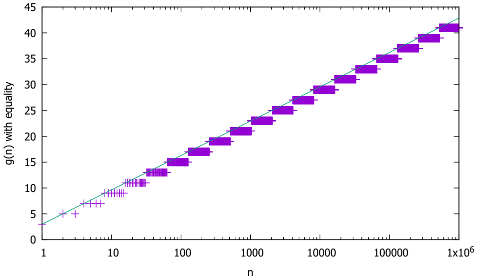
ユークリッドのアルゴリズムの計算量：探る

$g'_k = g_{2^k}$ と置き，「$\leq$」を「$=$」に置き換えると，次の漸化式が得られる

$$g'_k = \begin{cases} 3 & k = 0 \text{ のとき} \\ 2 + g'_{k-1} & k \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

- これは等差数列
- 任意の整数 $k \geq 0$ に対して，$g'_k = 3 + 2k$

つまり，g_n はだいたい $3 + 2\log_2 n$



証明すること

今から証明すること

任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$g_n \leq 3 + 2\log_2 n$

帰結

$g_n = O(\log n)$

証明すること

今から証明すること

任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$g_n \leq 3 + 2\log_2 n$

帰結

$g_n = O(\log n)$

証明：$n = 1$ のとき

- 漸化式より，$g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$
- $3 + 2\log_2 n = 3 + 2\log_2 1 = 3 + 0 = 3$
- したがって，左辺 $\leq$ 右辺

証明すること

今から証明すること

任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$g_n \leq 3 + 2\log_2 n$

証明の続き：任意の整数 $k \geq 1$ を考え，
任意の整数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2\log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2\log_2(k+1)$

$$g_{k+1} \quad \leq \quad 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \qquad (g_n \text{ の定義})$$

証明すること

今から証明すること

任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$g_n \leq 3 + 2\log_2 n$

証明の続き：任意の整数 $k \geq 1$ を考え，
任意の整数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2\log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2\log_2(k+1)$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\ &\leq 2 + 3 + 2\log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

証明すること

今から証明すること

任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$g_n \leq 3 + 2\log_2 n$

証明の続き：任意の整数 $k \geq 1$ を考え，
任意の整数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2\log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2\log_2(k+1)$

$$
\begin{aligned}
g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\
&\leq 2 + 3 + 2\log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\
&\leq 2 + 3 + 2\log_2((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す})
\end{aligned}
$$

証明すること

今から証明すること

任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$g_n \leq 3 + 2\log_2 n$

証明の続き：任意の整数 $k \geq 1$ を考え，
任意の整数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2\log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2\log_2(k+1)$

$$
\begin{aligned}
g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\
&\leq 2 + 3 + 2\log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\
&\leq 2 + 3 + 2\log_2((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\
&= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理})
\end{aligned}
$$

証明すること

今から証明すること

任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$g_n \leq 3 + 2\log_2 n$

証明の続き：任意の整数 $k \geq 1$ を考え，
任意の整数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2\log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2\log_2(k+1)$

$$
\begin{aligned}
g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\
&\leq 2 + 3 + 2\log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\
&\leq 2 + 3 + 2\log_2((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\
&= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理}) \\
&= 3 + 2\log_2(k+1) && (\text{整理})
\end{aligned}
$$

□

目次

数列の母関数

定義：母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の **母関数** とは次の冪級数のこと (x は複素数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ディジタル信号処理で「z 変換」と呼んでいるものと同じ

仮定

この冪級数は (絶対) 収束する

- 特に，ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- つまり，$|x| < r$ のとき，$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので，『微分積分学』，『解析学』，『複素関数論』の知識が使える

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

一般に，$a_n = \alpha^n$ で定められる数列の母関数は $\dfrac{1}{1-\alpha x}$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n =$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n\end{aligned}$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1) x^n$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1) x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$ とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)x^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$ とすると，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ の母関数は？

任意の整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$ とすると，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1) x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{2x+1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

目次

今日の目標

今日の目標

1. 漸化式を解けるようになる
   - 線形漸化式の解法
   - 上界の導出法
2. 数列の母関数が導出できる

目次